4ª edición

Tratamiento digital de señales

www.librosite.net/proakis

John G. Proakis
Dimitris G. Manolakis

PEARSON
Prentice Hall

TRATAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

TRATAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

Cuarta Edición

JOHN G. PROAKIS
Department of Electrical and Computer Engineering
Northeastern University
Boston, Massachusetts

DIMITRIS G. MANOLAKIS
MIT Lincoln Laboratory
Lexington, Massachusetts

Traducción
Vuelapluma

PEARSON
Prentice Hall

Madrid ● México ● Santa Fe de Bogotá ● Buenos Aires ● Caracas ● Lima
Montevideo ● San Juan ● San José ● Santiago ● São Paulo ● White Plains ●

Datos de catalogación bibliográfica

TRATAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

John G. Proakis y Dimitris G. Manolakis

PEARSON EDUCACIÓN S.A., Madrid, 2007

ISBN: 978-84-8322-347-5

Materia: Informática, 0004.4

Formato: 195 x 250 mm. Páginas: 996

Todos los derechos reservados.
Queda prohibida, salvo excepción prevista en la Ley, cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública y transformación de esta obra sin contar con autorización de los titulares de propiedad intelectual. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual *(arts. 270 y sgts. Código Penal).*

DERECHOS RESERVADOS
© 2007 por PEARSON EDUCACIÓN S.A.
Ribera del Loira, 28
28042 Madrid

TRATAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES
John G. Proakis y Dimitris G. Manolakis

ISBN: 978-84-8322-347-5

Deposito Legal:
PRENTICE HALL es un sello editorial autorizado de PEARSON EDUCACIÓN S.A.

Authorized translation from the English language edition, entitled DIGITAL SIGNAL PROCESSING, 4TH Edition by PROAKIS, JOHN G.; MANOLAKIS, DIMITRIS G., published by Pearson Education, Inc, publishing as Prentice Hall, Copyright © 2007

EQUIPO EDITORIAL
Editor: Miguel Martín-Romo
Técnico editorial: Marta Caicoya

EQUIPO DE PRODUCCIÓN:
Director: José A. Clares
Técnico: Diego Marín

Diseño de Cubierta: Equipo de diseño de Pearson Educación S.A.

Impreso por:

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

Este libro ha sido impreso con papel y tintas ecológicos

A Felia, George y Elena
−John G. Proakis

A Anna
−Dimitris Manolakis

Contenido

1 Introducción 1

1.1 **Señales, sistemas y tratamiento de señales 2**

1.1.1 Elementos básicos de un sistema de tratamiento digital de señales 4
1.1.2 Ventajas del tratamiento digital de señales sobre el analógico 5

1.2 **Clasificación de las señales 5**

1.2.1 Señales multicanal y multidimensionales 6
1.2.2 Señales continuas y discretas en el dominio del tiempo 8
1.2.3 Señales continuas y señales discretas 9
1.2.4 Señales deterministas y señales aleatorias 9

1.3 **Concepto de frecuencia en señales continuas \hfill y discretas en el tiempo 10**

1.3.1 Señales sinusoidales continuas en el tiempo 10
1.3.2 Señales sinusoidales discretas en el tiempo 12
1.3.3 Exponenciales complejas armónicamente relacionadas 15

1.4 **Conversiones analógica-digital y digital-analógica 17**

1.4.1 Muestreo de señales analógicas 18
1.4.2 Teorema de muestreo 23
1.4.3 Cuantificación de señales continuas en amplitud 27
1.4.4 Cuantificación de señales sinusoidales 29
1.4.5 Codificación de muestras cuantificadas 31
1.4.6 Conversión digital-analógica 31
1.4.7 Análisis de señales y sistemas digitales frente a señales y sistemas discretos en el tiempo 32

1.5 **Resumen y referencias 32**

Problemas 33

2 Señales y sistemas discretos en el tiempo 37

2.1 **Señales discretas en el tiempo 37**

2.1.1 Algunas señales discretas en el tiempo elementales 39
2.1.2 Clasificación de las señales discretas en el tiempo 41
2.1.3 Manipulaciones simples de las señales discretas en el tiempo 44

2.2 **Sistemas discretos en el tiempo 48**

2.2.1 Descripción de entrada-salida de los sistemas 49
2.2.2 Diagrama de bloques de los sistemas discretos en el tiempo 51
2.2.3 Clasificación de los sistemas discretos en el tiempo 53
2.2.4 Interconexión de sistemas discretos en el tiempo 61

2.3 Análisis de sistemas lineales discretos e invariantes en el tiempo 62
2.3.1 Técnicas para el análisis de los sistemas lineales 62
2.3.2 Descomposición en impulsos de una señal discreta en el tiempo 64
2.3.3 Respuesta de los sistemas LTI a entradas arbitrarias: la convolución 65
2.3.4 Propiedades de la convolución y la interconexión de sistemas LTI 71
2.3.5 Sistemas lineales invariantes en el tiempo causales 74
2.3.6 Estabilidad de los sistemas lineales invariantes en el tiempo 76
2.3.7 Sistemas con respuestas al impulso de duración finita e infinita 79
2.4 Sistemas discretos en el tiempo descritos mediante ecuaciones en diferencias 79
2.4.1 Sistemas discretos en el tiempo recursivos y no recursivos 80
2.4.2 Sistemas lineales invariantes en el tiempo caracterizados por ecuaciones en diferencias de coeficientes constantes 83
2.4.3 Solución de las ecuaciones en diferencias lineales de coeficientes constantes 87
2.4.4 Respuesta al impulso de un sistema recursivo, lineal e invariante en el tiempo . . .94
2.5 Implementación de sistemas discretos en el tiempo 96
2.5.1 Estructuras para la realización de sistemas lineales invariantes en el tiempo 97
2.5.2 Realización de sistemas FIR recursivos y no recursivos 100
2.6 Correlación de señales discretas en el tiempo 103
2.6.1 Secuencias de correlación cruzada y autocorrelación 104
2.6.2 Propiedades de la autocorrelación y de la correlación cruzada 106
2.6.3 Correlación de secuencias periódicas 109
2.6.4 Secuencias de correlación de entrada-salida 112
2.7 Resumen y referencias 113
Problemas 114

3 La transformada *z* y sus aplicaciones al análisis de los sistemas LTI 131

3.1 La transformada *z* 131
3.1.1 La transformada *z* directa 132
3.1.2 La transformada *z* inversa 138
3.2 Propiedades de la transformada *z* 140
3.3 Transformadas *z* racionales 152
3.3.1 Polos y ceros 152
3.3.2 Posición de los polos y comportamiento en el dominio del tiempo de señales causales 155
3.3.3 Función de transferencia de un sistema lineal invariante en el tiempo 158
3.4 Inversión de la transformada *z* 161
3.4.1 Transformada *z* inversa por integración de contorno 161
3.4.2 Transformada *z* inversa mediante expansión en serie de potencias 163
3.4.3 Transformada *z* inversa mediante expansión en fracciones parciales 165
3.4.4 Descomposición de las transformadas *z* racionales 172
3.5 Análisis en el dominio *z* de sistemas LTI 173
3.5.1 Respuesta de sistemas con funciones de transferencia racionales 173
3.5.2 Respuestas transitoria y en régimen permanente 174
3.5.3 Causalidad y estabilidad 176

3.5.4 Cancelaciones polo-cero 177
3.5.5 Polos de orden múltiple y estabilidad 179
3.5.6 Estabilidad de los sistemas de segundo orden 180

3.6 Transformada *z* unilateral 183

3.6.1 Definición y propiedades 184
3.6.2 Solución de las ecuaciones en diferencias 188
3.6.3 Respuesta de los sistemas de polos y ceros con condiciones iniciales distintas de cero 189

3.7 Resumen y referencias 191

Problemas 192

4 Análisis en frecuencia de señales 203

4.1 Análisis en frecuencia de las señales continuas en el tiempo 203

4.1.1 Series de Fourier para señales periódicas continuas en el tiempo 205
4.1.2 Espectro de densidad de potencia de señales periódicas 208
4.1.3 Transformada de Fourier de señales aperiódicas continuas en el tiempo 211
4.1.4 Espectro de densidad de energía de señales aperiódicas 215

4.2 Análisis en frecuencia de señales discretas en el tiempo 218

4.2.1 Serie de Fourier para señales periódicas discretas en el tiempo 218
4.2.2 Espectro de densidad de potencia de señales periódicas 221
4.2.3 Transformada de Fourier de señales aperiódicas discretas en el tiempo 224
4.2.4 Convergencia de la transformada de Fourier 226
4.2.5 Espectro de densidad de energía de señales aperiódicas 229
4.2.6 Relaciones entre la transformada de Fourier y la transformada *z* 233
4.2.7 El Cepstro 235
4.2.8 Transformada de Fourier de señales con polos en la circunferencia unidad 236
4.2.9 Clasificación de las señales en el dominio de la frecuencia: concepto de ancho de banda 238
4.2.10 Rangos de frecuencia de algunas señales naturales 240

4.3 Propiedades de la señal en los dominios de la frecuencia y del tiempo 241

4.4 Propiedades de la transformada de Fourier para señales discretas en el tiempo 244

4.4.1 Propiedades de simetría de la transformada de Fourier 245
4.4.2 Propiedades y teoremas de la transformada de Fourier 252

4.5 Resumen y referencias 260

Problemas 261

5 Análisis en el dominio de la frecuencia de sistemas LTI 269

5.1 Características en el dominio de la frecuencia de los sistemas LTI 269

5.1.1 Respuesta a señales sinusoidales y exponenciales complejas: función de respuesta en frecuencia 270
5.1.2 Respuestas en régimen permanente y transitoria a señales de entrada sinusoidales 277
5.1.3 Respuesta en régimen permanente a señales de entrada periódicas 278
5.1.4 Respuesta a señales de entrada aperiódicas 279

5.2 Respuesta en frecuencia de los sistemas LTI 281
5.2.1 Respuesta en frecuencia de un sistema definido mediante una función racional . 281
5.2.2 Cálculo de la respuesta en frecuencia 284
5.3 Espectros y funciones de correlación en la salida de los sistemas LTI 288
5.3.1 Espectros y funciones de correlación de entrada-salida 288
5.3.2 Funciones de correlación y espectros de potencia de señales de entrada aleatorias 289
5.4 Sistemas LTI como filtros selectivos de frecuencia 291
5.4.1 Características del filtro ideal 292
5.4.2 Filtros paso bajo, paso alto y paso banda 294
5.4.3 Resonadores digitales 299
5.4.4 Filtros de hendidura 302
5.4.5 Filtros peine 304
5.4.6 Filtros paso todo 308
5.4.7 Osciladores sinusoidales digitales 310
5.5 Sistemas inversos y deconvolución 312
5.5.1 Invertibilidad de los sistemas LTI 313
5.5.2 Sistemas de fase mínima, fase máxima y fase mixta 316
5.5.3 Identificación del sistema y deconvolución 320
5.5.4 Deconvolución homomórfica 322
5.6 Resumen y referencias 323
Problemas 324

6 Muestreo y reconstrucción de señales 344
6.1 Muestreo y reconstrucción ideales de señales continuas en el tiempo 344
6.2 Tratamiento discreto en el tiempo de señales continuas en el tiempo 353
6.3 Convertidores analógico-digital y digital-analógico 359
6.3.1 Convertidores analógico-digitales 360
6.3.2 Cuantificación y codificación 361
6.3.3 Análisis de los errores de cuantificación 364
6.3.4 Convertidores digitales-analógicos 366
6.4 Muestreo y reconstrucción de señales paso banda continuas en el tiempo 368
6.4.1 Muestreo uniforme o de primer orden 368
6.4.2 Muestreo intercalado o no uniforme de segundo orden 374
6.4.3 Representaciones de señales paso banda 379
6.4.4 Muestreo empleando las representaciones de la señal paso banda 381
6.5 Muestreo de señales discretas en el tiempo 382
6.5.1 Muestreo e interpolación de señales discretas en el tiempo 383
6.5.2 Representación y muestreo de señales paso banda discretas en el tiempo 387
6.6 Convertidores A/D y D/A con sobremuestreo 388
6.6.1 Convertidores A/D con sobremuestreo 388
6.6.2 Convertidores D/A con sobremuestreo 393
6.7 Resumen y referencias 394
Problemas 395

7 Transformada discreta de Fourier: propiedades y aplicaciones 403

7.1 Muestreo en el dominio de la frecuencia: la transformada discreta de Fourier 403

7.1.1 Muestreo en el dominio de la frecuencia y reconstrucción de señales discretas en el tiempo 403
7.1.2 Transformada discreta de Fourier (DFT) 409
7.1.3 La DFT como una transformación lineal 411
7.1.4 Relación de la DFT con otras transformadas 414

7.2 Propiedades de la DFT 416

7.2.1 Propiedades de periodicidad, linealidad y simetría 416
7.2.2 Multiplicación de dos DFT y convolución circular 421
7.2.3 Propiedades adicionales de la DFT 426

7.3 Métodos de filtrado lineal basados en la DFT 430

7.3.1 Uso de la DFT en el filtrado lineal 430
7.3.2 Filtrado de secuencias de datos largas 434

7.4 Análisis en frecuencia de señales utilizando la DFT 436

7.5 Transformada discreta del coseno 443

7.5.1 DCT directa 443
7.5.2 DCT inversa 444
7.5.3 La DCT como transformada ortogonal 445

7.6 Resumen y referencias 449

Problemas 449

8 Cálculo eficiente de la DFT: algoritmos de la transformada rápida de Fourier . .458

8.1 Cálculo eficiente de la DFT: algoritmos FFT 458

8.1.1 Cálculo directo de la DFT 459
8.1.2 Método divide y vencerás para calcular la DFT 460
8.1.3 Algoritmos FFT base 2 465
8.1.4 Algoritmos FFT base 4 472
8.1.5 Algoritmos FFT de base dividida 477
8.1.6 Implementación de los algoritmos FFT 480

8.2 Aplicaciones de los algoritmos FFT 481

8.2.1 Cálculo eficiente de la DFT de dos secuencias reales 481
8.2.2 Cálculo eficiente de la DFT de una secuencia real de 2 *N* puntos 482
8.2.3 Uso de los algoritmos FFT en el filtrado lineal y la correlación 483

8.3 Método de filtrado lineal para calcular la DFT 485

8.3.1 Algoritmo de Goertzel 485
8.3.2 Algoritmo de la transformada *z chirp* 487

8.4 Efectos de cuantificación en el cálculo de la DFT 491

8.4.1 Efectos de cuantificación en el cálculo directo de la DFT 491
8.4.2 Errores de cuantificación en los algoritmos FFT 493

8.5 Resumen y referencias 496

Problemas 497

9 Implementación de sistemas discretos en el tiempo 503

9.1 Estructuras para la realización de sistemas discretos del tiempo 503

9.2 Estructuras para sistemas FIR 505

9.2.1 Estructura de la forma directa 506
9.2.2 Estructuras en cascada 506
9.2.3 Estructuras basadas en el muestreo en frecuencia 508
9.2.4 Estructura en celosía 513

9.3 Estructuras para sistemas IIR 520

9.3.1 Estructuras en forma directa 520
9.3.2 Diagramas de flujo de señales y estructuras transpuestas 522
9.3.3 Estructuras en cascada 527
9.3.4 Estructuras en paralelo 528
9.3.5 Estructuras en celosía y en celosía-escalera para sistemas IIR 531

9.4 Representación de números 537

9.4.1 Representación de números en punto fijo 537
9.4.2 Representación de números en punto flotante binario 540
9.4.3 Errores debidos al redondeo y el truncamiento 543

9.5 Cuantificación de los coeficientes del filtro 546

9.5.1 Análisis de la sensibilidad en la cuantificación de los coeficientes del filtro 547
9.5.2 Cuantificación de los filtros FIR 554

9.6 Efectos del redondeo en los filtros digitales 557

9.6.1 Oscilaciones de ciclo límite en sistemas recursivos 558
9.6.2 Cambio de escala para impedir el desbordamiento 562
9.6.3 Caracterización estadística de los efectos de cuantificación en las realizaciones de punto fijo de filtros digitales 564

9.7 Resumen y referencias 571

Problemas 572

10 Diseño de filtros digitales 584

10.1 Consideraciones generales 584

10.1.1 La causalidad y sus implicaciones 585
10.1.2 Características de los filtros prácticos selectivos en frecuencia 588

10.2 Diseño de filtros FIR 589

10.2.1 Filtros FIR simétricos y antisimétricos 589
10.2.2 Diseño de filtros FIR de fase lineal utilizando ventanas 592
10.2.3 Diseño de filtros FIR de fase lineal mediante el método basado en el muestreo en frecuencia 598
10.2.4 Diseño de filtros FIR de fase lineal con rizado constante óptimo 605
10.2.5 Diseño de diferenciadores FIR 616
10.2.6 Diseño de transformadores de Hilbert 619
10.2.7 Comparación de los métodos de diseño de los filtros FIR de fase lineal 623

10.3 Diseño de filtros IIR a partir de filtros analógicos 625

10.3.1 Diseño de filtros IIR mediante aproximación de derivadas 626

10.3.2 Diseño de filtros IIR basado en la invarianza del impulso 630
10.3.3 Diseño de filtros IIR mediante la transformación bilineal 635
10.3.4 Características de los filtros analógicos más comúnmente utilizados 638
10.3.5 Algunos ejemplos de diseños de filtros digitales basados en la transformación bilineal 647

10.4 Transformaciones en frecuencia 648

10.4.1 Transformaciones de frecuencia en el dominio analógico 649
10.4.2 Transformaciones de frecuencia en el dominio digital 652

10.5 Resumen y referencias 654

Problemas 655

11 Tratamiento digital de señales de tasa múltiple 669

11.1 Introducción 670

11.2 Diezmado por un factor *D* 673

11.3 Interpolación por un factor *I* 677

11.4 Conversión de la frecuencia de muestreo por un factor racional *I/D* 680

11.5 Implementación de la conversión de la frecuencia de muestreo 683

11.5.1 Estructuras de los filtros polifásicos 684
11.5.2 Intercambio de filtros y submuestreadores/sobremuestreadores 685
11.5.3 Conversión de la frecuencia de muestreo mediante filtros peine con integrador conectado en cascada 686
11.5.4 Estructuras polifásicas para filtros de diezmado e interpolación 688
11.5.5 Estructuras para la conversión de la frecuencia de muestreo racional 690

11.6 Implementación multietapa de la conversión de la frecuencia de muestreo 692

11.7 Conversión de la frecuencia de muestreo de señales paso banda 696

11.8 Conversión de la frecuencia de muestreo por un factor arbitrario 696

11.8.1 Remuestreo arbitrario con interpoladores polifásicos 698
11.8.2 Remuestreo arbitrario con estructuras de filtros Farrow 698

11.9 Aplicaciones del tratamiento multitasa de señales 700

11.9.1 Diseño de desplazadores de fase 700
11.9.2 Interfaz de sistemas digitales con diferentes frecuencias de muestreo 701
11.9.3 Implementación de filtros paso bajo de banda estrecha 702
11.9.4 Codificación subbanda de señales de voz 703

11.10 Bancos de filtros digitales 705

11.10.1 Estructuras polifásicas de bancos de filtros uniformes 709
11.10.2 Transmultiplexores 711

11.11 Banco de filtros espejo en cuadratura de dos canales 711

11.11.1 Eliminación del *aliasing* 713
11.11.2 Condición para una reconstrucción perfecta 715
11.11.3 Forma polifásica del banco de filtros QMF 715
11.11.4 Banco de filtros FIR QMF de fase lineal 715
11.11.5 Banco de filtros IIR QMF 717

11.11.6 Reconstrucción perfecta de bancos de filtros FIR QMF de dos canales 717
11.11.7 Bancos de filtros QMF de dos canales con codificación subbanda 718

11.12 Banco de filtros QMF de *M* canales 719

11.12.1 Condiciones para reconstrucción perfecta y eliminación del *aliasing* 721
11.12.2 Forma polifásica del banco de filtros QMF de *M* canales 721

11.13 Resumen y referencias 726

Problemas 726

12 Predicción lineal y filtros lineales óptimos 735

12.1 Señales aleatorias, funciones de correlación y espectros de potencia 735

12.1.1 Procesos aleatorios 736
12.1.2 Procesos aleatorios estacionarios 737
12.1.3 Promedios estadísticos 737
12.1.4 Promedios estadísticos para procesos aleatorios conjuntos 738
12.1.5 Espectro de densidad de potencia 739
12.1.6 Señales aleatorias discretas en el tiempo 740
12.1.7 Promedios temporales para un proceso aleatorio discreto en el tiempo 741
12.1.8 Procesos ergódicos respecto de la media 742
12.1.9 Procesos ergódicos respecto de la correlación 743

12.2 Representación de innovaciones de un proceso aleatorio estacionario 744

12.2.1 Espectros de potencia racionales 746
12.2.2 Relaciones entre los parámetros del filtro y la autocorrelación 747

12.3 Predicción lineal directa e inversa 748

12.3.1 Predicción lineal directa 748
12.3.2 Predicción lineal inversa 751
12.3.3 Coeficientes de reflexión óptimos para los predictores en celosía directo e inverso 753
12.3.4 Relación entre un proceso auto-regresivo y la predicción lineal 754

12.4 Solución de las ecuaciones normales 754

12.4.1 Algoritmo de Levinson-Durbin 755
12.4.2 El algoritmo de Schur 758

12.5 Propiedades de los filtros lineales de error de predicción 762

12.6 Filtros auto-regresivos en celosía y auto-regresivos de media móvil en celosía-escalera 765

12.6.1 Estructura auto-regresiva en celosía 766
12.6.2 Procesos auto-regresivos de media móvil y filtros en celosía-escalera 767

12.7 Filtros de Wiener para filtrado y predicción 769

12.7.1 Filtro FIR de Wiener 770
12.7.2 Principio de ortogonalidad en la estimación lineal por mínimos cuadrados 772
12.7.3 Filtro IIR de Wiener 773
12.7.4 Filtro de Wiener no causal 777

12.8 Resumen y referencias 778

Problemas 779

13 Filtros adaptativos 785

13.1 Aplicaciones de los filtros adaptativos 785

13.1.1 Identificación del sistema o modelado del sistema 787
13.1.2 Ecualización de canal adaptativa 787
13.1.3 Cancelación de eco en la transmisión de datos a través de canales telefónicos . . 791
13.1.4 Supresión de interferencias de banda estrecha en una señal de banda ancha 794
13.1.5 Mejorador de línea adaptativo 798
13.1.6 Cancelación de ruido adaptativa 799
13.1.7 Codificación lineal predictiva de señales de voz 799
13.1.8 Matrices adaptativas 802

13.2 Filtros FIR adaptativos en forma directa: el algoritmo LMS 804

13.2.1 Criterio del error cuadrático medio mínimo 805
13.2.2 El algoritmo LMS 807
13.2.3 Algoritmos estocásticos de gradiente 808
13.2.4 Propiedades del algoritmo LMS 810

13.3 Filtros adaptativos en la forma directa: algoritmos RLS 816

13.3.1 Algoritmo RLS 816
13.3.2 Algoritmos de factorización LDU y de raíz cuadrada 820
13.3.3 Algoritmos RLS rápidos 821
13.3.4 Propiedades de los algoritmos RLS para la forma directa 823

13.4 Filtros adaptativos en celosía-escalera 825

13.4.1 Algoritmos recursivos de mínimos cuadrados en celosía-escalera 825
13.4.2 Otros algoritmos en celosía 843
13.4.3 Propiedades de los algoritmos en celosía-escalera 846

13.5 Resumen y referencias 849

Problemas 850

14 Estimación del espectro de potencia 855

14.1 Estimación de los espectros procedentes de observaciones de duración finita de señales . 855

14.1.1 Cálculo del espectro de densidad de energía 856
14.1.2 Estimación de la autocorrelación y del espectro de potencia de señales aleatorias: el periodograma 860
14.1.3 Uso de la DFT en la estimación del espectro de potencia 864

14.2 Métodos no paramétricos para la estimación del espectro de potencia 866

14.2.1 El método de Bartlett: promediado de periodogramas 867
14.2.2 Método de Welch: promediado de periodogramas modificados 868
14.2.3 Método de Blackman y Tukey: suavizado del periodograma 870
14.2.4 Prestaciones de los estimadores no paramétricos del espectro de potencia 872
14.2.5 Requisitos de cálculo de los estimados no paramétricos del espectro de potencia 875

14.3 Métodos paramétricos para la estimación del espectro de potencia 876

14.3.1 Relaciones entre la autocorrelación y los parámetros del modelo 878
14.3.2 Método de Yule-Walker para los parámetros del modelo AR 880
14.3.3 Método de Burg para los parámetros del modelo AR 880

14.3.4 Método de mínimos cuadrados no restringido para los parámetros del modelo AR 883
14.3.5 Métodos de estimación secuenciales para los parámetros del modelo AR 884
14.3.6 Selección del orden del modelo 885
14.3.7 Modelo MA para la estimación del espectro de potencia 886
14.3.8 Modelo ARMA para la estimación del espectro de potencia 888
14.3.9 Resultados experimentales 889

14.4 Métodos basados en bancos de filtros 895

14.4.1 Realización mediante banco de filtros del periodograma 896
14.4.2 Estimados espectrales de varianza mínima 899

14.5 Algoritmos de autoanálisis para la estimación del espectro 902

14.5.1 Método de descomposición armónica de Pisarenko 903
14.5.2 Autodescomposición de la matriz de autocorrelación para sinusoides en ruido blanco 905
14.5.3 Algoritmo MUSIC 907
14.5.4 Algoritmo ESPRIT 908
14.5.5 Criterios de selección del orden 911
14.5.6 Resultados experimentales 911

14.6 Resumen y referencias 914

Problemas 915

A Generadores de números aleatorios 925

B Tablas de los coeficientes de transición para el diseño de filtros FIR de fase lineal 931

Referencias y bibliografía 937

Respuestas a los problemas seleccionados 956

Índice 967

Prefacio

El desarrollo de este libro está basado en nuestra experiencia en la impartición de cursos a estudiantes preuniversitarios y universitarios sobre el tratamiento digital de la señal a lo largo de los últimos años. En el libro se presentan los fundamentos de los sistemas y señales discretas en el tiempo y el procesamiento digital, así como aplicaciones para los estudiantes de Ingeniería eléctrica, Ingeniería Informática y Ciencias de la Computación. El libro es adecuado para cursos de uno o dos semestres de duración sobre sistemas discretos y tratamiento digital de señales. También es adecuado para un curso sobre tratamiento digital de señales de un semestre destinado a estudiantes universitarios de primer año.

Se supone que el estudiante ha seguido cursos sobre Cálculo avanzado (incluyendo ecuaciones diferenciales normales) y Sistemas lineales para señales continuas en el tiempo, incluyendo una introducción a la transformada de Laplace. Aunque en el Capítulo 4 se describen las series de Fourier y las transformadas de Fourier de señales periódicas y aperiódicas, lo mejor es que los estudiantes hayan adquirido estos conocimientos en un curso anterior.

El libro incluye información teórica, así como aplicaciones prácticas. Se proporcionan numerosos problemas bien diseñados, con el fin de ayudar al estudiante a dominar los temas. Hay disponible un manual de soluciones que sólo los profesores pueden descargar. También en el sitio web del editor hay disponibles (en inglés) una serie de presentaciones en Microsoft PowerPoint para los profesores.

En la cuarta edición del libro, hemos añadido un nuevo capítulo sobre filtros adaptativos. Los capítulos dedicados al tratamiento de señales multitasa y al muestreo y reconstrucción de señales se han modificado y actualizado sustancialmente. También hemos añadido material sobre la transformada discreta del coseno.

En el Capítulo 1 se describen las operaciones implicadas en la conversión analógico-digital de señales analógicas. El proceso de muestreo de una sinusoide se ha descrito en detalle, asimismo, se explica el problema del *aliasing*. La cuantificación de señales y la conversión digital-analógica también se explican en términos generales, aunque el análisis se aborda en capítulos posteriores.

El Capítulo 2 está dedicado por completo a la caracterización y el análisis en el dominio del tiempo de los sistemas lineales discretos en el tiempo e invariantes en el tiempo (e invariantes en el desplazamiento) y de las señales discretas en el tiempo. Se deduce la operación de convolución y los sistemas se clasifican de acuerdo con la duración de su respuesta al impulso como FIR (*finite-duration impulse response*, respuesta al impulso de duración finita) y como IIR (*infinite-duration impulse response*, respuesta al impulso de duración infinita). Se presentan los sistemas invariantes en el tiempo caracterizados por ecuaciones en diferencias y se obtiene la solución de las ecuaciones en diferencias con condiciones iniciales. El capítulo concluye con un tratamiento de la correlación discreta en el tiempo.

La transformada z se introduce en el Capítulo 3. Se presentan las transformadas z unilateral y bilateral, y los métodos para determinar la transformada z inversa. Se ilustra el uso de la transformada z en el análisis de los sistemas lineales invariantes en el tiempo e importantes propiedades de sistemas, tales como la causalidad y la estabilidad se relacionan con las características en el dominio z.

El Capítulo 4 se ocupa del análisis de las señales en el dominio de la frecuencia. Se presentan la serie de Fourier y la transformada de Fourier tanto para señales continuas en el tiempo como discretas en el tiempo.

En el Capítulo 5, se caracterizan los sistemas discretos LTI (*linear time-invariant*, lineal invariante en el tiempo) en el dominio de la frecuencia mediante su respuesta en frecuencia y se determina su respuesta a señales periódicas y aperiódicas. Se describen una serie de sistemas discretos en el tiempo, entre los que se incluyen resonadores, filtros de hendidura, filtros paso todo y osciladores. También se considera el diseño de una serie de filtros FIR e IIR simples. Además, se hace una introducción a los conceptos de sistemas de fase mínima, fase mixta y fase máxima, y al problema de la deconvolución.

En el Capítulo 6 se hace un estudio del muestreo de señales continuas en el tiempo y la reconstrucción de señales a partir de sus muestras. Se cubre el muestreo y reconstrucción de señales paso banda, el muestreo de señales discretas en el tiempo y la conversión A/D y D/A. El capítulo concluye con los convertidores A/D y D/A con sobremuestreo.

La DFT, sus propiedades y aplicaciones, son los temas que se tratan en el Capítulo 7. Se describen dos métodos para utilizar la DFT en los procesos de filtrado lineal. También se describe el uso de la DFT para llevar a cabo el análisis en frecuencia. El último tema que se aborda en este capítulo es la transformada discreta del coseno.

El Capítulo 8 trata el cálculo efectivo de la DFT. En este capítulo se incluyen descripciones de los algoritmos FFT (*fast Fourier transform*, transformada rápida de Fourier) en base 2, base 4 y de base dividida, y las aplicaciones de los algoritmos FFT al cálculo de la convolución y la correlación. Se presentan el algoritmo de Goertzel y la transformada *chirp-z* como dos métodos de cálculo de la DFT utilizando filtrado lineal.

El Capítulo 9 se ocupa de la realización de los sistemas IIR yFIR. Se abordan las realizaciones en la forma directa, en cascada, paralelo, en celosía y en celosía-escalera. El capítulo también examina los efectos de cuantificación sobre una implementación digital de sistemas FIR e IIR.

En el Capítulo 10 se presentan técnicas para el diseño de filtros digitales FIR e IIR. Las técnicas de diseño incluyen tanto métodos directos en tiempo discreto como métodos que implican la conversión de filtros analógicos en filtros digitales mediante varias transformaciones.

El Capítulo 11 se ocupa de la conversión de la frecuencia de muestreo y sus aplicaciones al tratamiento multitasa digital de señales. Además de describir el diezmado y la interpolación por un entero y por factores racionales, se presentan métodos para la conversión de la frecuencia de muestreo por un factor arbitrario e implementaciones mediante estructuras de filtros polifásicos. Este capítulo también se ocupa de los bancos de filtros digitales, los filtros QMF (*quadrature mirror filters*, filtros espejo en cuadratura) de dos canales y los bancos QMF de M canales.

Los filtros de predicción lineal y de Wiener se tratan en el Capítulo 12. En este mismo capítulo también se incluyen descripciones del algoritmo de Levinson-Durbin y del algoritmo de Schur para resolver ecuaciones normales, así como los filtros AR en celosía y ARMA en celosía-escalera.

El Capítulo 13 se ocupa de los filtros adaptativos de un único canal basados en el algoritmo LMS y en los algoritmos recursivos de mínimos cuadrados RLS (*recursive least squares*). Se describen los algoritmos FIR en la forma directa y RLS en celosía para las estructuras de los filtros.

El tema principal del Capítulo 14 es la estimación del espectro de potencia. La exposición cubre una descripción de los métodos no paramétricos y basados en modelos (paramétricos). También se describen los métodos basados en la auto-descomposición, incluyendo MUSIC y ESPRIT.

En un curso avanzado de un semestre para estudiantes con conocimientos previos sobre sistemas discretos pueden utilizarse los Capítulos 1 hasta 5 para realizar un rápido repaso y luego continuar con los Capítulos 6 hasta 10.

En un primer curso universitario sobre tratamiento digital de la señal, los primeros seis capítulos proporcionarán al estudiante un buen repaso sobre los sistemas discretos. El profesor puede ver rápidamente estos temas y luego ver en detalle los Capítulos 7 hasta 11, para seguir con temas seleccionados de los Capítulos 12 hasta 14.

Se incluyen muchos ejemplos a lo largo del libro y aproximadamente 500 problemas que el estudiante puede realizar en casa. Al final del libro se incluyen las respuestas a problemas seleccionados. Muchos de los problemas pueden resolverse numéricamente utilizando una computadora, con un paquete software como por ejemplo MATLAB®. Hay disponible también (en inglés) un manual del estudiante: *Student Manual for Digital Signal Processing with MATLAB®*.

MATLAB se incluye como herramienta software básica para este manual. El profesor puede considerar también utilizar otros libros complementarios que contengan ejercicios basados en computadora, como por ejemplo, *Computer-Based Exercises for Signal Processing Using MATLAB* (Prentice Hall, 1994) de C. S. Burrus *et al*.

Los autores están en deuda con los colegas que les han proporcionado valiosas sugerencias después de haber revisado las ediciones anteriores de este libro. Entre ellos queremos mencionar a W. E. Alexander, G. Arslan, Y. Bresler, J. Deller, F. DePiero, V. Ingle, J.S. Kang, C. Keller, H. Lev-Ari, L. Merakos, W. Mikhael, P. Monticciolo, C. Nikias, M. Schetzen, E. Serpedin, T. M. Sullivan, H. Trussell, S. Wilson y M. Zoltowski. También quieren expresar su agradecimiento a R. Price por su recomendación de incluir los algoritmos FFT de base dividida y otras sugerencias relacionadas. Por último, deseamos expresar nuestro reconocimiento a muchos estudiantes licenciados por sus sugerencias y comentarios, en especial a A. L. Kok, J. Lin, E. Sozer y S. Srinidhi, que ayudaron en la preparación de diversas ilustraciones y del manual de soluciones.

John G. Proakis
Dimitris G. Manolakis

1

Introducción

El tratamiento digital de señales es un área de la ciencia y la ingeniería que se ha desarrollado muy rápidamente a lo largo de los últimos cuarenta años. Este rápido desarrollo es el resultado de los importantes avances tanto en la tecnología digital en el campo de la informática como en la fabricación de los circuitos integrados. Las computadoras digitales y el hardware digital asociado de hace cuatro décadas eran de tamaño relativamente grande, además de muy caros y, en consecuencia, su uso estaba limitado a las aplicaciones de propósito general en tiempo no real (fuera de línea) científicos y comerciales. El rápido desarrollo de la tecnología de circuitos integrados, empezando con la integración a media escala (MSI, *medium-scale integration*), continuando con la integración a gran escala (LSI, *large-scale integration*), y actualmente con la integración a muy gran escala (VLSI, *very-large-scale integration*) de los circuitos electrónicos ha estimulado el desarrollo de computadoras digitales y hardware digital de propósito especial más potente, de menor tamaño, más rápido y menos costoso. Estos circuitos digitales baratos y relativamente rápidos han hecho posible la construcción de sistemas digitales altamente sofisticados capaces de llevar a cabo tareas y funciones de tratamiento de señales digitales, que normalmente son bastante complejas y/o caras de implementar mediante circuitería analógica o sistemas de tratamiento de señales analógicas. En consecuencia, muchas de las tareas de tratamiento de señales que convencionalmente se realizaban por medios analógicos, actualmente se llevan a cabo empleando hardware digital que es más barato y a menudo más fiable.

No queremos dar a entender que el tratamiento digital de señales es la solución adecuada para todos los problemas de tratamiento de señales. Así, en el caso de muchas señales con anchos de banda muy grandes, el tratamiento en tiempo real es un requisito. Para dichas señales, el procesamiento analógico, o quizá óptimo sea la única solución posible. Sin embargo, siempre que se disponga de circuitos digitales y se tenga la velocidad suficiente como para utilizar el tratamiento digital, será preferible emplear dichos circuitos.

Los sistemas digitales no sólo proporcionan sistemas de tratamiento de señales más baratos y fiables, sino que presentan también otras ventajas. En particular, el hardware de procesamiento digital permite realizar operaciones programables. Mediante software, es más fácil modificar las funciones de procesamiento de señales que mediante hardware. Por tanto, el hardware digital y el software asociado proporcionan un mayor grado de flexibilidad al diseño del sistema. Además, generalmente, se consigue un mayor grado de precisión con el hardware y el software digital que con los circuitos y sistemas de procesamiento de señales analógicos. Por todas estas razones, en las tres últimas décadas se ha producido un crecimiento explosivo en la teoría del tratamiento digital de señales y sus aplicaciones.

El objetivo de este libro es presentar una introducción a las técnicas y herramientas de análisis básicas para el tratamiento digital de señales. Comenzaremos presentando la terminología que es imprescindible conocer y describiendo las operaciones asociadas con el proceso de convertir una señal analógica a un formato digital

adecuado para su procesamiento. También veremos que el procesamiento digital de señales analógicas tiene sus inconvenientes. El primero y más importante es que la conversión de una señal analógica a formato digital implica muestrear la señal y cuantificar las muestras, lo que produce una distorsión que nos impide reconstruir la señal analógica original a partir de las muestras cuantificadas. Esta distorsión puede controlarse seleccionando la adecuada tasa de muestreo y la precisión del proceso de cuantificación. En segundo lugar, hay que tener en cuenta los efectos debidos a la precisión finita en el procesamiento digital de las muestras cuantificadas. Aunque estas importantes cuestiones se abordan con cierto detalle en el libro, el énfasis se ha puesto en el análisis y el diseño de los sistemas de tratamiento de señales y en las técnicas de cálculo.

1.1 Señales, sistemas y tratamiento de señales

Una *señal* se define como cualquier magnitud física que varía con el tiempo, el espacio o cualquier otra variable o variables independientes. Matemáticamente, describimos una señal como una función de una o más variables independientes. Por ejemplo, las funciones

$$\begin{aligned} s_1(t) &= 5t \\ s_2(t) &= 20t^2 \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

describen dos señales, una que varía linealmente con la variable independiente t (tiempo) y una segunda que varía cuadráticamente con t. Veamos otro ejemplo, considere la función

$$s(x,y) = 3x + 2xy + 10y^2 \tag{1.1.2}$$

Esta función describe una señal de dos variables independientes x e y que podrían representar las dos coordenadas espaciales de un plano.

Las señales descritas por las Ecuaciones (1.1.1) y (1.1.2) pertenecen a una clase de señales que se definen de forma precisa especificando la dependencia funcional de la variable independiente. Sin embargo, existen casos en los que tal relación funcional es desconocida o extremadamente compleja como para tener ninguna utilidad práctica.

Por ejemplo, una señal de voz (*véase* la Figura 1.1.1) no se puede describir funcionalmente mediante expresiones como la Ecuación (1.1.1). En general, un segmento de voz se puede representar con un alto grado de precisión como la suma de varias señales sinusoidales de diferentes amplitudes y frecuencias, es decir, como

$$\sum_{i=1}^{N} A_i(t)\,\mathrm{sen}[2\pi F_i(t)t + \theta_i(t)] \tag{1.1.3}$$

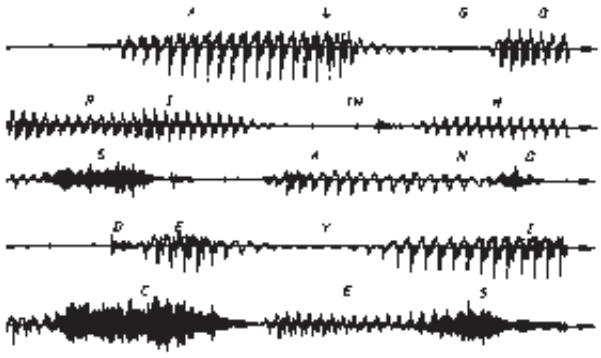


Figura 1.1.1. Ejemplo de una señal de voz.

donde $\{A_i(t)\}$, $\{F_i(t)\}$ y $\{\theta_i(t)\}$ son los conjuntos de amplitudes, frecuencias y fases (posiblemente variables con el tiempo), respectivamente, de las señales sinusoidales. De hecho, una forma de interpretar la información o el mensaje enviado en un corto segmento de tiempo de la señal de voz consiste en medir las amplitudes, frecuencias y fases contenidas en dicho segmento de la señal.

Otro ejemplo de señal natural es la de un electrocardiograma (ECG). Una señal de este tipo proporciona a un médico información sobre el estado del corazón de un paciente. De la misma manera, la señal de un electroencefalograma (EEG) proporciona información sobre la actividad del cerebro.

Las señales de voz, de un electrocardiograma y de un electroencefalograma son ejemplos de señales que contienen información y que varían como funciones de una sola variable independiente que, normalmente, es el tiempo. Un ejemplo de una señal que es una función de dos variables independientes es una señal de imagen. Las variables independientes en este caso son las coordenadas espaciales. Se trata tan sólo de unos pocos ejemplos de las innumerables señales naturales que pueden encontrarse en el mundo real.

Asociados a las señales naturales se encuentran los medios con los que se generan. Por ejemplo, las señales de voz se generan al pasar el aire a través de las cuerdas vocales. Las imágenes se obtienen mediante la exposición de una película fotográfica ante una escena u objeto. Por tanto, normalmente la generación de señales está asociada con un *sistema* que responde a un estímulo o fuerza. En una señal de voz, el sistema está formado por las cuerdas vocales y el tracto bucal, también conocido como cavidad bucal. El estímulo en combinación con el sistema es lo que se denomina *fuente de señal*. Por tanto, existen fuentes de voz, fuentes de imágenes y muchos otros tipos de fuentes de señal.

Un *sistema* también se puede definir como un dispositivo físico que realiza una operación sobre una señal. Por ejemplo, un filtro utilizado para reducir el ruido y las interferencias que distorsionan una señal deseada que transporta información es un sistema. En este caso, el filtro realiza ciertas operaciones sobre la señal, que tienen el efecto de reducir (filtrar) el ruido y las interferencias de la señal de información deseada.

Cuando pasamos una señal a través de un sistema, como en el caso del filtro, decimos que hemos procesado o tratado la señal. En este caso, el procesamiento de la señal implica filtrar el ruido y las interferencias de la señal deseada. En general, el sistema se caracteriza por el tipo de operación que realiza sobre la señal. Por ejemplo, si la operación es lineal, el sistema es lineal. Si la operación que se realiza sobre la señal no es lineal, se dice que el sistema es no lineal, etc. Tales operaciones suelen referirse como *tratamiento de la señal*.

Para nuestros propósitos, es conveniente ampliar la definición de sistema para incluir no sólo los dispositivos físicos, sino también la implementación software de operaciones sobre una señal. En el procesamiento digital de señales de una computadora digital, las operaciones efectuadas sobre una señal consisten en una serie de operaciones matemáticas especificadas por un programa de software. En este caso, el programa representa una implementación del sistema por *software*. Luego tenemos un sistema que se implementa sobre una computadora digital por medio de una secuencia de operaciones matemáticas; es decir, tenemos un sistema de procesamiento digital de señales implementado por software. Por ejemplo, una computadora digital puede programarse para llevar a cabo un filtrado digital. Alternativamente, el tratamiento digital de señales se puede realizar mediante *hardware* digital (circuitos lógicos) configurado para realizar las operaciones especificadas. En una implementación de este tipo, tendremos entonces un dispositivo físico que realizará las operaciones especificadas. En un sentido amplio, un sistema digital puede implementarse como una combinación de hardware y software digital, realizando cada uno de ellos su propio conjunto de operaciones especificadas.

Este libro aborda el tratamiento de señales por medios digitales, tanto software como hardware. Dado que muchas de las señales que se encuentran en el mundo real son analógicas, también vamos a considerar el problema de convertir una señal analógica en una señal digital con el fin de poder procesarla. Las operaciones que lleve a cabo un sistema así podrán normalmente especificarse en forma matemática. El método o conjunto de reglas para implementar el sistema mediante un programa que realice las operaciones matemáticas correspondientes se denomina *algoritmo*. Por lo general, hay disponibles muchas formas o algoritmos mediante los que se puede implementar un sistema, bien por software o por hardware, para realizar las operaciones y cálculos deseados. En la práctica, estaremos interesados en aquellos algoritmos que sean eficientes y rápidos en lo que respecta a los cálculos, y también sean fáciles de implementar. Por tanto, un tema importante en el estudio del procesamiento

Figura 1.1.2. Tratamiento de una señal analógica.

digital de la señal es el empleo de algoritmos eficientes para realizar operaciones como el filtrado, la correlación o el análisis de espectros.

1.1.1 Elementos básicos de un sistema de tratamiento digital de señales

La mayor parte de las señales con las que se trabaja en los distintos campos de la ciencia y la ingeniería son analógicas por naturaleza. Es decir, las señales son funciones de una variable continua, como por ejemplo, el tiempo o el espacio, y normalmente toman valores en un rango continuo. Tales señales pueden procesarse directamente mediante sistemas analógicos apropiados (como filtros, analizadores de frecuencias o multiplicadores de frecuencia), con el fin de cambiar sus características o de extraer la información deseada. En tal caso, podemos decir que la señal se ha procesado de forma directa en su forma analógica, como se ilustra en la Figura 1.1.2. Tanto la señal de entrada como la señal de salida son analógicas.

El tratamiento digital de señales proporciona un método alternativo de procesar una señal analógica, como se ilustra en la Figura 1.1.3. Para poder realizar un tratamiento digital, es necesario disponer de una interfaz entre la señal analógica y el procesador digital. Esta interfaz se denomina *convertidor analógico-digital (A/D)*. La salida del convertidor A/D es una señal digital que es adecuada como entrada del procesador digital.

El procesador digital de señales puede ser una computadora digital programable grande o un pequeño microprocesador programado para realizar las operaciones deseadas sobre la señal de entrada. También puede ser un procesador digital cableado configurado para realizar un conjunto de operaciones especificado sobre la señal de entrada. Las máquinas programables proporcionan la flexibilidad de poder cambiar las operaciones de procesamiento de la señal mediante una modificación del software, mientras que las máquinas cableadas son difíciles de reconfigurar. En consecuencia, los procesadores de señal programables son de uso muy común. Por el contrario, cuando las operaciones de tratamiento están bien definidas, una implementación cableada de las operaciones puede optimizarse, dando lugar a un procesador de señales más económico y que normalmente trabaja más rápido que su contrapartida programable. En aplicaciones en las que la salida digital del procesador digital de señal tenga que entregarse al usuario en formato analógico, como por ejemplo en los sistemas de comunicación por voz, tendremos que proporcionar otra interfaz entre el dominio digital y el analógico. Una interfaz así es un *convertidor digital-analógico (D/A)*. De este modo, la señal que se proporciona al usuario está en forma analógica, como ilustra el diagrama de bloques de la Figura 1.1.3. Sin embargo, existen otras aplicaciones prácticas que implican el análisis de la señal, en las que la información deseada se encuentra en formato digital y, por tanto, no es necesario emplear un convertidor D/A. Por ejemplo, en el procesamiento digital de las señales de radar, la información extraida de la señal de radar, como por ejemplo la posición de un

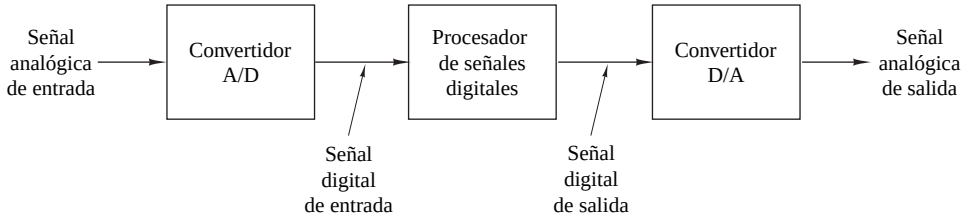


Figura 1.1.3. Diagrama de bloques de un sistema de tratamiento digital de señales.

avión y su velocidad, puede simplemente imprimirse en un papel. En este caso, no hay necesidad de utilizar un convertidor D/A.

1.1.2 Ventajas del tratamiento digital de señales sobre el analógico

Como hemos mencionado anteriormente, existen muchas razones por las que el tratamiento digital de señales analógicas es preferible a procesar dichas señales analógicas directamente en el dominio analógico. En primer lugar, un sistema digital programable proporciona la flexibilidad de reconfigurar las operaciones del tratamiento digital de la señal simplemente modificando el programa. Sin embargo, normalmente, la reconfiguración de un sistema analógico implica un rediseño del hardware seguido de los procesos de realización de pruebas y de verificación que permiten comprobar que todo funciona correctamente.

También, las consideraciones de precisión desempeñan un papel importante en la determinación de la forma del procesador de señales. Las tolerancias de los componentes de los circuitos analógicos hacen extremadamente difícil que el diseñador del sistema pueda controlar la precisión de un sistema de tratamiento de señales analógicas. Por el contrario, un sistema digital proporciona un control mucho mejor en lo que respecta a los requisitos de precisión. Tales requisitos, a su vez, exigen especificar los requisitos de precisión del convertidor A/D y del procesador digital de señales, en términos de longitud de palabra, artimética en coma flotante o coma fija, y factores similares.

La señales digitales se almacenan fácilmente en soportes magnéticos (cinta o disco) sin deteriorarse o perder fidelidad, aparte de la introducida por la conversión A/D. Como consecuencia, las señales se hacen transportables y pueden procesarse en tiempo no real en un laboratorio remoto. El tratamiento digital de señales también permite la implementación de algoritmos de tratamiento de señales más sofisticados. Normalmente, es muy difícil efectuar operaciones matemáticas precisas sobre señales analógicas, pero esas mismas operaciones pueden implementarse de forma rutinaria en una computadora digital mediante software.

En algunos casos, una implementación digital del sistema de procesamiento de señales es más barata que su contrapartida analógica. Este menor coste puede deberse al hecho de que el hardware digital es más barato o, quizás, es el resultado de la flexibilidad de poder realizar modificaciones proporcionada por la implementación digital.

Como consecuencia de estas ventajas, el procesamiento digital de señales se ha aplicado en sistemas prácticos cubriendo un amplio rango de disciplinas. Por ejemplo, podemos citar la aplicación de técnicas de tratamiento digital de señales en el procesamiento de voz y la transmisión de señales a través de canales telefónicos, en el procesamiento y transmisión de imágenes, en los campos de la sismología y la geofísica, en la prospección petrolífera, en la detección de explosiones nucleares, en el tratamiento de señales recibidas del espacio exterior y en muchas otras aplicaciones. Algunas de estas aplicaciones las comentaremos en los capítulos siguientes.

Sin embargo, como ya hemos mencionado, la implementación digital también tiene sus limitaciones. Una limitación práctica es la velocidad de operación de los convertidores A/D y de los procesadores digitales de señales. Veremos que las señales que tienen anchos de banda extremadamente grandes requieren convertidores A/D con una muy alta velocidad de muestreo y procesadores digitales de señales rápidos. Así, existen señales analógicas con anchos de banda grandes para las que la solución que proporciona el tratamiento digital se encuentra más allá del estado del arte del hardware digital.

1.2 Clasificación de las señales

Los métodos que utilicemos para procesar una señal o para analizar la respuesta de un sistema dependerán enormemente de los atributos caraterísticos de la señal especificada. Existen técnicas que sólo se aplican a familias específicas de señales. En consecuencia, cualquier investigación que hagamos sobre el procesamiento de señales deberá comenzar por la clasificación de las señales implicadas en la aplicación concreta.

1.2.1 Señales multicanal y multidimensionales

Como se ha explicado en la Sección 1.1, una señal se describe mediante una función de una o más variables independientes. El valor de la función (es decir, de la variable dependiente) puede ser una magnitud escalar real, una magnitud compleja o incluso un vector. Por ejemplo, la señal

$$s_1(t) = A \operatorname{sen} 3\pi t$$

es una señal real. Sin embargo, la señal

$$s_2(t) = Ae^{j3\pi t} = A\cos 3\pi t + jA \operatorname{sen} 3\pi t$$

es compleja.

En algunas aplicaciones, múltiples fuentes o múltiples sensores generan las señales. Dichas señales pueden representarse en forma vectorial. La Figura 1.2.1 muestra las tres componentes de una señal vectorial que representa la aceleración en la superficie terrestre debida a un terremoto. Esta aceleración es el resultado de tres

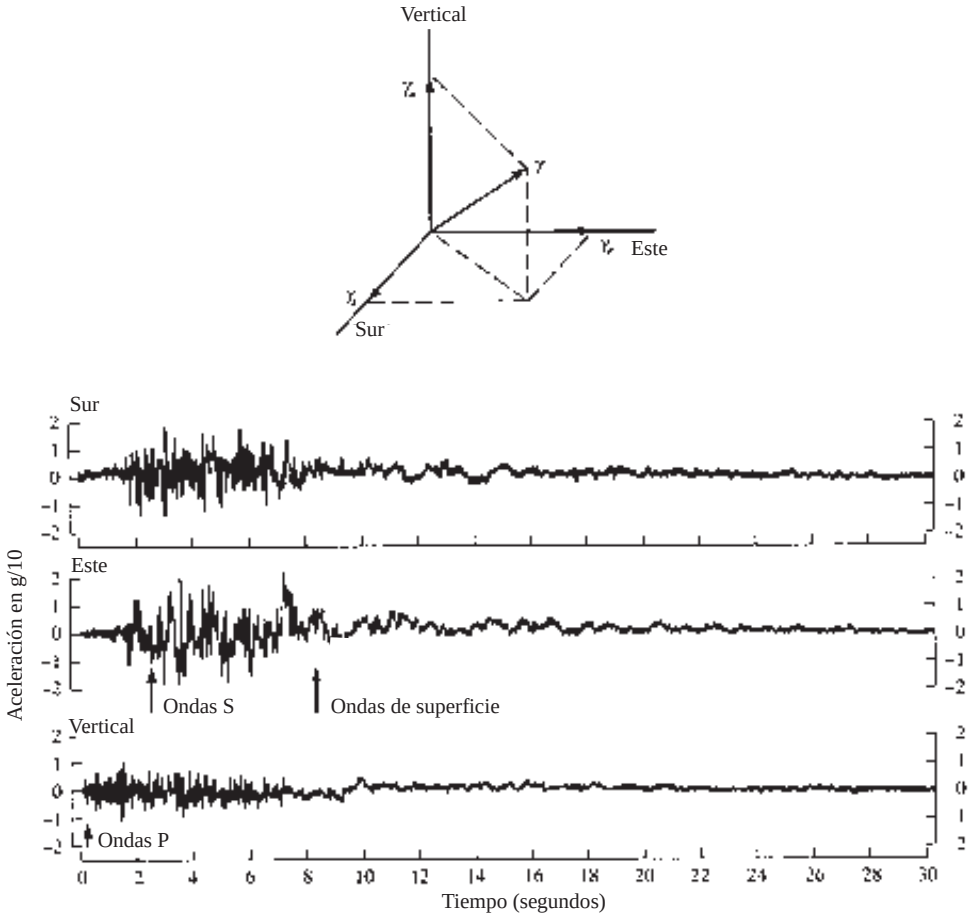


Figura 1.2.1. Tres componentes de la aceleración en tierra medida a pocos kilómetros del epicentro de un terremoto. (De *Earthquakes*, por B. A. Bold, ©1988 de W. H. Freeman and Company. Reproducido con permiso del editor.)

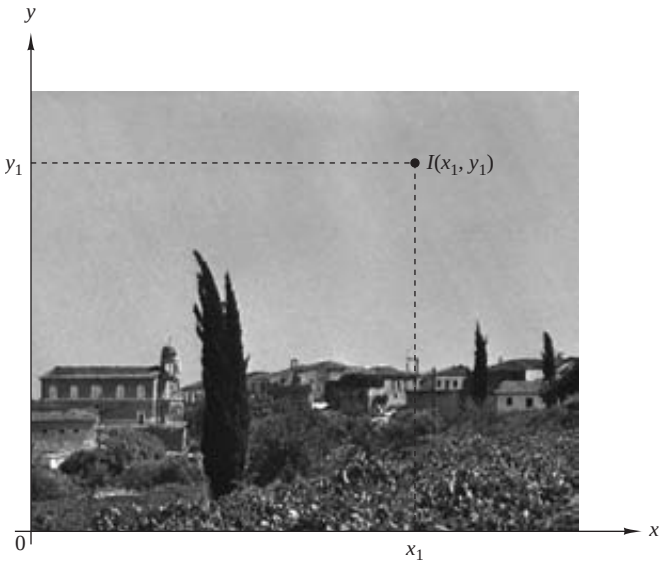


Figura 1.2.2. Ejemplo de una señal bidimensional.

tipos básicos de ondas elásticas. Las ondas primarias (P) y las ondas secundarias (S) se propagan dentro del cuerpo de la roca y son longitudinales y transversales, respectivamente. El tercer tipo de onda elástica recibe el nombre de onda superficial, porque se propaga cerca de la superficie de la Tierra. Si $s_k(t)$, $k = 1, 2, 3$, denota la señal eléctrica procedente del sensor k como una función del tiempo, el conjunto de $p = 3$ señales se puede representar mediante un vector $\mathbf{S}_3(t)$, donde

$$\mathbf{S}_3(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \end{bmatrix}$$

Decimos que un vector de señales así es una *señal multicanal*. Por ejemplo, en electrocardiografía, se utilizan electrocardiogramas (ECG) de 3 tomas y de 12 tomas, que generan señales de 3 y 12 canales.

Fijémonos ahora en las variables independientes. Si la señal es una función de una sola variable independiente, se dice que la señal es *unidimensional*. Por otro lado, se dice que una señal es *M-dimensional* si su valor es una función de M variables independientes.

La imagen de la Figura 1.2.2 es un ejemplo de una señal bidimensional, dado que la intensidad o brillo $I(x,y)$ en cada punto es una función de dos variables independientes. Por otra parte, una imagen de televisión en blanco y negro puede representarse como $I(x,y,t)$, puesto que el brillo es una función del tiempo. Por tanto, la imagen de TV puede tratarse como una señal tridimensional. En cambio, una imagen de TV en color puede escribirse mediante tres funciones de intensidad de la forma $I_r(x,y,t)$, $I_g(x,y,t)$ e $I_b(x,y,t)$, las cuales se corresponden con el brillo de los tres colores principales (rojo, verde, azul) como funciones del tiempo. Por tanto, una imagen de TV en color es una señal tridimensional de tres canales, que puede representarse mediante el vector:

$$\mathbf{I}(x,y,t) = \begin{bmatrix} I_r(x,y,t) \\ I_g(x,y,t) \\ I_b(x,y,t) \end{bmatrix}$$

En este libro vamos a tratar fundamentalmente con señales unidimensionales de un solo canal, reales o complejas, y vamos a referirnos a ellas simplemente como señales. En términos matemáticos, estas señales se

describen mediante una función de un sola variable independiente. Aunque la variable independiente no tiene por qué ser necesariamente el tiempo, es costumbre emplear t como la variable independiente. En muchos casos, las operaciones y algoritmos para el procesamiento de señales desarrollados en el texto para señales unidimensionales de un sólo canal pueden extenderse a señales multidimensionales y multicanal.

1.2.2 Señales continuas y discretas en el dominio del tiempo

Las señales se pueden clasificar en cuatro categorías diferentes dependiendo de las características de la variable independiente tiempo y de los valores que éstas tomen. Las *señales continuas en el tiempo* o *señales analógicas* están definidas para cada instante de tiempo y toman sus valores en el intervalo continuo (a,b), donde a puede ser $-\infty$ y b puede ser ∞. Matemáticamente, estas señales pueden describirse mediante funciones de una variable continua. La onda de voz mostrada en la Figura 1.1.1 y las señales $x_1(t) = \cos \pi t$, $x_2(t) = e^{-|t|}$, $-\infty < t < \infty$ son ejemplos de señales analógicas. Las *señales discretas en el tiempo* sólo están definidas en determinados instantes específicos de tiempo. Dichos instantes de tiempo no tienen que ser equidistantes, aunque, en la práctica, normalmente están igualmente espaciados para facilitar los cálculos. La señal $x(t_n) = e^{-|t_n|}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ es un ejemplo de una señal discreta en el tiempo. Si utilizamos el índice n para los instantes de tiempo discretos como la variable independiente, el valor de la señal será una función de una variable entera (es decir, será una secuencia de números). Por tanto, una señal discreta en el tiempo se puede representar matemáticamente mediante una secuencia de números reales o complejos. Con el fin de resaltar la naturaleza discreta de una señal, denotaremos dicha señal como $x(n)$ en lugar de como $x(t)$. Si los instantes de tiempo t_n están igualmente espaciados (es decir, $t_n = nT$), también se utiliza la notación $x(nT)$. Por ejemplo, la secuencia

$$x(n) = \begin{cases} 0.8^n, & \text{si} \quad n \geq 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{1.2.1}$$

es una señal discreta en el tiempo, que se ha representado gráficamente en la Figura 1.2.3.

En la práctica, las señales discretas en el tiempo pueden originarse de dos formas:

1. Seleccionando valores de una señal analógica en instantes discretos de tiempo. Este proceso se denomina *muestreo* y se estudia más en detalle en la Sección 1.4. Todos los instrumentos de medida que realizan medidas a intervalos de tiempo regulares proporcionan señales discretas en el tiempo. Por ejemplo, la señal $x(n)$ de la Figura 1.2.3 puede obtenerse muestreando la señal analógica $x(t) = 0.8^t$, $t \geq 0$ y $x(t) = 0$, $t < 0$ una vez por segundo.
2. Acumulando una variable en un período de tiempo. Por ejemplo, el número de coches que pasan por una calle determinada en una hora o el valor del oro diario, dan lugar a señales discretas en el tiempo. La Figura 1.2.4 muestra una gráfica del número de manchas solares de Wölfer. Cada muestra de la señal discreta en el tiempo proporciona el número de manchas observadas durante un intervalo de 1 año.

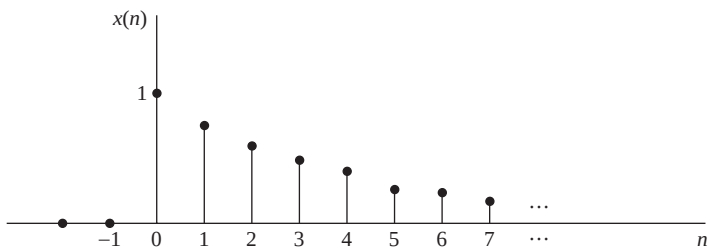


Figura 1.2.3. Representación gráfica de la señal discreta en el tiempo $x(n) = 0.8^n$ para $n > 0$ y $x(n) = 0$ para $n < 0$.

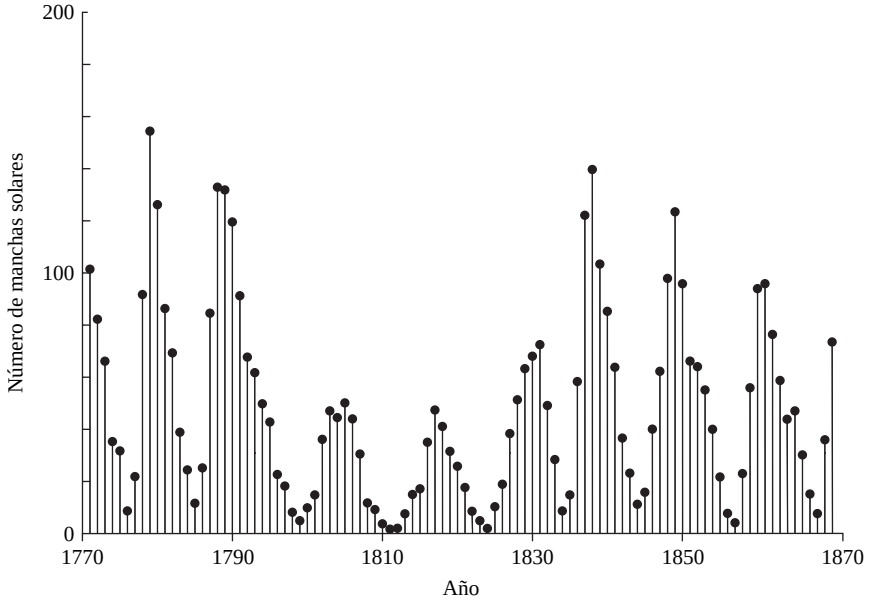


Figura 1.2.4. Número de manchas solares de Wölfer (1770–1869).

1.2.3 Señales continuas y señales discretas

Los valores de una señal continua o discreta en el dominio del tiempo pueden ser continuos o discretos. Si una señal toma todos los valores posibles en un rango finito o infinito, se dice que es una señal continua. Alternativamente, si la señal toma valores dentro un conjunto finito de posibles valores, se dice que la señal es discreta. Normalmente, estos valores son equidistantes y, por tanto, pueden expresarse como un múltiplo entero de la distancia entre dos valores sucesivos. Una señal discreta en el tiempo que tiene un conjunto de valores discretos es una *señal digital*. La Figura 1.2.5 muestra una señal digital que toma uno de cuatro valores posibles.

Para que una señal pueda ser procesada digitalmente, debe ser discreta en el tiempo y sus valores tienen que ser discretos (es decir, tiene que ser una señal digital). Si la señal que se va a procesar es una señal analógica, se convierte en una señal digital muestreándola en instantes discretos de tiempo, obteniéndose así una señal discreta en el tiempo, y *cuantificando* a continuación sus valores en un conjunto de valores discretos, como se describe más adelante en el capítulo. El proceso de conversión de una señal continua en una señal discreta se denomina *cuantificación*, y es básicamente un proceso de aproximación. Puede realizarse de forma simple mediante redondeo o truncamiento. Por ejemplo, si los valores permitidos de la señal digital son enteros, como por ejemplo, de 0 hasta 15, la señal de valores continuos se cuantifica empleando esos valores enteros. Por tanto, el valor de la señal 8.58 se aproximará al valor 8 si el proceso de cuantificación se realiza mediante truncamiento, o a 9 si el proceso de cuantificación se realiza por redondeo al entero más próximo. Más adelante en el capítulo se proporciona una explicación más detallada del proceso de conversión analógico-digital.

1.2.4 Señales deterministas y señales aleatorias

El procesamiento y análisis matemático de señales requiere disponer de una descripción matemática para la propia señal. Esta descripción matemática, a menudo denominada *modelo de señal*, lleva a otra importante clasificación de las señales. Cualquier señal que se pueda describir unívocamente mediante una expresión matemática explícita, una tabla de datos o una regla bien definida se dice que es *determinista*. Este término se emplea para destacar el hecho de que todos los valores pasados, presentes y futuros de la señal se conocen de forma precisa, sin incertidumbre.

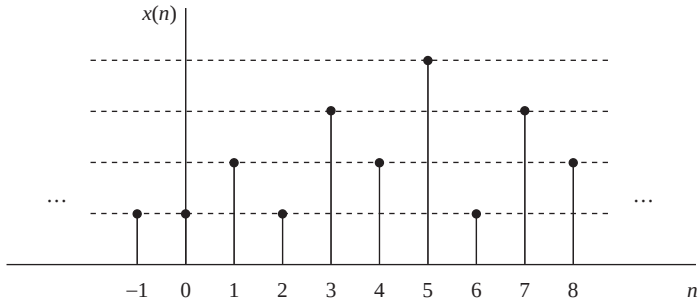


Figura 1.2.5. Señal digital con cuatro valores de amplitud diferentes.

Sin embargo, en muchas aplicaciones prácticas, existen señales que o no se pueden describir con un grado razonable de precisión mediante fórmulas matemáticas o una descripción resulta demasiado compleja como para resultar práctica. La falta de una relación de este tipo implica que dichas señales evolucionan en el tiempo de manera no predecible. Decimos que este tipo de señales son *aleatorias*. La salida de un generador de ruido, la señal sísmica de la Figura 1.2.1 y la señal de voz de la Figura 1.1.1 son ejemplos de señales aleatorias.

El marco de trabajo matemático para llevar a cabo el análisis teórico de las señales aleatorias lo proporciona la teoría de la probabilidad y los procesos estocásticos. En la Sección 12.1 se presentan algunos de los elementos básicos de este enfoque adaptados a las necesidades del libro.

Debemos insistir en que la clasificación de una señal *real* como determinista o aleatoria no siempre es clara. En ocasiones, ambos enfoques llevan a resultados significativos que ayudan a clarificar el comportamiento de la señal. En otros casos, una clasificación errónea puede llevar a resultados erróneos, ya que algunas herramientas matemáticas sólo pueden aplicarse a señales deterministas mientras que otras sólo pueden aplicarse a señales aleatorias. Verá esto más claramente cuando examinemos herramientas matemáticas específicas.

1.3 Concepto de frecuencia en señales continuas y discretas en el tiempo

El concepto de frecuencia ya será familiar a los estudiantes de ingeniería y ciencias. Este concepto es básico, por ejemplo, en el diseño de un receptor de radio, de un sistema de alta fidelidad o de un filtro espectral para fotografías en color. De la Física, sabemos que la frecuencia está estrechamente relacionada con un tipo específico de movimiento periódico denominado movimiento oscilatorio armónico, que se describe mediante funciones sinusoidales. El concepto de frecuencia está directamente relacionado con el concepto de tiempo, y su dimensión es la inversa de la del tiempo. En consecuencia, la naturaleza del tiempo (continuo o discreto) afectará a la naturaleza de la frecuencia.

1.3.1 Señales sinusoidales continuas en el tiempo

Una oscilación armónica simple se describe matemáticamente mediante la siguiente señal sinusoidal continua en el tiempo:

$$x_a(t) = A\cos(\Omega t + \theta), \quad -\infty < t < \infty \tag{1.3.1}$$

que se muestra en la Figura 1.3.1. El subíndice a utilizado con $x(t)$ indica que se trata de una señal analógica. Esta señal queda completamente caracterizada mediante los tres parámetros siguientes: A, que es la *amplitud* de la sinusoide, Ω, que es la *frecuencia* en radianes por segundo (rad/s) y θ, que es la *fase* en radianes. En lugar de Ω, a menudo utilizaremos la frecuencia F medida en ciclos por segundo o hercios (Hz), donde

$$\Omega = 2\pi F \tag{1.3.2}$$

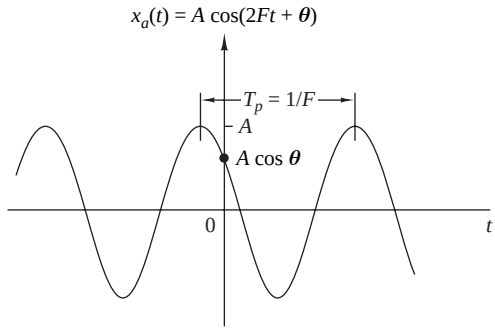


Figura 1.3.1. Ejemplo de una señal sinusoidal analógica.

En función de F, podemos escribir la expresión (1.3.1) como sigue

$$x_a(t) = A\cos(2\pi Ft + \theta), \quad -\infty < t < \infty \tag{1.3.3}$$

Utilizaremos ambas formas, (1.3.1) y (1.3.3), para representar señales sinusoidales.

La señal sinusoidal analógica descrita por (1.3.3) queda caracterizada por las siguientes propiedades:

A1. Para todo valor fijo de la frecuencia F, $x_a(t)$ es periódica. En efecto, se puede demostrar fácilmente, utilizando trigonometría elemental, que

$$x_a(t + T_p) = x_a(t)$$

donde $T_p = 1/F$ es el período fundamental de la señal sinusoidal.

A2. Señales sinusoidales continuas en el tiempo con diferentes frecuencias son diferentes.

A3. Un incremento de la frecuencia F da lugar a un incremento de la velocidad de oscilación de la señal, en el sentido de que se incluyen más períodos en un intervalo de tiempo dado.

Observe que para $F = 0$, el valor $T_p = \infty$ es coherente con la relación fundamental $F = 1/T_p$. Debido a la continuidad de la variable tiempo t, podemos aumentar la frecuencia F, sin límite, con el consiguiente aumento en la velocidad de oscilación.

La relación que hemos descrito para las señales sinusoidales es aplicacble a la clase de señales exponenciales complejas

$$x_a(t) = Ae^{j(\Omega t + \theta)} \tag{1.3.4}$$

Esto puede verse fácilmente expresando estas señales en función de señales sinusoidales aplicando la identidad de Euler

$$e^{\pm j\phi} = \cos\phi \pm j\sin\phi \tag{1.3.5}$$

Por definición, la frecuencia es una magnitud física inheremente positiva. Esto resulta obvio si interpretamos la frecuencia como el número de ciclos por unidad de tiempo de una señal periódica. Sin embargo, en muchos casos, y únicamente por conveniencia matemática, tendremos que emplear frecuencias negativas. Recordemos que la señal sinusoidal (1.3.1) se puede expresar de la forma siguiente:

$$x_a(t) = A\cos(\Omega t + \theta) = \frac{A}{2}\, e^{j(\Omega t + \theta)} + \frac{A}{2}\, e^{-j(\Omega t + \theta)} \tag{1.3.6}$$

que se deduce de (1.3.5). Observe que se puede obtener una señal sinusoidal sumando dos señales exponenciales complejas conjugadas de la misma amplitud, las cuales en ocasiones se denominan fasores, como se muestra

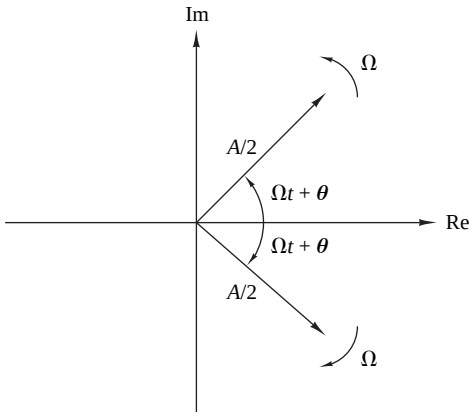


Figura 1.3.2. Representación de una función coseno mediante dos señales exponenciales complejas conjugadas (fasores).

en la Figura 1.3.2. A medida que transcurre el tiempo, los fasores giran en direcciones opuestas con frecuencias angulares de $\pm\Omega$ radianes por segundo. Dado que una *frecuencia positiva* se corresponde con un movimiento angular uniforme en sentido antihorario, una *frecuencia negativa* se corresponderá con un movimiento angular en sentido horario.

Por comodidad para la realización de los cálculos matemáticos, utilizaremos tanto frecuencias negativas como positivas a lo largo del libro. Por tanto, el rango de frecuencias para las señales sinusoidales es $-\infty < F < \infty$.

1.3.2 Señales sinusoidales discretas en el tiempo

Una señal sinusoidal discreta en el tiempo puede expresarse como sigue

$$x(n) = A\cos(\omega n + \theta), \quad -\infty < n < \infty \tag{1.3.7}$$

donde n es una variable entera, que se denomina número de muestra, A es la *amplitud* de la sinusoide, ω es la *frecuencia* en radianes por muestra y θ es la *fase* en radianes.

Si en lugar de ω utilizamos la variable frecuencia f definida por

$$\omega \equiv 2\pi f \tag{1.3.8}$$

la relación (1.3.7) se convierte en

$$x(n) = A\cos(2\pi f n + \theta), \quad -\infty < n < \infty \tag{1.3.9}$$

La frecuencia f tiene dimensiones de ciclos por muestra. En la Sección 1.4, donde hemos visto el muestreo de sinusoides analógicas, relacionamos la frecuencia f de una sinusoide discreta en el tiempo con la frecuencia F en ciclos por segundo de una sinusoide analógica. Por el momento, consideremos la sinusoide discreta en el dominio del tiempo dada por (1.3.7), independientemente de la sinusoide continua en el tiempo dada por (1.3.1). La Figura 1.3.3 muestra una sinusoide de frecuencia $\omega = \pi/6$ radianes por muestra ($f = \frac{1}{12}$ ciclos por muestra) y una fase $\theta = \pi/3$.

En comparación con las señales sinusoidales continuas en el tiempo, la señales sinusoidales discretas en el tiempo se caracterizan por las propiedades siguientes:

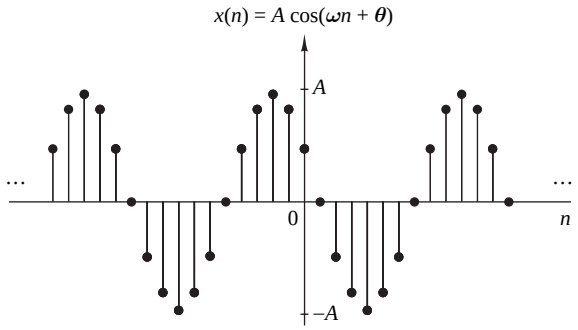


Figura 1.3.3. Ejemplo de señal sinusoidal discreta en el tiempo ($\omega = \pi/6$ y $\theta = \pi/3$).

B1. *Una sinusoide discreta en el tiempo es periódica sólo si su frecuencia es un número racional.*

Por definición, una señal discreta en el tiempo $x(n)$ es periódica de período N $(N > 0)$ si y sólo si

$$x(n+N) = x(n) \qquad \text{para todo} \quad n \tag{1.3.10}$$

El valor mínimo de N para el que (1.3.10) se cumple es el *período fundamental*.

La demostración de la propiedad de periodicidad es sencilla. Para que una sinusoide de frecuencia f_0 sea periódica, se tiene que cumplir que

$$\cos[2\pi f_0(N+n)+\theta] = \cos(2\pi f_0 n+\theta)$$

Esta relación es cierta si y sólo si existe un entero k tal que

$$2\pi f_0 N = 2k\pi$$

o, lo que es lo mismo,

$$f_0 = \frac{k}{N} \tag{1.3.11}$$

De acuerdo con (1.3.11), una señal sinusoidal discreta en el tiempo sólo es periódica si su frecuencia f_0 se puede expresar como la relación de dos enteros (es decir, f_0 es racional).

Para determinar el período fundamental N de una sinusoide periódica, expresamos su frecuencia f_0 como en (1.3.11) y cancelamos los factores comunes, de modo que k y N sean primos relativos. Entonces el período fundamental de la sinusoide es igual a N. Observe que una pequeña variación de la frecuencia puede dar lugar a una variación muy grande del período. Por ejemplo, $f_1 = 31/60$ implica que $N_1 = 60$, mientras que $f_2 = 30/60$ da como resultado $N_2 = 2$.

B2. *Las señales sinusoidales discretas en el tiempo cuyas frecuencias están separadas un múltiplo entero de 2π son idénticas.*

Para demostrar esta afirmación, consideremos la señal sinusoidal $\cos(\omega_0 n+\theta)$. Fácilmente se deduce que

$$\cos[(\omega_0+2\pi)n+\theta] = \cos(\omega_0 n+2\pi n+\theta) = \cos(\omega_0 n+\theta) \tag{1.3.12}$$

Por tanto, todas las secuencias sinusoidales

$$x_k(n) = A\cos(\omega_k n+\theta), \qquad k = 0,1,2,\ldots \tag{1.3.13}$$

donde

$$\omega k = \omega_0 + 2k\pi, \qquad -\pi \le \omega_0 \le \pi$$

son *indistinguibles* (es decir, *idénticas*). Cualquier secuencia resultante de una sinusoide con frecuencia $|\omega| > \pi$, o $|f| > \frac{1}{2}$, es idéntica a una secuencia obtenida a partir de una señal sinusoidal de frecuencia $|\omega| < \pi$. Debido a esta similitud, decimos que la sinusoide que tiene la frecuencia $|\omega| > \pi$ es un *alias* de la sinusoide cuya frecuencia es $|\omega| < \pi$. Por tanto, consideremos las frecuencias comprendidas en el rango $-\pi \leq \omega \leq \pi$, o $\frac{-1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$ como únicas y todas las frecuencias tal que $|\omega| > \pi$, o $|f| > \frac{1}{2}$, como alias. El lector debe darse cuenta de la diferencia entre sinusoides discretas en el tiempo y sinusoides continuas en el tiempo, ya que estas últimas dan lugar a señales distintas para Ω o F en el rango completo $-\infty < \Omega < \infty$ o $-\infty < F < \infty$.

B3. *La tasa de oscilación más alta de una señal sinusoidal discreta en el tiempo se alcanza cuando $\omega = \pi$ (u $\omega = -\pi$) o, lo que es lo mismo, $f = \frac{1}{2}$ (o $f = -\frac{1}{2}$).*

Para ilustrar esta propiedad, vamos a investigar las características de la siguiente secuencia de señales sinusoidales

$$x(n) = \cos \omega_0 n$$

cuando la frecuencia varía entre 0 y π. Para simplificar el argumento, tomamos valores de $\omega_0 = 0$, $\pi/8$, $\pi/4$, $\pi/2$, π correspondientes a $f = 0$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, lo que da como resultado secuencias periódicas que tienen períodos $N = \infty$, 16, 8, 4, 2, como se ilustra en la Figura 1.3.4. Observe que el período de la sinusoide decrece cuando la frecuencia aumenta. De hecho, podemos ver que la tasa de oscilación aumenta cuando aumenta la frecuencia.

Para ver lo que ocurre para $\pi \leq \omega_0 \leq 2\pi$, consideremos las sinusoides de frecuencias $\omega_1 = \omega_0$ y $\omega_2 = 2\pi - \omega_0$. Observe que como ω_1 varía entre π y 2π, ω_2 varía entre π y 0. Podemos ver fácilmente que

$$\begin{aligned} x_1(n) &= A\cos \omega_1 n = A\cos \omega_0 n \\ x_2(n) &= A\cos \omega_2 n = A\cos(2\pi - \omega_0)n \\ &= A\cos(-\omega_0 n) = x_1(n) \end{aligned} \tag{1.3.14}$$

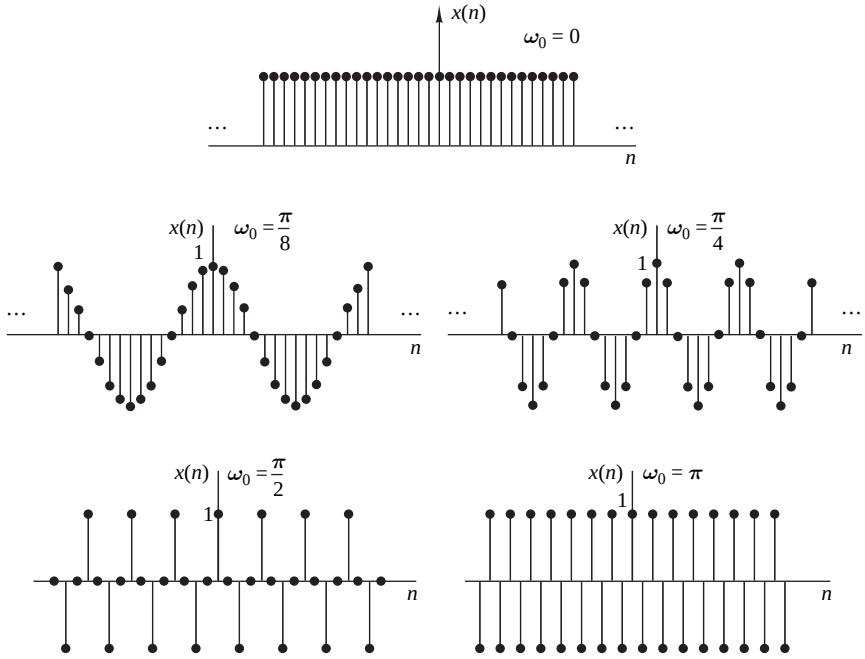


Figura 1.3.4. La señal $x(n) = \cos \omega_0 n$ para varios valores de la frecuencia ω_0.

Por tanto, ω_2 es un alias de ω_1. Si hubiéramos empleado una función seno en lugar de una función coseno, el resultado sería básicamente el mismo, excepto por una diferencia de fase de 180° entre las sinusoides $x_1(n)$ y $x_2(n)$. En cualquier caso, cuando aumentamos la frecuencia relativa ω_0 de una señal sinusoidal discreta en el tiempo de π a 2π, su tasa de oscilación disminuye. Para $\omega_0 = 2\pi$, el resultado es una señal constante, como en el caso de $\omega_0 = 0$. Obviamente, para $\omega_0 = \pi$ (o $f = \frac{1}{2}$) obtenemos la máxima tasa de oscilación.

Como en el caso de las señales continuas en el tiempo, pueden introducirse frecuencias negativas también para las señales discretas en el tiempo. Para este propósito, utilizamos la siguiente identidad:

$$x(n) = A\cos(\omega n + \theta) = \frac{A}{2}\, e^{j(\omega n+\theta)} + \frac{A}{2}\, e^{-j(\omega n+\theta)} \tag{1.3.15}$$

Puesto que las señales sinusoidales discretas en el tiempo con frecuencias separadas entre sí un múltiplo entero de 2π son idénticas, se deduce que las frecuencias de cualquier intervalo $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_1 + 2\pi$ constituyen *todas* las sinusoides discretas en el tiempo o exponenciales complejas. Por tanto, el rango de frecuencias para sinusoides discretas en el tiempo es finito con una duración de 2π. Normalmente, seleccionamos el rango $0 \leq \omega \leq 2\pi$ o $-\pi \leq \omega \leq \pi$ ($0 \leq f \leq 1$, $\frac{-1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$), el cual se denomina *rango fundamental*.

1.3.3 Exponenciales complejas armónicamente relacionadas

Las señales sinusoidales y las exponenciales complejas desempeñan un papel importante en el análisis de señales y sistemas. En algunos casos, trabajaremos con conjuntos de exponenciales complejas (o sinusoides) *armónicamente relacionadas*. Se trata de conjuntos de exponenciales complejas periódicas con frecuencias fundamentales que son múltiplos de una misma frecuencia positiva. Aunque vamos a limitar nuestra exposición a las exponenciales complejas, evidentemente estas propiedades son aplicables a las sinusoides. Vamos a considerar exponenciales complejas armónicamente relacionadas tanto continuas como discretas en el dominio del tiempo.

Exponenciales continuas en el tiempo. Las señales básicas exponenciales continuas en el dominio del tiempo y armónicamente relacionadas son:

$$s_k(t) = e^{jk\Omega_0 t} = e^{j2\pi k F_0 t} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.3.16}$$

Observemos que para cada valor de k, $s_k(t)$ es periódica de período fundamental $1/(kF_0) = T_p/k$ o frecuencia fundamental kF_0. Dado que una señal periódica de período T_p/k también es periódica con período $k(T_p/k) = T_p$ para cualquier entero positivo k, tenemos que todas las $s_k(t)$ tienen un período común igual a T_p. Además, como hemos visto en la Sección 1.3.1, F_0 puede tomar cualquier valor y todos los miembros del conjunto son distintos, en el sentido de que si $k_1 \neq k_2$, entonces $s_{k1}(t) \neq s_{k2}(t)$.

A partir de las señales básicas dadas por (1.3.16), podemos construir una combinación lineal de exponenciales complejas armónicamente relacionadas de la forma

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k s_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega_0 t} \tag{1.3.17}$$

donde c_k, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ con constantes complejas arbitrarias. La señal $x_a(t)$ es periódica de período fundamental $T_p = 1/F_0$, y su representación en función de (1.3.17) se denomina expansión de la *serie de Fourier* de $x_a(t)$. Las constantes complejas son los coeficientes de la serie Fourier y la señal $s_k(t)$ es el armónico k-ésimo de $x_a(t)$.

Exponenciales discretas en el tiempo. Dado que una exponencial compleja discreta en el tiempo es periódica si su frecuencia relativa es un número racional, seleccionamos $f_0 = 1/N$ y definimos los conjuntos de exponenciales complejas armónicamente relacionadas como sigue

$$s_k(n) = e^{j2\pi k f_0 n}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.3.18}$$

En contraste con el caso de señales continuas en el tiempo, observe que

$$s_{k+N}(n) = e^{j2\pi n(k+N)/N} = e^{j2\pi n} s_k(n) = sk(n)$$

Lo que quiere decir que, de acuerdo con (1.3.10), sólo hay N exponenciales complejas periódicas distintas en el conjunto descrito por la expresión (1.3.18). Además, todos los miembros del conjunto tienen un período común de N muestras. Evidentemente, podemos elegir cualesquiera N exponenciales complejas consecutivas, es decir, desde $k = n_0$ hasta $k = n_0 + N - 1$, para formar un conjunto armónicamente relacionado con una frecuencia fundamental $f_0 = 1/N$. Por comodidad, generalmente, seleccionaremos el conjunto que se corresponde con $n_0 = 0$, es decir, el conjunto

$$s_k(n) = e^{j2\pi kn/N}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \tag{1.3.19}$$

Como en el caso de las señales continuas en el tiempo, es obvio que la combinación lineal

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k s_k(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N} \tag{1.3.20}$$

da como resultado una señal periódica de período fundamental N. Como veremos más adelante, se trata de la representación de la serie de Fourier de una secuencia periódica discreta en el tiempo con coeficientes de Fourier $\{c_k\}$. La secuencia $s_k(n)$ es el armónico k-ésimo de $x(n)$.

EJEMPLO 1.3.1

En la memoria de un procesador digital de señales se ha almacenado un ciclo de la siguiente señal sinusoidal

$$x(n) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{N} + \theta\right)$$

donde $\theta = 2\pi q/N$, siendo q y N enteros.

(a) Determine cómo se puede emplear esta tabla de valores para obtener valores de sinusoides armónicamente relacionadas con la misma fase.

(b) Determine cómo se puede emplear esta tabla de valores para obtener sinusoides de la misma frecuencia pero fases diferentes.

Solución

(a) Sea $x_k(n)$ la secuencia sinusoidal

$$x_k(n) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nk}{N} + \theta\right)$$

Se trata de una sinusoide con una frecuencia $f_k = k/N$, relacionada armónicamente con $x(n)$. Pero $x_k(n)$ puede expresarse como sigue

$$x_k(n) = \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi(kn)}{N} + \theta\right] = x(kn)$$

Luego $x_k(0) = x(0)$, $x_k(1) = x(k)$, $x_k(2) = x(2k)$, etc. Por tanto, la secuencia sinusoidal $x_k(n)$ puede obtenerse de la tabla de valores de $x(n)$ tomando los valores k-ésimos de $x(n)$, comenzando por $x(0)$. De este modo, podemos generar los valores de todas las sinusoides armónicamente relacionadas con frecuencias $f_k = k/N$ para $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

(b) Podemos controlar la fase θ de la sinusoide de frecuencia $f_k = k/N$ tomando el primer valor de la secuencia de la posición de memoria $q = \theta N/2\pi$, donde q es un entero. Por tanto, la fase inicial θ controla la posición inicial en la tabla y nosotros barremos la tabla cada vez que el índice (kn) excede de N.

1.4 Conversiones analógica-digital y digital-analógica

La mayor parte de la señales con interés práctico, tales como las señales de voz, las señales biológicas, sísmicas, de radar, de sonar y las diversas señales de comunicación como las de audio y vídeo, son analógicas. Para poder procesar señales analógicas a través de medios digitales, primero es necesario convertirlas a formato digital, es decir, convertirlas en una secuencia de números con una precisión finita. Este procedimiento se denomina *conversión analógica-digital (A/D)*, y los dispositivos que la realizan son los *convertidores A/D* (*ADC*).

Conceptualmente, la conversión A/D es un proceso de tres pasos, el cual se ilustra en la Figura 1.4.1.

1. *Muestreo*. Este paso consiste en la conversión de una señal continua en el tiempo en una señal discreta en el tiempo obtenida mediante la toma de "muestras" de la señal continua en el tiempo en instantes discretos de tiempo. Por tanto, si $x_a(t)$ es la entrada del muestreador, la salida será $x_a(nT) \equiv x(n)$, donde T es el *intervalo de muestreo*.
2. *Cuantificación*. En este paso se realiza la conversión de una señal de valores continuos tomados en instantes discretos de tiempo en una señal de valores discretos en instantes de tiempo discretos (es decir, es una señal digital). El valor de cada muestra de la señal se representa mediante un valor seleccionado dentro de un conjunto finito de posibles valores. La diferencia entre la muestra no cuantificada $x(n)$ y la salida cuantificada $x_q(n)$ es el error de cuantificación.
3. *Codificación*. En el proceso de codificación, cada valor discreto $x_q(n)$ se representa mediante una secuencia binaria de b-bits.

Aunque hemos modelado el convertidor A/D como un muestreador seguido de un cuantificador y un codificador, en la práctica, la conversión A/D se realiza mediante un único dispositivo que toma $x_a(t)$ y produce un número codificado en binario. Las operaciones de muestreo y cuantificación se pueden realizar en cualquier orden aunque, en la práctica, el muestreo se efectúa siempre antes que la cuantificación.

En muchos casos prácticos (por ejemplo, el procesamiento de voz) es deseable convertir las señales digitales procesadas a formato analógico. Obviamente, no es posible escuchar la secuencia de muestras que representa una señal de voz o ver los dígitos correspondientes a una señal de TV. El proceso de conversión de una señal digital en una señal analógica se conoce como *conversión digital-analógica (D/A)*. Todos los convertidores D/A "conectan los puntos" de una señal digital realizando alguna clase de interpolación, cuya precisión depende de la

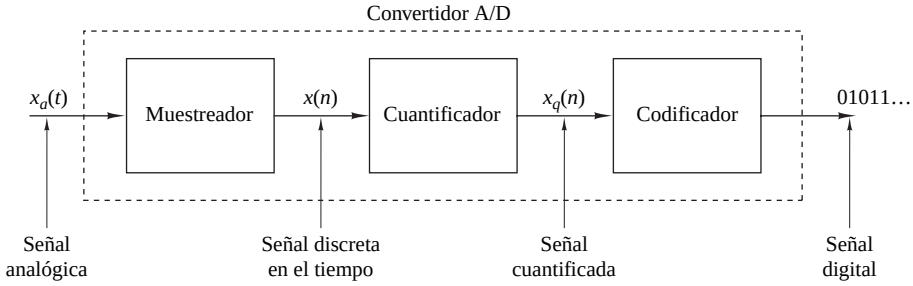


Figura 1.4.1. Partes básicas de un convertidor analógico-digital (A/D).

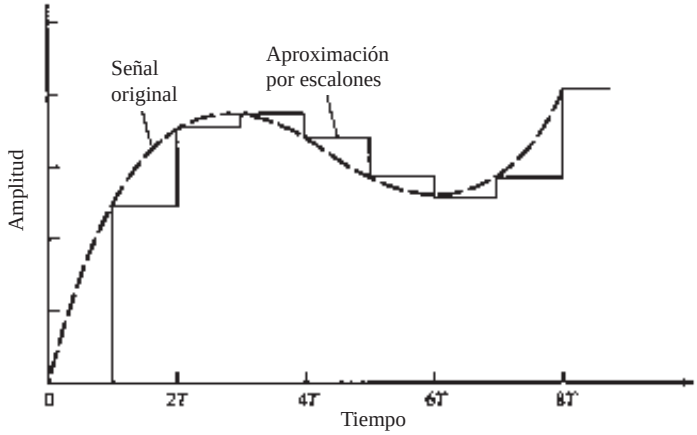


Figura 1.4.2. Conversión digital-analógica (D/A) con retención de orden cero.

calidad del proceso de conversión D/A. La Figura 1.4.2 ilustra un método simple de conversión D/A, denominado aproximación mediante escalones o mediante retención de orden cero. Existen otras aproximaciones, como por ejemplo la conexión lineal de una pareja de muestras sucesivas (interpolación lineal), el ajuste de una función cuadrática a través de tres muestras sucesivas (interpolación cuadrática), etc. ¿Existe un interpolador óptimo (ideal)? Para señales con un *contenido limitado en frecuencia* (ancho de banda finito), el teorema de muestreo que se presenta en la siguiente sección especifica el método óptimo de interpolación.

En esta sección se aborda el muestreo y la cuantificación. En concreto, vamos a demostrar que el muestreo no da lugar a una pérdida de información, es decir, no introduce distorsión en la señal si el ancho de banda de la señal es finito. En principio, la señal analógica puede reconstruirse a partir de las muestras, siempre y cuando la tasa de muestreo sea lo suficientemente alta como para evitar el problema generalmente conocido como *aliasing*. Por el contrario, la cuantificación es un proceso no reversible que distorsiona la señal. Veremos que la cantidad de distorsión es dependiente de la precisión, determinada por el número de bits del proceso de conversión A/D. Los factores que afectan a la elección de la precisión deseada del convertidor A/D son el coste y la frecuencia de muestreo. En general, el coste aumenta cuando aumenta la precisión y/o la frecuencia de muestreo.

1.4.1 Muestreo de señales analógicas

Existen muchas formas de muestrear una señal analógica. Vamos a limitar nuestra exposición al *muestreo uniforme* o *periódico*, que es el tipo de muestreo empleado más a menudo en la práctica, y que se describe mediante la siguiente relación

$$x(n) = x_a(nT), \qquad -\infty < n < \infty \tag{1.4.1}$$

donde $x(n)$ es la señal discreta en el tiempo obtenida "tomando muestras" de la señal analógica $x_a(t)$ cada T segundos. Este procedimiento se ilustra en la Figura 1.4.3. El intervalo de tiempo T entre muestras sucesivas es el *período de muestreo* o *intervalo de muestreo* y su recíproco $1/T = F_s$ se denomina *tasa de muestreo* (muestras por segundo) o *frecuencia de muestreo* (hercios).

El muestreo periódico establece una relación entre las variables t y n de las señales continuas y discretas en el tiempo, respectivamente. Estas variables se relacionan linealmente a través del período de muestreo T o, de forma equivalente, a través de la tasa de muestreo $F_s = 1/T$, como

$$t = nT = \frac{n}{F_s} \tag{1.4.2}$$

Como consecuencia de (1.4.2), existe una relación entre la variable de frecuencia F (u Ω) para las señales analógicas y la variable de frecuencia f (u ω) para las señales discretas en el tiempo. Para establecer la relación, considere una señal analógica sinusoidal de la forma

$$x_a(t) = A\cos(2\pi Ft + \theta) \tag{1.4.3}$$

la cual, cuando se muestrea periódicamente con una tasa de $F_s = 1/T$ muestras por segundo, da lugar a

$$x_a(nT) \equiv x(n) = A\cos(2\pi FnT + \theta) = A\cos\left(\frac{2\pi nF}{F_s} + \theta\right) \tag{1.4.4}$$

Si comparamos (1.4.4) con (1.3.9), vemos que las frecuencias F y f están relacionadas linealmente como sigue

$$f = \frac{F}{F_s} \tag{1.4.5}$$

o, de forma equivalente, como

$$\omega = \Omega T \tag{1.4.6}$$

La relación (1.4.5) justifica el nombre de *frecuencia relativa* o *normalizada*, que se emplea en ocasiones para describir la frecuencia f. Como (1.4.5) implica, podemos usar f para determinar la frecuencia F en hercios sólo si la frecuencia de muestreo F_s es conocida.

Recordemos de la Sección 1.3.1 que los rangos de las frecuencia F u Ω para sinusoides continuas en el tiempo son, respectivamente

$$\begin{aligned} -\infty &< F < \infty \\ -\infty &< \Omega < \infty \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

Sin embargo, la situación es diferente para las sinusoides discretas en el tiempo. Recordemos de la Sección 1.3.2 que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} &< f < \frac{1}{2} \\ -\pi &< \omega < \pi \end{aligned} \tag{1.4.8}$$

Sustituyendo (1.4.5) y (1.4.6) en (1.4.8), podemos determinar que la frecuencia de la sinusoide continua en el tiempo cuando se muestrea a una frecuencia $F_s = 1/T$, debe caer dentro del siguiente rango

$$-\frac{1}{2T} = -\frac{F_s}{2} \le F \le \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T} \tag{1.4.9}$$

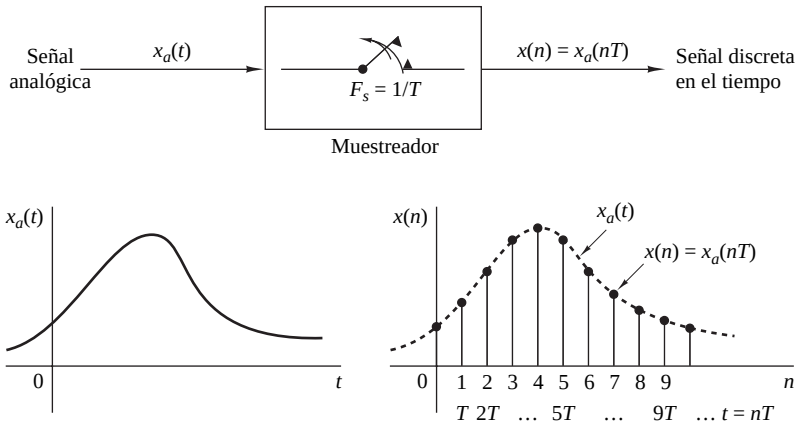


Figura 1.4.3. Muestreo periódico de una señal analógica.

Señales continuas en el tiempo		Señales discretas en el tiempo
$\Omega = 2\pi F$		$\omega = 2\pi f$
$\frac{\text{radianes}}{\text{segundo}}$ Hz		$\frac{\text{radianes}}{\text{muestra}}$ $\frac{\text{ciclos}}{\text{muestra}}$
	$\xrightarrow{\omega = \Omega T,\ f = F/F_s}$	
	$\xleftarrow{\Omega = \omega / T,\ F = f \cdot F_s}$	$-\pi \leq \omega \leq \pi$
		$-\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$
$-\infty < \Omega < \infty$		$-\pi/T \leq \Omega \leq \pi/T$
$-\infty < F < \infty$		$-F_2/2 \leq F \leq F_s/2$

Tabla 1.1. Relaciones entre las variables de frecuencia.

o, lo que es lo mismo,

$$-\frac{\pi}{T} = -\pi F_s \leq \Omega \leq \pi F_s = \frac{\pi}{T} \tag{1.4.10}$$

Estas relaciones se resumen en la Tabla 1.1

Basándonos en estas relaciones, vemos que la diferencia fundamental entre las señales continuas y discretas está en su rango de valores de las variables de frecuencia F y f, u Ω y ω. El muestreo periódico de una señal continua en el tiempo implica establecer una correspondencia entre el rango de frecuencias infinito de la variable F (u Ω) y el rango de frecuencias finito de la variable f (u ω). Puesto que la frecuencia más alta de una señal discreta en el tiempo es $\omega = \pi$ o $f = \frac{1}{2}$, se deduce que, con una frecuencia de muestreo F_s, los valores máximos correspondientes de F y Ω son

$$\begin{aligned} F_{\max} &= \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T} \\ \Omega_{\max} &= \pi F_s = \frac{\pi}{T} \end{aligned} \tag{1.4.11}$$

Por tanto, el muestreo introduce una ambiguedad, dado que la frecuencia más alta de una señal continua que puede determinarse únivocamente cuando dicha señal se muestrea a una frecuencia $F_s = 1/T$ es $F_{\max} = F_s/2$, u $\Omega_{\max} = \pi F_s$. Para ver qué ocurre con las frecuencias superiores a $F_s/2$, consideremos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.4.1

Las implicaciones de estas relaciones de frecuencia pueden apreciarse considerando las dos señales analógicas sinusoidales siguientes:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \cos 2\pi(10)t \\ x_2(t) &= \cos 2\pi(50)t \end{aligned} \tag{1.4.12}$$

las cuales son muestreadas a una frecuencia $F_s = 40$ Hz. Las correspondientes secuencias o señales discretas en el tiempo son

$$\begin{aligned} x_1(n) &= \cos 2\pi \left(\frac{10}{40}\right) n = \cos \frac{\pi}{2} n \\ x_2(n) &= \cos 2\pi \left(\frac{50}{40}\right) n = \cos \frac{5\pi}{2} n \end{aligned} \tag{1.4.13}$$

Sin embargo, $\cos 5\pi n/2 = \cos(2\pi n + \pi n/2) = \cos \pi n/2$, por lo que $x_2(n) = x_1(n)$. Por tanto, las señales sinusoidales son idénticas y, en consecuencia, indistinguibles. Dados los valores muestreados generados por $\cos(\pi/2)n$, existe una cierta ambiguedad, ya que no se puede determinar si dichos valores corresponden a $x_1(t)$ o a $x_2(t)$. Puesto que $x_2(t)$ toma exactamente los mismos valores que $x_1(t)$ cuando ambas señales se muestrean a una frecuencia de $F_s = 40$ muestras por segundo, decimos que la frecuencia $F_2 = 50$ Hz es un *alias* de la frecuencia $F_1 = 10$ Hz para la tasa de muestreo de 40 muestras por segundo.

Es importante destacar que F_2 no es el único el alias de F_1. De hecho, para la tasa de muestreo de 40 muestras por segundo, la frecuencia $F_3 = 90$ Hz es también un alias de F_1, así como de la frecuencia $F_4 = 130$ Hz, etc. Todas las sinusoides $\cos 2\pi(F_1 + 40k)t$, $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$, muestreadas a 40 muestras por segundo, tomarán valores idénticos. En consecuencia, todas son alias de $F_1 = 10$ Hz.

En general, el muestreo de una señal sinusoidal continua en el tiempo

$$x_a(t) = A\cos(2\pi F_0 t + \theta) \tag{1.4.14}$$

a una frecuencia de muestreo de $F_s = 1/T$ genera una señal discreta en el tiempo

$$x(n) = A\cos(2\pi f_0 n + \theta) \tag{1.4.15}$$

donde $f_0 = F_0/F_s$ es la frecuencia relativa de la sinusoide. Si suponemos que $-F_s/2 \le F_0 \le F_s/2$, la frecuencia f_0 de $x(n)$ se encuentra en el rango $-\frac{1}{2} \le f_0 \le \frac{1}{2}$, que es el rango de frecuencias para las señales discretas en el tiempo. En este caso, la relación entre F_0 y f_0 es una relación uno a uno y por tanto es posible identificar (o reconstruir) la señal analógica $x_a(t)$ a partir de las muestras $x(n)$.

Por el contrario, si las sinusoides

$$x_a(t) = A\cos(2\pi F_k t + \theta) \tag{1.4.16}$$

donde

$$F_k = F_0 + kF_s, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.4.17}$$

se muestrean a una frecuencia F_s, está claro que la frecuencia F_k no pertenece al rango de la frecuencia fundamental $-F_s/2 \le F \le F_s/2$. En consecuencia, la señal muestreada es

$$\begin{aligned} x(n) \equiv x_a(nT) &= A\cos\left(2\pi \frac{F_0 + kF_s}{F_s} n + \theta\right) \\ &= A\cos(2\pi n F_0/F_s + \theta + 2\pi k n) \\ &= A\cos(2\pi f_0 n + \theta) \end{aligned}$$

que es idéntica a la señal discreta en el tiempo dada por la expresión (1.4.15) obtenida al muestrear (1.4.14). Por tanto, un número infinito de sinusoides continuas en el tiempo está representado por el muestreo de la *misma* señal discreta en el tiempo (es decir, el mismo conjunto de muestras). En consecuencia, dada la secuencia $x(n)$, no es posible representar la señal continua en el tiempo $x_a(t)$ a partir de estos valores. O lo que es lo mismo, podemos decir que las frecuencias $F_k = F_0 + kF_s$, $-\infty < k < \infty$ (k entero) son indistinguibles de la frecuencia F_0 después del muestreo y, por tanto, son alias de F_0. La relación entre las variables de frecuencia de las señales continua y discreta en el tiempo se ilustra en la Figura 1.4.4.

En la Figura 1.4.5 se ilustra un ejemplo de *aliasing*, en el que dos sinusoides de frecuencias $F_0 = \frac{1}{8}$ Hz y $F_1 = -\frac{7}{8}$ Hz producen muestras idénticas cuando la frecuencia de muestreo es $F_s = 1$ Hz. A partir de (1.4.17) se deduce fácilmente que para $k = -1$, $F_0 = F_1 + F_s = (-\frac{7}{8} + 1)$ Hz $= \frac{1}{8}$ Hz.

Dado que $F_s/2$, que se corresponde con $\omega = \pi$, es la frecuencia más alta que puede representarse únivocamente con una frecuencia de muestreo F_s, es sencillo determinar la correspondencia de cualquier frecuencia

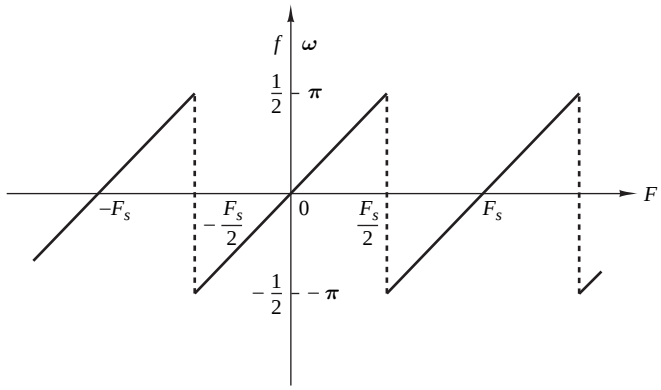


Figura 1.4.4. Relación entre las variables de frecuencia de las señales continua y discreta en el tiempo en el caso de muestreo periódico.

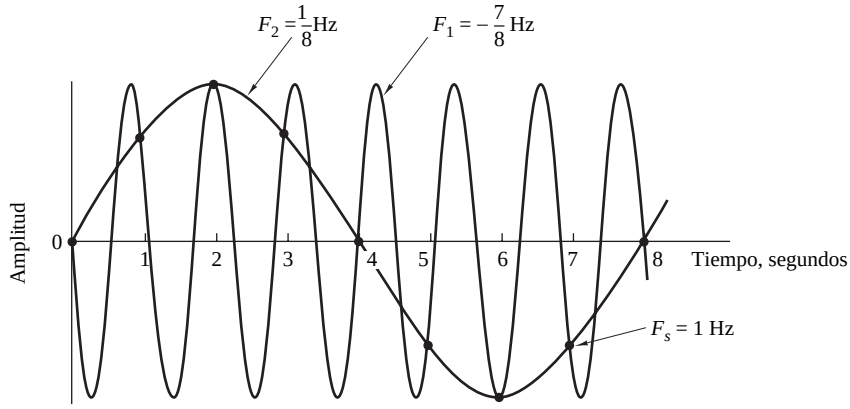


Figura 1.4.5. Ilustración del *aliasing.*

(alias) por encima de $F_s/2$ $(\omega = \pi)$ con la frecuencia equivalente por debajo de $F_s/2$. Podemos utilizar $F_s/2$ u $\omega = \pi$ como el punto de pivote y reflejar la frecuencia alias en el rango $0 \leq \omega \leq \pi$. Puesto que el punto de pivote o solapamiento es $F_s/2$ $(\omega = \pi)$, la frecuencia $F_s/2$ $(\omega = \pi)$ se denomina *frecuencia de solapamiento*.

EJEMPLO 1.4.2

Considere la señal analógica $x_a(t) = 3\cos 100\pi t$

(a) Determine la frecuencia de muestreo mínima necesaria para evitar el *aliasing*.

(b) Suponga que la señal se muestrea a la frecuencia $F_s = 200$ Hz. ¿Qué señal discreta en el tiempo se obtiene después de la operación de muestreo?

(c) Suponga que la señal se muestrea a la frecuencia $F_s = 75$ Hz. ¿Qué señal discreta en el tiempo se obtiene después del muestreo?

(d) ¿Cuál es la frecuencia $0 < F < F_s/2$ de una sinusoide que produce muestras idénticas a las obtenidas en el apartado (c)?

Solución.

(a) La frecuencia de la señal analógica es $F = 50$ Hz. Por tanto, la frecuencia de muestreo mínima necesaria para evitar el *aliasing* es $F_s = 100$ Hz.

(b) Si la señal se muestrea a la frecuencia $F_s = 200$ Hz, la señal discreta en el tiempo es

$$x(n) = 3\cos\frac{100\pi}{200}n = 3\cos\frac{\pi}{2}n$$

(c) Si la señal se muestrea a la frecuencia $F_s = 75$ Hz, la señal discreta en el tiempo será

$$\begin{aligned} x(n) &= 3\cos\frac{100\pi}{75}n = 3\cos\frac{4\pi}{3}n \\ &= 3\cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right)n = 3\cos\frac{2\pi}{3}n \end{aligned}$$

(d) Para la frecuencia de muestreo $F_s = 75$ Hz, tenemos

$$F = fF_s = 75f$$

La frecuencia de la sinusoide del apartado (c) es $f = \frac{1}{3}$. Por tanto,

$$F = 25 \text{ Hz}$$

Evidentemente, la señal sinusoidal

$$\begin{aligned} y_a(t) &= 3\cos 2\pi Ft \\ &= 3\cos 50\pi t \end{aligned}$$

muestreada a $F_s = 75$ muestras/s proporcionará muestras idénticas. Por tanto, $F = 50$ Hz es un alias de $F = 25$ Hz para la frecuencia de muestreo $F_s = 75$ Hz.

1.4.2 Teorema de muestreo

Dada cualquier señal analógica, ¿cómo podemos seleccionar el período de muestreo T o, lo que es equivalente, la frecuencia de muestreo F_s? Para responder a esta pregunta, tenemos que disponer de alguna información sobre las características de la señal que se va a muestrear. En concreto, necesitamos conocer información general acerca del *contenido en frecuencia* de la señal. Normalmente, dicha información estará disponible. Por ejemplo, sabemos que las principales componentes de frecuencia de una señal de voz se encuentran por debajo de los 3000 Hz. Por otro lado, las señales de televisión, generalmente, contienen componentes de frecuencia importantes hasta los 5 MHz. La información contenida en tales señales se encuentra en las amplitudes, frecuencias y fases de las diversas componentes de frecuencia, pero la información detallada de las características de dichas señales no estará disponible para nosotros antes de obtener las señales. De hecho, el propósito del procesamiento de señales es extraer dicha información detallada. Sin embargo, si conocemos la frecuencia máxima de la clase general de las señales (por ejemplo, la clase de las señales de vídeo, etc.), podremos especificar la frecuencia de muestreo necesaria para convertir las señales analógicas en señales digitales.

Supongamos que cualquier señal analógica puede representarse como una suma de sinusoides de diferentes amplitudes, frecuencias y fases, es decir,

$$x_a(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i \cos(2\pi F_i t + \theta_i) \tag{1.4.18}$$

donde N indica el número de componentes de frecuencia. Todas las señales, tales como las de voz y vídeo, se prestan a dicha representación en cualquier intervalo de tiempo pequeño. Normalmente, las amplitudes, frecuencias y fases varían lentamente con el tiempo de un intervalo a otro. Sin embargo, supongamos que

las frecuencias no exceden una determinada frecuencia conocida, que podemos denominar $F_{\max}$. Por ejemplo, $F_{\max} = 3000$ Hz para las señales de voz y $F_{\max} = 5$ MHz para las señales de televisión. Dado que la frecuencia máxima puede variar ligeramente dentro de la misma clase de señales (por ejemplo, la señal de voz de dos oradores diferentes), podemos querer asegurarnos de que $F_{\max}$ no excederá un valor predeterminado al pasar la señal analógica a través de un filtro que atenúe de forma importante las componentes de frecuencia por encima de $F_{\max}$. De este modo, podemos estar seguros de que ninguna señal de dicha clase contendrá componentes de frecuencia (que tengan una potencia o amplitud significativa) por encima de $F_{\max}$. En la práctica, dicho proceso de filtrado suele realizarse antes del muestreo.

Conocida $F_{\max}$, podemos seleccionar la apropiada frecuencia de muestreo. Sabemos que la frecuencia más alta de una señal analógica que puede reconstruirse sin ambiguedades cuando se muestrea la señal a una frecuencia $F_s = 1/T$ es $F_s/2$. Cualquier frecuencia por encima de $F_s/2$ o por debajo de $-F_s/2$ produce muestras que son idénticas a las correspondientes frecuencias dentro del rango $-F_s/2 \leq F \leq F_s/2$. Para evitar las ambiguedades debidas al *aliasing*, tenemos que elegir una frecuencia de muestreo que sea suficientemente alta. Es decir, hay que seleccionar $F_s/2$ para que sea mayor que $F_{\max}$. Por tanto, para evitar el problema del *aliasing*, se selecciona F_s de modo que

$$F_s > 2F_{\max} \tag{1.4.19}$$

donde $F_{\max}$ es la componente de frecuencia más alta de la señal analógica. Seleccionando de este modo la frecuencia de muestreo, cualquier componente de frecuencia, es decir, $|F_i| < F_{\max}$, de la señal analógica se corresponde con una sinusoide discreta en el tiempo con una frecuencia de

$$-\frac{1}{2} \leq f_i = \frac{F_i}{F_s} \leq \frac{1}{2} \tag{1.4.20}$$

o, lo que es equivalente,

$$-\pi \leq \omega_i = 2\pi f_i \leq \pi \tag{1.4.21}$$

Dado que $|f| = \frac{1}{2}$ o $|\omega| = \pi$ es la frecuencia más alta (única) de una señal discreta en el tiempo, elegir la frecuencia de muestreo de acuerdo con (1.4.19) evita el problema del *aliasing*. En otras palabras, la condición $F_s > 2F_{\max}$ asegura que todas las componentes sinusoidales de la señal analógica se corresponden con las componentes discretas en el tiempo con frecuencias incluidas en el intervalo fundamental. Por tanto, todas las componentes de frecuencia de la señal analógica están repesentadas en la forma muestreada sin ambiguedades y, en consecuencia, la señal analógica puede reconstruirse sin distorsión a partir de los valores de las muestras, empleando el método "adecuado" de interpolación (conversión digital-analógica). La fórmula de interpolación "adecuada" o ideal se especifica mediante el *teorema de muestreo*.

Teorema de muestreo. Si la frecuencia más alta contenida en una señal analógica $x_a(t)$ es $F_{\max} = B$ y la señal se muestrea a una frecuencia $F_s > 2F_{\max} \equiv 2B$, entonces $x_a(t)$ puede recuperarse de forma exacta a partir de los valores de sus muestras utilizando la siguiente función de interpolación:

$$g(t) = \frac{\operatorname{sen} 2\pi Bt}{2\pi Bt} \tag{1.4.22}$$

Luego, $x_a(t)$ puede expresarse como

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) g\left(t - \frac{n}{F_s}\right) \tag{1.4.23}$$

donde $x_a(n/F_s) = x_a(nT) \equiv x(n)$ son las muestras de $x_a(t)$.

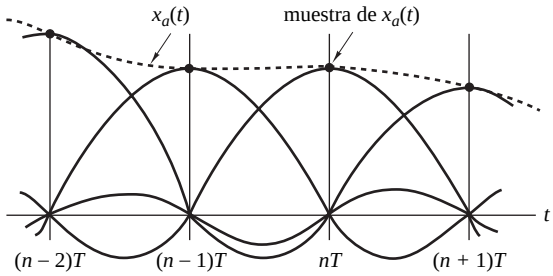


Figura 1.4.6. Conversión D/A ideal (interpolación).

Cuando el muestreo de $x_a(t)$ se realiza a la frecuencia mínima de muestreo $F_s = 2B$, la fórmula de reconstrucción (1.4.23) se convierte en

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{2B}\right) \frac{\operatorname{sen} 2\pi B(t - n/2B)}{2\pi B(t - n/2B)} \tag{1.4.24}$$

La frecuencia de muestreo $F_N = 2B = 2F_{\max}$ se denomina *frecuencia de Nyquist*. La Figura 1.4.6 ilustra el proceso de conversión D/A ideal utilizando la función de interpolación dada por (1.4.22).

Como podemos observar en (1.4.23) o (1.4.24), la reconstrucción de $x_a(t)$ a partir de la secuencia $x(n)$ es un proceso complicado, que implica una suma ponderada de la función de interpolación $g(t)$ y sus versiones desplazadas en el tiempo $g(t - nT)$ para $-\infty < n < \infty$, donde los factores de ponderación son las muestras de $x(n)$. A causa de la complejidad y del número infinito de muestras necesario en (1.4.23) o (1.4.24), estas fórmulas de reconstrucción tienen fundamentalmente un interés teórico. Los métodos de interpolación prácticos se exponen en el Capítulo 6.

EJEMPLO 1.4.3

Considere la siguiente señal analógica

$$x_a(t) = 3\cos 50\pi t + 10 \operatorname{sen} 300\pi t - \cos 100\pi t$$

¿Cuál es la frecuencia de Nyquist para esta señal?

Solución. Las frecuencias presentes en la señal anterior son

$$F_1 = 25 \text{ Hz}, \qquad F_2 = 150 \text{ Hz}, \qquad F_3 = 50 \text{ Hz}$$

Por tanto, $F_{\max} = 150$ Hz y de acuerdo con (1.4.19),

$$F_s > 2F_{\max} = 300 \text{ Hz}$$

La frecuencia de Nyquist es $F_N = 2F_{\max}$. Por tanto,

$$F_N = 300 \text{ Hz}$$

Razonamiento. Debemos observar que la componente de señal $10 \sin 300\pi t$, muestreada a la frecuencia de Nyquist $F_N = 300$, produce muestras $10 \sin \pi n$, que son idénticas a cero. En otras palabras, estamos muestreando la sinusoide analógica en sus puntos de paso por cero, y por tanto perdemos esta componente de señal por completo. Esta situación no se produce si la sinusoide se desplaza en fase un cierto ángulo θ. En dicho caso, tenemos una señal $10 \sin(300\pi t + \theta)$ muestreada a la frecuencia de Nyquist de $F_N = 300$ muestras por segundo, que proporciona las muestras siguientes

$$\begin{aligned} 10 \operatorname{sen}(\pi n + \theta) &= 10(\operatorname{sen} \pi n \cos\theta + \cos \pi n \operatorname{sen}\theta) \\ &= 10 \operatorname{sen}\theta \cos \pi n \\ &= (-1)^n 10 \operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Por tanto, si $\theta \neq 0$ o π, las muestras de la sinusoide tomadas a la frecuencia de Nyquist son distintas de cero. Sin embargo, no podemos conocer todavía la amplitud correcta de las muestras cuando la fase θ es desconocida. Una solución simple para evitar esta potencialmente problemática situación consiste en muestrear la señal analógica a una frecuencia mayor que la frecuencia de Nyquist.

EJEMPLO 1.4.4

Considere la siguiente señal analógica

$$x_a(t) = 3\cos 2000\pi t + 5\,\mathrm{sen}\, 6000\pi t + 10\cos 12{,}000\pi t$$

(a) ¿Cuál es la frecuencia de Nyquist para esta señal?

(b) Suponga que esta señal se muestrea empleando una tasa de muestreo de $F_s = 5000$ muestras/s. ¿Cómo es la señal discreta en el tiempo obtenida después del muestreo?

(c) ¿Cómo es la señal analógica $y_a(t)$ que se puede reconstruir a partir de las muestras si se emplea interpolación ideal?

Solución.

(a) Las frecuencias existentes en la señal analógica son

$$F_1 = 1 \text{ kHz}, \qquad F_2 = 3 \text{ kHz}, \qquad F_3 = 6 \text{ kHz}$$

Luego $F_{\max} = 6$ kHz y, de acuerdo con el teorema de muestreo,

$$F_s > 2F_{\max} = 12 \text{ kHz}$$

La frecuencia de Nyquist es:

$$F_N = 12 \text{ kHz}$$

(b) Dado que hemos seleccionado $F_s = 5$ kHz, la frecuencia de solapamiento es

$$\frac{F_s}{2} = 2.5 \text{ kHz}$$

y ésta es la frecuencia máxima que puede ser representada únicamente por la señal muestreada. Utilizando (1.4.2), obtenemos

$$\begin{aligned} x(n) &= x_a(nT) = x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) \\ &= 3\cos 2\pi\left(\tfrac{1}{5}\right)n + 5\,\mathrm{sen}\, 2\pi\left(\tfrac{3}{5}\right)n + 10\cos 2\pi\left(\tfrac{6}{5}\right)n \\ &= 3\cos 2\pi\left(\tfrac{1}{5}\right)n + 5\,\mathrm{sen}\, 2\pi\left(1-\tfrac{2}{5}\right)n + 10\cos 2\pi\left(1+\tfrac{1}{5}\right)n \\ &= 3\cos 2\pi\left(\tfrac{1}{5}\right)n + 5\,\mathrm{sen}\, 2\pi\left(-\tfrac{2}{5}\right)n + 10\cos 2\pi\left(\tfrac{1}{5}\right)n \end{aligned}$$

Por último, obtenemos

$$x(n) = 13\cos 2\pi\left(\tfrac{1}{5}\right)n - 5\,\mathrm{sen}\, 2\pi\left(\tfrac{2}{5}\right)n$$

Puede obtenerse el mismo resultado utilizando la Figura 1.4.7. Por tanto, dado que $F_s = 5$ kHz, la frecuencia de solapamiento es $F_s/2 = 2.5$ kHz, y se trata de la frecuencia máxima que puede ser representada únicamente por la señal muestreada. A partir de (1.4.17), tenemos $F_0 = F_k - kF_s$. Por tanto, F_0 puede obtenerse restando de F_k un múltiplo entero de F_s, tal que $-F_s/2 \leq F_0 \leq F_s/2$. La frecuencia F_1 es menor que $F_s/2$ y, por tanto, no se ve afectada por el efecto del *aliasing*. Sin embargo, las otras dos frecuencias se encuentran por encima de la frecuencia de solapamiento, por lo que el efecto de *aliasing* las modificará. Así,

$$\begin{aligned} F_2' &= F_2 - F_s = -2 \text{ kHz} \\ F_3' &= F_3 - F_s = 1 \text{ kHz} \end{aligned}$$

A partir de (1.4.5), se concluye que $f_1 = \frac{1}{5}$, $f_2 = -\frac{2}{5}$ y $f_3 = \frac{1}{5}$, lo que está de acuerdo con el resultado anterior.

(c) Puesto que en la señal muestreada sólo están presentes las componentes de frecuencia a 1 kHz y 2 kHz, la señal analógica que podemos recuperar es

$$ya(t) = 13\cos 2000\pi t - 5\,\mathrm{sen}\,4000\pi t$$

la cual, obviamente es diferente de la señal original $x_a(t)$. Esta distorsión de la señal analógica original se debe al efecto del *aliasing*, el cual aparece debido a la baja frecuencia de muestreo empleada.

Aunque el *aliasing* es un incoveniente que tiene que evitarse, existen dos aplicaciones prácticas útiles basadas en la explotación del efecto de *aliasing*. Dichas aplicaciones son el estroboscopio y el osciloscopio muestreador. Ambos instrumentos están diseñados para trabajar como dispositivos con *aliasing* con el fin de representar las altas y bajas frecuencias.

Consideremos una señal con las componentes de frecuencia confinadas en una banda de frecuencias dada $B_1 < F < B_2$, donde $B_2 - B_1 \equiv B$ se define como el ancho de banda de la señal. Suponemos que $B << B_1 < B_2$. Esta condición quiere decir que las componentes de frecuencia de la señal son mucho más grandes que el ancho de banda B de la señal. Tales señales habitualmente se denominan señales paso banda o de banda estrecha. Ahora bien, si esta señal se muestrea a una frecuencia $F_s \geq 2B$, pero $F_s << B_1$, entonces todas las componentes de frecuencia contenidas en la señal serán alias de las frecuencias comprendidas en el rango $0 < F < F_s/2$. En consecuencia, si observamos el contenido en frecuencia de la señal en el rango fundamental $0 < F < F_s/2$, conoceremos de forma precisa el contenido en frecuencia de la señal analógica, ya que conocemos la banda de frecuencias $B_1 < F < B_2$ que se está considerando. Por tanto, si la señal es una señal de banda estrecha (paso banda), podemos reconstruir la señal original a partir de las muestras obtenidas cuando la señal se ha muestreado a una frecuencia $F_s > 2B$, siendo B el ancho de banda. Esta afirmación es otra forma de enunciar el teorema de muestreo, la cual se denomina *forma pasobanda* para diferenciarla de la forma anterior del teorema, que se aplica en general a todos los tipos de señales y a la que a veces se hace referencia como *forma en banda base*. La *forma en banda base* del teorema de muestreo se describe en detalle en la Sección 6.4.

1.4.3 Cuantificación de señales continuas en amplitud

Como hemos visto, una señal digital es una secuencia de números (muestras) en la que cada número está representado por un número finito de dígitos (precisión finita).

El proceso de convertir una señal discreta en el tiempo con amplitud continua en una señal digital expresando cada valor de muestra como un numero finito (en lugar de infinito) de dígitos se denomina *cuantificación*. El error introducido al representar la señal continua mediante un conjunto finito de niveles discretos es el *error de cuantificación* o *ruido de cuantificación*.

La operación de cuantificación de las muestras $x(n)$ la denotamos mediante $Q[x(n)]$ y empleamos $x_q(n)$ para indicar la secuencia de las muestras cuantificadas a la salida del cuantificador. Por tanto,

$$x_q(n) = Q[x(n)]$$

Luego el error de cuantificación es una secuencia $e_q(n)$ definida como la diferencia entre el valor cuantificado y el valor de la muestra real. Por tanto,

$$e_q(n) = x_q(n) - x(n) \tag{1.4.25}$$

Vamos a ilustrar el proceso de cuantificación mediante un ejemplo. Consideremos la señal discreta en el tiempo

$$x(n) = \begin{cases} 0.9^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

obtenida al muestrear la señal analógica exponencial $x_a(t) = 0.9^t, t \geq 0$ a una frecuencia de muestreo de $F_s = 1$ Hz (*véase* la Figura 1.4.7(a)). Si nos fijamos en la Tabla 1.2, que especifica los valores de las 10 primeras muestras

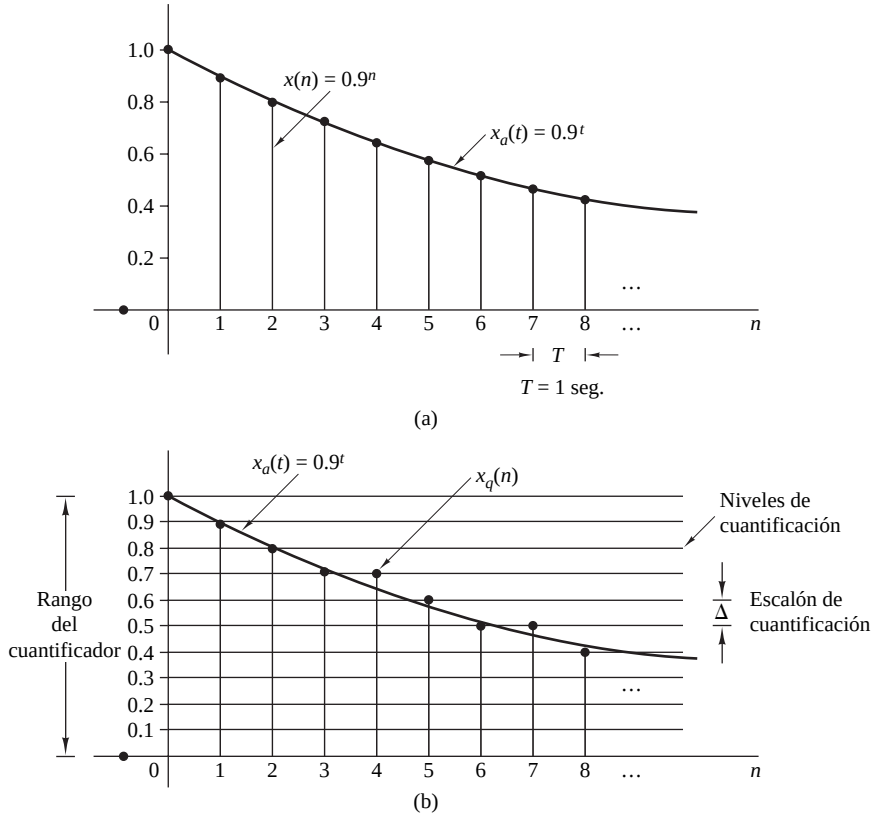


Figura 1.4.7. Ilustración de la cuantificación.

de $x(n)$, vemos que la descripción del valor de la muestra $x(n)$ requiere n dígitos significativos. Es evidente que esta señal no puede procesarse utilizando una calculadora o una computadora digital, ya que sólo las primeras muestras pueden almacenarse y manipularse. Por ejemplo, la mayoría de las calculadoras procesan números con sólo ocho dígitos significativos.

Sin embargo, vamos a suponer que sólo deseamos emplear un dígito significativo. Para eliminar el resto de los dígitos, podemos simplementemente descartarlos (*truncamiento*) o descartarlos redondeando el número resultante (*redondeo*). Las señales cuantificadas resultantes $x_q(n)$ se indican en la Tabla 1.2. Vamos a centrarnos en la cuantificación mediante redondeo, aunque la cuantificación mediante truncamiento es igual de sencilla. El proceso de redondeo se ilustra gráficamente en la Figura 1.4.7(b). Los valores permitidos en la señal digital son los *niveles de cuantificación*, mientras que la distancia Δ entre dos niveles de cuantificación sucesivos define el *tamaño del escalón de cuantificación* o *resolución*. El cuantificador por redondeo asigna cada muestra de $x(n)$ al nivel de cuantificación más próximo. Por el contrario, un cuantificador que realice una operación de truncamiento asignará cada muestra de $x(n)$ al nivel de cuantificación inmediatamente inferior. El error de cuantificación $e_q(n)$ en el redondeo está limitado en el rango comprendido entre $-\Delta/2$ y $\Delta/2$, es decir,

$$-\frac{\Delta}{2} \leq e_q(n) \leq \frac{\Delta}{2} \tag{1.4.26}$$

En otras palabras, el error de cuantificación instantáneo no puede ser mayor que la mitad del escalón de cuantificación (*véase* la Tabla 1.2).

n	$x(n)$ Señal discreta en el tiempo	$x_q(n)$ (Truncamiento)	$x_q(n)$ (Redondeo)	$e_q(n) = x_q(n) - x(n)$ (Redondeo)
0	1	1.0	1.0	0.0
1	0.9	0.9	0.9	0.0
2	0.81	0.8	0.8	−0.01
3	0.729	0.7	0.7	−0.029
4	0.6561	0.6	0.7	0.0439
5	0.59049	0.5	0.6	0.00951
6	0.531441	0.5	0.5	−0.031441
7	0.4782969	0.4	0.5	0.0217031
8	0.43046721	0.4	0.4	−0.03046721
9	0.387420489	0.3	0.4	0.012579511

Tabla 1.2. Ilustración numérica de la cuantificación con un dígito significativo utilizando truncamiento y redondeo.

Si $x_{\min}$ y $x_{\max}$ representan los valores mínimo y máximo de $x(n)$ y L es el número de niveles de cuantificación, entonces

$$\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{L - 1} \tag{1.4.27}$$

Definimos el *rango dinámico* de la señal como $x_{\max} - x_{\min}$. En nuestro ejemplo, tenemos $x_{\max} = 1$, $x_{\min} = 0$ y $L = 11$, lo que nos lleva a un valor de $\Delta = 0.1$. Observe que si se establece el rango dinámico aumentando el número de niveles de cuantificación L, el tamaño del escalón de cuantificación se reduce. Por tanto, el error de cuantificación disminuye y la precisión del cuantificador aumenta. En la práctica, podemos reducir el error de cuantificación a una cantidad insignificante seleccionando un número suficiente de niveles de cuantificación.

En teoría, la cuantificación de señales analógicas siempre produce pérdidas de información. Éste es un resultado de la ambiguedad introducida por el proceso de cuantificación. Además, la cuantificación es un proceso irreversible o no invertible (es decir, una relación muchos-a-uno), ya que todas las muestras que se encuentran a una distancia $\Delta/2$ de un determinado nivel de cuantificación reciben el mismo valor. Esta ambiguedad hace que realizar un análisis cuantitativo exacto de la cuantificación sea extremadamente complejo. Este tema se aborda más en detalle en el Capítulo 6, donde emplearemos el análisis estadístico.

1.4.4 Cuantificación de señales sinusoidales

La Figura 1.4.8 ilustra los procesos de muestreo y cuantificación de la señal analógica sinusoidal $x_a(t) = A\cos\Omega_0 t$, utilizando una cuadrícula rectangular. Las líneas horizontales dentro del rango del cuantificador indican los niveles de cuantificación permitidos. Las líneas verticales indican los instantes de muestreo. De este modo, a partir de la señal analógica original $x_a(t)$ obtenemos, al muestear, una señal discreta en el tiempo $x(n) = x_a(nT)$ y una señal discreta en el tiempo y de amplitudes discretas $x_q(nT)$ después de la cuantificación. En la práctica, la señal en escalera $x_q(t)$ se puede obtener utilizando un retenedor de orden cero. Este análisis es útil porque se emplean sinusoides como señales de prueba en los convertidores A/D.

Si la frecuencia de muestreo F_s satisface el teorema de muestreo, el error de cuantificación es el único error que se produce en el proceso de conversión A/D.

Por tanto, podemos evaluar el error de cuantificación, cuantificando la señal analógica $x_a(t)$ en lugar de la señal discreta en el tiempo $x(n) = x_a(nT)$. La inspección de la Figura 1.4.8 indica que la señal $x_a(t)$ es prácticamente lineal entre niveles de cuantificación (*véase* la Figura 1.4.9). El error de cuantificación correspondiente

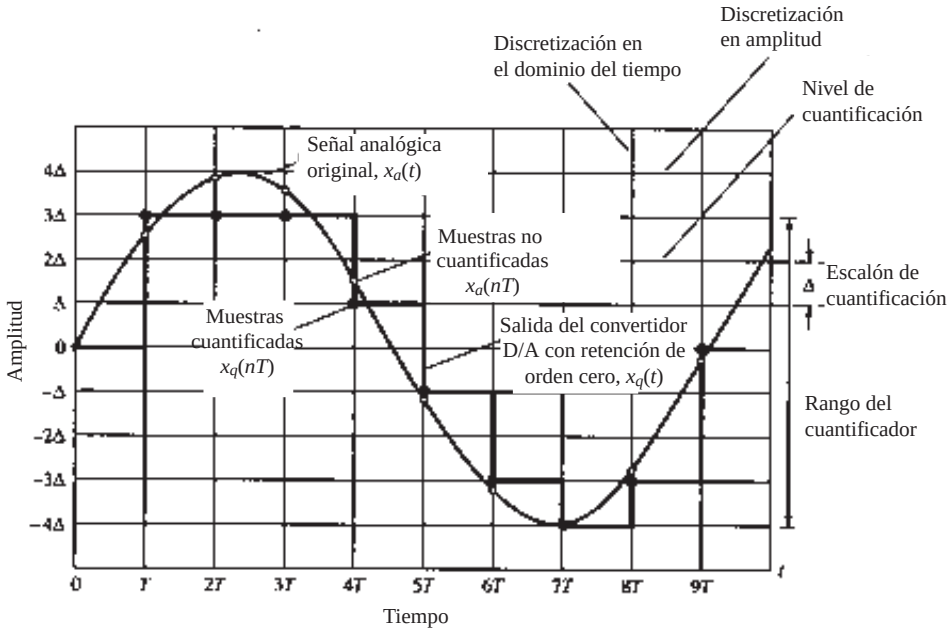


Figura 1.4.8. Muestreo y cuantificación de una señal sinusoidal.

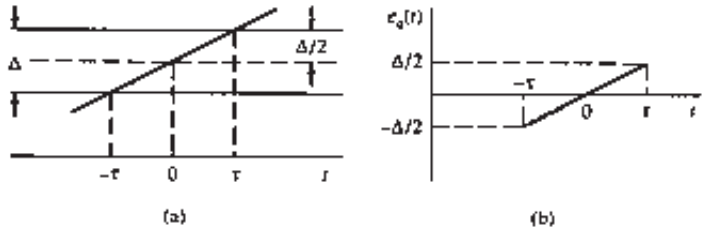


Figura 1.4.9. El error de cuantificación $e_q(t) = x_a(t) - x_q(t)$.

$e_q(t) = x_a(t) - x_q(t)$ se muestra en la Figura 1.4.9. En esta figura, τ indica el tiempo que $x_a(t)$ permanece dentro de los niveles de cuantificación. La potencia del error cuadrático medio P_q es

$$P_q = \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} e_q^2(t)\,dt = \frac{1}{\tau}\int_{0}^{\tau} e_q^2(t)\,dt \tag{1.4.28}$$

Como $e_q(t) = (\Delta/2\tau)t$, $-\tau \le t \le \tau$, tenemos

$$P_q = \frac{1}{\tau}\int_{0}^{\tau}\left(\frac{\Delta}{2\tau}\right)^2 t^2\,dt = \frac{\Delta^2}{12} \tag{1.4.29}$$

Si el cuantificador tiene b bits de precisión y cubre el rango completo $2A$, el escalón de cuantificación es $\Delta = 2A/2^b$. Por tanto,

$$P_q = \frac{A^2/3}{2^{2b}} \tag{1.4.30}$$

La potencia media de la señal $x_a(t)$ es

$$P_x = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} (A\cos\Omega_0 t)^2\, dt = \frac{A^2}{2} \tag{1.4.31}$$

La calidad de la salida del convertidor A/D normalmente se mide mediante la relación señal-ruido de cuantificación (SQNR, *signal-to-quantization noise ratio*), que relaciona la potencia de señal con la potencia de ruido:

$$\text{SQNR} = \frac{P_x}{P_q} = \frac{3}{2}\cdot 2^{2b}$$

Expresada en decibelios(dB), la relación SQNR es

$$\text{SQNR}(\text{dB}) = 10\log_{10}\text{SQNR} = 1.76 + 6.02b \tag{1.4.32}$$

Esto implica que la relación SQNR aumenta aproximadamente 6 dB por cada bit que se añade a la longitud de palabra, es decir, cada vez que se duplica el número de niveles de cuantificación.

Aunque la fórmula (1.4.32) se ha obtenido para señales sinusoidales, en el Capítulo 6 veremos que se obtiene un resultado similar para cualquier señal cuyo rango dinámico comprenda el rango del cuantificador. Esta relación es extremadamente importante porque fija el número de bits que una aplicación específica requiere para asegurar una determinada relación señal-ruido. Por ejemplo, la mayoría de los reproductores de discos compactos utilizan una frecuencia de muestreo de 44.1 kHz y una resolución de 16-bits por muestra, lo que implica una relación SQNR superior a 96 dB.

1.4.5 Codificación de muestras cuantificadas

El proceso de codificación de un convertidor A/D asigna un número binario unívoco a cada nivel de cuantificación. Si tenemos L niveles, necesitaremos al menos L números binarios distintos. Con una longitud de palabra de b bits, podemos crear 2^b números binarios distintos. Por tanto, tendremos $2^b \geq L$, o, lo que es lo mismo, $b \geq \log_2 L$. Por tanto, el número de bits necesarios del codificador es el entero más pequeño mayor o igual que $\log_2 L$. En nuestro ejemplo (Tabla 1.2), podemos ver fácilmente que necesitamos un codificador con $b = 4$ bits. Hay disponibles A/D comerciales que pueden proporcionar una precisión finita de $b = 16$ o menor. En general, cuanto mayor es la frecuencia de muestreo y más ajustada es la cuantificación, más caro es el dispositivo.

1.4.6 Conversión digital-analógica

Para convertir una señal digital en una señal analógica podemos utilizar un convertidor digital-analógico (D/A). Como hemos dicho anteriormente, la tarea de un convertidor D/A consiste en interpolar entre muestras.

El teorema de muestreo especifica la interpolación óptima para una señal de banda limitada. Sin embargo, este tipo de interpolación es demasisado compleja y, por tanto, poco práctica, como ya hemos comentado anteriormente. Desde un punto de vista práctico, el convertidor D/A más sencillo es el retenedor de orden cero mostrado en la Figura 1.4.2, el cual simplemente conserva (retiene) el valor constante de una muestra hasta que se recibe la siguiente. Utilizando la interpolación lineal puede obtenerse una mejor interpolación, como se muestra en la Figura 1.4.10 conectando las muestras sucesivas mediante segmentos de línea recta. Se puede conseguir una mejor interpolación utilizando técnicas de interpolación más sofisticadas de orden superior.

En general, las técnicas de interpolación subóptimas dejan pasar frecuencias por encima de la frecuencia de solapamiento. Tales componentes de frecuencia no son deseables y normalmente se eliminan haciendo pasar la salida de la interpolación a través del apropiado filtro analógico, el cual se denomina *post-filtro* o *filtro de suavizado*.

Por tanto, normalmente, la conversión D/A implica el uso de un interpolator subóptimo seguido de un post-filtro. Los convertidores D/A se estudian más en detalle en el Capítulo 6.

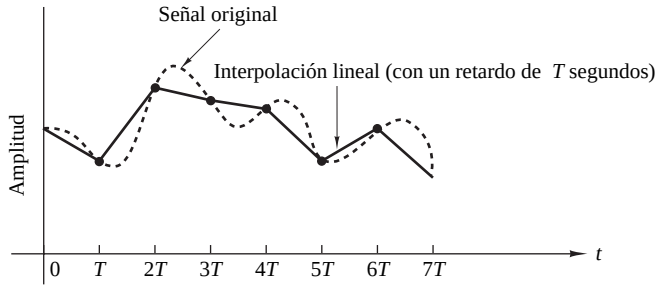


Figura 1.4.10. Conector lineal de puntos (con un retardo de T segundos).

1.4.7 Análisis de señales y sistemas digitales frente a señales y sistemas discretos en el tiempo

Hemos visto que una señal digital se define como una función de una variable independiente entera y sus valores se toman de un conjunto finito de posibles valores. La utilidad de tales señales es una consecuencia de las posibilidades ofrecidas por las computadoras digitales. Las computadoras trabajan con números, los cuales se representan mediante cadenas de caracteres formadas por 0s y 1s. La longitud de esta cadena (*longitud de palabra*) es fija y finita y, normalmente, es igual a 8, 12, 16 o 32 bits. Los efectos de una longitud de palabra finita en los cálculos causa complicaciones en el análisis de los sistemas de tratamiento digital de señales. Con el fin de evitar estas complicaciones, despreciaremos la naturaleza cuantificada de las señales y sistemas digitales en la mayor parte de nuestros análisis y los consideraremos como señales y sistemas discretos en el tiempo.

En los Capítulos 6, 9 y 10 se tratan las consecuencias de utilizar una longitud de palabra finita. Éste es un tema importante, dado que muchos de los problemas del procesamiento digital de señales se resuelven empleando computadoras pequeñas o microprocesadores que utilizan aritmética de punto fijo. En consecuencia, es preciso tratar con cuidado el problema de la arimética de precisión finita y tenerla en cuenta en el diseño del software y el hardware que llevan a cabo las tareas de tratamiento de la señal deseada.

1.5 Resumen y referencias

En este capítulo de introducción hemos intentado proporcionar la motivación de utilizar el tratamiento digital de señales como alternativa al procesamiento analógico. Hemos presentado los elementos básicos de un sistema de procesamiento digital de señales y hemos definido las operaciones necesarias para convertir una señal analógica en una señal digital que pueda ser procesada. De particular importancia es el teorema de muestreo, que fue planteado por Nyquist (1928) y que más tarde, en 1949, popularizó Shannon. El teorema de muestreo como se ha descrito en la Sección 1.4.2 se demuestra en el Capítulo 6. Las señales sinusoidales se han introducido fundamentalmente con el propósito de ilustrar el fenómeno del *aliasing* y para el subsiguiente desarrollo del teorema de muestreo.

También se han presentado en el capítulo los efectos de la cuantificación que son inherentes a la conversión A/D de una señal. La cuantificación de señales se analiza mejor en términos estadísticos, como se verá en los Capítulos 6, 9 y 10.

Por último, se ha descrito brevemente el tema de la reconstrucción de la señal, o conversión D/A. En la Sección 6.3 se aborda la reconstrucción de señales basada en la interpolación mediante escalones.

Existen numerosas aplicaciones prácticas del procesamiento digital de señales. El libro editado por Oppenheim (1978) aborda aplicaciones como el tratamiento de voz, de imágenes, de señales de radar, de sonar y geofísicas.

Problemas

1.1 Clasifique las siguientes señales según sean (1) unidimensionales o multidimensionales; (2) de un solo canal o multicanal, (3) continuas o discretas en el tiempo y (4) analógicas o digitales (en amplitud). Proporcione una breve explicación.

(a) Los precios de cierre de las acciones de la Bolsa de Nueva York.

(b) Una película en color.

(c) La posición del volante de un automóvil en movimiento respecto a un sistema de referencia situado en el automóvil.

(d) La posición del volante de un automóvil en movimiento respecto a un sistema de referencia situado en el suelo.

(e) Las medidas de peso y altura mensuales de un niño.

1.2 Determine cuáles de las siguientes sinusoides son periódicas y calcule su período fundamental.

(a) $\cos 0.01\pi n$

(b) $\cos\left(\pi \dfrac{30n}{105}\right)$

(c) $\cos 3\pi n$

(d) $\operatorname{sen} 3n$

(e) $\operatorname{sen}\left(\pi \dfrac{62n}{10}\right)$

1.3 Determine si las siguientes señales son periódicas. En caso afirmativo, especifique su frecuencia fundamental.

(a) $x_a(t) = 3\cos(5t + \pi/6)$

(b) $x(n) = 3\cos(5n + \pi/6)$

(c) $x(n) = 2\exp[j(n/6 - \pi)]$

(d) $x(n) = \cos(n/8)\cos(\pi n/8)$

(e) $x(n) = \cos(\pi n/2) - \operatorname{sen}(\pi n/8) + 3\cos(\pi n/4 + \pi/3)$

1.4 **(a)** Demuestre que el período fundamental N_p de las señales siguientes:

$$s_k(n) = e^{j2\pi kn/N}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

está dado por $N_p = N/\mathrm{MCD}(k, N)$, donde MCD es el máximo común divisor de k y N.

(b) ¿Cuál es el período fundamental de este conjunto para $N = 7$?

(c) ¿y para $N = 16$?

1.5 Considere la siguiente señal analógica sinusoidal:

$$x_a(t) = 3\operatorname{sen}(100\pi t)$$

(a) Represente gráficamente la señal $x_a(t)$ para $0 \le t \le 30$ ms.

(b) La señal $x_a(t)$ se muestrea con una tasa de muestreo de $F_s = 300$ muestras/s. Determine la frecuencia de la señal discreta en el tiempo $x(n) = x_a(nT)$, $T = 1/F_s$, y demuestre que es periódica.

(c) Calcule los valores de la muestras en un período de $x(n)$. Dibuje $x(n)$ en la misma gráfica que $x_a(t)$. ¿Cuál es el período de la señal discreta en el tiempo en milisegundos?

(d) ¿Puede hallar una frecuencia de muestreo F_s tal que la señal $x(n)$ alcance su valor de pico en 3? ¿Cuál es la frecuencia mínima F_s aceptable para esta tarea?

1.6 Una sinusoide continua en el tiempo $x_a(t)$ con un período fundamental de $T_p = 1/F_0$ se muestrea a una frecuencia $F_s = 1/T$, con el fin de generar una sinusoide discreta en el tiempo $x(n) = x_a(nT)$.

(a) Demuestre que $x(n)$ es periódica si $T/T_p = k/N$ (es decir, T/T_p es un número racional).

(b) Si $x(n)$ es periódica, ¿cuál es su período fundamental T_p en segundos?

(c) Explique la siguiente afirmación: $x(n)$ es periódica si su período fundamental T_p, en segundos, es igual a un número entero de períodos de $x_a(t)$.

1.7 Una señal analógica contiene frecuencias hasta 10 kHz.

(a) ¿Cuál es el rango de frecuencias de muestreo que permite la reconstrucción exacta de esta señal a partir de sus muestras?

(b) Suponga que muestreamos esta señal a una frecuencia de muestreo $F_s = 8$ kHz. Examine lo que ocurre con la frecuencia $F_1 = 5$ kHz.

(c) Repita el apartado (b) para una frecuencia $F_2 = 9$ kHz.

1.8 Una señal analógica de electrocardiograma (ECG) contiene frecuencias útiles hasta 100 Hz.

(a) ¿Cuál es la frecuencia de Nyquist de esta señal?

(b) Suponga que muestreamos esta señal a una tasa de 250 muestras/s. ¿Cuál es la frecuencia más alta que puede representarse de forma unívoca para esta tasa de muestreo?

1.9 Una señal analógica $x_a(t) = \operatorname{sen}(480\pi t) + 3\operatorname{sen}(720\pi t)$ se muestrea 600 veces por segundo.

(a) Determine la frecuencia de muestreo de $x_a(t)$.

(b) Determine la frecuencia de solapamiento.

(c) ¿Cuáles son las frecuencias, en radianes, de la señal discreta en el tiempo resultante $x(n)$?

(d) Si $x(n)$ se pasa a través de un convertidor ideal D/A, ¿cómo es la señal reconstruida $y_a(t)$?

1.10 Un enlace de comunicaciones digital transporta palabras codificadas en binario que representan muestras de una señal de entrada

$$x_a(t) = 3\cos 600\pi t + 2\cos 1800\pi t$$

El enlace trabaja a una velocidad de 10.000 bits/s y cada muestra de entrada se cuantifica en 1024 niveles de tensión distintos.

(a) Determine las frecuencias de muestreo y de solapamiento.

(b) ¿Cuál es la frecuencia de Nyquist de la señal $x_a(t)$?

(c) ¿Cuáles son las frecuencias de la señal discreta en el tiempo resultante $x(n)$?

(d) ¿Cuál es la resolución Δ?

1.11 Considere el sistema de procesamiento de señales mostrado en la Figura P.1.11. Los períodos de muestreo de los convertidores A/D y D/A son $T = 5$ ms y $T' = 1$ ms, respectivamente. Determine la salida $y_a(t)$ del sistema si la entrada es

$$x_a(t) = 3\cos 100\pi t + 2\operatorname{sen} 250\pi t \qquad (t \text{ en segundos})$$

El post-filtro elimina cualquier componente de frecuencia por encima de $F_s/2$.

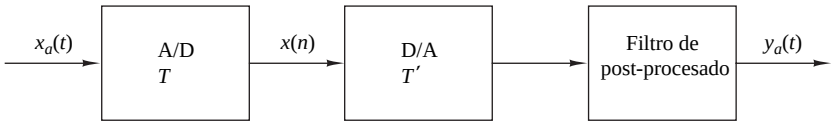


Figura P.1.11.

1.12 **(a)** Obtenga la expresión correspondiente a la señal discreta en el tiempo $x(n)$ del Ejemplo 1.4.2 utilizando las propiedades de periodicidad de las funciones sinusoidales.

(b) ¿Cuál es la señal analógica que podemos obtener a partir de $x(n)$ si en el proceso de reconstrucción suponemos que $F_s = 10$ kHz?

1.13 La señal discreta en el tiempo $x(n) = 6.35\cos(\pi/10)n$ se cuantifica con una resolución (a) $\Delta = 0.1$ o (b) $\Delta = 0.02$. ¿Cuántos bits son necesarios en el convertidor A/D en cada caso?

1.14 Determine la tasa de bits y la resolución para el muestreo de una señal sísmica con un rango dinámico de 1 voltio si la frecuencia de muestreo es $F_s = 20$ muestras/s, utilizando un convertidor A/D de 8-bits. ¿Cuál es la frecuencia máxima que puede estar presente en la señal sísmica digital resultante?

1.15 *Muestreo de señales sinusoidales: aliasing.* Considere la siguiente señal sinusoidal continua en el tiempo

$$x_a(t) = \operatorname{sen} 2\pi F_0 t, \qquad -\infty < t < \infty$$

Puesto que $x_a(t)$ está descrita en forma matemática, su versión muestreada puede describirse mediante sus valores cada T segundos. La señal muestreada se describe mediante la fórmula siguiente

$$x(n) = x_a(nT) = \operatorname{sen} 2\pi \frac{F_0}{F_s} n, \qquad -\infty < n < \infty$$

donde $F_s = 1/T$ es la frecuencia de muestreo.

(a) Represente gráficamente la señal $x(n)$, $0 \le n \le 99$ para $F_s = 5$ kHz y $F_0 = 0.5$, 2, 3 y 4.5 kHz. Explique las similitudes y diferencias entre las distintas representaciones.

(b) Suponga que $F_0 = 2$ kHz y $F_s = 50$ kHz.

1. Represente gráficamente la señal $x(n)$. ¿Cuál es la frecuencia f_0 de la señal $x(n)$?
2. Represente gráficamente la señal $y(n)$ obtenida tomando las muestras pares de $x(n)$. ¿Es una señal sinusoidal? ¿Por qué? En caso afirmativo, ¿cuál es su frecuencia?

1.16 *Error de cuantificación en la conversión A/D de una señal sinusoidal* Sea $x_q(n)$ la señal obtenida al cuantificar la señal $x(n) = \operatorname{sen} 2\pi f_0 n$. La potencia del error de cuantificación P_q se define como sigue

$$P_q = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^2(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} [x_q(n) - x(n)]^2$$

La "calidad" de la señal cuantificada puede medirse mediante la relación señal-ruido de cuantificación (SQNR) definida como sigue

$$\text{SQNR} = 10\log_{10}\frac{P_x}{P_q}$$

donde P_x es la potencia de la señal sin cuantificar $x(n)$.

(a) Para $f_0 = 1/50$ y $N = 200$, escriba un programa para cuantificar la señal $x(n)$, utilizando truncamiento para 64, 128 y 256 niveles de cuantificación. En cada caso, represente gráficamente las señales $x(n)$, $x_q(n)$ y $e(n)$, y calcule la relación SQNR correspondiente.

(b) Repita el apartado (a) utilizando redondeo en lugar de truncamiento.

(c) Comente los resultados obtenidos en los apartados (a) y (b).

(d) Compare la SQNR medida experimentalmente con la obtenida teóricamente mediante la fórmula (1.4.32) y comente las diferencias y similitudes.

2

Señales y sistemas discretos en el tiempo

En el Capítulo 1 hemos presentado una serie de importantes tipos de señales y hemos descrito el proceso de muestreo mediante el que una señal analógica se convierte en una señal discreta en el tiempo. Además, hemos abordado con cierto detalle las características de las señales sinusoidales discretas en el tiempo. La sinusoide es una señal elemental importante que sirve como bloque básico de construcción de señales más complejas. Sin embargo, existen otras señales elementales que también resultan importantes en nuestro tratamiento de señales. En este capítulo vamos a presentar dichas señales discretas en el tiempo y vamos a emplearlas como funciones básicas para describir señales más complejas.

Este capítulo hace hincapié en la caracterización de los sistemas discretos en el tiempo en general y de los sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI, *linear time-invariant*) en particular. Se definen y desarrollan una serie de importantes propiedades en el dominio del tiempo de los sistemas LTI y se deduce una fórmula fundamental, conocida como fórmula de la convolución, que nos permitirá determinar la salida de un sistema LTI para cualquier señal de entrada arbitraria dada. Además de la fórmula de la convolución, se presentan las ecuaciones en diferencias como método alternativo para describir la relación de entrada/salida de un sistema LTI, así como implementaciones recursivas y no recursivas de los sistemas LTI.

Nuestra motivación para centrarnos en el estudio de los sistemas LTI es doble. En primer lugar, existe una larga lista de técnicas matemáticas que pueden aplicarse al análisis de los sistemas LTI. En segundo lugar, muchos sistemas prácticos son sistemas LTI o pueden aproximarse mediante sistemas LTI. Debido a su importancia en las aplicaciones de tratamiento digital de señales y a su gran semejanza con la fórmula de la convolución, también vamos a ver la correlación entre dos señales. Se definen las señales de autocorrelación y correlación cruzada y se presentan sus propiedades.

2.1 Señales discretas en el tiempo

Como hemos visto en el Capítulo 1, una señal discreta en el tiempo $x(n)$ es una función de una variable independiente que es un entero. En la Figura 2.1.1 se muesta su representación gráfica. Es importante observar que una señal discreta en el tiempo *no está definida* en los instantes entre dos muestras sucesivas. Además, no es correcto pensar que $x(n)$ es igual a cero si n no es un entero. Simplemente, la señal $x(n)$ no está definida para valores no enteros de n.

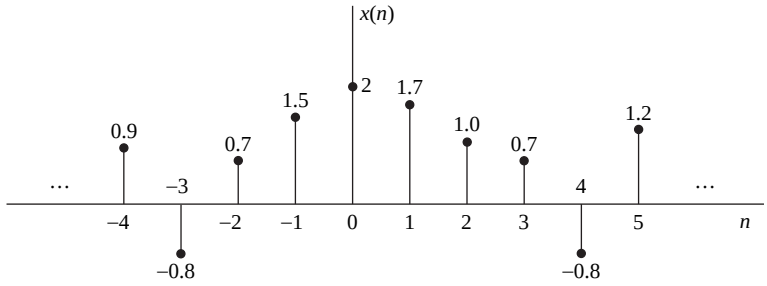


Figura 2.1.1. Representación gráfica de una señal discreta en el tiempo.

En lo sucesivo supondremos que una señal discreta en el tiempo está definida para todo valor entero n del intervalo $-\infty < n < \infty$. Por tradición, decimos que $x(n)$ es la muestra "$n-$ésima" de la señal incluso si la señal $x(n)$ es inherentemente discreta en el tiempo (es decir, no se ha obtenido muestreando una señal analógica). Si, por el contrario, $x(n)$ se ha obtenido muestreando una señal analógica $x_a(t)$, entonces $x(n) \equiv x_a(nT)$, donde T es el período de muestreo (es decir, el tiempo entre dos muestras sucesivas).

Además de la representación gráfica de una secuencia o señal discreta en el tiempo mostrada en la Figura 2.1.1, hay disponibles otras representaciones alternativas que suelen ser adecuadas, como son:

1. Representación funcional, como por ejemplo

$$x(n) = \begin{cases} 1, & \text{para } n = 1,3 \\ 4, & \text{para } n = 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{2.1.1}$$

2. Representación tabular, como

n	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\ldots$
$x(n)$	$\cdots$	0	0	0	1	4	1	0	0	$\ldots$

3. Representación como secuencia

Una secuencia o señal de duración infinita con el origen de tiempos $(n = 0)$ indicado por el símbolo $\uparrow$ se representa como

$$x(n) = \{\ldots 0, \underset{\uparrow}{0}, 1, 4, 1, 0, 0, \ldots\} \tag{2.1.2}$$

Una secuencia $x(n)$, que es cero para $n < 0$, puede representarse como

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 4, 1, 0, 0, \ldots\} \tag{2.1.3}$$

El origen de tiempos para una secuencia $x(n)$, que es cero para $n < 0$, tiene que ser el primer punto (comenzando por la izquierda) de la secuencia.

Una secuencia de duración finita puede representarse como

$$x(n) = \{3, -1, \underset{\uparrow}{-2}, 5, 0, 4, -1\} \tag{2.1.4}$$

mientras que una secuencia de duración finita que satisface la condición $x(n) = 0$ para $n < 0$ se puede representar como

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 4, 1\} \tag{2.1.5}$$

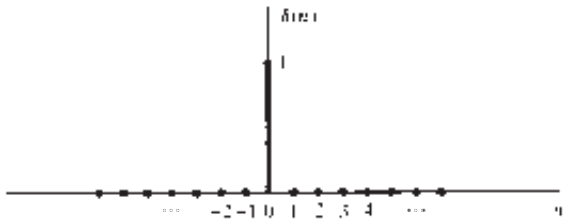


Figura 2.1.2. Representación gráfica de la muestra unitaria o impulso unitario.

La señal dada en (2.1.4) está formada por siete muestras o puntos (en el tiempo), de manera que se denomina o identifica como una secuencia de siete puntos. Del mismo modo, la secuencia dada por (2.1.5) es una secuencia de cuatro puntos.

2.1.1 Algunas señales discretas en el tiempo elementales

En el estudio sobre sistemas y señales discretas en el tiempo aparecen a menudo una serie de señales básicas que desempeñan un importante papel. Estas señales se definen a continuación.

1. La *señal muestra unitaria* se designa como $\delta(n)$ y se define como sigue

$$\delta(n) \equiv \begin{cases} 1, & \text{para} \quad n = 0, \\ 0, & \text{para} \quad n \neq 0 \end{cases} \tag{2.1.6}$$

Dicho con palabras, la señal muestra unitaria es una señal que es cero siempre, excepto en $n = 0$ donde su valor es igual a la unidad. Esta señal a veces se denomina *impulso unitario*. Sin embargo, al contrario que la señal analógica $\delta(t)$, que también se denomina impulso unitario y es igual a cero siempre, excepto en $t = 0$, donde su área es igual a la unidad, la secuencia muestra unitaria es mucho menos complicada matemáticamente. La representación gráfica de $\delta(n)$ se muestra en la Figura 2.1.2.

2. La *señal escalón unidad* se denota como $u(n)$ y se define como

$$u(n) \equiv \begin{cases} 1, & \text{para} \quad n \geq 0 \\ 0, & \text{para} \quad n < 0 \end{cases} \tag{2.1.7}$$

La Figura 2.1.3 ilustra la señal escalón unidad.

3. La *señal rampa unidad* se denota como $u_r(n)$ y se define como

$$u_r(n) \equiv \begin{cases} n, & \text{para} \quad n \geq 0 \\ 0, & \text{para} \quad n < 0 \end{cases} \tag{2.1.8}$$

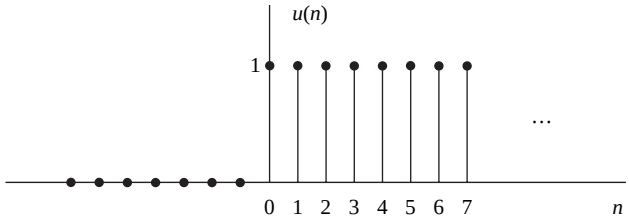


Figura 2.1.3. Representación gráfica del escalón unidad.

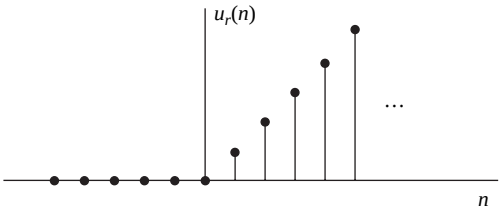


Figura 2.1.4. Representación gráfica de la señal rampa unidad.

Esta señal se ilustra en la Figura 2.1.4.

4. La *señal exponencial* es una secuencia de la forma

$$x(n) = a^n \qquad \text{para todo } n \tag{2.1.9}$$

Si el parámetro a es real, entonces $x(n)$ es una señal real. La Figura 2.1.5 ilustra $x(n)$ para distintos valores del parámetro a.

Si el parámetro a es un valor complejo, puede expresarse como sigue

$$a \equiv re^{j\theta}$$

donde r y θ ahora son los parámetros. Por tanto, podemos expresar $x(n)$ como

$$x(n) = r^n e^{j\theta n} = r^n(\cos\theta n + j\,\mathrm{sen}\,\theta n) \tag{2.1.10}$$

Como $x(n)$ ahora es compleja, puede representarse gráficamente dibujando la parte real

$$x_R(n) \equiv r^n \cos\theta n \tag{2.1.11}$$

como una función de n, y por separado la parte imaginaria

$$x_I(n) \equiv r^n\,\mathrm{sen}\,\theta n \tag{2.1.12}$$

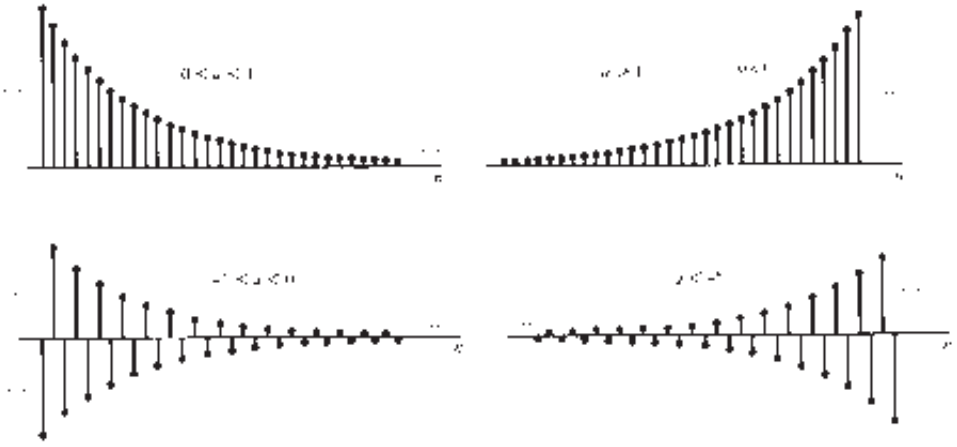


Figura 2.1.5. Representación gráfica de señales exponenciales.

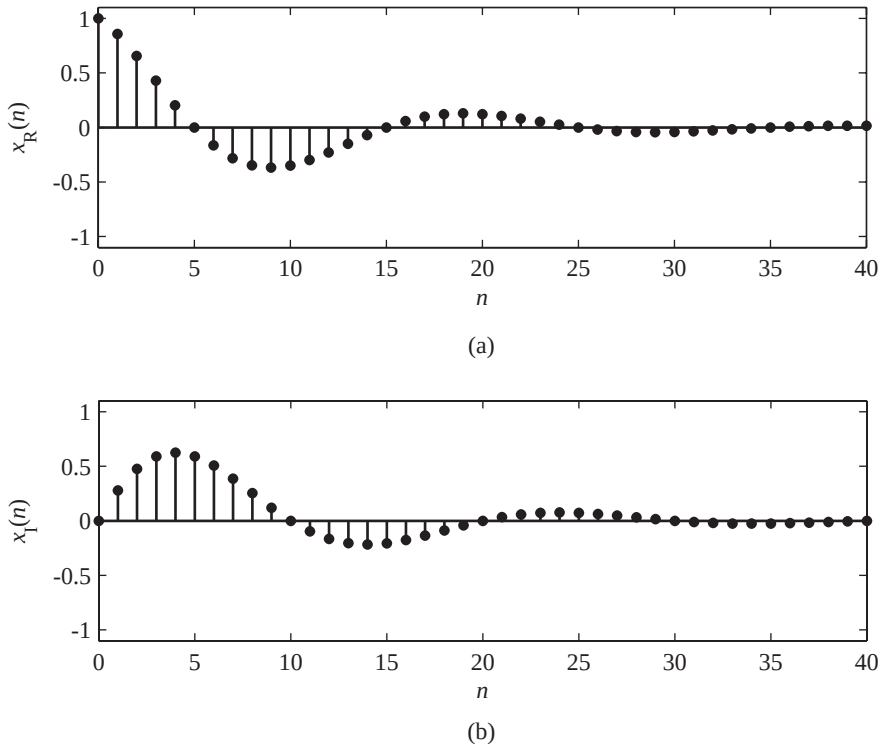


Figura 2.1.6. Gráfica de las componentes real e imaginaria de una señal exponencial compleja.

como una función de n. La Figura 2.1.6 ilustra las gráficas de $x_R(n)$ y $x_I(n)$ para $r = 0.9$ y $\theta = \pi/10$. Observe que las señales $x_R(n)$ y $x_I(n)$ son una función coseno amortiguada (exponencial descendente) y una función seno amortiguada. La variable ángulo θ es simplemente la frecuencia de la sinusoide, previamente indicada mediante la variable frecuencia (normalizada) ω. Evidentemente, si $r = 1$, el amortiguamiento desaparece y $x_R(n)$, $x_I(n)$ y $x(n)$ tienen una amplitud fija e igual a la unidad.

Alternativamente, la señal $x(n)$ dada por (2.1.10) puede representarse gráficamente mediante la función de la amplitud

$$|x(n)| = A(n) \equiv r^n \tag{2.1.13}$$

y la función de la fase

$$\angle x(n) = \phi(n) \equiv \theta n \tag{2.1.14}$$

La Figura 2.1.7 ilustra $A(n)$ y $\phi(n)$ para $r = 0.9$ y $\theta = \pi/10$. Observe que la fase es lineal con n. Sin embargo, la fase se define sólo en el intervalo $-\pi < \theta \leq \pi$ o, lo que es lo mismo, en el intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$. En consecuencia, por convenio, $\phi(n)$ se dibuja en el intervalo finito $-\pi < \theta \leq \pi$ o $0 \leq \theta < 2\pi$. En otras palabras, restamos múltiplos de 2π de $\phi(n)$ antes de dibujarla. La sustracción de múltiplos de 2π de $\phi(n)$ es equivalente a interpretar la función $\phi(n)$ como $\phi(n)$, módulo 2π.

2.1.2 Clasificación de las señales discretas en el tiempo

Los métodos matemáticos empleados en el análisis de señales y sistemas discretos en el tiempo dependen de las características de las señales. En esta sección vamos a clasificar las señales discretas en el tiempo según una serie de características.

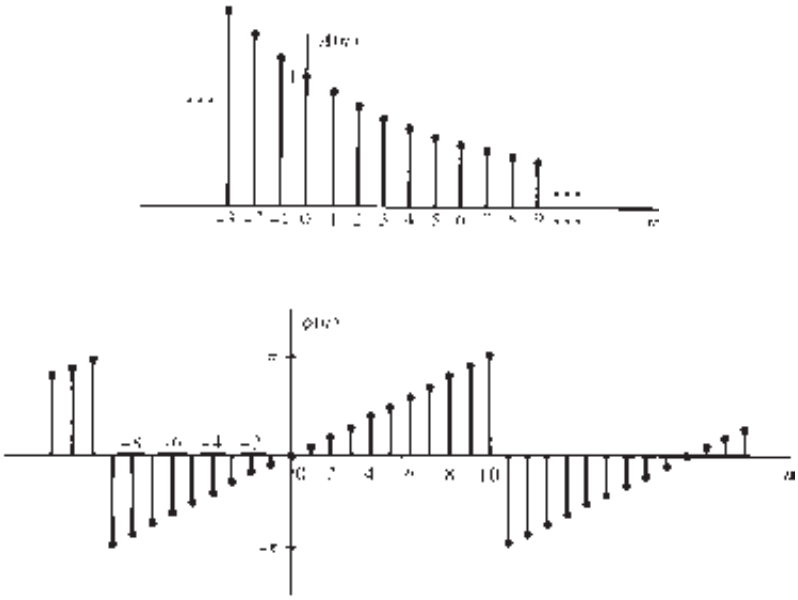


Figura 2.1.7. Gráfica de la amplitud y la fase de una señal exponencial compleja: (a) gráfica de $A(n) = r^n$, $r = 0.9$; (b) gráfica de $\phi(n) = (\pi/10)n$, módulo 2π dibujada en el intervalo $(-\pi, \pi]$.

Señales de energía y señales de potencia. La energía E de una señal $x(n)$ se define como

$$E \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \tag{2.1.15}$$

Hemos empleado los valores al cuadrado de $x(n)$, ya que esta definición se aplica a señales complejas y a señales reales. La energía de una señal puede ser finita o infinita. Si E es finita (es decir, $0 < E < \infty$), entonces se dice que $x(n)$ es una *señal de energía*. En ocasiones, añadiremos un subíndice x a E y escribiremos E_x para destacar que E_x es la energía de la señal $x(n)$.

Muchas señales que poseen energía infinita tienen potencia media finita. La potencia media de una señal discreta en el tiempo $x(n)$ se define como

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2 \tag{2.1.16}$$

Si definimos la energía de la señal $x(n)$ en el intervalo finito $-N \le n \le N$ como

$$E_N \equiv \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2 \tag{2.1.17}$$

podemos expresar la energía de la señal E como

$$E \equiv \lim_{N\to\infty} E_N \tag{2.1.18}$$

y la potencia media de la señal $x(n)$ como

$$P \equiv \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} E_N \tag{2.1.19}$$

Evidentemente, si E es finita, $P = 0$. Por el contrario, si E es infinita, la potencia media P puede ser finita o infinita. Si P es finita (y distinta de cero), se dice que la señal es una *señal de potencia*. El siguiente ejemplo ilustra este tipo de señal.

EJEMPLO 2.1.1

Determine la potencia y la energía del escalón unidad. La potencia media del escalón unidad es

$$\begin{aligned} P &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} u^2(n) \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{N+1}{2N+1} = \lim_{N\to\infty} \frac{1+1/N}{2+1/N} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Luego el escalón unidad es una señal de potencia y su energía es infinita.

De manera similar, podemos demostrar que la secuencia exponencial compleja $x(n) = Ae^{j\omega_0 n}$ tiene una potencia media A^2, por lo que es una señal de potencia. Por otro lado, la rampa unidad no es ni una señal de potencia ni una señal de energía.

Señales periódicas y aperiódicas. Como se ha definido en la Sección 1.3, una señal $x(n)$ es periódica de período $N(N > 0)$ si y sólo si

$$x(n+N) = x(n) \quad \text{para todo } n \tag{2.1.20}$$

El valor más pequeño de N para el que (2.1.20) se cumple se denomina período (fundamental). Si no existe ningún valor de N que satisfaga la expresión (2.1.20), se dice que la señal es *no periódica* o *aperiódica*.

Ya hemos mencionado que la señal sinusoidal de la forma

$$x(n) = A \operatorname{sen} 2\pi f_0 n \tag{2.1.21}$$

es periódica cuando f_0 es un número racional, es decir, si f_0 puede expresarse como

$$f_0 = \frac{k}{N} \tag{2.1.22}$$

donde k y N son enteros.

La energía de una señal periódica $x(n)$ en un solo período, es decir, en el intervalo $0 \le n \le N-1$, es finita si $x(n)$ toma valores dinitos en dicho período. Sin embargo, la energía de la señal periódica para $-\infty \le n \le \infty$ es infinita. Por el contrario, la potencia media de la señal periódica es finita e igual a la potencia media en un solo período. Por tanto, si $x(n)$ es una señal periódica de período fundamental N y toma valores finitos, su potencia viene dada por

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 \tag{2.1.23}$$

En consecuencia, las señales periódicas son señales de potencia.

Señales simétricas (pares) y asimétricas (impares). Una señal real $x(n)$ se dice que es una señal simétrica (par) si

$$x(-n) = x(n) \tag{2.1.24}$$

Por el contrario, una señal $x(n)$ se dice que es asimétrica (impar) si

$$x(-n) = -x(n) \tag{2.1.25}$$

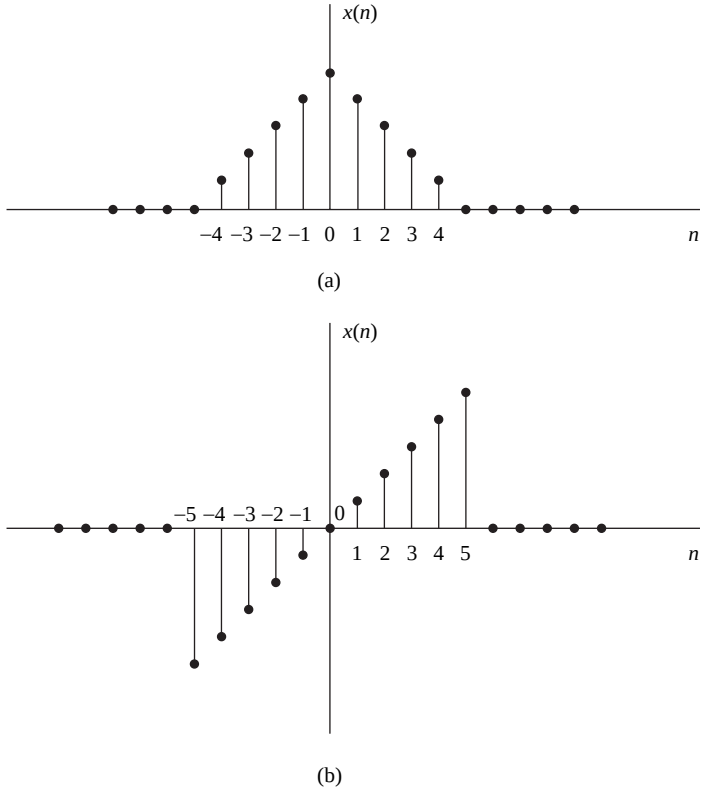


Figura 2.1.8. Ejemplo de señales (a) pares y (b) impares.

Observe que si $x(n)$ es impar, entonces $x(0) = 0$. En la Figura 2.1.8 se muestran ejemplos de señales con simetría par e impar.

Vamos a ver ahora que cualquier señal arbitraria puede expresarse como la suma de dos componentes de señal, una de las cuales es par y la otra impar. La componente de señal par se define sumando $x(n)$ a $x(-n)$ y dividiendo entre 2, es decir,

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)] \tag{2.1.26}$$

Evidentemente, $x_e(n)$ satisface la condición de simetría (2.1.24). De la misma manera, se define la componente de señal impar $x_o(n)$ según la relación siguiente

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)] \tag{2.1.27}$$

De nuevo, es evidente que $x_o(n)$ satisface la expresión (2.1.25); por tanto, es impar. Si ahora sumamos las dos componentes de la señal definidas por (2.1.26) y (2.1.27), obtenemos $x(n)$, que es

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n) \tag{2.1.28}$$

Por tanto, cualquier señal arbitraria puede expresarse como indica la Ecuación (2.1.28).

2.1.3 Manipulaciones simples de las señales discretas en el tiempo

En esta sección vamos a abordar algunas modificaciones o manipulaciones simples que implican a la variable independiente y la amplitud de la señal (la variable dependiente).

Transformación de la variable independiente (tiempo). Una señal $x(n)$ se puede desplazar en el tiempo reemplazando la variable independiente n por $n-k$, donde k es un entero. Si k es un entero positivo, el desplazamiento de tiempo produce un retardo de la señal en k unidades de tiempo. Si k es un entero negativo, el desplazamiento de tiempo hace que la señal se adelante $|k|$ unidades de tiempo.

EJEMPLO 2.1.2

En la Figura 2.1.9(a) se muestra la representación gráfica de una señal $x(n)$. Obtenga una representación gráfica de las señales $x(n-3)$ y $x(n+2)$.

Solución. La señal $x(n-3)$ se obtiene retardando $x(n)$ tres unidades de tiempo. El resultado se ilustra en la Figura 2.1.9(b). Por otro lado, la señal $x(n+2)$ se obtiene adelantando $x(n)$ dos unidades de tiempo. El resultado se ilustra en la Figura 2.1.9(c). Observe que el retardo se corresponde con un desplazamiento de la señal hacia la derecha, mientras que el adelanto es un desplazamiento de la señal hacia la izquierda a lo largo del eje de tiempos.

Si la señal $x(n)$ se almacena en una cinta magnética o en un disco o, posiblemente, en la memoria de una computadora, es relativamente sencillo modificar la base de tiempos introduciendo un retardo o un adelanto. Por el contrario, si la señal no está almacenada sino que es generada en tiempo real por algún fenómeno físico, no es posible realizar una operación de adelanto en el tiempo, ya que esta operación implica emplear muestras de la señal que todavía no se han generado. Aunque siempre es posible introducir un retardo en las muestras de la señal que ya hayan sido generadas, es físicamente imposible ver las futuras muestras de la señal. Por tanto, en las operaciones de procesamiento de señales en tiempo real, la operación de adelanto de la base de tiempos de la señal es físicamente irrealizable.

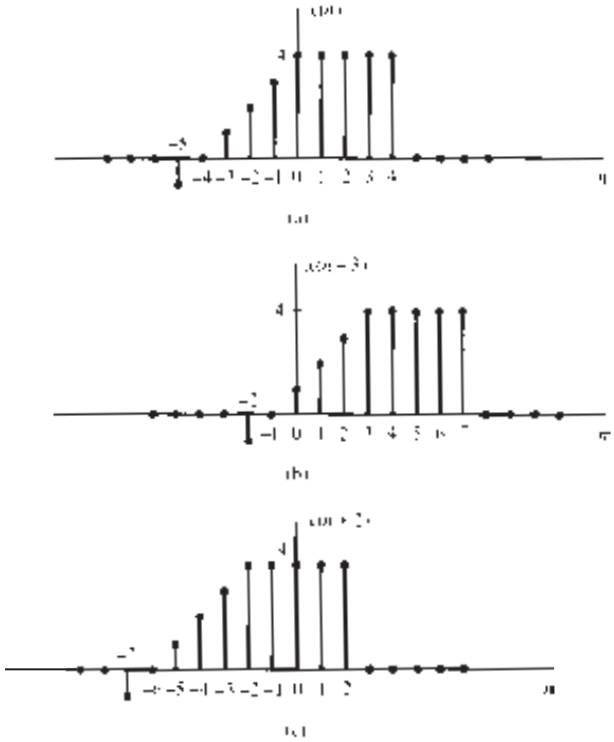


Figura 2.1.9. Representación gráfica de una señal y de sus versiones adelantada y retardada.

Otra útil modificación de la base de tiempos consiste en reemplazar la variable independiente n por $-n$. El resultado de esta operación es un *solapamiento* o *reflexión* de la señal alrededor del origen de tiempos $n = 0$.

EJEMPLO 2.1.3

Represente gráficamente las señales $x(-n)$ y $x(-n+2)$, donde $x(n)$ es la señal mostrada en la Figura 2.1.10(a).

Solución. La nueva señal $y(n) = x(-n)$ se muestra en la Figura 2.1.10(b). Observe que $y(0) = x(0)$, $y(1) = x(-1)$, $y(2) = x(-2)$, etc. Además, $y(-1) = x(1)$, $y(-2) = x(2)$, etc. Por tanto, $y(n)$ es simplemente la señal $x(n)$ reflejada respecto del origen de tiempos $n = 0$. La señal $y(n) = x(-n+2)$ es la señal $x(-n)$ retardada dos unidades de tiempo. La señal resultante se ilustra en la Figura 2.1.10(c). Una forma sencilla de verificar que el resultado mostrado en la Figura 2.1.10(c) es correcto es calcular las muestras, tales como $y(0) = x(2)$, $y(1) = x(1)$, $y(2) = x(0)$, $y(-1) = x(3)$, etc.

Es importante observar que las operaciones de solapamiento y retardo (o avance) temporal de una señal no son conmutativas. Si designamos la operación de retardo en el tiempo como TD (*time-delay*) y la operación de solapamiento como FD (*folding*), podemos escribir

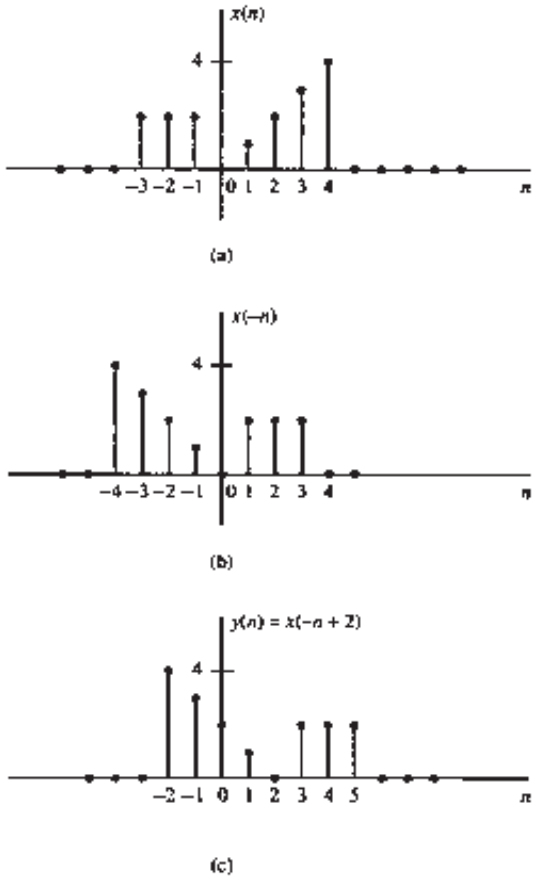


Figura 2.1.10. Ilustración gráfica de las operaciones de solapamiento y desplazamiento.

$$\begin{aligned} \mathrm{TD}_k[x(n)] &= x(n-k), \qquad k>0 \\ \mathrm{FD}[x(n)] &= x(-n) \end{aligned} \tag{2.1.29}$$

Ahora

$$\mathrm{TD}_k\{\mathrm{FD}[x(n)]\} = \mathrm{TD}_k[x(-n)] = x(-n+k) \tag{2.1.30}$$

mientras que

$$\mathrm{FD}\{\mathrm{TD}_k[x(n)]\} = \mathrm{FD}[x(n-k)] = x(-n-k) \tag{2.1.31}$$

Observe que como los signos de n y k en $x(n-k)$ y $x(-n+k)$ son diferentes, el resultado es un desplazamiento de las señales $x(n)$ y $x(-n)$ hacia la derecha de k muestras, correspondiente al retardo temporal.

Una tercera modificación de la variable independiente consiste en reemplazar n por μn, donde μ es un entero. Esta modificación de la base de tiempos se conoce como *escalado temporal* o *submuestreo*.

EJEMPLO 2.1.4

Represente gráficamente la señal $y(n) = x(2n)$, donde $x(n)$ es la señal mostrada en la Figura 2.1.11(a).

Solución. Observe que la señal $y(n)$ se obtiene de $x(n)$ tomando una de cada dos muestras de $x(n)$, comenzando con $x(0)$. Por tanto, $y(0) = x(0)$, $y(1) = x(2)$, $y(2) = x(4), \ldots$ e $y(-1) = x(-2)$, $y(-2) = x(-4)$, etc. En otras palabras, se han omitido las muestras impares de $x(n)$ y se han conservado la muestras pares. La señal resultante se ilustra en la Figura 2.1.11(b).

Si la señal $x(n)$ se obtuvo originalmente muestreando una señal analógica $x_a(t)$, entonces $x(n) = x_a(nT)$, donde T es el intervalo de muestreo. Luego, $y(n) = x(2n) = x_a(2Tn)$. Por tanto, la operación de escalado

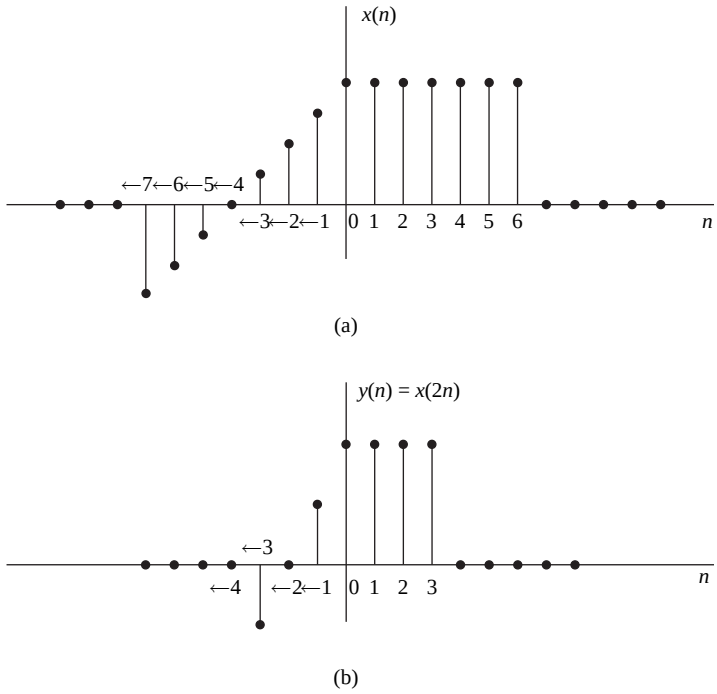


Figura 2.1.11. Ilustración gráfica de la operación de submuestreo.

temporal descrita en el Ejemplo 2.1.4 es equivalente a modificar la tasa de muestreo de $1/T$ a $1/2T$, es decir, a disminuir la frecuencia de muestreo en un factor de 2, y esto es lo que se denomina operación de *submuestreo*.

Suma, multiplicación y cambio de escala de secuencias. Las modificaciones de la amplitud incluyen la *suma*, la *multiplicación* y el *escalado* de señales discretas en el tiempo.

El *escalado de la amplitud* de una señal en un valor constante A se consigue multiplicando el valor de cada muestra de la señal por A. Luego, obtenemos

$$y(n) = Ax(n), \qquad -\infty < n < \infty$$

La *suma* de dos señales $x_1(n)$ y $x_2(n)$ es una señal $y(n)$, cuyo valor en cualquier instante es igual a la suma de los valores de esas dos señales en dicho instante, es decir,

$$y(n) = x_1(n) + x_2(n), \qquad -\infty < n < \infty$$

El *producto* de dos señales se define de manera similar en cada instante de tiempo como

$$y(n) = x_1(n)x_2(n), \qquad -\infty < n < \infty$$

2.2 Sistemas discretos en el tiempo

En muchas aplicaciones de tratamiento digital de señales es deseable diseñar un dispositivo o un algoritmo que realice alguna de las operaciones mencionadas sobre una señal discreta en el tiempo. Tal dispositivo o algoritmo es lo que se denomina sistema discreto en el tiempo. Más exactamente, un *sistema discreto en el tiempo* es un dispositivo o algoritmo que opera sobre una señal discreta en el tiempo, que es la *entrada* o *excitación*, de acuerdo con una determinada regla bien definida, para producir una señal discreta en el tiempo, que es la *salida* o *respuesta* del sistema. En general, decimos que un sistema es una operación o conjunto de operaciones que se realizan sobre la señal de entrada $x(n)$ para generar la señal de salida $y(n)$. Decimos que el sistema *transforma* la señal de entrada $x(n)$ en una señal de salida $y(n)$, y expresaremos la relación entre $x(n)$ e $y(n)$ como

$$y(n) \equiv \mathscr{T}[x(n)] \tag{2.2.1}$$

donde el símbolo $\mathscr{T}$ indica la transformación (también llamada operador) o procesamiento realizado por el sistema sobre la señal $x(n)$ para generar $y(n)$. La relación matemática (2.2.1) está representada gráficamente en la Figura 2.2.1.

Hay disponibles varias formas que permiten describir las características del sistema y la operación que realiza sobre $x(n)$ para generar $y(n)$. En este capítulo vamos a tratar la caracterización en el dominio del tiempo de los sistemas. Comenzaremos con una descripción entrada–salida del sistema. Esta descripción se basa en el comportamiento en los terminales del sistema e ignora la construcción interna detallada o implementación del sistema. Más adelante, en el Capítulo 9, abordaremos la implementación de los sistemas discretos en el tiempo y describiremos las diferentes estructuras para su construcción.

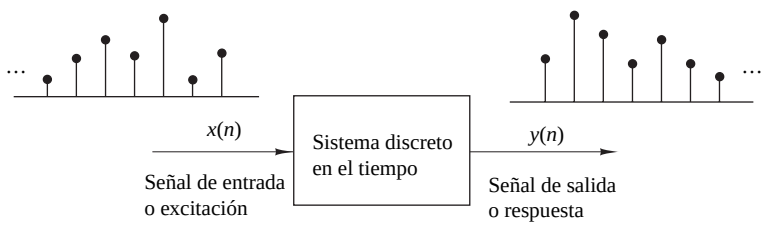


Figura 2.2.1. Diagrama de bloques de un sistema discreto en el tiempo.

2.2.1 Descripción de entrada–salida de los sistemas

La descripción entrada–salida de un sistema discreto en el tiempo consta de una expresión matemática o una regla, que define explícitamente la relación entre las señales de entrada y de salida (*relación entrada–salida*). La estructura interna exacta del sistema puede desconocerse o ignorarse por completo. Por tanto, la única manera de interactuar con el sistema es empleando sus terminales de entrada y de salida (es decir, el sistema es una "caja negra" para el usuario). Con el fin de reflejar esta filosofía, utilizamos la representación gráfica de la Figura 2.2.1 y la relación general de entrada–salida dada por la expresión (2.2.1) o, alternativamente, la notación

$$x(n) \xrightarrow{\mathscr{T}} y(n) \tag{2.2.2}$$

que simplemente indica que $y(n)$ es la respuesta del sistema $\mathscr{T}$ a la excitación $x(n)$. El siguiente ejemplo ilustra varios sistemas.

EJEMPLO 2.2.1

Determine la respuesta de los siguientes sistemas a la señal de entrada

$$x(n) = \begin{cases} |n|, & -3 \le n \le 3 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) $y(n) = x(n)$ (sistema identidad)

(b) $y(n) = x(n-1)$ (sistema de retardo unidad)

(c) $y(n) = x(n+1)$ (sistema de adelanto unidad)

(d) $y(n) = \frac{1}{3}[x(n+1) + x(n) + x(n-1)]$ (filtro del valor medio)

(e) $y(n) = \text{mediana}\{x(n+1), x(n), x(n-1)\}$ (filtro de la mediana)

(f) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + \cdots$ (acumulador) (2.2.3)

Solución. En primer lugar, determinamos explícitamente los valores de las muestras de la señal de entrada

$$x(n) = \{\ldots, 0, 3, 2, 1, \underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 0, \ldots\}$$

A continuación, determinamos la salida de cada uno de los sistemas utilizando su relación de entrada–salida.

(a) En este caso, la salida es exactamente igual que la señal de entrada. Un sistema así se conoce como sistema *identidad*.

(b) Este sistema simplemente retarda la entrada una muestra. Por tanto, su salida está dada por

$$x(n) = \{\ldots, 0, 3, 2, \underset{\uparrow}{1}, 0, 1, 2, 3, 0, \ldots\}$$

(c) En este caso, el sistema "adelanta" la entrada una muestra en un instante futuro. Por ejemplo, el valor de la salida en el instante $n = 0$ es $y(0) = x(1)$. La respuesta del sistema a la señal de entrada es

$$x(n) = \{\ldots, 0, 3, 2, 1, 0, \underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 0, \ldots\}$$

(d) La salida de este sistema en cualquier instante es el valor medio de las muestras actual, inmediatamente anterior e inmediatamente posterior. Por ejemplo, la salida en el instante $n = 0$ es

$$y(0) = \frac{1}{3}[x(-1) + x(0) + x(1)] = \frac{1}{3}[1 + 0 + 1] = \frac{2}{3}$$

Repitiendo este cálculo para todos los valores de n, obtenemos la señal de salida

$$y(n) = \{\ldots, 0, 1, \frac{5}{3}, 2, 1, \underset{\uparrow}{\frac{2}{3}}, 1, 2, \frac{5}{3}, 1, 0, \ldots\}$$

(e) Este sistema selecciona como su salida en el instante n la mediana de las tres muestras de entrada $x(n-1)$, $x(n)$ y $x(n+1)$. Luego la respuesta de este sistema a la señal de entrada $x(n)$ es

$$y(n) = \{0,2,2,1,1,\underset{\uparrow}{1},2,2,0,0,0,\ldots\}$$

(f) Este sistema es básicamente un *acumulador* que calcula la suma de todos los valores de la entrada pasados hasta el instante actual. La respuesta de este sistema a una entrada dada es

$$y(n) = \{\ldots,0,3,5,6,\underset{\uparrow}{6},7,9,12,0,\ldots\}$$

Observe que en varios de los sistemas considerados en el Ejemplo 2.2.1 la salida en el instante $n = n_0$ no sólo depende del valor de la entrada en $n = n_0$ [es decir, $x(n_0)$], sino también de los valores de la entrada aplicada al sistema antes y después de $n = n_0$. Consideremos, por ejemplo, el ejemplo del sistema acumulador. En este caso, vemos que la salida en el instante $n = n_0$ no sólo depende de la entrada en el instante $n = n_0$, sino también de $x(n)$ en los instantes $n = n_0 - 1$, $n_0 - 2$, etc. Haciendo una sencilla manipulación algebraica en la relación entrada–salida del acumulador podemos escribir

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x(k) + x(n) \\ &= y(n-1) + x(n) \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

lo que justifica el uso del término *acumulador*. De hecho, el sistema calcula el valor actual de la salida sumando (acumulando) el valor actual de la entrada al valor anterior de la salida.

Podemos sacar algunas conclusiones interesantes examinando en detalle este aparentemente sencillo sistema. Supongamos que disponemos de una señal de entrada $x(n)$ para $n \geq n_0$, y que deseamos determinar la salida $y(n)$ de este sistema para $n \geq n_0$. Para $n = n_0$, $n_0 + 1, \ldots$, la Ecuación (2.2.4) nos proporciona

$$y(n_0) = y(n_0 - 1) + x(n_0)$$

$$y(n_0 + 1) = y(n_0) + x(n_0 + 1)$$

y así sucesivamente. Observe que tenemos un problema a la hora de calcular $y(n_0)$, ya que depende de $y(n_0 - 1)$. Sin embargo,

$$y(n_0 - 1) = \sum_{k=-\infty}^{n_0-1} x(k)$$

es decir, $y(n_0 - 1)$ "resume" el efecto del sistema de todas las entradas que han sido aplicadas al sistema antes del instante n_0. Por tanto, la respuesta del sistema para $n \geq n_0$ a la entrada $x(n)$ que se aplica en el instante n_0 es el resultado combinado de esta entrada y todas las entradas que se han aplicado anteriormente al sistema. En consecuencia, $y(n)$, $n \geq n_0$ no está determinada únivocamente por la entrada $x(n)$ para $n \geq n_0$.

La información adicional necesaria para determinar $y(n)$ para $n \geq n_0$ es la *condición inicial* $y(n_0 - 1)$. Este valor resume el efecto de todas las entradas anteriores al sistema. Por tanto, la condición inicial $y(n_0 - 1)$ junto con la secuencia de entrada $x(n)$ para $n \geq n_0$ determina de forma unívoca la secuencia de salida $y(n)$ para $n \geq n_0$.

Si el acumulador no ha sido excitado anteriormente al instante n_0, la condición inicial es $y(n_0 - 1) = 0$. En tal caso, decimos que el sistema estaba *inicialmente en reposo*. Dado que $y(n_0 - 1) = 0$, la secuencia de salida $y(n)$ sólo depende de la secuencia de entrada $x(n)$ para $n \geq n_0$.

Se suele suponer que todo sistema está en reposo en $n = -\infty$. En este caso, si se aplica una entrada $x(n)$ en $n = -\infty$, la correspondiente salida $y(n)$ queda *única* y *exclusivamente* determinada por la entrada dada.

EJEMPLO 2.2.2

El acumulador descrito por la expresión (2.2.30) se excita mediante la secuencia $x(n) = nu(n)$. Determine su salida bajo cada una de las condiciones siguientes:

(a) Inicialmente está en reposo [es decir, $y(-1) = 0$].

(b) Inicialmente, $y(-1) = 1$.

Solución. La salida del sistema se define como

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) = \sum_{k=-\infty}^{-1} x(k) + \sum_{k=0}^{n} x(k) \\ &= y(-1) + \sum_{k=0}^{n} x(k) \\ &= y(-1) + \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

(a) Si el sistema inicialmente está en reposo, $y(-1) = 0$ y por tanto

$$y(n) = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad n \geq 0$$

(b) Por el contrario, si la condición inicial es $y(-1) = 1$, entonces

$$y(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2}, \qquad n \geq 0$$

2.2.2 Diagrama de bloques de los sistemas discretos en el tiempo

Resulta útil en este momento presentar un diagrama de bloques para los sistemas discretos en el tiempo. Para ello, necesitamos definir algunos de los bloques básicos que pueden interconectarse para formar sistemas complejos.

Sumador. La Figura 2.2.2 ilustra un sistema (sumador) que realiza la suma de dos secuencias de señal para formar otra secuencia (la suma), que denotamos mediante $y(n)$. Observe que no es necesario almacenar ninguna de las secuencias para llevar a cabo la suma. En otras palabras, la operación de suma es una operación *sin memoria*.

Multiplicador por una constante. Esta operación se describe en la Figura 2.2.3, y lo que hace simplemente es aplicar un factor de escala a la entrada $x(n)$. Observe que esta operación también es una operación sin memoria.

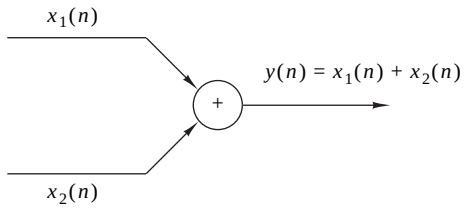


Figura 2.2.2. Representación gráfica de un sumador.

Figura 2.2.3. Representación gráfica de un multiplicador por una constante.

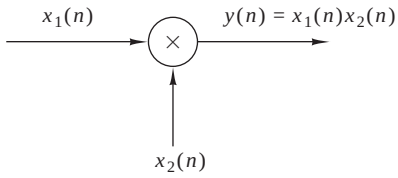


Figura 2.2.4. Representación gráfica de un multiplicador de señales.

Multiplicador de señales. La Figura 2.2.4 ilustra la multiplicación de dos secuencias de señal para formar otra secuencia (el producto), designada en la figura por $y(n)$. Como en los dos casos anteriores, se trata de una operación sin memoria.

Elemento de retardo unitario. El sistema de retardo unitario es un sistema especial que simplemente retarda en una muestra la señal que pasa a su través. La Figura 2.2.5 ilustra este sistema. Si la señal de entrada es $x(n)$, la salida será $x(n-1)$. De hecho, la muestra $x(n-1)$ se almacena en memoria en el instante $n-1$ y se la extrae de memoria en el instante n para formar

$$y(n) = x(n-1)$$

Por tanto, este bloque requiere memoria. El uso del símbolo z^{-1} para indicar la unidad de retardo será evidente cuando abordemos la transformada-z en el Capítulo 3.

Elemento de adelanto unitario. En contraste con el retardador unitario, un sistema de adelanto unitario desplaza la entrada $x(n)$ una muestra hacia adelante en el instante que alcanza $x(n+1)$. La Figura 2.2.6 ilustra esta operación, empleando el operador z para designar el bloque de adelanto unitario. Observe que cualquier avance de este tipo es físicamente imposible en tiempo real, ya que implica conocer el comportamiento futuro de la señal. Por el contrario, si almacenamos la señal en la memoria de una computadora, podemos saber el valor de cualquier muestra en cualquier instante. En aplicaciones que no son en tiempo real, es posible adelantar las señal $x(n)$ en el tiempo.

EJEMPLO 2.2.3

Utilizando los bloques básicos que acabamos de presentar, dibuje el diagrama de bloques del sistema discreto en el tiempo descrito por la relación de entrada–salida

$$y(n) = \frac{1}{4}y(n-1) + \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) \tag{2.2.5}$$

donde $x(n)$ es la entrada e $y(n)$ es la salida del sistema.

Solución. De acuerdo con (2.2.5), la salida $y(n)$ se obtiene multiplicando la entrada $x(n)$ por 0.5, multiplicando la entrada anterior $x(n-1)$ por 0.5, sumando los dos productos y sumando a continuación la salida anterior $y(n-1)$ multiplicada por

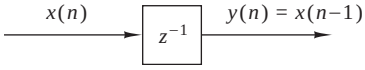


Figura 2.2.5. Representación gráfica de un elemento de retardo unitario.

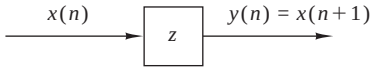


Figura 2.2.6. Representación gráfica del elemento de adelanto unitario.

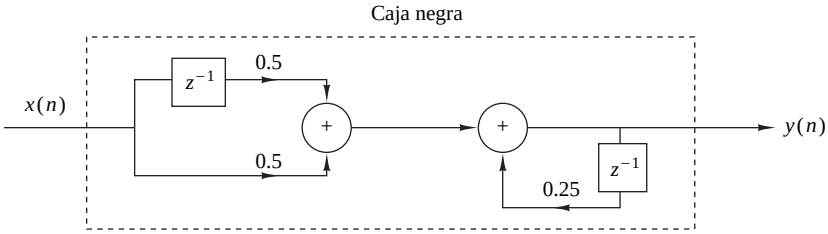
$\frac{1}{4}$. La Figura 2.2.7(a) ilustra esta realización del diagrama de bloques del sistema. Una simple reordenación de la expresión (2.2.5), nos da

$$y(n) = \frac{1}{4}y(n-1) + \frac{1}{2}[x(n) + x(n-1)] \tag{2.2.6}$$

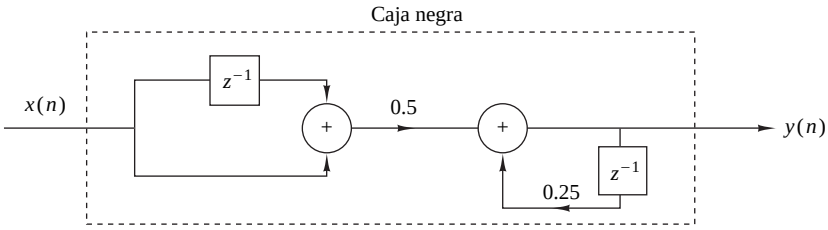
la cual nos lleva a la realización del diagrama de bloques mostrada en la Figura 2.2.7(b). Observe que si tratamos "el sistema" desde el "punto de vista" de una descripción de entrada–salida o una descripción externa, no tenemos que preocuparnos por cómo se implementa el sistema. Por el contrario, si adoptamos una descripción interna del sistema, sabremos exactamente cómo tienen que configurarse los bloques básicos de construcción del sistema. En esta realización podemos ver que un sistema está *en reposo* en el instante $n = n_0$ si las salidas de todos los *retardos* que existen en el sistema son cero en $n = n_0$ (es decir, si toda la memoria está *llena* de ceros).

2.2.3 Clasificación de los sistemas discretos en el tiempo

Tanto en el análisis como en el diseño de sistemas, resulta cómodo clasificar los sistemas de acuerdo con las propiedades generales que satisfacen. De hecho, las técnicas matemáticas que se desarrollan en este capítulo y en capítulos posteriores para analizar y diseñar sistemas discretos en el tiempo dependen en extremo de las características generales de los sistemas que se estén considerando. Por ello, es necesario que desarrollemos una serie de propiedades o categorías que podamos emplear para describir las características generales de los sistemas.



(a)



(b)

Figura 2.2.7. Realizaciones del diagrama de bloques del sistema $y(n) = 0.25y(n-1) + 0.5x(n) + 0.5x(n-1)$.

Debemos destacar que para que un sistema posea una determinada propiedad, es preciso que dicha propiedad se satisfaga para cualquier posible señal de entrada que se aplique al sistema. Si la propiedad sólo se cumple para algunas señales de entrada pero no para otras, quiere decir que el sistema no posee dicha propiedad. Por tanto, un único contraejemplo es suficiente para demostrar que un sistema no posee una propiedad dada. Sin embargo, para demostrar que el sistema tiene determinada propiedad, habrá que demostrar que se satisface para cualquier señal de entrada posible.

Sistemas estáticos y dinámicos. Se dice que un sistema discreto en el tiempo es *estático* o sin memoria si su salida en cualquier instante n depende a lo sumo de la muestra de entrada en dicho instante, pero no de muestras pasadas o futuras de la entrada. En cualquier otro caso, se dice que el sistema es *dinámico* o que tiene memoria. Si la salida de un sistema en el instante n está completamente determinada por las muestras de entrada en el intervalo de $n-N$ hasta n $(N \geq 0)$, se dice que el sistema tiene *memoria* de duración N. Si $N=0$, el sistema es estático. Si $0 < N < \infty$, se dice que el sistema tiene *memoria finita*, mientras que si $N=\infty$, se dice que el sistema tiene *memoria infinita*.

Los sistemas descritos por las siguientes ecuaciones de entrada–salida

$$y(n) = ax(n) \tag{2.2.7}$$

$$y(n) = nx(n) + bx^3(n) \tag{2.2.8}$$

son estáticos y sin memoria. Observe que no hay necesidad de almacenar ninguna de las entradas o salidas anteriores para poder calcular la salida actual. Por el contrario, los sistemas descritos por las siguientes relaciones de entrada–salida

$$y(n) = x(n) + 3x(n-1) \tag{2.2.9}$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} x(n-k) \tag{2.2.10}$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(n-k) \tag{2.2.11}$$

son sistemas dinámicos o sistemas con memoria. Los sistemas descritos por las Ecuaciones (2.2.9) y (2.2.10) tienen memoria finita, mientras que el sistema descrito por (2.2.11) tiene memoria infinita.

Observe que, en general, los sistemas estáticos o sin memoria se describen mediante ecuaciones de entrada–salida de la forma

$$y(n) = \mathscr{T}[x(n), n] \tag{2.2.12}$$

y no incluyen elementos de retardo (memoria).

Sistemas invariantes y variantes en el tiempo. Podemos subdividir la clase general de sistemas en dos grandes categorías: sistemas invariantes en el tiempo y sistemas variantes en el tiempo. Se dice que un sistema es invariante en el tiempo si su característica de entrada–salida no cambia con el tiempo. Supongamos que disponemos de un sistema $\mathscr{T}$ en estado de reposo que, cuando se excita con una señal de entrada $x(n)$, genera una señal de salida $y(n)$, por lo que podemos escribir

$$y(n) = \mathscr{T}[x(n)] \tag{2.2.13}$$

Supongamos ahora que la misma señal de entrada se retarda k unidades de tiempo para proporcionar $x(n-k)$, y de nuevo se aplica al mismo sistema. Si las características del sistema no cambian con el tiempo, la salida del sistema en reposo será $y(n-k)$. Es decir, la salida será la misma que la respuesta a $x(n)$, excepto en que estará retardada k unidades en el tiempo al igual que la entrada. Esto nos lleva a la siguiente definición de sistema invariante en el tiempo o invariante a desplazamientos:

Definición. Un sistema en reposo $\mathscr{T}$ es *invariante en el tiempo* o *invariante a desplazamientos* si y sólo si

$$x(n) \xrightarrow{\mathscr{T}} y(n)$$

lo que implica que

$$x(n-k) \xrightarrow{\mathscr{T}} y(n-k) \tag{2.2.14}$$

para cualquier señal de entrada $x(n)$ y cualquier desplazamiento temporal k.

Para determinar si cualquier sistema dado es invariante en el tiempo, hay que llevar a cabo la prueba especificada en la definición anterior. Básicamente consiste en excitar el sistema con cualquier secuencia de entrada arbitraria $x(n)$, que genere una salida $y(n)$. A continuación, tendremos que retardar la secuencia de entrada cierta cantidad k y volver a generar la salida. En general, podemos escribir la salida como sigue

$$y(n,k) = \mathscr{T}[x(n-k)]$$

Si ahora esta salida cumple que $y(n,k) = y(n-k)$ para todos los valores posibles de k, entonces el sistema es invariante en el tiempo. Por el contrario, si la salida es $y(n,k) \neq y(n-k)$, aunque sea para un único valor de k, entonces el sistema es variante en el tiempo.

EJEMPLO 2.2.4

Determine si los sistemas mostrados en la Figura 2.2.8 son invariantes o variantes en el tiempo.

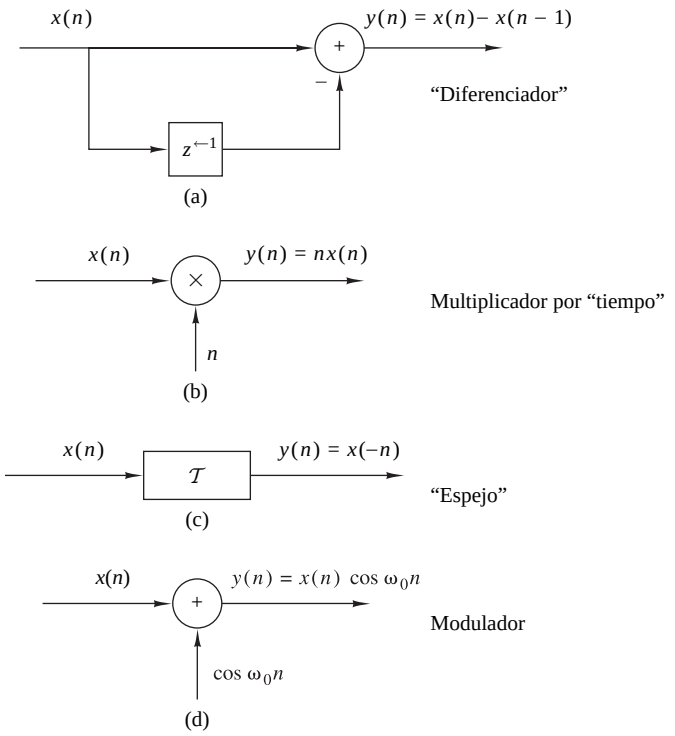


Figura 2.2.8. Ejemplos de (a) un sistema invariante en el tiempo y (b)–(d) varios sistemas variantes en el tiempo.

Solución.

(a) Este sistema se describe mediante las ecuaciones de entrada–salida

$$y(n) = \mathscr{T}[x(n)] = x(n) - x(n-1) \tag{2.2.15}$$

Si ahora retrasamos la entrada k unidades en el tiempo y la aplicamos al sistema, está claro a partir del diagrama de bloques que la salida será

$$y(n,k) = x(n-k) - x(n-k-1) \tag{2.2.16}$$

Por otro lado, a partir de (2.2.14) vemos que si retrasamos $y(n)$ en k unidades de tiempo, obtenemos

$$y(n-k) = x(n-k) - x(n-k-1) \tag{2.2.17}$$

Puesto que los lados de la derecha de las expresiones (2.2.16) y (2.2.17) son idénticos, se deduce que $y(n,k) = y(n-k)$. Por tanto, el sistema es invariante en el tiempo.

(b) La ecuación de entrada–salida de este sistema es

$$y(n) = \mathscr{T}[x(n)] = nx(n) \tag{2.2.18}$$

La respuesta de este sistema a $x(n-k)$ es

$$y(n,k) = nx(n-k) \tag{2.2.19}$$

Si ahora retardamos $y(n)$ dada por (2.2.18) k unidades de tiempo, obtenemos

$$\begin{aligned} y(n-k) &= (n-k)x(n-k) \\ &= nx(n-k) - kx(n-k) \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

Este sistema es variante en tiempo, ya que $y(n,k) \neq y(n-k)$.

(c) Este sistema se describe mediante la relación de entrada–salida

$$y(n) = \mathscr{T}[x(n)] = x(-n) \tag{2.2.21}$$

La respuesta de este sistema a $x(n-k)$ es

$$y(n,k) = \mathscr{T}[x(n-k)] = x(-n-k) \tag{2.2.22}$$

Si ahora retardamos la salida $y(n)$ dada por (2.2.21), k unidades de tiempo, el resultado será

$$y(n-k) = x(-n+k) \tag{2.2.23}$$

Como $y(n,k) \neq y(n-k)$, el sistema es variante en el tiempo.

(d) La ecuación de entrada–salida para este sistema es

$$y(n) = x(n)\cos\omega_0 n \tag{2.2.24}$$

La respuesta de este sistema a $x(n-k)$ es

$$y(n,k) = x(n-k)\cos\omega_0 n \tag{2.2.25}$$

Si retardamos la expresión dada por (2.2.24) k unidades y el resultado se compara con (2.2.25), es evidente que el sistema es variante en el tiempo.

Sistemas lineales y no lineales. La clase general de sistemas puede subdividirse en sistemas lineales y sistemas no lineales. Un sistema lineal es aquel que satisface el *principio de superposición*. De forma sencilla podemos decir que el principio de superposición exige que la respuesta del sistema a una suma ponderada de señales

sea igual a la correspondiente suma ponderada de las respuestas (salidas) del sistema a cada una de las señales individuales de entrada. Por tanto, tenemos la siguiente definición de linealidad.

Definición. Un sistema es lineal si y sólo si

$$\mathscr{T}[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)] = a_1\mathscr{T}[x_1(n)]+a_2\mathscr{T}[x_2(n)] \tag{2.2.26}$$

para cualesquiera secuencias de entrada arbitrarias $x_1(n)$ y $x_2(n)$, y cualesquiera constantes arbitrarias a_1 y a_2. La Figura 2.2.9 proporciona una ilustración del principio de superposición.

El principio de superposición dado por la relación (2.2.26) puede separarse en dos partes. En primer lugar, suponemos que $a_2 = 0$. Luego (2.2.26) se reduce a

$$\mathscr{T}[a_1x_1(n)] = a_1\mathscr{T}[x_1(n)] = a_1y_1(n) \tag{2.2.27}$$

donde

$$y_1(n) = \mathscr{T}[x_1(n)]$$

La relación (2.2.27) demuestra la propiedad *multiplicativa* o *de escalado* de un sistema lineal. Es decir, si la respuesta del sistema a la entrada $x_1(n)$ es $y_1(n)$, la respuesta a $a_1x_1(n)$ es simplemente $a_1y_1(n)$. Por tanto, cualquier escalado de la entrada da lugar a un escalado idéntico de la salida correspondiente.

En segundo lugar, suponga que $a_1 = a_2 = 1$ en la Ecuación (2.2.26). Entonces

$$\begin{aligned}\mathscr{T}[x_1(n)+x_2(n)] &= \mathscr{T}[x_1(n)]+\mathscr{T}[x_1(n)]\\ &= y_1(n)+y_2(n)\end{aligned} \tag{2.2.28}$$

Esta relación demuestra la *propiedad aditiva* de un sistema lineal. Las propiedades aditiva y multiplicativa constituyen el principio de superposición tal y como se aplica a los sistemas lineales.

Extrapolando, la condición de linealidad expresada en (2.2.26) puede ampliarse arbitrariamente a cualquier combinación lineal ponderada de señales. En general, tenemos que

$$x(n) = \sum_{k=1}^{M-1} a_kx_k(n) \xrightarrow{\mathscr{T}} y(n) = \sum_{k=1}^{M-1} a_ky_k(n) \tag{2.2.29}$$

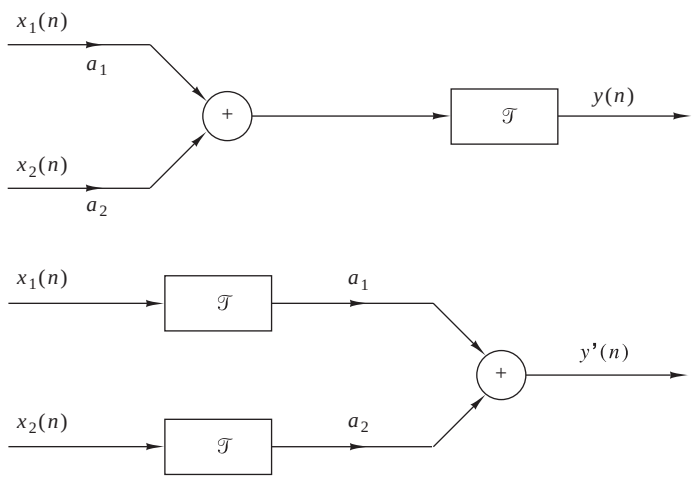


Figura 2.2.9. Representación gráfica del principio de superposición. $\mathscr{T}$ es lineal si y sólo si $y(n) = y'(n)$.

donde

$$y_k(n) = \mathscr{T}[x_k(n)], \qquad k = 1, 2, \ldots, M-1 \tag{2.2.30}$$

Observe en (2.2.27) que si $a_1 = 0$, entonces $y(n) = 0$. En otras palabras, un sistema lineal en reposo con una entrada cero produce una salida cero. Si un sistema genera una salida distinta de cero cuando se aplica una entrada igual a cero, puede que el sistema no esté en reposo o que sea un sistema no lineal. Si un sistema en reposo no satisface el principio de superposición de acuerdo con la definición anterior, se dice que es un sistema *no lineal*.

EJEMPLO 2.2.5

Determine si los sistemas descritos por las siguientes ecuaciones de entrada–salida son lineales o no lineales.

(a) $y(n) = nx(n)$

(b) $y(n) = x(n^2)$

(c) $y(n) = x^2(n)$

(d) $y(n) = Ax(n) + B$

(e) $y(n) = e^{x(n)}$

Solución.

(a) Para dos secuencias de entrada $x_1(n)$ y $x_2(n)$, las salidas correspondientes son

$$\begin{aligned} y_1(n) &= nx_1(n) \\ y_2(n) &= nx_2(n) \end{aligned} \tag{2.2.31}$$

Una combinación lineal de las dos secuencias de entrada da lugar a la salida

$$\begin{aligned} y_3(n) &= \mathscr{T}[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = n[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] \\ &= a_1nx_1(n) + a_2nx_2(n) \end{aligned} \tag{2.2.32}$$

Por otro lado, una combinación lineal de las dos salidas dadas por (2.2.31) genera la salida siguiente

$$a_1y_1(n) + a_2y_2(n) = a_1nx_1(n) + a_2nx_2(n) \tag{2.2.33}$$

Puesto que los lados de la derecha de las expresiones (2.2.32) y (2.2.33) son idénticos, el sistema es lineal.

(b) Como en el apartado (a), hallamos la respuesta del sistema a las dos señales de entrada por separado $x_1(n)$ y $x_2(n)$. El resultado es:

$$\begin{aligned} y_1(n) &= x_1(n^2) \\ y_2(n) &= x_2(n^2) \end{aligned} \tag{2.2.34}$$

La salida del sistema para una combinación lineal de $x_1(n)$ y $x_2(n)$ es

$$y_3(n) = \mathscr{T}[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1x_1(n^2) + a_2x_2(n^2) \tag{2.2.35}$$

Por último, una combinación lineal de las dos salidas dadas en (2.2.34) da como resultado

$$a_1y_1(n) + a_2y_2(n) = a_1x_1(n^2) + a_2x_2(n^2) \tag{2.2.36}$$

Comparando (2.2.35) con (2.2.36), podemos concluir que el sistema es lineal.

(c) La salida del sistema es el cuadrado de la entrada (los dispositivos eletrónicos que presentan una característica de entrada–salida así se denominan dispositivos cuadráticos). Basándonos en la exposición anterior, está claro que tales sistemas son sistemas sin memoria. Ahora vamos a ver que este sistema es no lineal.

Las respuestas del sistema a las dos señales de entrada separadas son

$$\begin{aligned} y_1(n) &= x_1^2(n) \\ y_2(n) &= x_2^2(n) \end{aligned} \tag{2.2.37}$$

La respuesta del sistema a una combinación lineal de estas dos señales de entrada es

$$\begin{aligned} y_3(n) &= \mathscr{T}[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)] \\ &= [a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]^2 \\ &= a_1^2x_1^2(n)+2a_1a_2x_1(n)x_2(n)+a_2^2x_2^2(n) \end{aligned} \tag{2.2.38}$$

Por el contrario, si el sistema fuera lineal, produciría una combinación lineal de las dos salidas dadas en (2.2.37), luego,

$$a_1y_1(n)+a_2y_2(n) = a_1x_1^2(n)+a_2x_2^2(n) \tag{2.2.39}$$

Dado que la salida real del sistema dada por (2.2.38) no es igual a (2.2.39), el sistema es no lineal.

(d) Suponiendo que el sistema se excita con $x_1(n)$ y $x_2(n)$ por separado, obtenemos las salidas correspondientes

$$\begin{aligned} y_1(n) &= Ax_1(n)+B \\ y_2(n) &= Ax_2(n)+B \end{aligned} \tag{2.2.40}$$

Una combinación lineal de $x_1(n)$ y $x_2(n)$ genera la salida

$$\begin{aligned} y_3(n) &= \mathscr{T}[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)] \\ &= A[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]+B \\ &= Aa_1x_1(n)+a_2Ax_2(n)+B \end{aligned} \tag{2.2.41}$$

Sin embargo, si el sistema fuera lineal, su salida para la combinación lineal de $x_1(n)$ y $x_2(n)$ sería una combinación lineal de $y_1(n)$ e $y_2(n)$, es decir,

$$a_1y_1(n)+a_2y_2(n) = a_1Ax_1(n)+a_1B+a_2Ax_2(n)+a_2B \tag{2.2.42}$$

Evidentemente, (2.2.41) y (2.2.42) son diferentes y por tanto el sistema no satisface la prueba de linealidad.

La razón de que este sistema no satisfaga la prueba de linealidad no es que el sistema sea no lineal (de hecho, el sistema se describe mediante una ecuación lineal) sino la presencia de la constante B. En consecuencia, la salida depende tanto de la excitación de entrada como del parámetro $B \neq 0$. Sin embargo, para $B \neq 0$, el sistema no está en reposo. Si hacemos $B = 0$, el sistema estará en reposo y la prueba de linealidad se satisfará.

(e) Observe que el sistema descrito por la ecuación de entrada–salida

$$y(n) = e^{x(n)} \tag{2.2.43}$$

está en reposo. Si $x(n) = 0$, tenemos que $y(n) = 1$. Esto es una indicación de que el sistema no es lineal. De hecho, ésta es la conclusión a la que se llega cuando se aplica la prueba de linealidad.

Sistemas causales y no causales. Comenzamos definiendo los sistemas discretos en el tiempo causales.

Definición. Se dice que un sistema es *causal* si la salida del mismo en cualquier instante n [es decir, $y(n)$] sólo depende de las entradas actuales y pasadas [es decir, $x(n)$, $x(n-1)$, $x(n-2), \ldots$], pero no depende de las

entradas futuras $[x(n+1), x(n+2), \ldots]$. En términos matemáticos, la salida de un sistema causal satisface una ecuación de la forma

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), x(n-2), \ldots] \tag{2.2.44}$$

donde $F[\cdot]$ es alguna función arbitraria.

Si un sistema no satisface esta definición, se dice que es *no causal*. Un sistema así tiene una salida que depende no sólo de las entradas actual y pasada, sino también de las entradas futuras.

Es evidente que en las aplicaciones de tratamiento de señales en tiempo real no es posible observar los valores futuros de la señal, por lo que un sistema no causal es físicamente irrealizable (es decir, no se puede implementar). Por el contrario, si la señal se registra de modo que el procesamiento se lleva a cabo fuera de línea (no en tiempo real), es posible implementar un sistema no causal, dado que todos los valores de la señal están disponibles en el momento del procesamiento. A menudo, ésta es la situación que se da en el tratamiento de señales geofísicas e imágenes.

EJEMPLO 2.2.6

Determine si los sistemas descritos según las siguientes ecuaciones de entrada–salida son causales o no causales.

a) $y(n) = x(n) - x(n-1)$ **b)** $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$ **c)** $y(n) = ax(n)$

d) $y(n) = x(n) + 3x(n+4)$ **e)** $y(n) = x(n^2)$ **f)** $y(n) = x(2n)$ **g)** $y(n) = x(-n)$

Solución. Los sistemas descritos en los apartados (a), (b) y (c) son evidentemente causales, ya que la salida sólo depende de las entradas actual y pasadas. Por el contrario, los sistemas de los apartados (d), (e) y (f) son claramente no causales, ya que la salida depende de los valores futuros de la entrada. El sistema del apartado (g) también es no causal, ya que podemos observar al seleccionar, por ejemplo, $n = -1$, que nos lleva a $y(-1) = x(1)$. Por tanto, la salida en $n = -1$ depende de la entrada en $n = 1$, la cual se encuentra dos unidades de tiempo más adelante.

Sistemas estables y inestables. La estabilidad es una propiedad importante que debe tenerse en cuenta en cualquier aplicación práctica de un sistema. Los sistemas inestables normalmente presentan un comportamiento errático y extremo, y producen desbordamiento en cualquier implementación práctica. Vamos a definir ahora qué se entiende por sistema estable y, posteriormente, en la Sección 2.3.6, exploraremos las implicaciones de esta definición para los sistemas lineales invariantes en el tiempo.

Definición. Se dice que un sistema en reposo es un sistema estable BIBO (*bounded input–bounded output*, de entrada y salida acotadas) si y sólo si toda entrada acotada genera una salida acotada.

La condición de que la secuencia de entrada $x(n)$ y la secuencia de salida $y(n)$ sean acotadas se expresa matemáticamente estableciendo que existen determinados números finitos, como por ejemplo, M_x y M_y, tales que

$$|x(n)| \leq M_x < \infty, \qquad |y(n)| \leq M_y < \infty \tag{2.2.45}$$

para todo n. Si, para determinada secuencia de entrada acotada $x(n)$, la salida no está acotada (es infinita), el sistema se clasifica como no estable.

EJEMPLO 2.2.7

Considere el sistema no lineal descrito por la ecuación de entrada–salida

$$y(n) = y^2(n-1) + x(n)$$

Como secuencia de entrada seleccionamos la señal acotada

$$x(n) = C\delta(n)$$

donde C es una constante. Suponemos también que $y(-1) = 0$. Así, la secuencia de salida es

$$y(0) = C, \quad y(1) = C^2, \quad y(2) = C^4, \quad \ldots, \quad y(n) = C^{2n}$$

Claramente, la salida no está acotada cuando $1 < |C| < \infty$. Por tanto, el sistema es un sistema inestable, ya que una secuencia de entrada acotada produce una salida no acotada.

2.2.4 Interconexión de sistemas discretos en el tiempo

Los sistemas discretos en el tiempo pueden interconectarse para formar sistemas más grandes. Existen dos formas básicas en las que los sistemas pueden interconetarse: en cascada (serie) o en paralelo. Estas interconexiones se ilustran en la Figura 2.2.10. Observe que los dos sistemas interconectados son diferentes.

En la interconexión en cascada, la salida del primer sistema es

$$y_1(n) = \mathscr{T}_1[x(n)] \tag{2.2.46}$$

y la salida del segundo sistema es

$$\begin{aligned} y(n) &= \mathscr{T}_2[y_1(n)] \\ &= \mathscr{T}_2\{\mathscr{T}_1[x(n)]\} \end{aligned} \tag{2.2.47}$$

Observe que los sistemas $\mathscr{T}_1$ y $\mathscr{T}_2$ pueden combinarse o consolidarse en un único sistema global

$$\mathscr{T}_c \equiv \mathscr{T}_2\mathscr{T}_1 \tag{2.2.48}$$

En consecuencia, podemos expresar la salida del sistema combinado como

$$y(n) = \mathscr{T}_c[x(n)]$$

En general, el orden en que se realicen las operaciones $\mathscr{T}_1$ y $\mathscr{T}_2$ es importante. Es decir

$$\mathscr{T}_2\mathscr{T}_1 \neq \mathscr{T}_1\mathscr{T}_2$$

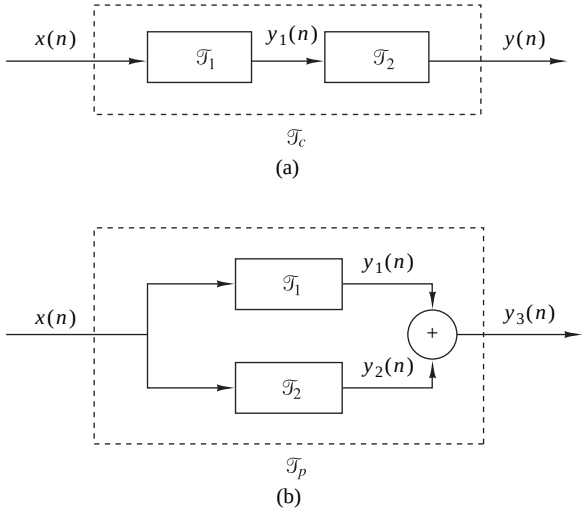


Figura 2.2.10. Interconexión de sistemas (a) en cascada y (b) en paralelo.

para sistemas arbitrarios. Sin embargo, si los sistemas $\mathscr{T}_1$ y $\mathscr{T}_2$ son lineales e invariantes en el tiempo, entonces (a) $\mathscr{T}_c$ es invariante en el tiempo y (b) $\mathscr{T}_2\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_1\mathscr{T}_2$, es decir, el orden en el que los sistemas procesen la señal no es importante. $\mathscr{T}_2\mathscr{T}_1$ y $\mathscr{T}_1\mathscr{T}_2$ proporcionan secuencias de salida idénticas.

A continuación proporcionamos la demostración de (a). La demostración correspondiente al apartado (b) se incluye en la Sección 2.3.4. Para demostrar la invarianza en el tiempo, supongamos que $\mathscr{T}_1$ y $\mathscr{T}_2$ son invariantes en el tiempo; luego

$$x(n-k) \xrightarrow{\mathscr{T}_1} y_1(n-k)$$

e

$$y_1(n-k) \xrightarrow{\mathscr{T}_2} y(n-k)$$

Luego

$$x(n-k) \xrightarrow{\mathscr{T}_c = \mathscr{T}_2\mathscr{T}_1} y(n-k)$$

y por tanto, $\mathscr{T}_c$ es invariante en el tiempo.

En la interconexión paralelo, la salida del sistema $\mathscr{T}_1$ es $y_1(n)$ y la salida del sistema $\mathscr{T}_2$ es $y_2(n)$. Por tanto, la salida de la interconexión paralelo es

$$\begin{aligned} y_3(n) &= y_1(n) + y_2(n) \\ &= \mathscr{T}_1[x(n)] + \mathscr{T}_2[x(n)] \\ &= (\mathscr{T}_1 + \mathscr{T}_2)[x(n)] \\ &= \mathscr{T}_p[x(n)] \end{aligned}$$

donde $\mathscr{T}_p = \mathscr{T}_1 + \mathscr{T}_2$.

En general, podemos emplear la interconexión en paralelo y en cascada de sistemas para construir sistemas más grandes y complejos. Inversamente, podemos tener un sistema grande y dividirlo en subsistemas con fines de análisis e implementación. Utilizaremos estas ideas más adelante en el diseño y la implementación de filtros digitales.

2.3 Análisis de sistemas lineales discretos e invariantes en el tiempo

En la Sección 2.2 hemos clasificado los sistemas de acuerdo con una serie de categorías o propiedades características: linealidad, causalidad, estabilidad e invarianza en el tiempo. Una vez hecho esto, ahora vamos a fijar nuestra atención en el análisis de la importante categoría de los sistemas lineales invariantes en el tiempo (sistemas LTI). En concreto, vamos a demostrar que tales sistemas se caracterizan en el dominio del tiempo simplemente mediante su respuesta a una secuencia de impulsos unitarios. Demostraremos también que cualquier señal de entrada arbitraria se puede descomponer y representar como una suma ponderada de secuencias de impulsos unitarios. Gracias a la linealidad y a la invarianza con el tiempo del sistema, la respuesta del sistema a cualquier señal de entrada arbitraria se puede expresar en función de la respuesta del sistema al impulso unitario. Obtendremos además la forma general de la expresión que relaciona la respuesta al impulso unitario del sistema con las señales de entrada y de salida y que se conoce como convolución. Así, podremos determinar la salida de cualquier sistema lineal invariante en el tiempo para cualquier señal de entrada arbitraria.

2.3.1 Técnicas para el análisis de los sistemas lineales

Existen dos métodos básicos que permiten analizar el comportamiento o respuesta de un sistema lineal a una determinada señal de entrada. Un método está basado en la resolución directa de la ecuación de entrada–salida del sistema, que, en general, tiene la forma

$$y(n) = F[y(n-1), y(n-2), \ldots, y(n-N), x(n), x(n-1), \ldots, x(n-M)]$$

donde $F[\cdot]$ indica alguna función de las magnitudes encerradas entre corchetes. Específicamente, para un sistema LTI, veremos más adelante que la forma general de la relación entrada–salida es

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \tag{2.3.1}$$

donde $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ son parámetros constantes específicos del sistema y son independientes de $x(n)$ e $y(n)$. La relación de entrada–salida dada por (2.3.1) es una ecuación en diferencias y representa una forma de caracterizar el comportamiento del sistema LTI discreto en el tiempo. La solución dada por (2.3.1) es el tema de la Sección 2.4.

El segundo método para analizar el comportamiento de un sistema lineal ante una señal de entrada determinada consiste en descomponer primero la señal de entrada en una suma de señales elementales. Estas señales elementales se seleccionan de manera que la respuesta del sistema a cada componente de señal se determine facilmente. A continuación, utilizando la propiedad de linealidad del sistema, las respuestas del mismo a las señales elementales se suman para obtener la respuesta total del sistema a la señal de entrada dada. Este segundo método es el que hemos descrito en esta sección.

Supongamos que la señal de entrada $x(n)$ se descompone en una suma ponderada de componentes elementales de la señal $\{x_k(n)\}$, de modo que

$$x(n) = \sum_k c_k x_k(n) \tag{2.3.2}$$

donde los $\{c_k\}$ hacen referencia al conjunto de amplitudes (coeficientes de ponderación) de la descomposición de la señal $x(n)$. Ahora suponemos que la respuesta del sistema a las señal elemental $x_k(n)$ es $y_k(n)$. Por tanto,

$$y_k(n) \equiv \mathscr{T}[x_k(n)] \tag{2.3.3}$$

suponiendo que el sistema está en reposo y que la respuesta a $c_k x_k(n)$ es $c_k y_k(n)$, como consecuencia de la propiedad de escalado del sistema lineal.

Por último, la respuesta total a la entrada $x(n)$ es

$$\begin{aligned} y(n) = \mathscr{T}[x(n)] &= \mathscr{T}\left[\sum_k c_k x_k(n)\right] \\ &= \sum_k c_k \mathscr{T}[x_k(n)] \\ &= \sum_k c_k y_k(n) \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

En (2.3.4) hemos utilizado la propiedad aditiva del sistema lineal.

Aunque en principio parece que la elección de las señales elementales es arbitraria, en realidad dicha selección es extremadamente dependiente de la clase de señales de entrada que deseemos considerar. Si no imponemos ninguna restricción a las características de las señales de entrada, entonces su descomposición en una suma ponderada de secuencias de impulsos unitarios es matemáticamente conveniente y completamente general. Por el contrario, si nos restringimos a una subclase de señales de entrada, puede existir otro conjunto de señales elementales que sea más adecuado matemáticamente para la determinación de la salida. Por ejemplo, si la señal de entrada $x(n)$ es periódica con período N, ya hemos visto en la Sección 1.3.3, que un conjunto matemáticamente conveniente de señales elementales es el de las exponenciales.

$$x_k(n) = e^{j\omega_k n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{2.3.5}$$

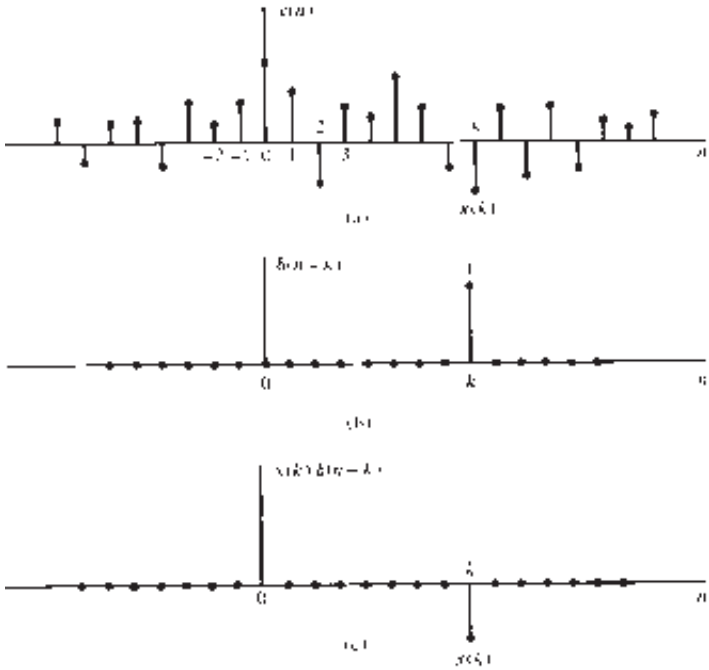


Figura 2.3.1. Multiplicación de una señal $x(n)$ por el impulso unitario desplazado.

donde las frecuencias $\{\omega_k\}$ están armónicamente relacionadas, es decir,

$$\omega_k = \left(\frac{2\pi}{N}\right)k, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{2.3.6}$$

La frecuencia $2\pi/N$ es la frecuencia fundamental y todas las componentes de frecuencia más alta son múltiplos de la componente de la frecuencia fundamental. Esta subclase de señales de entrada se verá más en detalle más adelante.

Para descomponer la señal de entrada en una suma pondenrada de impulsos unitarios, debemos en primer lugar determinar la respuesta del sistema a un impulso unitario y luego utilizar las propiedades de cambio de escala y multiplicativa del sistema lineal para determinar la fórmula para la salida dada cualquier entrada arbitraria. Este desarrollo se describe más detalladamente a continuación.

2.3.2 Descomposición en impulsos de una señal discreta en el tiempo

Suponga que disponemos de una señal arbitraria $x(n)$ que deseamos descomponer en una suma de impulsos unitarios. Para aplicar la notación establecida en la sección anterior, seleccionamos las señales elementales $x_k(n)$ de modo que

$$x_k(n) = \delta(n-k) \tag{2.3.7}$$

donde k representa el retardo de la secuencia de impulsos. Para poder manejar una señal arbitraria $x(n)$ que tenga valores distintos de cero de duración infinta, el conjunto de impulsos unitarios tiene que ser infinito, para contener el número infinito de retardos.

Ahora supongamos que multiplicamos las dos secuencias $x(n)$ y $\delta(n-k)$. Puesto que $\delta(n-k)$ es cero siempre, excepto para $n = k$, que es igual a la unidad, el resultado de esta multiplicación es otra secuencia que es igual a cero siempre excepto en $n = k$, cuyo valor valor es $x(k)$, como se ilustra en la Figura 2.3.1. Por tanto,

$$x(n)\delta(n-k) = x(k)\delta(n-k) \tag{2.3.8}$$

es una secuencia que es cero siempre excepto en $n = k$, que es igual a $x(k)$. Si repetimos la multiplicación de $x(n)$ por $\delta(n-m)$, siendo m otro retardo $(m \neq k)$, el resultado sería una secuencia que es cero para todos los puntos excepto en $n = m$, donde toma el valor $x(m)$. Luego

$$x(n)\delta(n-m) = x(m)\delta(n-m) \tag{2.3.9}$$

En otras palabras, cada multiplicación de la señal $x(n)$ por un impulso unitario desplazado un cierto k, [es decir, $\delta(n-k)$], extrae el valor $x(k)$ de la señal $x(n)$ en el instante en que el impulso unitario es distinto de cero. Por tanto, si repetimos esta multiplicación para todos los posibles desplazamientos, $-\infty < k < \infty$, y sumamos todos los productos, el resultado será una secuencia igual a $x(n)$, es decir,

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \tag{2.3.10}$$

Vamos a fijarnos en el lado derecho de la Ecuación (2.3.10), que es el sumatorio de un número infinito de impulsos unitarios desplazados, donde el impulso unitario $\delta(n-k)$ tiene una amplitud $x(k)$. Por tanto, el lado derecho de dicha ecuación proporciona la descomposición de cualquier señal arbitraria $x(n)$ en una suma ponderada (escalada) de impulsos unitarios desplazados.

EJEMPLO 2.3.1

Considere el caso especial de la secuencia de duración finita dada por

$$x(n) = \{2, \underset{\uparrow}{4}, 0, 3\}$$

Descomponga la secuencia $x(n)$ en una suma de impulsos ponderados.

Solución. Puesto que la secuencia $x(n)$ es distinta de cero en los instantes de tiempo $n = -1, 0, 2$, necesitamos tres impulsos en $k = -1, 0$. De acuerdo con la expresión (2.3.10), tenemos que

$$x(n) = 2\delta(n+1) + 4\delta(n) + 3\delta(n-2)$$

2.3.3 Respuesta de los sistemas LTI a entradas arbitrarias: la convolución

Una vez descompuesta una señal de entrada arbitraria $x(n)$ en una suma ponderada de impulsos, estamos preparados para determinar la respuesta de cualquier sistema lineal en reposo a cualquier señal de entrada. En primer lugar, designamos la respuesta $y(n,k)$ del sistema al impulso unitario de entrada en $n = k$ mediante el símbolo especial $h(n,k)$, $-\infty < k < \infty$. Es decir,

$$y(n,k) \equiv h(n,k) = \mathscr{T}[\delta(n-k)] \tag{2.3.11}$$

Observe en la Ecuación (2.3.11) que n es el índice de tiempos y k es un parámetro que muestra la posición del impulso de entrada. Si se cambia la escala del impulso que se encuentra a la entrada en una cantidad $c_k \equiv x(k)$, la escala de la respuesta del sistema cambiará en la misma magnitud; es decir

$$c_k h(n,k) = x(k)h(n,k) \tag{2.3.12}$$

Por último, si la entrada es la señal arbitraria $x(n)$ expresada como una suma de impulsos ponderados

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \tag{2.3.13}$$

entonces la respuesta del sistema a $x(n)$ será la correspondiente suma de salidas ponderadas, luego

$$\begin{aligned} y(n) = \mathscr{T}[x(n)] &= \mathscr{T}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\mathscr{T}[\delta(n-k)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n,k) \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

Evidentemente, la expresión (2.3.14) cumple la propiedad de superposición de los sistemas lineales y se conoce como *sumatorio de superposición*.

Observe que (2.3.14) es una expresión para la respuesta de un sistema lineal a cualquier secuencia de entrada arbitraria $x(n)$. Esta expresión es una función tanto de $x(n)$ como de las respuestas $h(n,k)$ del sistema a los impulsos unitarios $\delta(n-k)$ para $-\infty < k < \infty$. Para obtener la Ecuación (2.3.14) hemos utilizado la propiedad de linealidad del sistema pero no su propiedad de invarianza en el tiempo, ya que dicha expresión puede aplicarse a cualquier sistema lineal (e invariante en el tiempo) en reposo.

Si además el sistema es invariante en el tiempo, la fórmula dada por (2.3.14) se simplifica considerablemente. De hecho, si la respuesta del sistema LTI al impulso unitario $\delta(n)$ se denota como $h(n)$, es decir,

$$h(n) \equiv \mathscr{T}[\delta(n)] \tag{2.3.15}$$

entonces aplicando la propiedad de invarianza en el tiempo, la respuesta del sistema a la secuencia de impulsos unitarios desplazados $\delta(n-k)$ es

$$h(n-k) = \mathscr{T}[\delta(n-k)] \tag{2.3.16}$$

Por tanto, la fórmula dada por (2.3.14) se reduce a

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \tag{2.3.17}$$

Queda claro entonces que el sistema LTI en reposo queda completamente caracterizado por una única función $h(n)$, es decir, su respuesta al impulso unitario $\delta(n)$. Por el contrario, la caracterización general de la salida de un sistema lineal e invariante en el tiempo requiere un número infinito de funciones de respuesta al impulso unitario, $h(n,k)$, una para cada posible desplazamiento.

La fórmula dada por (2.3.17) que proporciona la respuesta $y(n)$ del sistema LTI como una función de la señal de entrada $x(n)$ y de la respuesta al impulso $h(n)$ se denomina *suma de convolución*. Decimos que la entrada $x(n)$ se convoluciona con la respuesta al impulso $h(n)$ para proporcionar la salida $y(n)$. A continuación vamos a explicar el procedimiento para calcular la respuesta $y(n)$, tanto por medios matemáticos como gráficos, conocidas la entrada $x(n)$ y la respuesta al impulso $h(n)$ del sistema.

Supongamos que deseamos calcular la salida del sistema en un determinado instante de tiempo, por ejemplo, para $n = n_0$. De acuerdo con (2.3.17), la respuesta en $n = n_0$ está dada por

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n_0-k) \tag{2.3.18}$$

La primera observación que tenemos que hacer es que el índice del sumatorio es k, y, en consecuencia, tanto la señal de entrada $x(k)$ como la respuesta al impulso $h(n_0-k)$ son funciones de k. En segundo lugar, observe que las secuencias $x(k)$ and $h(n_0-k)$ se multiplican para formar una secuencia producto. La salida $y(n_0)$ es simplemente la suma de todos los valores de la secuencia producto. La secuencia $h(n_0-k)$ se obtiene a partir de $h(k)$, reflejando primero $h(k)$ respecto de $k=0$ (el origen de tiempos), lo que da como resultado la secuencia $h(-k)$. La secuencia reflejada se desplaza entonces n_0 para proporcionar $h(n_0-k)$. En resumen, el proceso de calcular la convolución entre $x(k)$ y $h(k)$ implica los pasos siguientes:

1. *Reflexión*. Se refleja $h(k)$ respecto de $k=0$ para obtener $h(-k)$.
2. *Desplazamiento*. Se desplaza $h(-k)$ una cantidad n_0 hacia la derecha (o la izquierda) si n_0 es positivo (negativo), para obtener $h(n_0-k)$.
3. *Multiplicación*. Se multiplica $x(k)$ por $h(n_0-k)$ para obtener la secuencia producto $v_{n_0}(k) \equiv x(k)h(n_0-k)$.
4. *Suma*. Se suman todos los valores de la secuencia producto $v_{n_0}(k)$ para obtener el valor de la salida en el instante $n=n_0$.

Observe que este procedimiento proporciona la respuesta del sistema en un determinado instante de tiempo, por ejemplo, en $n=n_0$. En general, estaremos interesados en evaluar la respuesta del sistema en todos los instantes de tiempo del intervalo $-\infty < n < \infty$. Por tanto, los pasos 2 hasta 4 deben repetirse para todos los posibles valores del desplazamiento temporal, $-\infty < n < \infty$.

Con el fin de comprender mejor el procedimiento de evaluación de la convolución, vamos a mostrar el proceso gráficamente. Las gráficas nos ayudan a explicar los cuatro pasos necesarios en el cálculo de la convolución.

EJEMPLO 2.3.2

La respuesta al impulso de un sistema lineal invariante en el tiempo es

$$h(n) = \{1, \underset{\uparrow}{2}, 1, -1\} \tag{2.3.19}$$

Determine la respuesta del sistema a la siguiente señal de entrada

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 1\} \tag{2.3.20}$$

Solución. Vamos a calcular la convolución empleando la fórmula (2.3.17), pero utilizaremos gráficas de las secuencias para ayudarnos en los cálculos. En la Figura 2.3.2(a) se ilustra la secuencia de entrada $x(k)$ y la respuesta al impulso $h(k)$ del sistema, usando k como el índice de tiempos para ser coherentes con la expresión (2.3.17).

El primer paso para calcular la convolución consiste en reflejar $h(k)$. La secuencia reflejada $h(-k)$ se muestra en la Figura 2.3.2(b). A continuación podemos calcular la salida en $n=0$, aplicando la fórmula (2.3.17), la cual es

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-k) \tag{2.3.21}$$

Dado que $n=0$, utilizamos $h(-k)$ directamente sin desplazarla. La secuencia producto

$$v_0(k) \equiv x(k)h(-k) \tag{2.3.22}$$

también se muestra en la Figura 2.3.2(b). Por último, la suma de todos los términos de la secuencia producto es

$$y(0) = \sum^{\infty} h = -\infty v_0(k) = 4$$

Continuamos el cálculo evaluando la respuesta del sistema en $n=1$. Según (2.3.17),

$$y(1) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} x(k)h(1-k) \tag{2.3.23}$$

La secuencia $h(1-k)$ es simplemente la secuencia reflejada $h(-k)$ desplazada hacia la derecha una unidad de tiempo. Esta secuencia se ilustra en la Figura 2.3.2(c). La secuencia producto

$$v_1(k) = x(k)h(1-k) \tag{2.3.24}$$

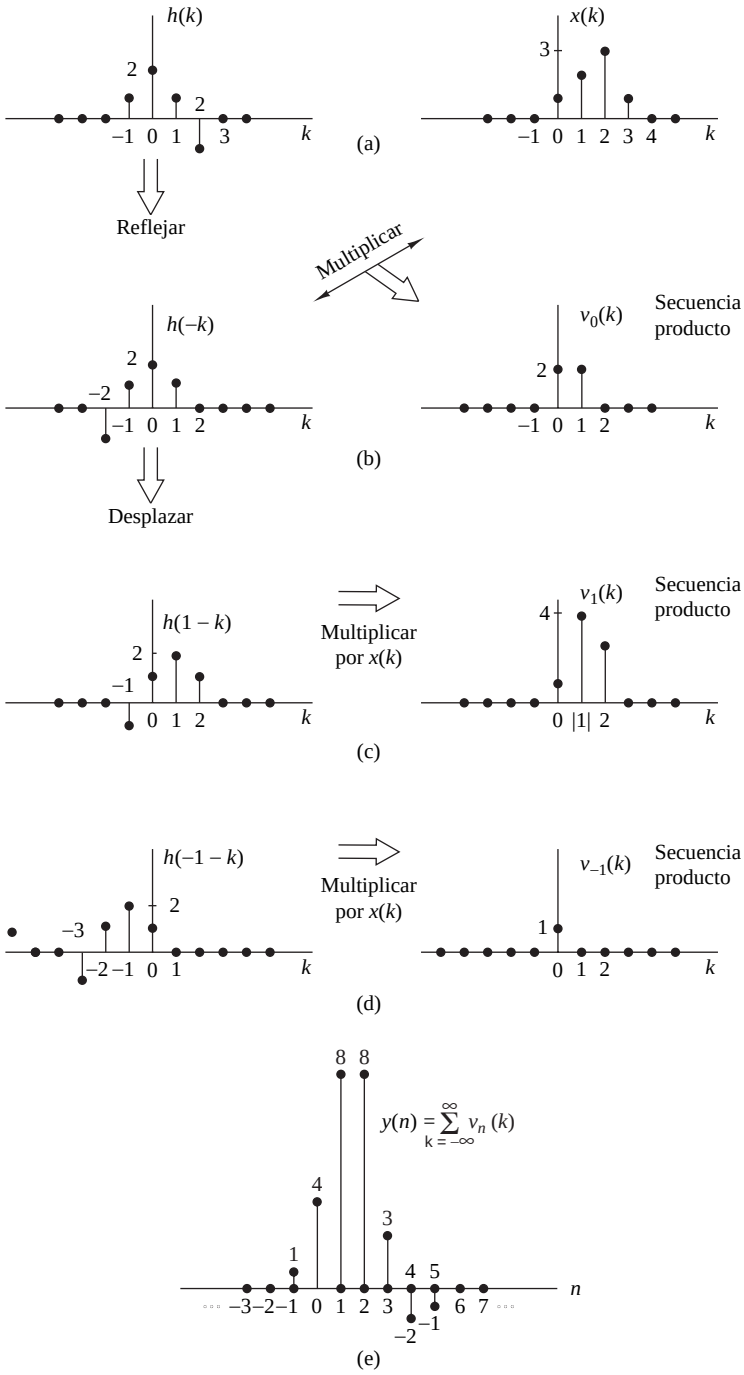


Figura 2.3.2. Cálculo de la convolución aplicando métodos gráficos.

se muestra en la Figura 2.3.2(c). Por último, la suma de todos los valores de la secuencia producto es

$$y(1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_1(k) = 8$$

De forma similar, obtenemos $y(2)$ desplazando $h(-k)$ dos unidades de tiempo hacia la derecha, para obtener la secuencia producto $v_2(k) = x(k)h(2-k)$ y luego sumamos todos los términos de la secuencia producto obteniendo $y(2) = 8$. Desplazando $h(-k)$ hacia la derecha sucesivamente, multiplicando la secuencia correspondiente y sumando todos los valores de las secuencias producto resultantes, obtenemos $y(3) = 3$, $y(4) = -2$, $y(5) = -1$. Para $n > 5$, tenemos que $y(n) = 0$ porque las secuencias producto continen únicamente ceros. Por tanto, hemos obtenido la respuesta $y(n)$ para $n > 0$.

A continuación deseamos evaluar $y(n)$ para $n < 0$. Comenzamos con $n = -1$, luego

$$y(-1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-1-k) \tag{2.3.25}$$

Ahora la secuencia $h(-1-k)$ es simplemente la secuencia reflejada $h(-k)$ desplazada una unidad de tiempo hacia la izquierda. La secuencia resultante se muestra en la Figura 2.3.2(d). La secuencia producto correspondiente también se ilustra en la Figura 2.3.2(d). Por último, sumando todos los valores de la secuencia producto, obtenemos

$$y(-1) = 1$$

Si observamos las gráficas de la Figura 2.3.2, es evidente que cualquier desplazamiento ulterior de $h(-1-k)$ hacia la izquierda siempre da como resultado una secuencia producto cuyos valores son todos igual a cero, y por tanto

$$y(n) = 0 \qquad \text{para} \quad n \leq -2$$

Ahora tenemos la respuesta completa del sistema para $-\infty < n < \infty$, la cual resuminos como sigue

$$y(n) = \{\ldots, 0, 0, 1, \underset{\uparrow}{4}, 8, 8, 3, -2, -1, 0, 0, \ldots\} \tag{2.3.26}$$

En el Ejemplo 2.3.2 hemos ilustrado el cálculo de la convolución, empleando gráficas de las secuencias para ayudarnos visualizando los pasos del procedimiento de cálculo.

Antes de abordar otro ejemplo, vamos a demostrar que la convolución es una operación conmutativa en el sentido de que es irrelevante cuál de las dos componentes se refleje y desplace. Si comenzamos con la fórmula (2.3.17) y hacemos un cambio de variable en el sumatorio, de k a m, definiendo el nuevo índice $m = n - k$, entonces $k = n - m$ y (2.3.17) puede escribirse como sigue

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m)h(m) \tag{2.3.27}$$

Puesto que m es un índice ficticio, podemos simplemente reemplazar m por k de modo que

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) \tag{2.3.28}$$

La expresión dada por (2.3.28) implica no modificar la respuesta al impulso $h(k)$, mientras que la secuencia de entrada se refleja y desplaza. Aunque la salida $y(n)$ en (2.3.28) es idéntica a la dada en (2.3.17), las secuencias producto en las dos formas de la fórmula de la convolución no son idénticas. De hecho, si definimos las dos secuencias producto como

$$v_n(k) = x(k)h(n-k)$$

$$w_n(k) = x(n-k)h(k)$$

es fácil demostrar que

$$v_n(k) = w_n(n-k)$$

y, por tanto,

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_n(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_n(n-k)$$

ya que ambas secuencias contienen los mismos valores de impulso en una disposición diferente. Animamos al lector a repetir el Ejemplo 2.3.2 utilizando la convolución dada por (2.3.28).

EJEMPLO 2.3.3

Determine la salida $y(n)$ de un sistema lineal invariante en el tiempo en reposo con una respuesta al impulso

$$h(n) = a^{nu}(n), |a|1$$

cuando la entrada es un escalón unidad, es decir

$$x(n) = u(n)$$

Solución. En este caso, tanto $h(n)$ como $x(n)$ son secuencias de duración infinita. Utilizamos la fórmula de la convolución dada por (2.3.28) en la que $x(k)$ es la secuencia que se refleja. Las secuencias $h(k)$, $x(k)$ y $x(-k)$ se muestran en la Figura 2.3.3. Las secuencias producto $v_0(k)$, $v_1(k)$ y $v_2(k)$ correspondientes a $x(-k)h(k)$, $x(1-k)h(k)$ y $x(2-k)h(k)$ se ilustran en las Figuras 2.3.3(c), (d) y (e), respectivamente. Obtenemos así las salidas

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 \\ y(1) &= 1+a \\ y(2) &= 1+a+a^2 \end{aligned}$$

Evidentemente, para $n > 0$, la salida es

$$\begin{aligned} y(n) &= 1+a+a^2+\cdots+a^n \\ &= \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \end{aligned} \tag{2.3.29}$$

Por el contrario, para $n < 0$, las secuencias producto son todo ceros. Por tanto,

$$y(n) = 0, \qquad n < 0$$

En la Figura 2.3.3(f) se muestra una gráfica de la salida $y(n)$, para el caso $0 < a < 1$. Observe la subida exponencial en la salida, que es una función de n. Como $|a| < 1$, el valor final de la salida cuando n se aproxima a infinito es

$$y(\infty) = \lim_{n\to\infty} y(n) = \frac{1}{1-a} \tag{2.3.30}$$

Resumiendo, la fórmula de la convolución nos proporciona un medio para calcular la respuesta de un sistema lineal invariante en el tiempo en estado de reposo a cualquier señal de entrada arbitraria $x(n)$. Puede encontrarse en dos formas, dadas por las expresiones (2.3.17) y (2.3.28), siendo $x(n)$ la señal de entrada al sistema, $h(n)$ la respuesta al impulso del sistema e $y(n)$ la *salida* del sistema en respuesta a la señal de entrada $x(n)$. La evaluación de la fórmula de la convolución implica cuatro operaciones: *reflexión* de la respuesta al impulso cuando se usa la forma dada por (2.3.17) o de la secuencia de entrada como se especifica en (2.3.28) para proporcionar $h(-k)$ o $x(-k)$, respectivamente, *desplazamiento* de la secuencia reflejada en n unidades de tiempo, para proporcionar $h(n-k)$ o $x(n-k)$, *multiplicación* de las dos secuencias para obtener la secuencia producto, $x(k)h(n-k)$ o $x(n-k)h(k)$, y por último la *suma* de todos los valores de la secuencia producto para obtener la salida $y(n)$ del sistema en el instante n. La operación de reflexión se hace sólo una vez. Sin embargo, las tres operaciones restantes se repiten para todos los posibles desplazamientos en el intervalo $-\infty < n < \infty$ con el fin de obtener $y(n)$ para $-\infty < n < \infty$.

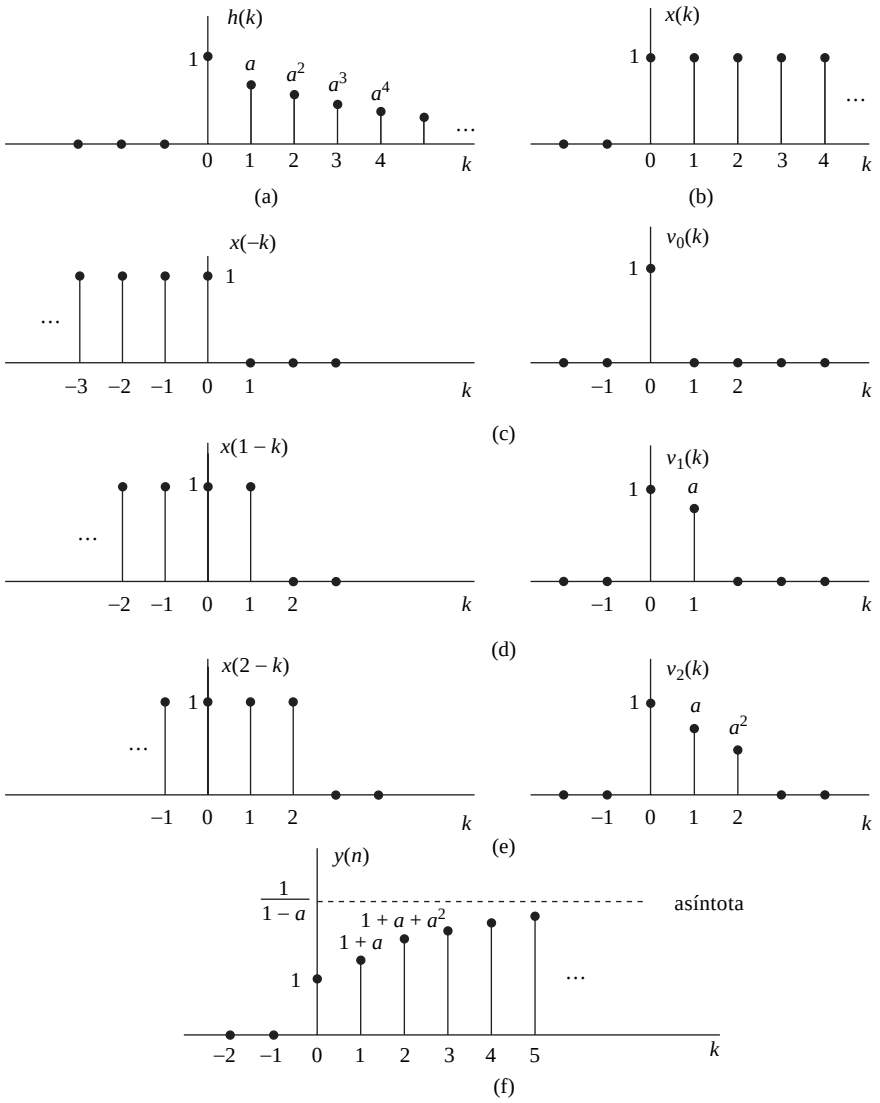


Figura 2.3.3. Cálculo mediante gráficas de la convolución del Ejemplo 2.3.3.

2.3.4 Propiedades de la convolución y la interconexión de sistemas LTI

En esta sección vamos a ver algunas propiedades importantes de la convolución y vamos a interpretar estas propiedades en función de la interconexión de los sistemas lineales invariantes en el tiempo. Veremos que estas propiedades se conservan para cualquier señal de entrada.

Es cómodo simplificar la notación empleando un símbolo de asterisco para designar la operación de convolución. Por tanto,

$$y(n) = x(n) * h(n) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \tag{2.3.31}$$

Con esta notación, la secuencia que sigue al asterisco [es decir, la respuesta al impulso $h(n)$] se refleja y se desplaza. La entrada al sistema es $x(n)$. Por otro lado, demostraremos también que

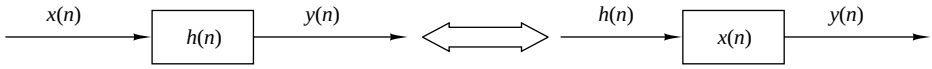


Figura 2.3.4. Interpretación de la propiedad conmutativa de la convolución.

$$y(n) = h(n) * x(n) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \tag{2.3.32}$$

En esta forma de la fórmula de la convolución, es la señal de entrada la que se refleja. Alternativamente, podemos interpretarla como el resultado de intercambiar los papeles que desempeñan $x(n)$ y $h(n)$. En otras palabras, podemos ver $x(n)$ como la respuesta al impulso del sistema y $h(n)$ como la excitación o señal de entrada. La Figura 2.3.4 ilustra esta interpretación.

Propiedades de identidad y desplazamiento. Podemos ver también que el impulso unitario $\delta(n)$ es el elemento identidad de la operación de convolución, es decir

$$y(n) = x(n) * \delta(n) = x(n)$$

Si desplazamos $\delta(n)$ una cantidad k, la secuencia de convolución se desplaza también una cantidad k, luego

$$x(n) * \delta(n-k) = y(n-k) = x(n-k)$$

Podemos ver la convolución de forma más abstracta como una operación matemática entre dos señales, por ejemplo, $x(n)$ y $h(n)$, que satisface una serie de propiedades. La propiedad indicada en las expresiones (2.3.31) y (2.3.32) es la ley conmutativa.

Ley conmutativa

$$x(n) * h(n) = h(n) * x(n) \tag{2.3.33}$$

Desde el punto de vista matemático, la operación de convolución también satisface la ley asociativa, la cual puede enunciarse como sigue.

Ley asociativa

$$[x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] \tag{2.3.34}$$

Desde el punto de vista físico, podemos interpretar $x(n)$ como la señal de entrada a un sistema lineal invariante en el tiempo con una respuesta al impulso $h_1(n)$. La salida de este sistema, designada por $y_1(n)$, se convierte en la entrada a un segundo sistema lineal invariante en el tiempo con una respuesta al impulso $h_2(n)$. Así, la salida

$$\begin{aligned} y(n) &= y_1(n) * h_2(n) \\ &= [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) \end{aligned}$$

es precisamente el lado izquierdo de la Ecuación (2.3.34), la cual corresponde a dos sistemas lineales invariantes en el tiempo conectados en cascada. El lado derecho de la Ecuación (2.3.34) indica que la entrada $x(n)$ se aplica a un sistema equivalente que tiene una respuesta al impulso, como por ejemplo, $h(n)$, que es igual a la convolución de las dos respuestas al impulso; es decir,

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n)$$

e

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

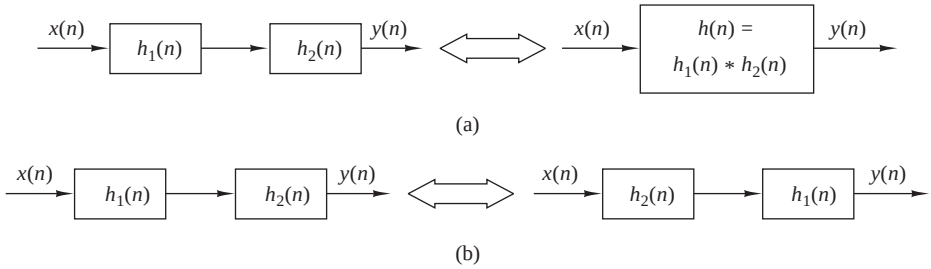


Figura 2.3.5. Implicaciones de las propiedades de la convolución (a) asociativa y (b) asociativa y commutativa.

Además, puesto que la operación de convolución satisface la propiedad commutativa, es posible intercambiar el orden de los dos sistemas con respuestas $h_1(n)$ y $h_2(n)$ sin alterar la relación global de entrada–salida. La Figura 2.3.5 ilustra gráficamente la propiedad asociativa.

EJEMPLO 2.3.4

Determine la respuesta al impulso para la conexión en cascada de dos sistemas lineales invariantes en el tiempo que tienen respuestas al impulso

$$h_1(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$$

y

$$h_2(n) = (\frac{1}{4})^n u(n)$$

Solución. Para determinar la respuesta al impulso global de los dos sistemas conectados en cascada, simplemente convolucionamos $h_1(n)$ con $h_2(n)$. Por tanto,

$$h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(k)h_2(n-k)$$

donde $h_2(n)$ se refleja y se desplaza. Definimos la secuencia producto

$$\begin{aligned} v_n(k) &= h_1(k)h_2(n-k) \\ &= (\frac{1}{2})^k(\frac{1}{4})^{n-k} \end{aligned}$$

que es distinta de cero para $k \geq 0$ y $n-k \geq 0$ o $n \geq k \geq 0$. Por otro lado, para $n < 0$, tenemos que $v_n(k) = 0$ para todo k, y por tanto

$$h(n) = 0, n < 0$$

Para $n \geq k \geq 0$, la suma de los valores de la secuencia producto $v_n(k)$ para todo k es

$$\begin{aligned} h(n) &= \sum_{k=0}^{n} (\frac{1}{2})^k(\frac{1}{4})^{n-k} \\ &= (\frac{1}{4})^n \sum_{k=0}^{n} 2^k \\ &= (\frac{1}{4})^n(2^{n+1}-1) \\ &= (\frac{1}{2})^n[2-(\frac{1}{2})^n], \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

Es posible generalizar la ley asociativa a más de dos sistemas conectados en cascada fácilmente a partir de la exposición anterior. Así, si tenemos L sistemas lineales invariantes en el tiempo conectados en cascada con respuestas al impulso $h_1(n), h_2(n), \ldots, h_L(n)$, existe un sistema lineal invariante en el tiempo que tiene una respuesta al impulso igual a $(L-1)$ convoluciones sucesivas de las respuestas al impulso. Es decir,

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n) * \cdots * h_L(n) \tag{2.3.35}$$

La ley conmutativa implica que el orden en que se efectúen las convoluciones es indiferente. A la inversa, cualquier sistema lineal invariante en el tiempo puede descomponerse en una interconexión en cascada de subsistemas. Más adelante describiremos un método para llevar a cabo esta descomposición.

Otra propiedad que satisface la operación de convolución es la ley distributiva, que enunciamos a continuación.

Ley distributiva.

$$x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \tag{2.3.36}$$

Interpretándola físicamente, esta ley implica que si tenemos dos sistemas lineales invariantes en el tiempo con respuestas al impulso $h_1(n)$ y $h_2(n)$ excitados con la misma señal de entrada $x(n)$, la suma de las dos respuestas es idéntica a la respuesta de un sistema global con la respuesta al impulso

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n)$$

Por tanto, el sistema completo es una combinación en paralelo de los dos sistemas lineales invariantes en el tiempo, como se ilustra en la Figura 2.3.6.

La generalización de la expresión (2.3.36) a más de dos sistemas lineales invariantes en el tiempo conectados en paralelo puede obtenerse fácilmente por deducción matemática. Por tanto, la interconexión de L sistemas lineales invariantes en el tiempo en paralelo con respuestas al impulso $h_1(n), h_2(n), \ldots, h_L(n)$ y excitados por la misma señal de entrada $x(n)$ es equivalente a un sistema global con una respuesta al impulso

$$h(n) = \sum_{j=1}^{L} h_j(n) \tag{2.3.37}$$

Inversamente, cualquier sistema lineal invariante en el tiempo se puede descomponer en una interconexión paralelo de subsistemas.

2.3.5 Sistemas lineales invariantes en el tiempo causales

En la Sección 2.2.3 hemos definido un sistema causal como aquel cuya salida en el instante n sólo depende de las entradas actual y pasadas, pero no depende de las entradas futuras. En otras palabras, la salida del sistema en un determinado instante n, por ejemplo $n = n_0$, sólo depende de los valores de $x(n)$ para $n \leq n_0$.

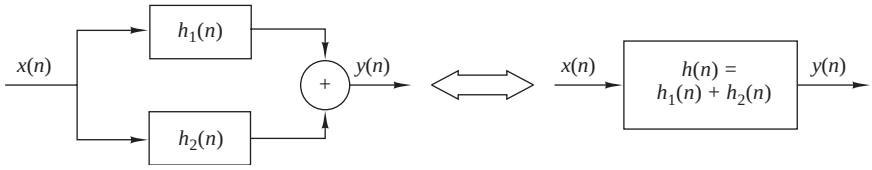


Figura 2.3.6. Interpretación de la propiedad distributiva de la convolución: dos sistemas LTI conectados en paralelo pueden reemplazarse por un único sistema con $h(n) = h_1(n) + h_2(n)$.

En el caso de un sistema lineal invariante en el tiempo, la causalidad se puede traducir a una condición que debe satisfacer la respuesta al impulso. Para determinar esta relación, consideremos un sistema lineal invariante en el tiempo con una salida en el instante $n = n_0$ dada por la fórmula de convolución

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n_0 - k)$$

Suponga que subdividimos la suma en dos conjuntos de términos, un conjunto que incluye los valores actual y pasados de la entrada [es decir, $x(n)$ para $n \leq n_0$] y otro conjunto que especifica los valores futuros de la entrada [$x(n)$, $n > n_0$]. Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned} y(n_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n_0 - k) + \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)x(n_0 - k) \\ &= [h(0)x(n_0) + h(1)x(n_0 - 1) + h(2)x(n_0 - 2) + \cdots] \\ &\quad + [h(-1)x(n_0 + 1) + h(-2)x(n_0 + 2) + \cdots] \end{aligned}$$

Observe que los términos de la primera suma son $x(n_0), x(n_0 - 1), \ldots,$ que son los valores actual y pasados de la señal de entrada. Por otro lado, los términos de la segunda suma son las componentes de la señal de entrada $x(n_0 + 1), x(n_0 + 2), \ldots$. Ahora, si la salida en el instante $n = n_0$ sólo depende de las entradas actual y pasadas, entonces, de manera evidente, la respuesta al impulso del sistema debe satisfacer la siguiente condición

$$h(n) = 0, \qquad n < 0 \tag{2.3.38}$$

Dado que $h(n)$ es la respuesta del sistema lineal invariante en el tiempo en reposo a un impulso unitario aplicado en $n = 0$, se deduce que $h(n) = 0$ para $n < 0$ es una condición necesaria y suficiente para la causalidad. Por tanto, un *sistema LTI es causal si y sólo si su respuesta al impulso es cero para los valores negativos de n*.

Puesto que para un sistema causal, $h(n) = 0$ para $n < 0$, los límites del sumatorio de la fórmula de la convolución se pueden modificar para reflejar esta restricción. Luego disponemos de las dos formas equivalentes

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n - k) \tag{2.3.39}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)h(n - k) \tag{2.3.40}$$

Como hemos mencionado anteriormente, la causalidad es necesaria en cualquier aplicación de tratamiento de señales en tiempo real, ya que en cualquier instante de tiempo dado n no tenemos acceso a valores futuros de la señal de entrada. Sólo los valores actual y pasados de la señal de entrada están disponibles en el cálculo de la salida actual.

En ocasiones, es conveniente denominar a una secuencia que es igual a cero para $n < 0$, una *secuencia causal*, y otra que tome valores distintos de cero para $n < 0$ y $n > 0$, una *secuencia no causal*. Esta terminología indica que una secuencia así podría ser la respuesta al impulso unitario de un sistema causal o un sistema no causal, respectivamente.

Si la entrada a un sistema lineal invariante en el tiempo causal es una secuencia causal [es decir, $x(n) = 0$ para $n < 0$], los límites de la fórmula de la convolución están aún más restringidos y las dos formas equivalentes de la fórmula de la convolución son:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} h(k)x(n - k) \tag{2.3.41}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} x(k)h(n - k) \tag{2.3.42}$$

Observe que, en este caso, los límites de los sumatorios para las dos formas alternativas son idénticos, y el límite superior aumenta con el tiempo. Evidentemente, la respuesta de un sistema causal a una secuencia de entrada causal es causal, ya que $y(n) = 0$ para $n < 0$.

EJEMPLO 2.3.5

Determine la respuesta al escalón unidad del sistema lineal invariante en el tiempo con una respuesta al impulso

$$h(n) = a^n u(n), \qquad |a| < 1$$

Solución. Como la señal de entrada es un escalón unidad, que es una señal causal, y el sistema también es causal, podemos utilizar una de las formas especiales de la fórmula de convolución, bien la expresión (2.3.41) o la (2.3.42). Dado que $x(n) = 1$ para $n \geq 0$, es más sencillo emplear la fórmula (2.3.41). Gracias a la simplicidad de este problema, podemos saltarnos los pasos de dibujar las secuencias reflejadas y desplazadas. En su lugar, hacemos la sustitución directa de las señales en la fórmula (2.3.41) y obtenemos

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^{n} a^k \\ &= \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \end{aligned}$$

e $y(n) = 0$ para $n < 0$. Observe que este resultado es idéntico al obtenido en el Ejemplo 2.3.3. Sin embargo, en este sencillo caso, hemos calculado la convolución algebraicamente sin recurrir al procedimiento detallado descrito anteriormente.

2.3.6 Estabilidad de los sistemas lineales invariantes en el tiempo

Como hemos dicho anteriormente, la estabilidad es una propiedad importante que hay que tener en cuenta en cualquier implementación práctica de un sistema. Hemos definido que un sistema arbitrario en reposo es un sistema estable BIBO (entrada y salida acotadas) si y sólo si su secuencia de salida $y(n)$ está acotada para toda entrada acotada $x(n)$.

Si $x(n)$ está acotada, existe una constante M_x tal que

$$|x(n)| \leq M_x < \infty$$

De forma similar, si la salida está acotada, existe una constante M_y tal que

$$|y(n)| < M_y < \infty \qquad \text{para todo } n.$$

A continuación, para una secuencia de entrada acotada dada $x(n)$ a un sistema lineal invariante en el tiempo, vamos a investigar las implicaciones de la definición de la estabilidad sobre las características del sistema. Con este fin, vamos a emplear de nuevo la fórmula de la convolución

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

Si tomamos el valor absoluto en ambos lados de esta ecuación, obtenemos

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right|$$

Sabemos que el valor absoluto de la suma de los términos siempre es menor o igual que la suma de los valores absolutos de los términos. Por tanto,

$$|y(n)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)|$$

Si la entrada está acotada, existe un número finito M_x tal que $|x(n)| \leq M_x$. Sustituyendo esta cota superior para $x(n)$ en la ecuación anterior, obtenemos

$$|y(n)| \leq M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

A partir de esta expresión, vemos que la salida está acotada si la respuesta al impulso del sistema satisface la condición

$$S_h \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \tag{2.3.43}$$

Es decir, *un sistema lineal invariante en el tiempo es estable si su respuesta al impulso es absolutamente sumable*. Esta condición no sólo es suficiente sino también necesaria para asegurar la estabilidad del sistema. Por tanto, demostraremos que si $S_h = \infty$, existe una entrada acotada para la que la salida no está acotada. Elegimos la entrada acotada

$$x(n) = \begin{cases} \dfrac{h^*(-n)}{|h(-n)|}, & h(n) \neq 0 \\ 0, & h(n) = 0 \end{cases}$$

donde $h^*(n)$ es el complejo conjugado de $h(n)$. Basta con demostrar que existe un valor de n para el que $y(n)$ no está acotada. Para $n = 0$ tenemos

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(-k)h(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|h(k)|^2}{|h(k)|} = S_h$$

Por tanto, si $S_h = \infty$, una entrada acotada produce una salida no acotada ya que $y(0) = \infty$.

La condición dada por (2.3.43) implica que la respuesta al impulso $h(n)$ tiende a cero cuando n se aproxima a infinito. En consecuencia, la salida del sistema tiende a cero cuando n se aproxima a infinito si la entrada es cero para $n > n_0$. Para demostrar esto, supongamos que $|x(n)| < M_x$ para $n < n_0$ y $x(n) = 0$ para $n \geq n_0$. Luego, en $n = n_0 + N$, la salida del sistema es

$$y(n_0 + N) = \sum_{k=-\infty}^{N-1} h(k)x(n_0 + N - k) + \sum_{k=N}^{\infty} h(k)x(n_0 + N - k)$$

El primer sumatorio es cero, ya que $x(n) = 0$ para $n \geq n_0$. Para el resto de la expresión, tomamos el valor absoluto de la salida, que es

$$\begin{aligned} |y(n_0 + N)| &= \left| \sum_{k=N}^{\infty} h(k)x(n_0 + N - k) \right| \leq \sum_{k=N}^{\infty} |h(k)||x(n_0 + N - k)| \\ &\leq M_x \sum_{k=N}^{\infty} |h(k)| \end{aligned}$$

Pero como N tiende a infinito,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=N}^{\infty} |h(n)| = 0$$

por tanto,

$$\lim_{N\to\infty} |y(n_0+N)| = 0$$

Este resultado implica que cualquier excitación en la entrada del sistema que tenga una duración finita, produce una salida de naturaleza "transitoria"; es decir, su amplitud disminuye con el tiempo y desaparece casi totalmente cuando el sistema es estable.

EJEMPLO 2.3.6

Determine el rango de valores del parámetro a para el que el sistema lineal invariante en el tiempo con la respuesta al impulso

$$h(n) = a^n u(n)$$

es estable.

Solución. En primer lugar, observe que el sistema es causal. En consecuencia, el índice inferior del sumatorio de la expresión (2.3.43) se inicia con $k = 0$. Por tanto,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a^k| = \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = 1 + |a| + |a|^2 + \cdots$$

Claramente, esta serie geométrica converge a

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = \frac{1}{1-|a|}$$

siempre que $|a| < 1$. En caso contrario, diverge. Por tanto, el sistema es estable si $|a| < 1$. En caso contrario, es inestable. En efecto, $h(n)$ tiene que disminuir exponencialmente hacia cero cuando n tiende a infinito para que el sistema sea estable.

EJEMPLO 2.3.7

Determine el rango de valores de a y b para los que el sistema lineal invariante en el tiempo con la respuesta al impulso

$$h(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ b^n, & n < 0 \end{cases}$$

es estable.

Solución. Este sistema es no casual. La condición de estabilidad dada por (2.3.43) supone

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} |b|^n$$

En el Ejemplo 2.3.6 ya hemos determinado que el primer sumatorio converge para $|a| < 1$. El segundo sumatorio podemos manipularlo del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{-1} |b|^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|b|^n} = \frac{1}{|b|}\left(1 + \frac{1}{|b|} + \frac{1}{|b|^2} + \cdots\right) \\ &= \beta(1+\beta+\beta^2+\cdots) = \frac{\beta}{1-\beta} \end{aligned}$$

donde $\beta = 1/|b|$ tiene que ser menor que la unidad para que la serie geométrica converja. En consecuencia, el sistema es estable si se satisface tanto $|a| < 1$ como $|b| > 1$.

2.3.7 Sistemas con respuestas al impulso de duración finita e infinita

Hasta el momento hemos caracterizado un sistema lineal invariante en el tiempo en función de su respuesta al impulso $h(n)$. Sin embargo, también es conveniente subdividir la clase de sistemas lineales invariantes en el tiempo en dos tipos: aquellos que tienen una repuesta al impulso de duración finita (FIR, *finite-duration impulse response*) y aquellos que tienen una respuesta al impulso de duración infinita (IIR, *infinite-duration impulse response*). Es decir, un sistema FIR tiene una respuesta al impulso que es cero fuera de un determinado intervalo finito. Sin perder generalidad, vamos a centrar nuestra atención en los sistemas FIR causales, de modo que

$$h(n) = 0, \qquad n < 0 \quad \text{y} \quad n \geq M$$

La fórmula de la convolución para un sistema así se reduce a

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k)$$

Una interpretación útil de esta expresión se obtiene observando que la salida en cualquier instante n es simplemente una combinación lineal ponderada de las muestras de la señal de entrada $x(n), x(n-1), \ldots, x(n-M+1)$. En otras palabras, el sistema simplemente pondera, mediante los valores de la respuesta al impulso $h(k)$, $k = 0, 1, \ldots, M-1$, las M muestras de la señal más recientes y suma los M productos resultantes. En efecto, el sistema actúa como una *ventana* que sólo ve las M muestras de la señal de entrada más recientes para formar la salida. Desprecia o simplemente "olvida" todas las muestras de entrada anteriores [es decir, $x(n-M), x(n-M-1), \ldots$]. Por tanto, decimos que un sistema FIR tiene una memoria finita de M muestras.

Por el contrario, un sistema lineal invariante en el tiempo IIR tiene una respuesta al impulso de duración infinita. Su salida, basada en la fórmula de la convolución, es

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

donde se ha supuesto causalidad, aunque esta suposición no es necesaria. Ahora, la salida del sistema es una combinación lineal ponderada [por la respuesta al impulso $h(k)$] de las muestras de la señal de entrada $x(n)$, $x(n-1)$, $x(n-2), \ldots$. Dado que la suma ponderada implica las muestras de entrada actual y todas las pasadas, decimos que el sistema tiene una memoria infinita.

En los siguientes capítulos estudiaremos en detalle las características de los sistemas FIR e IIR.

2.4 Sistemas discretos en el tiempo descritos mediante ecuaciones en diferencias

Hasta el momento hemos tratado los sistemas lineales invariantes en el tiempo caracterizados por su respuesta al impulso $h(n)$. A su vez, $h(n)$ nos permite determinar la salida $y(n)$ del sistema para cualquier secuencia de entrada dada $x(n)$ por medio de la suma de convolución,

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \tag{2.4.1}$$

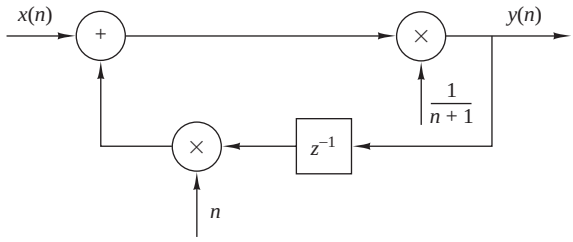


Figura 2.4.1. Realización de un sistema recursivo para el cálculo de la media acumulada.

En general, hemos demostrado que cualquier sistema lineal invariante en el tiempo se caracteriza por su relación de entrada–salida dada por (2.4.1). Además, la fórmula de la convolución dada por (2.4.1) sugiere un medio para la realización del sistema. En el caso de los sistemas FIR, una realización así implica sumas, multiplicaciones y un número finito de posiciones de memoria. En consecuencia, un sistema FIR se puede implementar basándose directamente en la convolución.

Sin embargo, si el sistema es IIR, su implementación práctica basada en la convolución será imposible, ya que requiere un número infinito de posiciones de memoria, multiplicaciones y sumas. Una cuestión que naturalmente surge es si es o no posible implementar sistemas IIR de otra manera de la sugerida por la convolución. Afortunadamente, la respuesta es afirmativa, ya que existen medios prácticos y de cálculo eficientes que permiten implementar una familia de sistemas IIR, como veremos en esta sección. Dentro de la clase general de los sistemas IIR, esta familia de sistemas discretos en el tiempo se describe mejor mediante ecuaciones en diferencias. Esta familia o subclase de sistemas IIR es muy útil en una gran cantidad de aplicaciones prácticas, incluyendo la implementación de filtros digitales y el modelado de fenómenos y sistemas físicos.

2.4.1 Sistemas discretos en el tiempo recursivos y no recursivos

Como hemos dicho anteriormente, la fórmula de la convolución expresa la salida del sistema lineal invariante en el tiempo explícitamente y sólo en función de la señal de entrada. Sin embargo, como vamos a demostrar aquí, éste no es el caso. Existen muchos sistemas en los que es necesario o deseable expresar la salida del sistema no sólo en función de los valores actual y pasados de la entrada, sino también en función de los valores de la salida pasados ya disponibles. El siguiente problema ilustra esta cuestión.

Supongamos que queremos calcular la *media acumulada* de una señal $x(n)$ en el intervalo $0 \leq k \leq n$, definida como

$$y(n) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x(k), \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{2.4.2}$$

Como implica la expresión (2.4.2), el cálculo de $y(n)$ requiere el almacenamiento de todas las muestras de la entrada $x(k)$ para $0 \leq k \leq n$. Dado que n es creciente, los requisitos de memoria crecen linealmente con el tiempo.

Sin embargo, la intuición nos dice que $y(n)$ puede calcularse de forma más eficiente utilizando el valor anterior de salida $y(n-1)$. Por tanto, mediante una sencilla reordenación algebraica de la expresión (2.4.2), obtenemos

$$\begin{aligned}(n+1)y(n) &= \sum_{k=0}^{n-1} x(k) + x(n)\\ &= ny(n-1) + x(n)\end{aligned}$$

y por tanto

$$y(n) = \frac{n}{n+1}y(n-1) + \frac{1}{n+1}x(n) \tag{2.4.3}$$

Ahora podemos calcular la media acumulada $y(n)$ recursivamente multiplicando el valor anterior de salida $y(n-1)$ por $n/(n+1)$, multiplicando la entrada actual $x(n)$ por $1/(n+1)$ y sumando los dos productos. Luego el cálculo de $y(n)$ empleando (2.4.3) requiere dos multiplicaciones, una suma y una posición de memoria, como se ilustra en la Figura 2.4.1. Se trata de un ejemplo de un *sistema recursivo*. En general, un sistema cuya salida $y(n)$ en el instante n depende de cualquier número de valores pasados de salida $y(n-1), y(n-2), \ldots$ se denomina sistema recursivo.

Con el fin de determinar el proceso de cálculo del sistema recursivo de acuerdo con (2.4.3) más detalladamente, suponga que iniciamos el proceso con $n = 0$ y avanzamos en el tiempo. Entonces, según (2.4.3), obtenemos

$$\begin{aligned} y(0) &= x(0) \\ y(1) &= \frac{1}{2}y(0) + \frac{1}{2}x(1) \\ y(2) &= \frac{2}{3}y(1) + \frac{1}{3}x(2) \end{aligned}$$

y así sucesivamente. Si alguien se cansa de hacer cálculos y desea pasarle el problema a alguien en un determinado instante, por ejemplo, en $n = n_0$, la única información que es necesario proporcionar a quien continúe con los cálculos es el valor pasado $y(n_0 - 1)$ y las nuevas muestras de entrada $x(n), x(n+1), \ldots$. Por tanto, esa persona empezará con

$$y(n_0) = \frac{n_0}{n_0+1}y(n_0-1) + \frac{1}{n_0+1}x(n_0)$$

y continuará avanzando en el tiempo hasta un determinado instante, por ejemplo $n = n_1$, momento en el que se cansará y pasará el problema a otro junto con la información acerca del valor de $y(n_1 - 1)$, etc.

La conclusión de esta cuestión es que si alguien quiere calcular la respuesta (en este caso, la media acumulada) del sistema (2.4.3) a una señal de entrada $x(n)$ aplicada en $n = n_0$, sólo necesita conocer el valor de $y(n_0 - 1)$ y las muestras de entrada $x(n)$ para $n \geq n_0$. El término $y(n_0 - 1)$ es la *condición inicial* para el sistema descrito por (2.4.3) y contiene toda la información necesaria para determinar la respuesta del sistema para $n \geq n_0$ a la señal de entrada $x(n)$, independientemente de lo que haya ocurrido anteriormente.

El siguiente ejemplo ilustra el uso de un sistema recursivo (no lineal) para calcular la raíz cuadrada de un número.

EJEMPLO 2.4.1

Algoritmo de la raíz cuadrada. Muchas computadoras y calculadoras calculan la raíz cuadrada de un número positivo A, aplicando un algoritmo iterativo

$$s_n = \frac{1}{2}\left(s_{n-1} + \frac{A}{s_{n-1}}\right), \qquad n = 0, 1, \ldots$$

donde s_{n-1} es una estimación inicial de $\sqrt{A}$. A medida que la iteración converge, tenemos $s_n \approx s_{n-1}$. Luego podemos deducir fácilmente que $s_n \approx \sqrt{A}$.

Consideremos ahora el sistema recursivo

$$y(n) = \frac{1}{2}\left[y(n-1) + \frac{x(n)}{y(n-1)}\right] \tag{2.4.4}$$

que se ha implementado en la Figura 2.4.2. Si excitamos este sistema con un escalón de amplitud A [es decir, $x(n) = Au(n)$] y utilizamos como condición inicial $y(-1)$, un valor estimado de $\sqrt{A}$, la respuesta $y(n)$ del sistema tenderá a $\sqrt{A}$ cuando n aumente. Observe que, en contraste con el sistema dado por (2.4.3), no necesitamos especificar de forma exacta la condición inicial. Basta con un valor estimado aproximado para que el sistema funcione correctamente. Por ejemplo, si tenemos $A = 2$

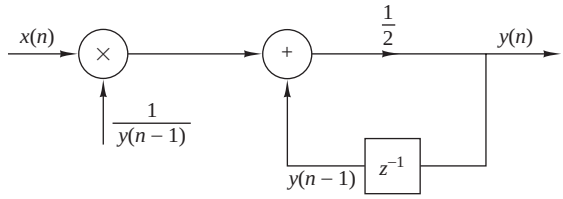


Figura 2.4.2. Realización del sistema para el cálculo de la raíz cuadrada.

e $y(-1) = 1$, obtendremos $y(0) = \frac{3}{2}$, $y(1) = 1.4166667$, $y(2) = 1.4142157$. Del mismo modo, para $y(-1) = 1.5$, obtenemos $y(0) = 1.416667$, $y(1) = 1.4142157$. Compare estos valores con el valor de $\sqrt{2}$, que es aproximadamente 1.4142136.

Acabamos de presentar dos sistemas recursivos simples, en los que la salida $y(n)$ depende del valor previo de la salida $y(n-1)$ y de la entrada actual $x(n)$. Ambos sistemas son causales. En general, podemos formular sistemas recursivos causales más complejos, en los que la salida $y(n)$ es una función de varios valores anteriores de la salida y de las entradas actual y pasadas. El sistema deberá tener un número finito de retardos o, lo que es lo mismo, necesitará un número finito de posiciones de memoria para poder ser implementado en la práctica. Por tanto, la salida de un sistema causal y recursivo realizable en la práctica puede expresarse de manera general como

$$y(n) = F[y(n-1), y(n-2), \ldots, y(n-N), x(n), x(n-1), \ldots, x(n-M)] \tag{2.4.5}$$

donde $F[\cdot]$ indica alguna función de sus argumentos. Se trata de una ecuación recursiva que especifica un procedimiento para calcular la salida del sistema en función de valores anteriores de la salida y de las entradas actual y pasadas.

En contraste, si $y(n)$ sólo depende de las entradas actual y pasadas, entonces

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), \ldots, x(n-M)] \tag{2.4.6}$$

Un sistema así se denomina *no recursivo*. Debemos añadir que los sistemas FIR causales descritos en la Sección 2.3.7 de acuerdo con la fórmula de la convolución tienen la forma indicada en (2.4.6). De hecho, la convolución para un sistema FIR causal es

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^{M} h(k)x(n-k) \\ &= h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \cdots + h(M)x(n-M) \\ &= F[x(n), x(n-1), \ldots, x(n-M)] \end{aligned}$$

donde la función $F[\cdot]$ es simplemente una suma ponderada lineal de las entradas actual y pasadas y los valores de la respuesta al impulso $h(n)$, $0 \le n \le M$, constituyen los coeficientes de ponderación. En consecuencia, los sistemas causales FIR lineales e invariantes en el tiempo descritos mediante la fórmula de convolución en la Sección 2.3.7 son no recursivos. Las diferencias básicas entre los sistemas recursivos y no recursivos se ilustran en la Figura 2.4.3. Una simple inspección de esta figura revela que la diferencia fundamental entre estos dos sistemas es el lazo de realimentación existente en el sistema recursivo, que realimenta la salida del sistema a la entrada. Este lazo de realimentación contiene un elemento de retardo. La presencia de este retardo es crucial para poder implementar el sistema, ya que la ausencia del mismo forzaría al sistema a calcular $y(n)$ en función de $y(n)$, lo que no es posible en los sistemas discretos en el tiempo.

La presencia del lazo de realimentación o, lo que es lo mismo, la naturaleza recursiva de (2.4.5) crea otra importante diferencia entre los sistemas recursivos y no recursivos. Por ejemplo, suponga que deseamos calcular

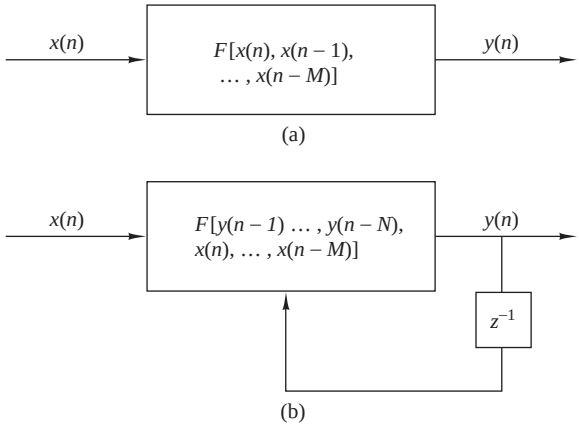


Figura 2.4.3. Forma básica de un sistema causal y realizable (a) no recursivo y (b) recursivo.

la salida $y(n_0)$ de un sistema cuando se excita con una entrada aplicada en el instante $n = 0$. Si el sistema es recursivo, para calcular $y(n_0)$, primero tenemos que calcular todos los valores anteriores $y(0), y(1), \ldots, y(n_0 - 1)$. Por el contrario, si el sistema es no recursivo, podemos calcular la salida $y(n_0)$ de forma inmediata sin tener $y(n_0 - 1)$, $y(n_0 - 2), \ldots$. En conclusión, la salida de un sistema recursivo se calcula en orden [es decir, $y(0)$, $y(1), y(2), \ldots$], mientras que en un sistema no recursivo, la salida se puede calcular en cualquier orden [es decir, $y(200)$, $y(15)$, $y(3)$, $y(300)$, etc.]. En algunas aplicaciones prácticas esta característica resulta útil.

2.4.2 Sistemas lineales invariantes en el tiempo caracterizados por ecuaciones en diferencias de coeficientes constantes

En la Sección 2.3 hemos tratado los sistemas lineales e invariantes en el tiempo y los hemos caracterizado en función de sus respuestas al impulso. En esta sección, vamos a centrar nuestra atención en una familia de sistemas lineales e invarientes en el tiempo descrita mediante su relación de entrada–salida denominada ecuación en diferencias con coeficientes constantes. Los sistemas descritos de este modo son una subclase de los sistemas recursivos y no recursivos vistos anteriormente. Con el fin de destacar las ideas importantes, vamos a comenzar con un sistema recursivo simple descrito por una ecuación en diferencias de primer orden.

Suponga que tenemos un sistema recursivo definido mediante la siguiente ecuación de entrada–salida

$$y(n) = ay(n-1) + x(n) \tag{2.4.7}$$

donde a es una constante. La Figura 2.4.4 muestra el diagrama de bloques del sistema. Comparando este sistema con el sistema para calcular la media acumulada descrito por la ecuación de entrada–salida (2.4.3), podemos observar que el sistema dado por (2.4.7) tiene un coeficiente constante (independiente del tiempo), mientras que el sistema descrito en (2.4.3) tiene coeficientes que varían con el tiempo. Como veremos, (2.4.7) es una ecuación de entrada–salida para un sistema lineal invariante en el tiempo, mientras que (2.4.3) describe un sistema lineal variante en el tiempo.

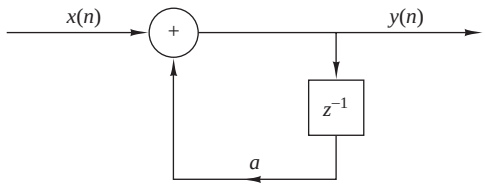


Figura 2.4.4. Diagrama de bloques de un sistema recursivo simple.

Supongamos ahora que aplicamos una señal de entrada $x(n)$ al sistema para $n \geq 0$. No vamos a hacer suposiciones acerca de la señal de entrada para $n < 0$, pero supondremos que existe una condición inicial $y(-1)$. Dado que (2.4.7) describe la salida del sistema implícitamente, debemos resolver esta ecuación para obtener una expresión explícita para la salida del sistema. Suponga que calculamos valores sucesivos de $y(n)$ para $n \geq 0$, comenzando por $y(0)$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
y(0) &= ay(-1) + x(0) \\
y(1) &= ay(0) + x(1) = a^2 y(-1) + ax(0) + x(1) \\
y(2) &= ay(1) + x(2) = a^3 y(-1) + a^2 x(0) + ax(1) + x(2) \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
y(n) &= ay(n-1) + x(n) \\
&= a^{n+1} y(-1) + a^n x(0) + a^{n-1} x(1) + \cdots + ax(n-1) + x(n)
\end{aligned}$$

o, de manera más compacta,

$$y(n) = a^{n+1} y(-1) + \sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k), \qquad n \geq 0 \tag{2.4.8}$$

La respuesta $y(n)$ del sistema, como se especifica en el lado derecho de la expresión (2.4.8), consta de dos partes. La primera, que contiene el término $y(-1)$ es un resultado de la condición inicial $y(-1)$ del sistema. La segunda parte es la respuesta del sistema a la señal de entrada $x(n)$.

Si el sistema está inicialmente en reposo en el instante $n = 0$, entonces su memoria (es decir, la salida del elemento de retardo) debe ser cero. Por tanto, $y(-1) = 0$. Luego un sistema recursivo está en reposo si se inicia con condiciones iniciales nulas. Puesto que la memoria del sistema describe, en cierto sentido, su "estado," decimos que el sistema está en el estado cero y su salida correspondiente se denomina *respuesta para el estado cero* y se designa mediante $y_{\text{zs}}(n)$. Obviamente, la respuesta para el estado cero del sistema definido por (2.4.7) está dada por

$$y_{\text{zs}}(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k), \qquad n \geq 0 \tag{2.4.9}$$

Es interesante destacar que la expresión (2.4.9) es una operación de convolución que implica a la señal de entrada y la respuesta al impulso.

$$h(n) = a^n u(n) \tag{2.4.10}$$

Observe también que el sistema descrito por la ecuación en diferencias de primer orden de (2.4.7) es causal. Como resultado, el límite inferior de la convolución en (2.4.9) es $k = 0$. Además, la condición $y(-1) = 0$ implica que la señal de entrada puede suponerse causal y, por tanto, el límite superior de la convolución especificada en (2.4.9) es n, ya que $x(n-k) = 0$ para $k > n$. En efecto, hemos obtenido el resultado de que el sistema recursivo en reposo descrito por la ecuación en diferencias de primer orden (2.4.7) es un sistema lineal invariante en el tiempo IIR con una respuesta al impulso dada por (2.4.10).

Supongamos ahora que el sistema descrito por (2.4.7) no está inicialmente en reposo [es decir, $y(-1) \neq 0$] y que la entrada es $x(n) = 0$ para todo n. Por tanto, la salida del sistema para una entrada igual a cero es la *respuesta para la entrada nula* o *respuesta natural* y se designa por $y_{\text{zi}}(n)$. A partir de (2.4.7), con $x(n) = 0$ para $-\infty < n < \infty$, obtenemos

$$y_{\text{zi}}(n) = a^{n+1} y(-1), \qquad n \geq 0 \tag{2.4.11}$$

Observe que un sistema recursivo con una condición inicial distinta de cero no está en reposo en el sentido de que puede generar una salida sin haber sido excitado. Observe que la respuesta a la entrada nula se debe a la memoria del sistema.

En resumen, la respuesta a la entrada nula se obtiene haciendo nula la señal de entrada, lo que implica que es independiente de la entrada. Sólo depende de la naturaleza del sistema y de la condición inicial. Por tanto, la respuesta a la entrada nula es una característica del propio sistema y se conoce también como *respuesta natural* o *libre* del sistema. Por otro lado, la respuesta a la entrada nula depende de la naturaleza del sistema y de la señal de entrada. Dado que esta salida es una respuesta forzada por la señal de entrada, normalmente se conoce como *respuesta forzada* del sistema. En general, la respuesta total del sistema puede expresarse como $y(n) = y_{\text{zi}}(n) + y_{\text{zs}}(n)$.

El sistema descrito por la ecuación en diferencias de primer orden (2.4.7) es el sistema recursivo más simple posible dentro de la clase general de sistemas recursivos descritos mediante ecuaciones en diferencias lineales y coeficientes constantes. La forma general para tal ecuación es

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \tag{2.4.12}$$

o, lo que es equivalente,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k), \qquad a_0 \equiv 1 \tag{2.4.13}$$

El entero N define el *orden* de la ecuación en diferencias del sistema. El signo negativo del lado derecho de la ecuación (2.4.12) se introduce por conveniencia para permitirnos expresar la ecuación en diferencias (2.4.13) sin ningún signo negativo.

La Ecuación (2.4.12) expresa la salida del sistema en el instante n directamente como una suma ponderada de salidas pasadas $y(n-1), y(n-2), \ldots, y(n-N)$, así como las muestras de las señales de entrada pasadas y presentes. Observe que con el fin de determinar $y(n)$ para $n \geq 0$, necesitamos la entrada $x(n)$ para todo $n \geq 0$ y las condiciones iniciales $y(-1), y(-2), \ldots, y(-N)$. En otras palabras, las condiciones iniciales resumen todo lo que necesitamos saber sobre la historia pasada de la respuesta del sistema para calcular las salidas actual y futuras. La solución general de la ecuación en diferencias de orden N y coeficientes constantes se aborda en la siguiente sección.

Ahora vamos a enunciar de nuevo las propiedades de linealidad, invarianza en el tiempo y estabilidad en el contexto de los sistemas recursivos descritos por ecuaciones en diferencias lineales y coeficientes constantes. Como hemos visto, un sistema recursivo puede estar en reposo o no, dependiendo de las condiciones iniciales. Por tanto, las definiciones de estas propiedades tienen que tener en cuenta la presencia de las condiciones iniciales.

Vamos a empezar con la definición de linealidad. Un sistema es lineal si satisface los tres requisitos siguientes:

1. La respuesta total es igual a la suma de las respuestas a la entrada nula y en estado cero [es decir, $y(n) = y_{\text{zi}}(n) + y_{\text{zs}}(n)$].
2. El principio de superposición se aplica a la respuesta para el estado nulo (*lineal para el estado nulo*).
3. El principio de superposición se aplica a la respuesta a la entrada nula (*lineal para la entrada nula*).

Un sistema que no satisfaga los *tres* requisitos es por definción no lineal. Obviamente, para un sistema en reposo, $y_{\text{zi}}(n) = 0$, y por tanto el segundo requisito, que se corresponde con la definición de linealidad dada en la Sección 2.2.4, es suficiente.

Vamos a ilustrar la aplicación de estos requisitos mediante un ejemplo sencillo.

EJEMPLO 2.4.2

Determine si el sistema recursivo definido por la ecuación en diferencias $y(n) = ay(n-1) + x(n)$ es lineal.

Solución. Combinando las expresiones (2.4.9) y (2.4.11), obtenemos la (2.4.8), que se puede expresar como

$$y(n) = y_{\text{zi}}(n) + y_{\text{zs}}(n)$$

Luego el primer requisito para la linealidad se satisface.

Para comprobar el segundo requisito, suponemos que $x(n) = c_1x_1(n) + c_2x_2(n)$. Luego la expresión (2.4.9) proporciona

$$\begin{aligned} y_{\text{zs}}(n) &= \sum_{k=0}^{n} a^k[c_1x_1(n-k) + c_2x_2(n-k)] \\ &= c_1 \sum_{k=0}^{n} a^k x_1(n-k) + c_2 \sum_{k=0}^{n} a^k x_2(n-k) \\ &= c_1 y_{\text{zs}}^{(1)}(n) + c_2 y_{\text{zs}}^{(2)}(n) \end{aligned}$$

Por tanto, $y_{\text{zs}}(n)$ satisface el principio de superposición y el sistema es lineal para el estado nulo.

Supongamos ahora que $y(-1) = c_1y_1(-1) + c_2y_2(-1)$. A partir de (2.4.11), obtenemos

$$\begin{aligned} y_{\text{zi}}(n) &= a^{n+1}[c_1y_1(-1) + c_2y_2(-1)] \\ &= c_1a^{n+1}y_1(-1) + c_2a^{n+1}y_2(-1) \\ &= c_1y_{\text{zi}}^{(1)}(n) + c_2y_{\text{zi}}^{(2)}(n) \end{aligned}$$

Luego el sistema es lineal para la entrada nula.

Ya que el sistema satisface las tres condiciones de la linealidad es un sistema lineal.

Aunque resulta algo pesado, el procedimiento utilizado en el Ejemplo 2.4.2 para demostrar la linealidad del sistema descrito por la ecuación en diferencias de primer orden nos lleva directamente a los sistemas recursivos generales descritos por la ecuación en diferencias de coeficientes constantes dada por (2.4.13). Por tanto, un sistema recursivo descrito por la ecuación en diferencias lineal (2.4.13) también satisface la definición de linealidad y, en consecuencia, es lineal.

La siguiente cuestión que se nos plantea es si el sistema lineal causal descrito por la ecuación en diferencias de coeficientes constantes (2.4.13) es invariante en el tiempo. Este problema es fácil de resolver cuando se trata de sistemas descritos por relaciones matemáticas de entrada–salida explícitas. Evidentemente, el sistema descrito por (2.4.13) es invariante en el tiempo porque los coeficientes a_k y b_k son constantes. Por el contrario, si uno o más de estos coeficientes dependen del tiempo, el sistema es variante en el tiempo, ya que sus propiedades cambian como una función del tiempo. Luego podemos concluir que *el sistema recursivo descrito por una ecuación en diferencias de coeficientes constantes es lineal e invariante en el tiempo.*

La última cuestión es la estabilidad del sistema recursivo descrito por la ecuación en diferencias de coeficientes constantes (2.4.13). En la Sección 2.3.6 hemos presentado el concepto de estabilidad BIBO (*bounded input–bounded output*) para los sistemas en reposo. En sistemas que no están en reposo y que pueden ser no lineales, la estabilidad BIBO debe considerarse con mucho cuidado. Sin embargo, en el caso de un sistema recursivo lineal e invariante en el tiempo descrito por la ecuación en diferencias de coeficientes constantes (2.4.13), basta con establcer que tal sistema tiene estabilidad BIBO si y sólo si para toda entrada acotada y toda condición inicial acotada, la respuesta total del sistema está acotada.

EJEMPLO 2.4.3

Determine si el sistema recursivo lineal e invariante en el tiempo descrito por la ecuación en diferencias dada por (2.4.7) es estable.

Solución. Supongamos que la señal de entrada $x(n)$ está acotada en amplitud, es decir, $|x(n)| \le M_x < \infty$ para todo $n \ge 0$. A partir de (2.4.8), tenemos

$$|y(n)| \le |a^{n+1}y(-1)| + \left| \sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k) \right|, \qquad n \ge 0$$

$$\leq |a|^{n+1}|y(-1)| + M_x \sum_{k=0}^{n} |a|^k, \qquad n \geq 0$$

$$\leq |a|^{n+1}|y(-1)| + M_x \frac{1-|a|^{n+1}}{1-|a|} = M_y, \quad n \geq 0$$

Si n es finito, la cota M_y es finita y la salida está acotada independientemente del valor de a. Sin embargo, como $n \to \infty$, la cota M_y se mantiene finita sólo si $|a| < 1$ porque $|a|^n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Luego $M_y = M_x/(1-|a|)$.

Por tanto, el sistema es estable sólo si $|a| < 1$.

En el simple sistema de primer orden del Ejemplo 2.4.3, hemos podido expresar la condición para estabilidad BIBO en función del parámetro del sistema a, en concreto, $|a| < 1$. Sin embargo, tenemos que decir que esta tarea se hace más compleja para sistemas de orden mayor. Afortunadamente, como veremos en capítulos posteriores, existen otras técnicas más simples y eficientes que permiten investigar la estabilidad de los sistemas recursivos.

2.4.3 Solución de las ecuaciones en diferencias lineales de coeficientes constantes

Dada una ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes como la relación de entrada–salida que describe un sistema lineal e invariante en el tiempo, nuestro objetivo en esta sección es determinar una expresión explícita para la salida $y(n)$. El método que vamos a desarrollar se denomina *método directo*. En el Capítulo 3 se describe un método alternativo basado en la transformada-z. Por razones que serán obvias más adelante, el método de la transformada-z se conoce como *método indirecto*.

Básicamente, el objetivo es determinar la salida $y(n)$, $n \geq 0$ del sistema dada una entrada especificada $x(n)$, $n \geq 0$, y para un cojunto de condiciones iniciales. El método de la solución directa supone que la solución total es la suma de dos partes:

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

La parte $y_h(n)$ se conoce como la solución *homogénea* o *complementaria*, mientras que $y_p(n)$ es la solución *particular*.

La solución homogénea de una ecuación en diferencias. Abordemos el problema resolviendo la ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes dada por (2.4.13), obteniendo primero la solución a la *ecuación en diferencias homogénea*

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = 0 \tag{2.4.14}$$

El procedimiento para resolver una ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes directamente es muy similar al procedimiento de resolver una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes. Básicamente, suponemos que la solución tiene la forma de una exponencial, es decir

$$y_h(n) = \lambda^n \tag{2.4.15}$$

donde el subíndice h de $y(n)$ se utiliza para designar a la solución de la ecuación en diferencias homogénea. Si sustituimos esta supuesta solución en (2.4.14), obtenemos la ecuación polinómica

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^{n-k} = 0$$

o

$$\lambda^{n-N}(\lambda^N + a_1\lambda^{N-1} + a_2\lambda^{N-2} + \cdots + a_{N-1}\lambda + a_N) = 0 \tag{2.4.16}$$

El polinomio entre paréntesis es el *polinomio característico* del sistema. En general, tiene N raíces, que designamos como $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$. Las raíces pueden ser reales o complejas. En la práctica, normalmente, los coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_N$ son reales. La raíces complejas aparecen como pares de complejos conjugados. Algunas de las N raíces pueden ser iguales, en cuyo caso tendremos raíces de orden múltiple.

Por el momento, supongamos que las raíces son distintas, es decir, no existen raíces de orden múltiple. Luego la solución más general para la ecuación en diferencias homogénea dada por (2.4.14) es

$$y_h(n) = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \cdots + C_N\lambda_N^n \tag{2.4.17}$$

donde $C_1, C_2, \ldots, C_N$ son coeficientes ponderados.

Estos coeficientes se determinan a partir de las condiciones iniciales especificadas para el sistema. Dada la entrada $x(n) = 0$, puede utilizarse (2.4.17) para obtener la *respuesta a la entrada nula* del sistema. Los siguientes ejemplos ilustran el procedimiento.

EJEMPLO 2.4.4

Determine la solución homogénea del sistema discreto por la ecuación en diferencias de primer orden

$$y(n) + a_1 y(n-1) = x(n) \tag{2.4.18}$$

Solución. La solución supuesta obtenida haciendo $x(n) = 0$ es

$$y_h(n) = \lambda^n$$

Si sustituimos esta solución en (2.4.18), obtenemos [con $x(n) = 0$]

$$\begin{aligned} \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} &= 0 \\ \lambda^{n-1}(\lambda + a_1) &= 0 \\ \lambda &= -a_1 \end{aligned}$$

Por tanto, la solución a la ecuación en diferencias homogénea es

$$y_h(n) = C\lambda^n = C(-a_1)^n \tag{2.4.19}$$

La respuesta del sistema a la entrada nula se puede determinar a partir de (2.4.18) y (2.4.19). Con $x(n) = 0$, (2.4.18) proporciona

$$y(0) = -a_1 y(-1)$$

Por otro lado, a partir de (2.4.19) tenemos

$$y_h(0) = C$$

y, por tanto, la respuesta a la entrada nula del sistema es

$$y_{\text{zi}}(n) = (-a_1)^{n+1} y(-1), \qquad n \geq 0 \tag{2.4.20}$$

Con $a = -a_1$, este resultado es coherente con (2.4.11) para el sistema de primer orden, el cual se obtuvo anteriormente por iteración de la ecuación en diferencias.

EJEMPLO 2.4.5

Determine la respuesta a la entrada nula del sistema descrito por la ecuación en diferencias de segundo orden homogénea

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = 0 \tag{2.4.21}$$

Solución. En primer lugar, determinamos la solución para la ecuación homogénea. Suponemos que la solución es la exponencial

$$y_h(n) = \lambda^n$$

Sustituyendo esta solución en (2.4.21), obtenemos la ecuación característica

$$\begin{aligned} \lambda^n - 3\lambda^{n-1} - 4\lambda^{n-2} &= 0 \\ \lambda^{n-2}(\lambda^2 - 3\lambda - 4) &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, las raíces son $\lambda = -1, 4$, y la forma general de la solución a la ecuación homogénea es

$$\begin{aligned} y_h(n) &= C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n \\ &= C_1(-1)^n + C_2(4)^n \end{aligned} \tag{2.4.22}$$

La respuesta a la entrada nula del sistema se puede obtener a partir de la solución homogénea, evaluando las constantes de (2.4.22), dadas las condiciones iniciales $y(-1)$ e $y(-2)$. A partir de la ecuación en diferencias (2.4.21), tenemos

$$\begin{aligned} y(0) &= 3y(-1) + 4y(-2) \\ y(1) &= 3y(0) + 4y(-1) \\ &= 3[3y(-1) + 4y(-2)] + 4y(-1) \\ &= 13y(-1) + 12y(-2) \end{aligned}$$

Por otro lado, a partir de (2.4.22), obtenemos

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 \\ y(1) &= -C_1 + 4C_2 \end{aligned}$$

Igualando estos dos conjuntos de relaciones, tenemos

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 3y(-1) + 4y(-2) \\ -C_1 + 4C_2 &= 13y(-1) + 12y(-2) \end{aligned}$$

La solución de estas dos ecuaciones es

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{1}{5}y(-1) + \frac{4}{5}y(-2) \\ C_2 &= \frac{16}{5}y(-1) + \frac{16}{5}y(-2) \end{aligned}$$

Por tanto, la respuesta a la entrada nula del sistema es

$$\begin{aligned} y_{\text{zi}}(n) &= [-\frac{1}{5}y(-1) + \frac{4}{5}y(-2)](-1)^n \\ &\quad + [\frac{16}{5}y(-1) + \frac{16}{5}y(-2)](4)^n, \qquad n \geq 0 \end{aligned} \tag{2.4.23}$$

Por ejemplo, si $y(-2) = 0$ e $y(-1) = 5$, entonces $C_1 = -1, C_2 = 16$, y por tanto

$$y_{\text{zi}}(n) = (-1)^{n+1} + (4)^{n+2}, \qquad n \geq 0$$

Estos ejemplos ilustran el método para obtener la solución homogénea y la respuesta a la entrada nula del sistema cuando la ecuación característica contiene raíces distintas. Por otro lado, si la ecuación característica

contiene raíces múltiples, la forma de la solución dada en (2.4.17) tiene que modificarse. Por ejemplo, si λ_1 es una raíz de multiplicidad m, entonces (2.4.17) se transforma como sigue

$$\begin{aligned} y_h(n) = C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_1^n + C_3 n^2\lambda_1^n + \cdots + C_m n^{m-1}\lambda_1^n \\ + C_{m+1}\lambda_{m+1}^n + \cdots + C_N\lambda_n \end{aligned} \tag{2.4.24}$$

La solución particular de la ecuación en diferencias. La solución particular $y_p(n)$ es necesaria para satisfacer la ecuación en diferencias (2.4.13) para la señal de entrada especificada $x(n)$, $n \geq 0$. En otras palabras, $y_p(n)$ es cualquier solución que satisfaga

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_p(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k), \qquad a_0 = 1 \tag{2.4.25}$$

Para resolver (2.4.25), suponemos para $y_p(n)$, una forma que dependa de la forma de la entrada $x(n)$. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento.

EJEMPLO 2.4.6

Determine la solución particular de la ecuación en diferencias de primer orden

$$y(n) + a_1 y(n-1) = x(n), \qquad |a_1| < 1 \tag{2.4.26}$$

cuando la entrada $x(n)$ es un escalón unidad, es decir,

$$x(n) = u(n)$$

Solución. Dado que la secuencia de entrada $x(n)$ es una constante para $n \geq 0$, la forma de la solución que vamos a suponer también es una constante. Ya que la solución supuesta de la ecuación en diferencias a la función $x(n)$, denominada la *solución particular* de la ecuación en diferencias es

$$y_p(n) = Ku(n)$$

donde K es un factor de escala determinado que hace que se satisfaga la ecuación (2.4.26). Sustituyendo esta solución supuesta en (2.4.26), obtenemos

$$Ku(n) + a_1 Ku(n-1) = u(n)$$

Para determinar K, tenemos que evaluar esta ecuación para cualquier $n \geq 1$, donde ninguno de los términos se anula. Luego

$$\begin{aligned} K + a_1 K &= 1 \\ K &= \frac{1}{1+a_1} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución particular a la ecuación en diferencias es

$$y_p(n) = \frac{1}{1+a_1} u(n) \tag{2.4.27}$$

En este ejemplo, la entrada $x(n)$, $n \geq 0$, es una constante y la forma supuesta para la solución particular también es una constante. Si $x(n)$ es una exponencial, supondremos que la solución particular también es una exponencial. Si $x(n)$ fuera una sinusoide, entonces $y_p(n)$ también sería una sinusoide. Por tanto, la forma que seleccionemos para la solución particular será la forma básica de la señal $x(n)$. La Tabla 2.1 proporciona la forma general de la solución particular para distintos tipos de excitación.

Señal de entrada $x(n)$	Solución particular $y_p(n)$
A (constante)	K
AM^n	KM^n
An^M	$K_0 n^M + K_1 n^{M-1} + \cdots + K_M$
$A^n n^M$	$A^n(K_0 n^M + K_1 n^{M-1} + \cdots + K_M)$
$\begin{Bmatrix} A\cos\omega_0 n \\ A\,\mathrm{sen}\,\omega_0 n \end{Bmatrix}$	$K_1 \cos\omega_0 n + K_2\,\mathrm{sen}\,\omega_0 n$

Tabla 2.1. Forma general de la solución particular para varios tipos de señales de entrada.

EJEMPLO 2.4.7

Determine la solución particular de la ecuación en diferencias

$$y(n) = \frac{5}{6}y(n-1) - \frac{1}{6}y(n-2) + x(n)$$

para la función $x(n) = 2^n$, $n \geq 0$ y cero en cualquier otro caso.

Solución. La forma de la solución particular es

$$y_p(n) = K2^n, \qquad n \geq 0$$

Sustituyendo $y_p(n)$ en la ecuación en diferencias, obtenemos

$$K2^n u(n) = \frac{5}{6}K2^{n-1}u(n-1) - \frac{1}{6}K2^{n-2}u(n-2) + 2^n u(n)$$

Para determinar el valor de K, podemos evaluar esta ecuación para cualquier $n \geq 2$, donde ninguno de los términos se anula, por lo que obtenemos

$$4K = \frac{5}{6}(2K) - \frac{1}{6}K + 4$$

y, por tanto, $K = \frac{8}{5}$. Luego la solución particular es

$$y_p(n) = \frac{8}{5}2^n, \qquad n \geq 0$$

Hemos demostrado cómo determinar las dos componentes de la solución de una ecuación en diferencias con coeficientes constantes. Estas dos componentes son la solución homogénea y la solución particular. A partir de estas dos componentes, construimos la solución completa, de la que podemos obtener la respuesta al estado nulo.

La solución completa de la ecuación en diferencias. La propiedad de linealidad de la ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes nos permite sumar la solución homogéna y la solución particular con el fin de obtener la *solución completa*. Luego

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

La suma resultante $y(n)$ contiene los parámetros constantes $\{C_i\}$ de la solución homogénea $y_h(n)$. Estas constantes pueden determinarse para satisfacer las condiciones iniciales. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento.

EJEMPLO 2.4.8

Determine la solución completa $y(n)$, $n \geq 0$, para la ecuación en diferencias

$$y(n) + a_1 y(n-1) = x(n) \tag{2.4.28}$$

cuando $x(n)$ es un escalón unidad $[x(n) = u(n)]$ e $y(-1)$ es la condición inicial.

Solución. A partir de la expresión (2.4.19) del Ejemplo 2.4.4, tenemos que la solución homogénea es

$$y_h(n) = C(-a_1)^n$$

y a partir de la expresión (2.4.26) del Ejemplo 2.4.6, tenemos que la solución particular es

$$y_p(n) = \frac{1}{1+a_1} u(n)$$

En consecuencia, la solución completa es

$$y(n) = C(-a_1)^n + \frac{1}{1+a_1}, \qquad n \geq 0 \tag{2.4.29}$$

donde la constante C se determina para satisfacer la condición inicial $y(-1)$.

En concreto, suponga que deseamos obtener la respuesta para el estado nulo del sistema descrito por la ecuación en diferencias de primer orden dada por (2.4.28). A continuación, hacemos $y(-1) = 0$. Para evaluar C, evaluamos (2.4.28) en $n = 0$, obteniendo

$$y(0) + a_1 y(-1) = 1$$

Luego,

$$y(0) = 1 - a_1 y(-1)$$

Por otro lado, la expresión (2.4.29) en $n = 0$ proporciona

$$y(0) = C + \frac{1}{1+a_1}$$

Igualando estas dos relaciones, obtenemos

$$\begin{aligned} C + \frac{1}{1+a_1} &= -a_1 y(-1) + 1 \\ C &= -a_1 y(-1) + \frac{a_1}{1+a_1} \end{aligned}$$

Por último, si sustituimos este valor de C en (2.4.29), obtenemos

$$\begin{aligned} y(n) &= (-a_1)^{n+1} y(-1) + \frac{1-(-a_1)^{n+1}}{1+a_1}, \qquad n \geq 0 \\ &= y_{\text{zi}}(n) + y_{\text{zs}}(n) \end{aligned} \tag{2.4.30}$$

Observe que la respuesta del sistema dada por (2.4.30) es coherente con la respuesta $y(n)$ dada por (2.4.8) para el sistema de primer orden (con $a = -a_1$), lo que se ha obtenido resolviendo la ecuación en diferencias iterativamente. Además, observe que el valor de la constante C depende tanto de la condición inicial $y(-1)$ como de la función de excitación. En consecuencia, el valor de C influye en la respuesta para la entrada nula y en la respuesta para el estado nulo.

Fíjese también en que la solución particular de la ecuación en diferencias puede obtenerse a partir de la respuesta para el estado cero del sistema. En efecto, si $|a_1| < 1$, que es la condición para la estabilidad del

sistema, como se demuestra en la Sección 2.4.4, el valor límite de $y_{zs}(n)$ cuando n tiende a infinito es la solución particular, es decir,

$$y_p(n) = \lim_{n\to\infty} y_{zs}(n) = \frac{1}{1+a_1}$$

Puesto que esta componente de la respuesta del sistema no tiende a cero cuando n tiende a infinito, normalmente se denomina *respuesta en régimen permanente* del sistema. Esta respuesta se mantiene mientras que la entrada se mantenga. La componente que desaparece cuando n tiende a infinito es lo que se denomina *respuesta transitoria* del sistema.

El siguiente ejemplo ilustra la evaluación de la solución completa de un sistema recursivo de segundo orden.

EJEMPLO 2.4.9

Determine la respuesta $y(n)$, $n \geq 0$, del sistema descrito por la ecuación en diferencias de segundo orden

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1) \tag{2.4.31}$$

cuando la secuencia de entrada es

$$x(n) = 4^n u(n)$$

Solución. Ya hemos determinado la solución para la ecuación en diferencias homogénea de este sistema en el Ejemplo 2.4.5. A partir de la expresión (2.4.22), tenemos

$$y_h(n) = C_1(-1)^n + C_2(4)^n \tag{2.4.32}$$

La solución particular a (2.4.31) se supone que es una secuencia exponencial de la misma forma que $x(n)$. Normalmente, podremos suponer una solución de la forma

$$y_p(n) = K(4)^n u(n)$$

Sin embargo, observe que $y_p(n)$ ya está contenida en la solución homogénea, por lo que esta solución particular es redundante. En su lugar, seleccionamos la solución particular para que sea linealmente independiente de los términos contenidos en la solución homogénea. De hecho, vamos a tratar esta situación de la misma manera que ya hemos tratado las raíces múltiples en la ecuación característica. Por tanto, suponemos que

$$y_p(n) = Kn(4)^n u(n) \tag{2.4.33}$$

Sustituyendo (2.4.33) en (2.4.31), obtenemos

$$Kn(4)^n u(n) - 3K(n-1)(4)^{n-1}u(n-1) - 4K(n-2)(4)^{n-2}u(n-2) = (4)^n u(n) + 2(4)^{n-1}u(n-1)$$

Para determinar K, evaluamos esta ecuación para cualquier $n \geq 2$, en la que ninguno de los términos escalón se anula. Para simplificar la aritmética, seleccionamos $n = 2$, y obtenemos $K = \frac{6}{5}$. Por tanto,

$$y_p(n) = \frac{6}{5} n(4)^n u(n) \tag{2.4.34}$$

La solución completa a la ecuación en diferencias se obtiene sumando (2.4.32) y (2.4.34). Luego,

$$y(n) = C_1(-1)^n + C_2(4)^n + \frac{6}{5} n(4)^n, \qquad n \geq 0 \tag{2.4.35}$$

donde las constantes C_1 y C_2 se determinan de modo que se satisfagan las condiciones iniciales. Para conseguir esto, volvemos a la expresión (2.4.31), de la que obtenemos

$$\begin{aligned} y(0) &= 3y(-1) + 4y(-2) + 1 \\ y(1) &= 3y(0) + 4y(-1) + 6 \\ &= 13y(-1) + 12y(-2) + 9 \end{aligned}$$

Por otro lado, se evalúa (2.4.35) en $n = 0$ y $n = 1$ y obtenemos

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 \\ y(1) &= -C_1 + 4C_2 + \frac{24}{5} \end{aligned}$$

Ahora podemos igualar estos dos conjuntos de relaciones para obtener C_1 y C_2. De este modo, tenemos la respuesta debida a las condiciones iniciales $y(-1)$ e $y(-2)$ (la respuesta para la entrada nula), y la respuesta para el estado nulo.

Dado que ya hemos obtenido la respuesta para la entrada nula en el Ejemplo 2.4.5, podemos simplificar los cálculos anteriores haciendo $y(-1) = y(-2) = 0$. Luego tenemos que

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 1 \\ -C_1 + 4C_2 + \frac{24}{5} &= 9 \end{aligned}$$

Por tanto, $C_1 = -\frac{1}{25}$ y $C_2 = \frac{26}{25}$. Por último, tenemos la respuesta para el estado nulo a la función $x(n) = (4)^n u(n)$ en la forma

$$y_{zs}(n) = -\frac{1}{25}(-1)^n + \frac{26}{25}(4)^n + \frac{6}{5}n(4)^n, \qquad n \geq 0 \tag{2.4.36}$$

La respuesta completa del sistema, en la que se incluye la respuesta a las condiciones iniciales arbitrarias, es la suma de (2.4.23) y (2.4.36).

2.4.4 Respuesta al impulso de un sistema recursivo, lineal e invariante en el tiempo

La respuesta al impulso de un sistema lineal invariante en el tiempo se ha definido anteriormente como la respuesta del sistema a una excitación de una muestra unitaria [es decir, $x(n) = \delta(n)$]. En el caso de un sistema recursivo, $h(n)$ es simplemente igual a la respuesta al estado nulo del sistema cuando la entrada es $x(n) = \delta(n)$ y el sistema está inicialmente en reposo.

Por ejemplo, en el sistema recursivo de primer orden dado por (2.4.7), la respuesta al estado nulo dada por (2.4.8), es

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k) \tag{2.4.37}$$

Si $x(n) = \delta(n)$ se sustituye en (2.4.37), obtenemos

$$\begin{aligned} y_{zs}(n) &= \sum_{k=0}^{n} a^k \delta(n-k) \\ &= a^n, \qquad n \geq 0 \end{aligned}$$

Por tanto, la respuesta al impulso del sistema recursivo de primer orden descrito por (2.4.7) es

$$h(n) = a^n u(n) \tag{2.4.38}$$

como se ha indicado en la Sección 2.4.2.

En el caso general de un sistema recursivo, lineal e invariante en el tiempo arbitrario, la respuesta al estado nulo expresada en función de la convolución es

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=0}^{n} h(k)x(n-k), \qquad n \geq 0 \tag{2.4.39}$$

Cuando la entrada es un impulso [es decir, $x(n) = \delta(n)$], la Ecuación (2.4.39) se reduce a

$$y_{zs}(n) = h(n) \tag{2.4.40}$$

Vamos a considerar ahora el problema de determinar la respuesta al impulso $h(n)$ cuando el sistema se describe mediante una ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes. En la sección anterior, hemos establecido que la respuesta completa del sistema a cualquier excitación es la suma de dos soluciones de la ecuación en diferencias: la solución a la ecuación homogénea más la solución particular a la función de excitación. En el caso en que la excitación sea un impulso, la solución particular es cero, por tanto $x(n) = 0$ para $n > 0$, luego

$$y_p(n) = 0$$

En consecuencia, la respuesta del sistema a un impulso es simplemente la solución a la ecuación homogénea, con los parámetros $\{C_k\}$ evaluados para satisfacer las condiciones iniciales establecidas por el impulso. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento para obtener $h(n)$ dada la ecuación en diferencias que define al sistema.

EJEMPLO 2.4.10

Determine la respuesta al impulso $h(n)$ para el sistema descrito por la ecuación en diferencias de segundo orden

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1) \tag{2.4.41}$$

Solución. En el Ejemplo 2.4.5 ya hemos determinado que la solución a la ecuación en diferencias homogénea para este sistema es

$$y_h(n) = C_1(-1)^n + C_2(4)^n, \qquad n \geq 0 \tag{2.4.42}$$

Dado que la solución particular es cero cuando $x(n) = \delta(n)$, la respuesta al impulso del sistema queda determinada por (2.4.42), donde C_1 y C_2 deben obtenerse para satisfacer (2.4.41).

Para $n = 0$ y $n = 1$, (2.4.41) proporciona

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 \\ y(1) &= 3y(0) + 2 = 5 \end{aligned}$$

donde hemos impuesto las condiciones $y(-1) = y(-2) = 0$, ya que el sistema tiene que estar en reposo. Por otro lado, la expresión (2.4.42) evaluada en $n = 0$ y $n = 1$ proporciona

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 \\ y(1) &= -C_1 + 4C_2 \end{aligned}$$

Resolviendo estos dos conjuntos de ecuaciones para C_1 y C_2, obtenemos

$$C_1 = -\frac{1}{5}, \qquad C_2 = \frac{6}{5}$$

Por tanto, la respuesta al impulso del sistema es

$$h(n) = \left[-\frac{1}{5}(-1)^n + \frac{6}{5}(4)^n\right] u(n)$$

Cuando el sistema se describe mediante una ecuación en diferencias lineal de orden N-ésimo del tipo dado por (2.4.13), la solución de la ecuación homogénea es

$$y_h(n) = \sum_{k=1}^{N} C_k \lambda^n k$$

cuando las raíces $\{\lambda_k\}$ del polinomio característico son distintas. Por tanto, la respuesta al impulso del sistema tiene exactamente la misma forma, es decir,

$$h(n) = \sum_{k=1}^{N} C_k \lambda_k^n \tag{2.4.43}$$

donde los parámetros $\{C_k\}$ se determinan estableciendo las condiciones iniciales $y(-1) = \cdots = y(-N) = 0$.

Esta forma de $h(n)$ nos permite relacionar fácilmente la estabilidad de un sistema descrito por una ecuación en diferencias de orden N-ésimo con los valores de las raíces del polinomio característico. En efecto, dado que la estabilidad BIBO requiere que la respuesta al impulso sea absolutamente sumable, entonces, para un sistema causal, tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{N} C_k \lambda^n k \right| \leq \sum_{k=1}^{N} |C_k| \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_k|^n$$

Luego, si $|\lambda_k| < 1$ para todo k, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_k|^n < \infty$$

y por tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Por otro lado, si una o más de las raíces $|\lambda_k| \geq 1$, $h(n)$ ya no será absolutamente sumable y, en consecuencia, el sistema será inestable. Por tanto, una condición necesaria y suficiente para la estabilidad de un sistema IIR causal descrito mediante una ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes es que el módulo de todas las raíces del polinomio característico tiene que ser menor que la unidad. Se puede verificar que esta condición se extiende al caso en que el sistema tiene raíces de multiplicidad m.

Por último, fíjese en que cualquier sistema recursivo descrito mediante una ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes es un sistema IIR. Sin embargo, lo contrario no es cierto. Es decir, no todos los sistemas IIR lineales e invariantes en el tiempo pueden describirse mediante una ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes. En otras palabras, los sistemas recursivos descritos mediante una ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes son una subclase de los sistemas IIR lineales e invariantes en el tiempo.

2.5 Implementación de sistemas discretos en el tiempo

El tratamiento que hemos hecho de los sistemas discretos en el tiempo se ha centrado en la caracterización en el dominio del tiempo y en el análisis de los sistemas lineales invariantes en el tiempo descritos mediante ecuaciones en diferencias lineales de coeficientes constantes. En los dos capítulos siguientes se desarrollan métodos analíticos adicionales, donde caracterizaremos y analizaremos los sistemas LTI en el dominio de la frecuencia. Otros dos temas importantes que abordaremos más adelante son el diseño y la implementación de estos sistemas.

En la práctica, el diseño y la implementación de sistemas son tareas que se tratan de forma conjunta en lugar de por separado. A menudo, el diseño del sistema está dirigido por el método de implementación y las restricciones de la misma, como los costes, las limitaciones del hardware, las limitaciones de tamaño y los requisitos de potencia. Todavía no hemos desarrollado las herramientas de diseño y de análisis necesarias para poder abordar estas cuestiones tan complejas. Sin embargo, sí hemos proporcionado los conocimientos suficientes como para poder considerar algunos métodos de implementación básicos para efectuar las realizaciones de sistemas LTI descritos mediante ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes.

2.5.1 Estructuras para la realización de sistemas lineales invariantes en el tiempo

En esta sección vamos a describir estrcuturas para la realización de sistemas descritos mediante ecuaciones en diferencias lineales de coeficientes constantes. En el Capítulo 9 se presentan estructuras adicionales para estos sistemas.

Para empezar, consideremos el sistema de primer orden

$$y(n) = -a_1 y(n-1) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1) \tag{2.5.1}$$

el cual se implementa como se muestra en la Figura 2.5.1(a). Esta realización utiliza elementos de retardo (memoria) separados para las muestras de las señales de entrada y de salida, y esta estructura se conoce como *forma directa I*. Observe que este sistema puede interpretarse como dos sistemas lineales invariantes en el tiempo conectados en cascada. El primero es un sistema no recursivo descrito por la ecuación

$$v(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) \tag{2.5.2}$$

mientras que el segundo es un sistema recursivo descrito por la ecuación

$$y(n) = -a_1 y(n-1) + v(n) \tag{2.5.3}$$

Sin embargo, como hemos visto en la Sección 2.3.4, si intercambiamos el orden de interconexión de estos dos sistemas, la respuesta del sistema completo no varía. Por tanto, si intercambiamos el orden de los sistemas

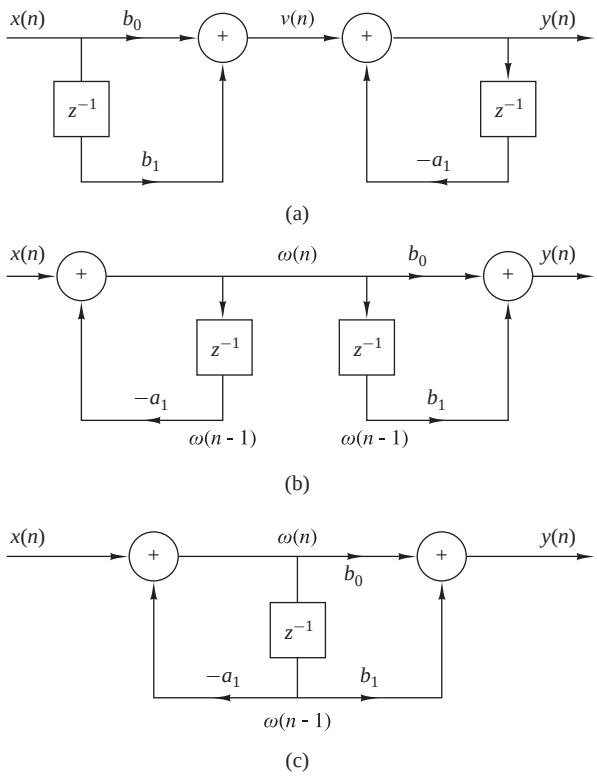


Figura 2.5.1. Pasos para convertir la implementación correspondiente a la forma directa I (a) en la implementación de la forma directa II (c).

recursivo y no recursivo, obtenemos una estructura alternativa para la realización del sistema discreto por (2.5.1). El sistema resultante se muestra en la Figura 2.5.1(b). A partir de esta figura podemos obtener las dos ecuaciones en diferencias

$$w(n) = -a_1 w(n-1) + x(n) \tag{2.5.4}$$

$$y(n) = b_0 w(n) + b_1 w(n-1) \tag{2.5.5}$$

que proporcionan un algoritmo alternativo para calcular la salida del sistema descrita por la ecuación en diferencias dada por (2.5.1). En otras palabras, las dos ecuaciones en diferencias (2.5.4) y (2.5.5) son equivalentes a la ecuación en diferencias (2.5.1).

Si se fija detenidamente en la Figura 2.5.1 comprobará que los elementos de retardo tienen la misma entrada $w(n)$ y por tanto la misma salida $w(n-1)$. Por tanto, estos dos elementos pueden implementarse como un único elemento, como se muestra en la Figura 2.5.1(c). En comparación con la forma directa I, esta nueva realización sólo requiere un elemento de retardo para la magnitud auxiliar $w(n)$, por lo que es más eficiente en términos de requisitos de memoria. Esta estructura se denomina *forma directa II* y se utiliza ampliamente en aplicaciones prácticas.

Estas estructuras pueden generalizarse fácilmente para el sistema recursivo lineal e invariante en el tiempo descrito por la ecuación en diferencias

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \tag{2.5.6}$$

La Figura 2.5.2 ilustra la estructura de la forma directa I para este sistema. Esta estructura requiere $M+N$ retardos y $N+M+1$ multiplicaciones, y puede verse como la conexión en cascada de un sistema no recursivo

$$v(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \tag{2.5.7}$$

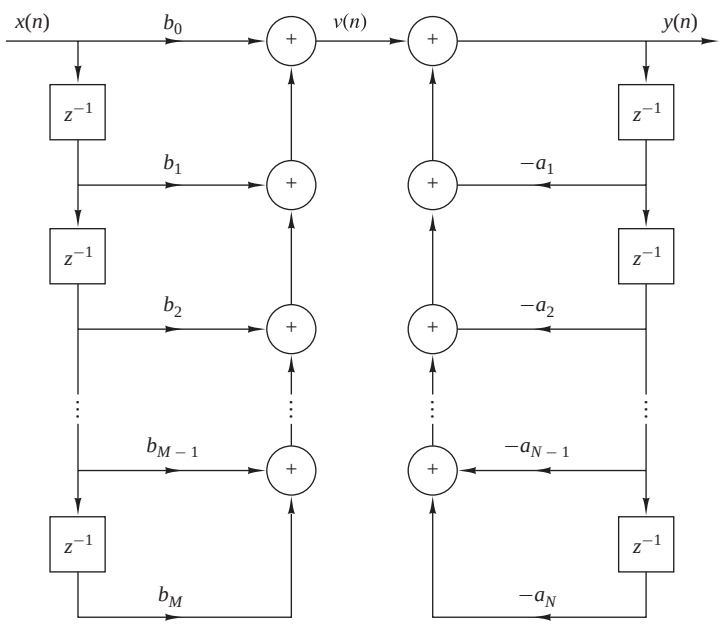


Figura 2.5.2. Forma directa I del sistema descrito por la Ecuación (2.5.6).

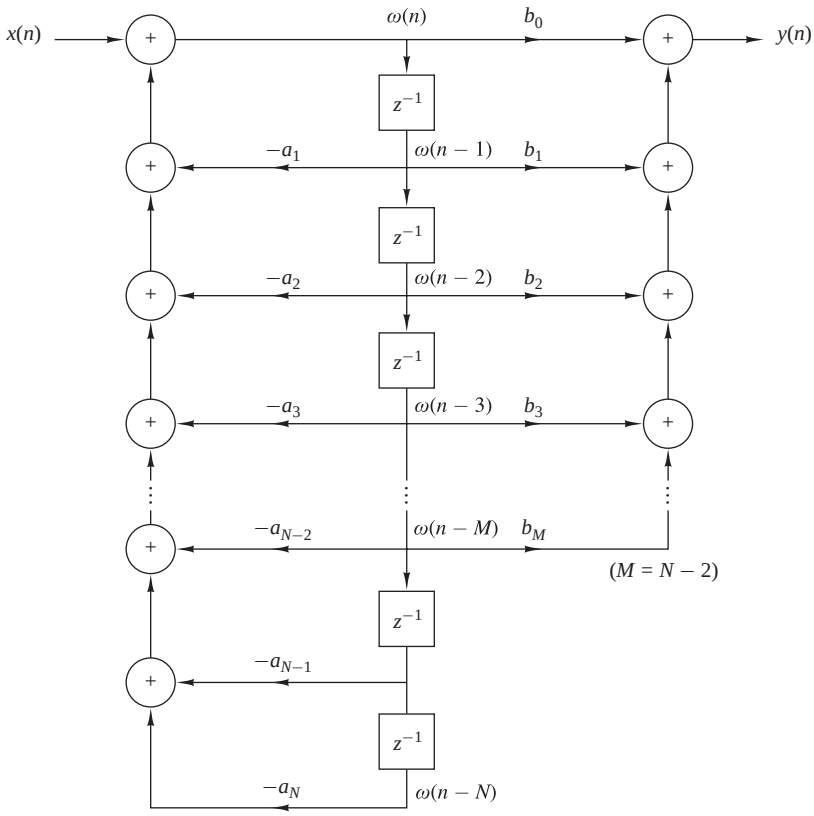


Figura 2.5.3. Forma directa II para el sistema descrito por la Ecuación (2.5.6).

y un sistema recursivo

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + v(n) \tag{2.5.8}$$

Si invertimos el orden de estos dos sistemas, igual que hemos hecho anteriormente para el sistema de primer orden, obtenemos la forma directa II mostrada en la Figura 2.5.3 para $N > M$. Esta estructura es la conexión en cascada de un sistema recursivo dado por

$$w(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k w(n-k) + x(n) \tag{2.5.9}$$

seguido de un sistema no recursivo, dado por

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k w(n-k) \tag{2.5.10}$$

Observe que si $N \geq M$, esta estructura requiere una cantidad de elementos de retardo igual al orden N del sistema. Sin embargo, si $M > N$, la memoria necesaria viene dada por M. La Figura 2.5.3 se puede modificar fácilmente para este caso. Por tanto, la estructura de la forma directa II requiere $M+N+1$ multiplicaciones y el máximo de entre $\max\{M,N\}$ elementos de retardo. Dado que esta forma requiere el menor número posible de elementos de retardo para la realización del sistema descrito por (2.5.6), a veces se denomina *forma canónica*.

Un caso especial de (2.5.6) se produce si definimos los parámetros del sistema $a_k = 0$, $k = 1, \ldots, N$, con lo que la relación entrada–salida del sistema se reduce a

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \tag{2.5.11}$$

que es un sistema no recursivo lineal e invariante en el tiempo. Este sistema sólo ve las $M+1$ muestras más recientes de la señal de entrada y, antes de realizar la suma, pondera cada muestra mediante el coeficiente apropiado b_k del conjunto $\{b_k\}$. En otras palabras, la salida del sistema es básicamente una *media ponderada móvil* de la señal de entrada. Por esta razón, en ocasiones se denomina *sistema de media móvil (MA, moving average)*. Tal sistema es un sistema FIR con una respuesta al impulso $h(k)$ igual a los coeficientes b_k, es decir,

$$h(k) = \begin{cases} b_k, & 0 \le k \le M \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{2.5.12}$$

Si retomamos la expresión (2.5.6) y hacemos $M = 0$, el sistema general lineal invariante en el tiempo se reduce a un sistema "puramente recursivo" descrito por la ecuación en diferencias

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + b_0 x(n) \tag{2.5.13}$$

En este caso, la salida del sistema es una combinación lineal ponderada de N salidas pasadas y la entrada actual.

Los sistemas lineales invariantes en el tiempo descritos por una ecuación en diferencias de segundo orden son una importante subclase de los sistemas más generales descritos por (2.5.6), (2.5.10) o (2.5.13). La razón de su importancia la explicaremos más adelante al abordar los efectos de la cuantificación. Por el momento, basta con decir que los sistemas de segundo orden normalmente se emplean como bloques básicos en la realización de sistemas de orden superior.

El sistema de segundo orden más general se describe mediante la ecuación en diferencias

$$\begin{aligned} y(n) = &-a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + b_0 x(n) \\ &+ b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) \end{aligned} \tag{2.5.14}$$

que se obtiene haciendo $N = 2$ y $M = 2$ en la Ecuación (2.5.6). La estructura correspondiente a la forma directa II para realizar este sistema se muestra en la Figura 2.5.4(a). Si hacemos $a_1 = a_2 = 0$, entonces (2.5.14) se reduce a

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) \tag{2.5.15}$$

que es un caso especial del sistema FIR descrito por (2.5.11). La estructura para realizar este sistema se muestra en la Figura 2.5.4(b). Por último, si hacemos $b_1 = b_2 = 0$ en la Ecuación (2.5.14), obtenemos el sistema de segundo orden puramente recursivo descrito por la ecuación en diferencias

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + b_0 x(n) \tag{2.5.16}$$

que es un caso especial de (2.5.13). La estructura para realizar este sistema se muestra en la Figura 2.5.4(c).

2.5.2 Realización de sistemas FIR recursivos y no recursivos

Ya hemos establecido la diferencia entre los sistemas FIR e IIR, basándonos en si la respuesta al impulso $h(n)$ del sistema tiene duración finita o infinita. También hemos establecido la diferencia entre los sistemas recursivos y no recursivos. Básicamente, un sistema recursivo causal se describe mediante una ecuación de entrada–salida de la forma

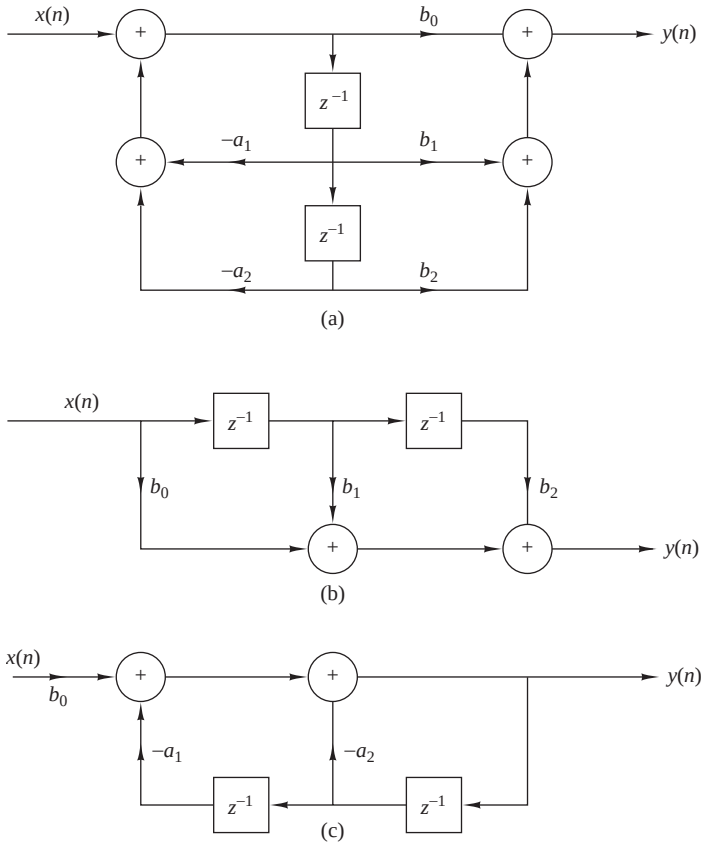


Figura 2.5.4. Estructuras para la realización de sistemas de segundo orden: (a) sistema general de segundo orden; (b) sistema FIR; (c) "sistema puramente recursivo".

$$y(n) = F[y(n-1), \ldots, y(n-N), x(n), \ldots, x(n-M)] \tag{2.5.17}$$

y para los sistemas lineales invariantes en el tiempo específicamente mediante la ecuación en diferencias

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \tag{2.5.18}$$

Por otro lado, los sistemas no recursivos causales no dependen de los valores pasados de la salida y por tanto se describen mediante una ecuación de entrada–salida de la forma

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), \ldots, x(n-M)] \tag{2.5.19}$$

y para los sistemas lineales invariantes en el tiempo, específicamente, mediante la ecuación en diferencias dada por (2.5.18) con $a_k = 0$ para $k = 1, 2, \ldots, N$.

En el caso de sistemas FIR, ya hemos dicho que siempre es posible realizarlos como sistemas no recursivos. De hecho, para $a_k = 0, k = 1, 2, \ldots, N$, en (2.5.18), tenemos un sistema con una ecuación de entrada–salida

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \tag{2.5.20}$$

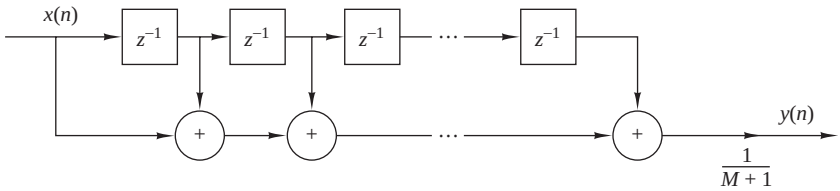


Figura 2.5.5. Realización no recursiva de un sistema FIR de media móvil.

que es un sistema FIR no recursivo. Como se indica en (2.5.12), la respuesta al impulso del sistema es simplemente igual a los coeficientes $\{b_k\}$. Por tanto, todo sistema FIR puede realizarse de forma no recursiva. Por otro lado, cualquier sistema FIR también se puede realizar recursivamente. Aunque la demostración general de esta afirmación se proporciona más adelante, vamos a ver un ejemplo sencillo para ilustrar esta cuestión.

Suponga que tenemos un sistema FIR de la forma

$$y(n) = \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} x(n-k) \tag{2.5.21}$$

para calcular la *media móvil* de una señal $x(n)$. Evidentemente, se trata de un sistema FIR con la respuesta al impulso

$$h(n) = \frac{1}{M+1}, \qquad 0 \le n \le M$$

La Figura 2.5.5 ilustra la estructura de la realización no recursiva del sistema. Suponga ahora que escribimos la expresión (2.5.21) como

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} x(n-1-k) \\ &\quad + \frac{1}{M+1}[x(n) - x(n-1-M)] \\ &= y(n-1) + \frac{1}{M+1}[x(n) - x(n-1-M)] \end{aligned} \tag{2.5.22}$$

Luego la Ecuación (2.5.22) representa una realización recursiva del sistema FIR. La estructura de esta realización recursiva del sistema de media móvil se ilustra en la Figura 2.5.6.

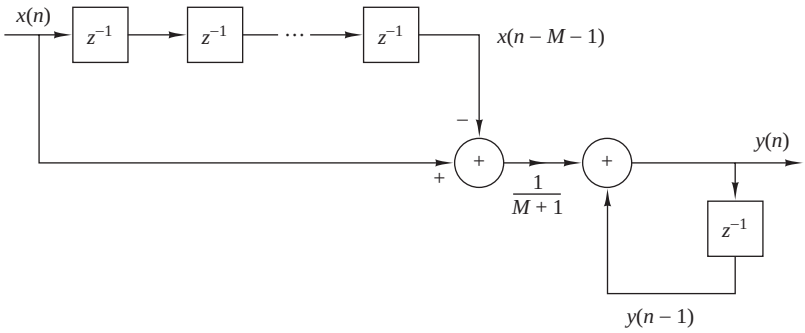


Figura 2.5.6. Realización recursiva de un sistema FIR de media móvil.

En resumen, podemos considerar los términos FIR e IIR como características generales que diferencian dos tipos de sistemas lineales invariantes en el tiempo, y los términos *recursivo* y *no recursivo* como descripciones de las estructuras para la realización o implementación del sistema.

2.6 Correlación de señales discretas en el tiempo

Una operación matemática muy similar a la convolución es la correlación. Al igual que en el caso de la convolución, la correlación implica dos señales. Sin embargo, a diferencia de la convolución, el objetivo al calcular la correlación entre dos señales es medir el grado de semejanza entre ambas señales y, por tanto, extraer alguna información que dependa de forma importante de la aplicación. La correlación de señales se encuentra a menudo en áreas de la ciencia y la ingeniería, como el radar, el sonar, las comunicaciones digitales, la geología y otras muchas.

Suponga que disponemos de dos señales $x(n)$ e $y(n)$ que deseamos comparar. En las aplicaciones de radar y sonar, $x(n)$ puede representar la versión muestreada de la señal transmitida e $y(n)$ puede representar la versión muestreada de la señal recibida en la salida del convertidor analógico–digital (A/D). Si hay un blanco en el espacio en el que el radar o el sonar están barriendo, la señal recibida $y(n)$ estará formada por una versión retardada de la señal transmitida, reflejada desde el blanco, y distorsionada por efecto del ruido aditivo. La Figura 2.6.1 describe el problema de la recepción de la señal del radar.

Podemos representar la secuencia recibida como

$$y(n) = \alpha x(n-D) + w(n) \tag{2.6.1}$$

donde α es un factor de atenuación que representa la pérdida de señal que se produce en la transmisión de ida y vuelta que sigue la señal $x(n)$, D es el retardo de ida y vuelta, que se supone que es un múltiplo entero del intervalo de muestreo y $w(n)$ representa el ruido aditivo que capta la antena y cualquier ruido generado por los componentes electrónicos y amplificadores contenidos en la entrada del receptor. Por el contrario, si no hay un blanco en el espacio barrido por el radar o el sonar, la señal recibida $y(n)$ es solamente ruido.

Disponiendo de las dos señales, $x(n)$, que se conoce como señal de referencia o señal transmitida e $y(n)$, que es la señal recibida, el problema de la detección por radar o sonar consiste en comparar $y(n)$ y $x(n)$ para

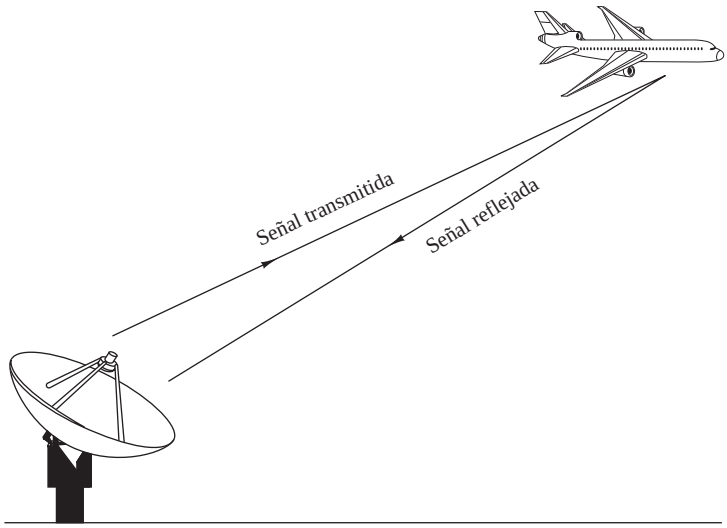


Figura 2.6.1. Detección de blancos mediante radar.

determinar si hay presente un blanco y, en caso afirmativo, determinar el tiempo de retardo D y calcular la distancia al blanco. En la práctica, la señal $x(n-D)$ se ve fuertemente distorsionada a causa del ruido aditivo, por lo que una inspección visual de $y(n)$ no revela la presencia o ausencia de la señal reflejada deseada desde el blanco. La correlación nos proporciona un medio para extraer esta importante información de $y(n)$.

Las comunicaciones digitales constituyen otra importante área en la que a menudo se emplea la correlación. En las comunicaciones digitales, la información que se va a transmitir de un punto a otro habitualmente se convierte a formato binario, es decir, una secuencia de ceros y unos, la cual se transmite entonces al receptor. Para transmitir un 0, podemos transmitir la secuencia de señal $x_0(n)$ para $0 \leq n \leq L-1$, y para transmitir un 1 podemos tramsitir la señal $x_1(n)$ para $0 \leq n \leq L-1$, donde L es un entero que designa el número de muestras en cada una de las secuencias. Muy a menudo, $x_1(n)$ se elige para que sea el valor negativo de $x_0(n)$. La señal recibida por el receptor se puede representar como

$$y(n) = x_i(n) + w(n), \qquad i = 0,1, \qquad 0 \leq n \leq L-1 \tag{2.6.2}$$

donde la incertidumbre ahora se encuentra en si $x_0(n)$ o $x_1(n)$ es la componente de señal de $y(n)$, y $w(n)$ representa el ruido aditivo y otras interferencias inherentes a cualquier sistema de comunicación. De nuevo, este ruido tiene origen en los componentes electrónicos de la etapa de entrada del receptor. En cualquier caso, el receptor conoce las posibles secuencias transmitidas $x_0(n)$ y $x_1(n)$ y se enfrenta a la tarea de comparar la señal recibida $y(n)$ con $x_0(n)$ y $x_1(n)$ para determinar con cuál de las dos señales se corresponde mejor $y(n)$. Este proceso de comparación se lleva a cabo mediante la operación de correlación que se describe en la siguiente sección.

2.6.1 Secuencias de correlación cruzada y autocorrelación

Supongamos que tenemos dos secuencias de señal reales $x(n)$ e $y(n)$, teniendo cada una de ellas energía finita. La *correlación cruzada* de $x(n)$ e $y(n)$ es una secuencia $r_{xy}(l)$, la cual se define como

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-l), \qquad l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{2.6.3}$$

o, de forma equivalente, como

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+l)y(n), \qquad l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{2.6.4}$$

El índice l es el parámetro de desplazamiento (tiempo) (o *retardo*) y el subíndice xy empleado en la secuencia de correlación cruzada $r_{xy}(l)$ indica las secuencias que se van a correlar. El orden de los subíndices, cuando x precede a y, indica la dirección en que se desplaza una secuencia respecto a la otra. En concreto, en la expresión (2.6.3), la secuencia $x(n)$ no se desplaza e $y(n)$ se desplaza l unidades de tiempo hacia la derecha para l positivo y hacia la izquierda si l es negativo. Del mismo modo, en la expresión (2.6.4), la secuencia $y(n)$ no se desplaza y $x(n)$ se desplaza l unidades de tiempo hacia la izquierda para valores de l positivos y hacia la derecha para valores de l negativos. Pero desplazar $x(n)$ hacia la izquierda l unidades de tiempo respecto a $y(n)$ es equivalente a desplazar $y(n)$ hacia la derecha l unidades respecto de $x(n)$. Por tanto, las expresiones (2.6.3) y (2.6.4) generan secuencias de correlación cruzada idénticas.

Si invertimos los papeles de $x(n)$ e $y(n)$ en (2.6.3) y (2.6.4), invirtiendo por tanto el orden de los índices xy, obtenemos la secuencia de correlación cruzada

$$r_{yx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)x(n-l) \tag{2.6.5}$$

o, lo que es equivalente,

$$r_{yx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n+l)x(n) \tag{2.6.6}$$

Comparando (2.6.3) con (2.6.6) o (2.6.4) con (2.6.5), podemos concluir que

$$r_{xy}(l) = r_{yx}(-l) \tag{2.6.7}$$

Por tanto, $r_{yx}(l)$ es simplemente la versión reflejada de $r_{xy}(l)$, donde la reflexión se efectúa respecto a $l = 0$. Por tanto, $r_{yx}(l)$ proporciona exactamente la misma información que $r_{xy}(l)$, en lo que respecta a la similitud de $x(n)$ e $y(n)$.

EJEMPLO 2.6.1

Determine la secuencia de correlación cruzada $r_{xy}(l)$ de las secuencias

$$x(n) = \{\ldots, 0, 0, 2, -1, 3, 7, \underset{\uparrow}{1}, 2, -3, 0, 0, \ldots\}$$

$$y(n) = \{\ldots, 0, 0, 1, -1, 2, -2, \underset{\uparrow}{4}, 1, -2, 5, 0, 0, \ldots\}$$

Solución. Utilizamos la definición dada en (2.6.3) para calcular $r_{xy}(l)$. Para $l = 0$, tenemos

$$r_{xy}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n)$$

La secuencia producto $v_0(n) = x(n)y(n)$ es

$$v_0(n) = \{\ldots, 0, 0, 2, 1, 6, -14, \underset{\uparrow}{4}, 2, 6, 0, 0, \ldots\}$$

y por tanto la suma para todos los valores de n es

$$r_{xy}(0) = 7$$

Para $l > 0$, simplemente desplazamos $y(n)$ hacia la derecha l unidades respecto de $x(n)$, calculamos la secuencia producto $v_l(n) = x(n)y(n-l)$ y, por último, sumamos para todos los valores de la secuencia producto. Luego obtenemos

$$r_{xy}(1) = 13, \quad r_{xy}(2) = -18, \quad r_{xy}(3) = 16, \quad r_{xy}(4) = -7$$
$$r_{xy}(5) = 5, \quad r_{xy}(6) = -3, \quad r_{xy}(l) = 0, \quad l \geq 7$$

Para $l < 0$, desplazamos $y(n)$ hacia la izquierda l unidades respecto de $x(n)$, calculamos la secuencia producto $v_l(n) = x(n)y(n-l)$ y sumamos para todos los valores de la secuencia producto. Obtenemos entonces los valores de la correlación cruzada

$$r_{xy}(-1) = 0, \quad r_{xy}(-2) = 33, \quad r_{xy}(-3) = -14, \quad r_{xy}(-4) = 36$$
$$r_{xy}(-5) = 19, \quad r_{xy}(-6) = -9, \quad r_{xy}(-7) = 10, \quad r_{xy}(l) = 0,\ l \leq -8$$

Por tanto, la secuencia de correlación cruzada entre $x(n)$ e $y(n)$ es

$$r_{xy}(l) = \{10, -9, 19, 36, -14, 33, 0, \underset{\uparrow}{7}, 13, -18, 16, -7, 5, -3\}$$

Las similitudes entre el cálculo de la correlación cruzada de dos secuencias y la convolución de dos secuencias es evidente. En el cálculo de la convolución, una de las secuencias se refleja, luego se desplaza, a continuación se multiplica por la otra secuencia para generar la secuencia producto correspondiente a dicho

desplazamiento y, por último, se suman los valores de la secuencia producto. Excepto en lo que respecta a la operación de reflexión, el cálculo de la secuencia de correlación cruzada implica las mismas operaciones: desplazamiento de una de las secuencias, multiplicación de las dos secuencias y suma para todos los valores de la secuencia producto. En consecuencia, si disponemos de un programa para computadora que realice la convolución, podremos emplearlo para obtener la correlación cruzada proporcionando como entradas al programa la secuencia $x(n)$ y la secuencia reflejada $y(-n)$. Así, la convolución de $x(n)$ e $y(-n)$ proporciona la correlación cruzada $r_{xy}(l)$, es decir,

$$r_{xy}(l) = x(l) * y(-l) \tag{2.6.8}$$

Observe que la ausencia de reflexión hace de la correlación cruzada una operación no conmutativa. En el caso especial en que $y(n) = x(n)$, tenemos la *autocorrelación* de $x(n)$, que se define como la secuencia

$$r_{xx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n-l) \tag{2.6.9}$$

o, de forma equivalente, como

$$r_{xx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+l)x(n) \tag{2.6.10}$$

Cuando se trabaja con secuencias de duración finita, es costumbre expresar la autocorrelación y la correlación cruzada en función de los límites finitos del sumatorio. En concreto, si $x(n)$ e $y(n)$ son secuencias causales de longitud N [es decir, $x(n) = y(n) = 0$ para $n < 0$ y $n \geq N$], las secuencias de la correlación cruzada y de la autocorrelación se pueden expresar del siguiente modo

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=l}^{N-|k|-1} x(n)y(n-l) \tag{2.6.11}$$

y

$$r_{xx}(l) = \sum_{n=i}^{N-|k|-1} x(n)x(n-l) \tag{2.6.12}$$

donde $i = l$, $k = 0$ para $l \geq 0$ e $i = 0$, $k = l$ para $l < 0$.

2.6.2 Propiedades de la autocorrelación y de la correlación cruzada

Las secuencias de autocorrelación y correlación cruzada poseen una serie de importantes propiedades que vamos a ver a continuación. Para desarrollar estas propiedades, suponemos que disponemos de dos señales, $x(n)$ e $y(n)$, de energía finita a partir de las cuales formamos la combinación lineal

$$ax(n) + by(n-l)$$

donde a y b son constantes arbitrarias y l es un cierto desplazamiento de tiempo. La energía de esta señal es

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} [ax(n) + by(n-l)]^2 &= a^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) + b^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} y^2(n-l) \\ &\quad + 2ab \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-l) \\ &= a^2 r_{xx}(0) + b^2 r_{yy}(0) + 2ab r_{xy}(l)\end{aligned} \tag{2.6.13}$$

En primer lugar, observamos que $r_{xx}(0) = E_x$ y $r_{yy}(0) = E_y$, que son las energías de $x(n)$ e $y(n)$, respectivamente. Es obvio que

$$a^2 r_{xx}(0) + b^2 r_{yy}(0) + 2abr_{xy}(l) \geq 0 \tag{2.6.14}$$

Ahora supongamos que $b \neq 0$, entonces podemos dividir (2.6.14) entre b^2 para obtener

$$r_{xx}(0)\left(\frac{a}{b}\right)2 + 2r_{xy}(l)\left(\frac{a}{b}\right) + r_{yy}(0) \geq 0$$

Podemos considerar esta ecuación como una ecuación cuadrática de coeficientes $r_{xx}(0)$, $2r_{xy}(l)$ y $r_{yy}(0)$. Dado que esta ecuación nunca es negativa, se deduce que su discriminante no será positivo, es decir

$$4[r_{xy}^2(l) - r_{xx}(0)r_{yy}(0)] \leq 0$$

Por tanto, la correlación cruzada satisface la siguiente condición

$$|r_{xy}(l)| \leq \sqrt{r_{xx}(0)r_{yy}(0)} = \sqrt{E_x E_y} \tag{2.6.15}$$

En el caso especial en el que $y(n) = x(n)$, (2.6.15) se reduce a

$$|r_{xx}(l)| \leq r_{xx}(0) = E_x \tag{2.6.16}$$

Esto significa que la secuencia de autocorrelación de una señal alcanza su valor máximo para un retardo de cero. Este resultado es coherente con la idea de que una señal se corresponde de forma perfecta consigo misma para un retardo igual a cero. En el caso de la secuencia de la correlación cruzada, la cota superior de sus valores está dada por la expresión (2.6.15).

Observe que si se aplica un factor de escala a una o ambas señales implicadas en la correlación cruzada, la forma de la secuencia de la correlación cruzada no varía, únicamente se modificarán sus amplitudes en el mismo factor de escala. Puesto que el cambio de escala no es importante, en la práctica se suelen normalizar las secuencias de correlación cruzada y autocorrelación en el rango comprendido entre -1 y 1. En el caso de la autocorrelación, simplemente dividimos entre $r_{xx}(0)$. Por tanto, la autocorrelación normalizada se define como

$$\rho_{xx}(l) = \frac{r_{xx}(l)}{r_{xx}(0)} \tag{2.6.17}$$

Del mismo modo, definimos la correlación cruzada normalizada como

$$\rho_{xy}(l) = \frac{r_{xy}(l)}{\sqrt{r_{xx}(0)r_{yy}(0)}} \tag{2.6.18}$$

Así, $|\rho_{xx}(l)| \leq 1$ y $|\rho_{xy}(l)| \leq 1$ y, por tanto, estas secuencias son independientes del cambio de escala que se pueda aplicar a la señal.

Por último, como ya hemos demostrado, la correlación cruzada satisface la propiedad

$$r_{xy}(l) = r_{yx}(-l)$$

Si $y(n) = x(n)$, esta relación se convierte en la siguiente importante propiedad para la secuencia de autocorrelación

$$r_{xx}(l) = r_{xx}(-l) \tag{2.6.19}$$

Luego la función de autocorrelación es una función par. En consecuencia, basta con calcular $r_{xx}(l)$ para $l \geq 0$.

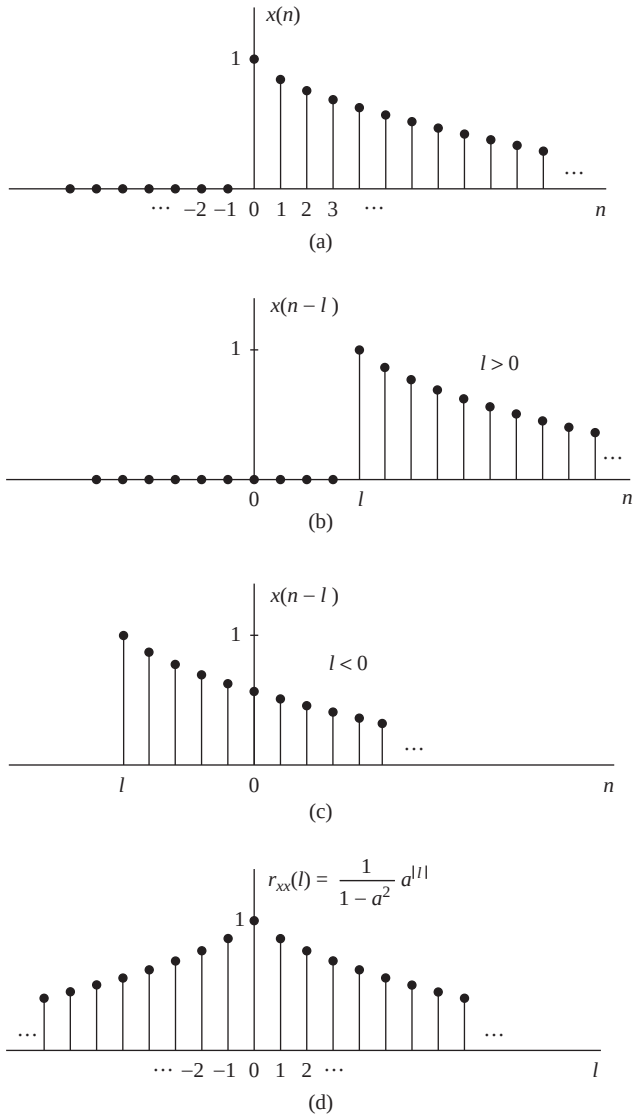


Figura 2.6.2. Cálculo de la autocorrelación de la señal $x(n) = a^n$, $0 < a < 1$.

EJEMPLO 2.6.2

Calcule la autocorrelación de la señal

$$x(n) = a^n u(n), 0 < a < 1$$

Solución. Puesto que $x(n)$ es una señal de duración infinita, su autocorrelación también tendrá duración infinita. Podemos distinguir dos casos.

Si $l \geq 0$, a partir de la Figura 2.6.2, podemos ver que

$$r_{xx}(l) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)x(n-l) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n a^{n-l} = a^{-l} \sum_{n=1}^{\infty} (a^2)^n$$

Ya que $a < 1$, la serie infinita *converge* y obtenemos

$$r_{xx}(l) = \frac{1}{1-a^2}a^{|l|}, \qquad l \geq 0$$

Para $l < 0$, tenemos

$$r_{xx}(l) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)x(n-l) = a^{-l}\sum_{n=0}^{\infty}(a^2)^n = \frac{1}{1-a^2}a^{-l}, \qquad l < 0$$

Pero cuando l es negativo, $a^{-l} = a^{|l|}$. Luego las dos relaciones para $r_{xx}(l)$ se pueden combinar en la siguiente expresión:

$$r_{xx}(l) = \frac{1}{1-a^2}a^{|l|}, \qquad -\infty < l < \infty \tag{2.6.20}$$

La secuencia $r_{xx}(l)$ se muestra en la Figura 2.6.2(d). Observe que

$$r_{xx}(-l) = r_{xx}(l)$$

y

$$r_{xx}(0) = \frac{1}{1-a^2}$$

Por tanto, la secuencia de autocorrelación normalizada es

$$\rho_{xx}(l) = \frac{r_{xx}(l)}{r_{xx}(0)} = a^{|l|}, \qquad -\infty < l < \infty \tag{2.6.21}$$

2.6.3 Correlación de secuencias periódicas

En la Sección 2.6.1 hemos definido las secuencias de correlación cruzada y de autocorrelación de señales de energía. En esta sección vamos a considerar la correlación de señales de potencia, en concreto, de señales periódicas.

Sean $x(n)$ e $y(n)$ dos señales de potencia. Su correlación cruzada se define como

$$r_{xy}(l) = \lim_{M\to\infty}\frac{1}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M} x(n)y(n-l) \tag{2.6.22}$$

Si $x(n) = y(n)$, obtenemos la definición de la autocorrelación de una señal de potencia

$$r_{xx}(l) = \lim_{M\to\infty}\frac{1}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M} x(n)x(n-l) \tag{2.6.23}$$

En particular, si $x(n)$ e $y(n)$ son dos señales periódicas de período N, las medias especificadas por (2.6.22) y (2.6.23) en un intervalo infinito son idénticas a las medias en un único período, por lo que las expresiones (2.6.22) y (2.6.23) se reducen a

$$r_{xy}(l) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n-l) \tag{2.6.24}$$

y

$$r_{xx}(l) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n-l) \tag{2.6.25}$$

Está claro que $r_{xy}(l)$ y $r_{xx}(l)$ son secuencias de correlación periódicas de período N. El factor $1/N$ puede interpretarse como un factor de escala de normalización.

En algunas aplicaciones prácticas, la correlación se utiliza para identificar características de periodicidad en una señal física que se esté observando y pueda estar distorsionada por causa de interferencias aleatorias. Por ejemplo, considere una señal $y(n)$ de la forma

$$y(n) = x(n) + w(n) \tag{2.6.26}$$

donde $x(n)$ es una secuencia periódica de período desconocido N y $w(n)$ representa una interferencia aleatoria aditiva, Suponga que observamos M muestras de $y(n)$, es decir $0 \leq n \leq M-1$, siendo $M >> N$. Por cuestiones prácticas, podemos suponer que $y(n) = 0$ para $n < 0$ y $n \geq M$. Ahora la secuencia de autocorrelación de $y(n)$, utilizando el factor de normalización $1/M$, es

$$r_{yy}(l) = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} y(n)y(n-l) \tag{2.6.27}$$

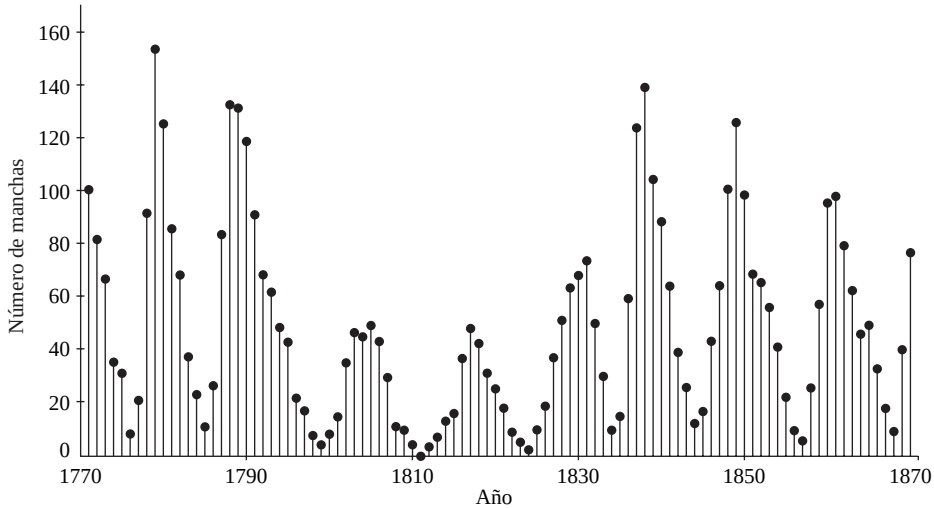
Si sustituimos $y(n)$ de (2.6.26) en (2.6.27), obtenemos

$$\begin{aligned} r_{yy}(l) &= \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}[x(n)+w(n)][x(n-l)+w(n-l)] \\ &= \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} x(n)x(n-l) \\ &\quad + \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}[x(n)w(n-l)+w(n)x(n-l)] \\ &\quad + \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} w(n)w(n-l) \\ &= r_{xx}(l) + r_{xw}(l) + r_{wx}(l) + r_{ww}(l) \end{aligned} \tag{2.6.28}$$

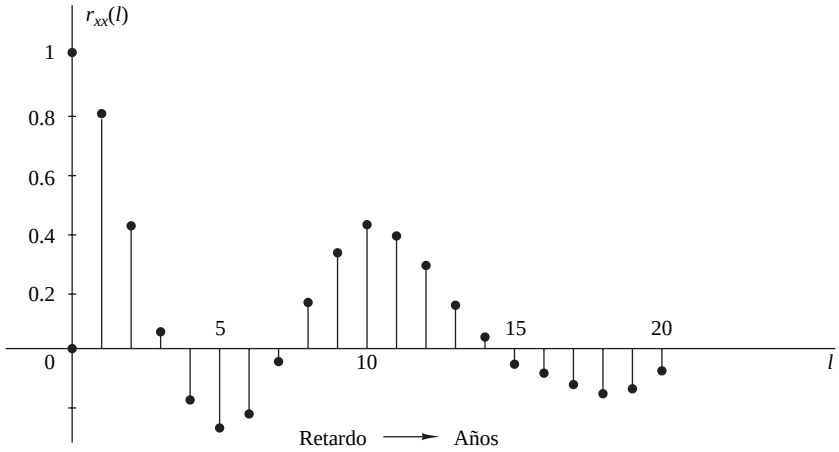
El primer factor del lado derecho de la Ecuación (2.6.28) es la autocorrelación de $x(n)$. Puesto que $x(n)$ es periódica, su autocorrelación presentará la misma periodicidad, por lo que contendrá picos relativamente grandes en $l = 0$, N, $2N$, etc. Sin embargo, cuando el desplazamiento l tiende a M, los picos disminuyen en amplitud debido al hecho de que tienen un registro de datos finito de M muestras, por lo que los productos $x(n)x(n-l)$ son igual a cero. Por tanto, deberemos evitar calcular $r_{yy}(l)$ para retardos grandes, es decir, $l > M/2$.

Las correlaciones cruzadas $r_{xw}(l)$ y $r_{wx}(l)$ entre la señal $x(n)$ y las interferencias aleatorias aditivas deberán ser relativamente pequeñas como consecuencia del hecho de que se supone que las señales $x(n)$ y $w(n)$ no estarán en absoluto relacionadas. Finalmente, el último término del lado derecho de la Ecuación (2.6.28) corresponde a la autocorrelación de la secuencia aleatoria $w(n)$. Esta correlación contendrá un pico en $l = 0$, pero gracias a su aleatoriedad, es de esperar que $r_{ww}(l)$ tienda rápidamente a cero. Por tanto, es de esperar que sólo $r_{xx}(l)$ presente picos grandes para $l > 0$. Este comportamiento nos permite detectar la presencia de la señal periódica $x(n)$ inmersa en la interferencia $w(n)$ e identificar su período.

En la Figura 2.6.3 se presenta un ejemplo que ilustra el uso de la autocorrelación para identificar una periodicidad oculta en una señal física bajo observación. Esta figura ilustra la autocorrelación (normalizada) para el número de manchas solares de Wölfer en un período de 100 años, entre 1770 y 1869, para $0 \leq l \leq 20$, donde cualquier valor de l se corresponde con un año. Queda claro en la figura que existe una tendencia periódica, cuyo período es de entre 10 y 11 años.



(a)



(b)

Figura 2.6.3. Identificación de la periodicidad del número de manchas de Wölfer: (a) número de manchas anuales de Wölfer; (b) autocorrelación normalizada.

EJEMPLO 2.6.3

Suponga que una señal $x(n) = \text{sen}(\pi/5)n$, para $0 \leq n \leq 99$ se ve distorsionada por un ruido aditivo $w(n)$, donde los valores del rudio aditivo se eligen de forma independiente de muestra en muestra dentro de una distribución uniforme en el rango $(-\Delta/2, \Delta/2)$, siendo Δ un parámetro de la distribución. La secuencia observada es $y(n) = x(n) + w(n)$. Determine la autocorrelación $r_{yy}(l)$ y a continuación obtenga el período de la señal $x(n)$.

Solución. Tenemos que suponer que la señal $x(n)$ tiene un cierto período desconocido que vamos a intentar determinar a partir de las muestras observadas $\{y(n)\}$ distorsionadas por el ruido. Aunque $x(n)$ es periódica con un período igual a 10, sólo disponemos de una secuencia de duración finita de longitud $M = 100$ [es decir, 10 períodos de $x(n)$]. El nivel de potencia de ruido P_w en la secuencia $w(n)$ queda determinado por el parámetro Δ. Establecemos que $P_w = \Delta^2/12$. El nivel de potencia de ruido es $P_x = \frac{1}{2}$. Por tanto, la relación señal–ruido (SNR *signal-to-noise ratio*) se define como

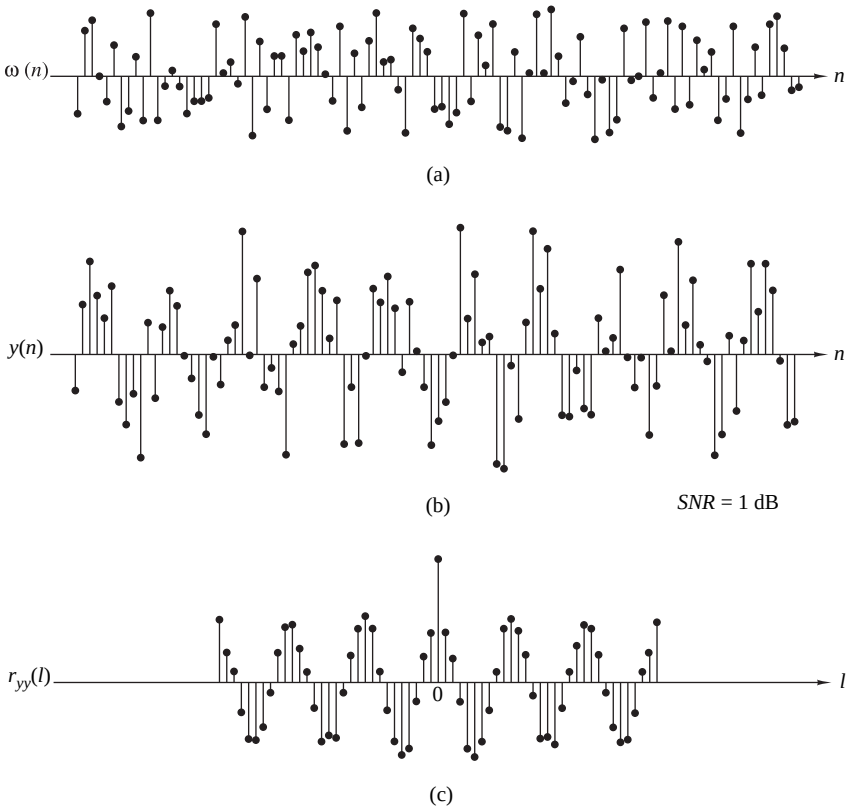


Figura 2.6.4. Uso de la autocorrelación para detectar la presencia de una señal periódica distorsionada por ruido.

$$\frac{P_x}{P_w} = \frac{\frac{1}{2}}{\Delta^2/12} = \frac{6}{\Delta^2}$$

Normalmente, la relación SNR se expresa en una escala logarítmica en decibelios (dB) como $10\log_{10}(P_x/P_w)$.

La Figura 2.6.4 ilustra una muestra de una secuencia de ruido $w(n)$ y la secuencia observada $y(n) = x(n) + w(n)$ cuando SNR $= 1$ dB. La autocorrelación $r_{yy}(l)$ se ilustra en la Figura 2.6.4(c). Observe que la señal periódica $x(n)$, incluida en $y(n)$, da lugar a una función de autocorrelación periódica $r_{xx}(l)$ de período $N = 10$. El efecto del ruido aditivo es sumarse al valor de pico en $l = 0$, pero para $l \neq 0$, la correlación $r_{ww}(l)$ tiende a cero como resultado del hecho de que los valores de $w(n)$ se generaron de forma independiente. Este tipo de ruido se conoce como *ruido blanco*. La presencia de este ruido explica la razón de la existencia de un pico grande en $l = 0$. Los picos más pequeños, aproximadamente iguales en $l = \pm 10, \pm 20, \ldots$, se deben a la periodicidad de $x(n)$.

2.6.4 Secuencias de correlación de entrada–salida

En esta sección vamos a deducir dos relaciones de entrada–salida para los sistemas LTI en el "dominio de la correlación". Supongamos que una señal $x(n)$ con una autocorrelación conocida $r_{xx}(l)$ se aplica a un sistema LTI con una respuesta al impulso $h(n)$, generando la señal de salida

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

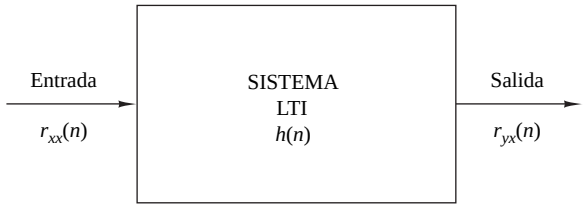


Figura 2.6.5. Relación de entrada–salida para la correlación cruzada $r_{yx}(n)$.

La correlación cruzada entre la señal de salida y la de entrada es

$$r_{yx}(l) = y(l) * x(-l) = h(l) * [x(l) * x(-l)]$$

o

$$r_{yx}(l) = h(l) * r_{xx}(l) \tag{2.6.29}$$

donde hemos utilizado (2.6.8) y las propiedades de la convolución. Por tanto, la correlación cruzada entre la entrada y la salida del sistema es la convolución de la respuesta al impulso con la autocorrelación de la señal de entrada. Alternativamente, $r_{yx}(l)$ puede interpretarse como la salida del sistema LTI cuando la secuencia de entrada es $r_{xx}(l)$. Esto se ilustra en la Figura 2.6.5. Si reemplazamos l por $-l$ en (2.6.29), obtenemos

$$r_{xy}(l) = h(-l) * r_{xx}(l)$$

La autocorrelación de la señal de salida se puede obtener aplicando (2.6.8) con $x(n) = y(n)$ y las propiedades de la convolución. Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned} r_{yy}(l) &= y(l) * y(-l) \\ &= [h(l) * x(l)] * [h(-l) * x(-l)] \\ &= [h(l) * h(-l)] * [x(l) * x(-l)] \\ &= r_{hh}(l) * r_{xx}(l) \end{aligned} \tag{2.6.30}$$

La autocorrelación $r_{hh}(l)$ de la respuesta al impulso $h(n)$ existe si el sistema es estable. Además, la estabilidad asegura que el sistema no cambiará el tipo (energía o potencia) de la señal de entrada. Evaluando (2.6.30) para $l = 0$, obtenemos

$$r_{yy}(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{hh}(k) r_{xx}(k) \tag{2.6.31}$$

que proporciona la energía (o la potencia) de la señal de salida en términos de las autocorrelaciones. Estas relaciones se cumplen tanto para señales de energía como de potencia. La deducción directa de estas relaciones para las señales de energía y de potencia, así como su extensión a señales complejas lo dejamos como ejercicios que puede realizar el estudiante.

2.7 Resumen y referencias

El tema principal tratado en este capítulo ha sido la caracterización de las señales y sistemas discretos en el dominio del tiempo. De particular importancia son los sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI), cuyo uso está ampliamente extendido en el diseño y la implementación de sistemas de tratamiento digital de señales. Hemos caracterizado los sistemas LTI por su respuesta al impulso unitario $h(n)$ y hemos obtenido la convolución,

que es una fórmula que permite determinar la respuesta $y(n)$ del sistema caracterizado por $h(n)$ para cualquier secuencia de entrada dada $x(n)$.

Los sistemas LTI caracterizados por las ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes son, con mucho, los más importante de los sistemas LTI en la teoría y aplicación del tratamiento digital de señales. Se ha deducido la solución general de una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes y se ha demostrado que consta de dos componentes: la solución de la ecuación homomgénea, que representa la respuesta natural del sistema cuando la entrada es cero y la solución particular, que representa la respuesta del sistema a la señal de entrada. A partir de la ecuación en diferencias, también hemos demostrado cómo obtener la respuesta al impulso unitario del sistema LTI.

Generalmente, los sistemas LTI se subdividen en sistemas FIR (*finite-duration impulse response*, respuesta al impulso de duración finita) e IIR (*infinite-duration impulse response*, respuesta al impulso de duración infinita) dependiendo de si $h(n)$ tiene duración finita o infinita, respectivamente. Se han descrito de forma breve las implementaciones de estos sistemas. Además, en la implementación de los sistemas FIR, hemos diferenciado entre las realizaciones recursiva y no recursiva. Por el contrario, hemos podido comprobar que los sistemas IIR sólo se pueden implementar de forma recursiva.

Hay disponibles una serie de libros dedicados a las señales y sistemas discretos en el tiempo. Por ejemplo, los textos de McGillem y Cooper (1984), Oppenheim y Willsky (1983), y Siebert (1986). Las ecuaciones en diferencias lineales de coeficientes constantes se tratan en profundidad en los libros de Hildebrand (1952) y Levy y Lessman (1961).

El último tema tratado en el capítulo, la correlación de señales discretas en el tiempo, desempeña un papel importante en el tratamiento digital de señales, especialmente en aplicaciones de comunicaciones digitales, detección y estimación de señales de radar, sonar y geofísicas. Al abordar la correlación, hemos evitado utilizar conceptos estadísticos. La correlación se define simplemente como una operación matemática entre dos secuencias, que genera otra secuencia denominada *correlación cruzada* cuando las dos secuencias son distintas o *autocorrelación* cuando los dos secuencias son idénticas.

En las aplicaciones prácticas en las que se emplea la correlación, una o ambas secuencias pueden estar contaminadas por ruido y, quizá, por otras formas de interferencias. En dicho caso, la secuencia de ruido se conoce como *secuencia aleatoria* y se caracteriza en términos estadísticos. La correlación correspondiente es una función de las características estadísticas del ruido y de cualquier otra interferencia.

En el Capítulo 12 se aborda la caracterización estadística de secuencias y su correlación. En los libros de Davenport (1970), Helstrom (1990), Peebles (1987) y Stark y Woods (1994) puede encontrar información complementaria sobre conceptos de probabilidad y estadística relacionados con la correlación.

Problemas

2.1 Una señal discreta en el tiempo $x(n)$ se define como

$$x(n) = \begin{cases} 1+\frac{n}{3}, & -3 \le n \le -1 \\ 1, & 0 \le n \le 3 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Determine sus valores y dibuje la señal $x(n)$.

(b) Dibuje las señales que se obtienen si:

1. Primero reflejamos $x(n)$ y luego desplazamos la señal resultante cuatro muestras.
2. Primero desplazamos $x(n)$ cuatro muestras y luego reflejamos la señal resultante.

(c) Dibuje la señal $x(-n+4)$.

(d) Compare los resultados de los apartados (b) y (c) y deduzca una regla para obtener la señal $x(-n+k)$ a partir de $x(n)$.

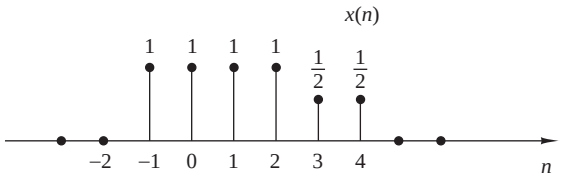


Figura P.2.2.

(e) ¿Puede expresar la señal $x(n)$ en función de las señales $\delta(n)$ y $u(n)$?

2.2 En la Figura P.2.2 se muestra una señal discreta en el tiempo $x(n)$. Dibuje y etiquete con detalle cada una de las señales siguientes:

(a) $x(n-2)$

(b) $x(4-n)$

(c) $x(n+2)$

(d) $x(n)u(2-n)$

(e) $x(n-1)\delta(n-3)$

(f) $x(n^2)$

(g) la parte par de $x(n)$

(h) la parte impar de $x(n)$

2.3 Demuestre que

(a) $\delta(n) = u(n) - u(n-1)$

(b) $u(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$

2.4 Demuestre que cualquier señal se puede descomponer en una componente par y otra impar. ¿Es unívoca la descomposición? Ilustre sus argumentos utilizando la señal

$$x(n) = \{2, 3, \underset{\uparrow}{4}, 5, 6\}$$

2.5 Demuestre que la energía (potencia) de una señal de energía (potencia) real es igual a la suma de las energías (potencias) de sus componentes par e impar.

2.6 Considere el sistema

$$y(n) = \mathscr{T}[x(n)] = x(n^2)$$

(a) Determine si es invariante en el tiempo.

(b) Clarifique el resultado del apartado (a) suponiendo que se aplica al sistema la siguiente señal

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 3 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

1. Dibuje la señal $x(n)$.
2. Determine y dibuje la señal $y(n) = \mathscr{T}[x(n)]$.
3. Dibuje la señal $y_2'(n) = y(n-2)$.

4. Determine y dibuje la señal $x_2(n) = x(n-2)$.
5. Determine y dibuje la señal $y_2(n) = \mathscr{T}[x_2(n)]$.
6. Compare las señales $y_2(n)$ e $y(n-2)$. ¿Cuál es su conclusión?

(c) Repita el apartado (b) para el sistema

$$y(n) = x(n) - x(n-1)$$

¿Puede utilizar este resultado para hacer algún comentario sobre la invarianza en el tiempo de este sistema? ¿Por qué?

(d) Repita los apartados (b) y (c) para el sistema

$$y(n) = \mathscr{T}[x(n)] = nx(n)$$

2.7 Un sistema discreto en el tiempo puede ser

1. Estático o dinámico
2. Lineal o no lineal
3. Invariante en el tiempo o variante en el tiempo
4. Causal o no causal
5. Estable o inestable

Examine los siguientes sistemas respecto de las propiedades enumeradas.

(a) $y(n) = \cos[x(n)]$

(b) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n+1} x(k)$

(c) $y(n) = x(n)\cos(\omega_0 n)$

(d) $y(n) = x(-n+2)$

(e) $y(n) = \mathrm{Trun}[x(n)]$, donde $\mathrm{Trun}[x(n)]$ indica la parte entera de $x(n)$ obtenida por truncamiento

(f) $y(n) = \mathrm{Round}[x(n)]$, donde $\mathrm{Round}[x(n)]$ indica la parte entera de $x(n)$ obtenida por redondeo
Nota: los sistemas de los apartados (e) y (f) son cuantificadores que efectúan truncamiento y redondeo, respectivamente.

(g) $y(n) = |x(n)|$

(h) $y(n) = x(n)u(n)$

(i) $y(n) = x(n) + nx(n+1)$

(j) $y(n) = x(2n)$

(k) $y(n) = \begin{cases} x(n), & \text{si } x(n) \geq 0 \\ 0, & \text{si } x(n) < 0 \end{cases}$

(l) $y(n) = x(-n)$

(m) $y(n) = \mathrm{sign}[x(n)]$

(n) El sistema de muestreo ideal con la entrada $x_a(t)$ y la salida $x(n) = x_a(nT), \quad -\infty < n < \infty$

2.8 Dos sistemas discretos en el tiempo $\mathscr{T}_1$ y $\mathscr{T}_2$ se conectan en cascada para formar un nuevo sistema $\mathscr{T}$, como el mostrado en la Figura P.2.8. Establezca si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

(a) Si $\mathscr{T}_1$ y $\mathscr{T}_2$ son lineales, entonces $\mathscr{T}$ es lineal (es decir, la conexión en cascada de dos sistemas lineales es lineal).

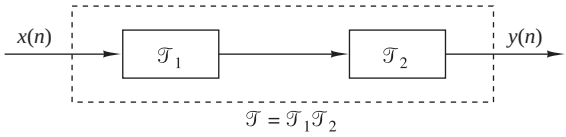


Figura P.2.8.

(b) Si $\mathscr{T}_1$ y $\mathscr{T}_2$ son invariantes en el tiempo, entonces $\mathscr{T}$ es invariante en el tiempo.

(c) Si $\mathscr{T}_1$ y $\mathscr{T}_2$ son causales, entonces $\mathscr{T}$ es causal.

(d) Si $\mathscr{T}_1$ y $\mathscr{T}_2$ son lineales e invariantes en el tiempo, entonces $\mathscr{T}$ también lo será.

(e) Si $\mathscr{T}_1$ y $\mathscr{T}_2$ son lineales e invariantes en el tiempo, entonces intercambiar su orden no hace que el sistema $\mathscr{T}$ cambie.

(f) Igual que el apartado (e) excepto que $\mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_2$ ahora son variantes en el tiempo. (*Consejo:* utilice un ejemplo.)

(g) Si $\mathscr{T}_1$ y $\mathscr{T}_2$ son no lineales, entonces $\mathscr{T}$ es no lineal.

(h) Si $\mathscr{T}_1$ y $\mathscr{T}_2$ son estables, entonces $\mathscr{T}$ es estable.

(i) Demuestre mediante un ejemplo que, en general, las afirmaciones contrarias de los apartados (c) y (h) no se cumplen.

2.9 Sea $\mathscr{T}$ un sistema LTI en reposo y con estabilidad BIBO con una entrada $x(n)$ y una salida $y(n)$. Demuestre que:

(a) Si $x(n)$ es periódica de período N [es decir, $x(n) = x(n+N)$ para todo $n \geq 0$], la salida $y(n)$ tiende a una señal periódica del mismo período.

(b) Si $x(n)$ está acotada y tiende a una constante, la salida también tenderá a una constante.

(c) Si $x(n)$ es una señal de energía, la salida $y(n)$ también será una señal de energía.

2.10 Durante el funcionamiento de un sistema invariante en el tiempo se han observado las siguientes parejas de entrada–salida:

$$x_1(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 0, 2\} \xleftrightarrow{\mathscr{T}} y_1(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 2\}$$

$$x_2(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 0, 3\} \xleftrightarrow{\mathscr{T}} y_2(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 0, 2\}$$

$$x_3(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 0, 0, 1\} \xleftrightarrow{\mathscr{T}} y_3(n) = \{1, \underset{\uparrow}{2}, 1\}$$

¿Puede extraer alguna conclusión relativa a la linealidad del sistema? ¿Cuál es la respuesta al impulso del sistema?

2.11 Durante el funcionamiento de un sistema lineal se han observado las siguientes parejas de entrada–salida:

$$x_1(n) = \{-1, \underset{\uparrow}{2}, 1\} \xleftrightarrow{\mathscr{T}} y_1(n) = \{1, \underset{\uparrow}{2}, -1, 0, 1\}$$

$$x_2(n) = \{1, \underset{\uparrow}{-1}, -1\} \xleftrightarrow{\mathscr{T}} y_2(n) = \{-1, \underset{\uparrow}{1}, 0, 2\}$$

$$x_3(n) = \{0, \underset{\uparrow}{1}, 1\} \xleftrightarrow{\mathscr{T}} y_3(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 1\}$$

¿Puede extraer alguna conclusión relativa a la invarianza con el tiempo de este sistema?

2.12 La única información disponible sobre un sistema consiste en N parejas de entrada–salida de señales $y_i(n) = \mathscr{T}[x_i(n)]$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

(a) ¿Para qué clases de señales de entrada podemos determinar la salida utilizando la información dada si se sabe que el sistema es lineal?

(b) Repita la cuestión anterior, pero sabiendo ahora que el sistema es invariante en el tiempo.

2.13 Demuestre que la condición necesaria y suficiente para que un sistema LTI en reposo tenga estabilidad BIBO es

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \leq M_h < \infty$$

para cualquier constante M_n.

2.14 Demuestre que:

(a) un sistema lineal en reposo es causal si y sólo si para cualquier entrada $x(n)$ se cumple que

$$x(n) = 0 \text{ para } \quad n < n_0 \Rightarrow y(n) = 0 \qquad \text{para } \quad n < n_0$$

(b) un sistema LTI en reposo es causal si y sólo si

$$h(n) = 0 \qquad \text{para } \quad n < 0$$

2.15 **(a)** Demuestre que para cualquier constante real o compleja a y cualesquiera número enteros finitos M y N, se cumple

$$\sum^{N} n = Ma^n = \begin{cases} \dfrac{a^M - a^{N+1}}{1-a}, & \text{si } a \neq 1 \\ N - M + 1, & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

(b) Demuestre que si $|a| < 1$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

2.16 **(a)** Si $y(n) = x(n) * h(n)$, demuestre que $\sum_y = \sum_x \sum_h$, donde $\sum_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)$.

(b) Calcule la convolución $y(n) = x(n) * h(n)$ de las siguientes señales y compruebe la corrección de los resultados utilizando la prueba indicada en el apartado (a).

1. $x(n) = \{1, 2, 4\}, h(n) = \{1, 1, 1, 1, 1\}$
2. $x(n) = \{1, 2, -1\}, h(n) = x(n)$
3. $x(n) = \{0, 1, -2, 3, -4\}, h(n) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\}$
4. $x(n) = \{1, 2, 3, 4, 5\}, h(n) = \{1\}$
5. $x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, -2, 3\}, h(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 0, 1, 1, 1, 1\}$
6. $x(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 0, 1, 1, 1, 1\}, h(n) = \{1, \underset{\uparrow}{-2}, 3\}$
7. $x(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 4, -3\}, h(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 0, -1, -1\}$
8. $x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 1, 2\}, h(n) = u(n)$

9. $x(n) = \{1, 1, \underset{\uparrow}{0}, 1, 1\}, h(n) = \{1, -2, -3, \underset{\uparrow}{4}\}$

10. $x(n) = \{1, 2, \underset{\uparrow}{0}, 2, 1\} h(n) = x(n)$

11. $x(n) = (\frac{1}{2})^n u(n), h(n) = (\frac{1}{4})^n u(n)$

2.17 Calcule y dibuje las convoluciones $x(n) * h(n)$ y $h(n) * x(n)$ para las parejas de señales mostradas en la Figura P.2.17.

2.18 Determine y dibuje la convolución $y(n)$ de las señales

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{3}n, & 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$h(n) = \begin{cases} 1, & -2 \leq n \leq 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) gráficamente.

(b) analíticamente.

2.19 Calcule la convolución $y(n)$ de las señales

$$x(n) = \begin{cases} \alpha^n, & -3 \leq n \leq 5 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$h(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

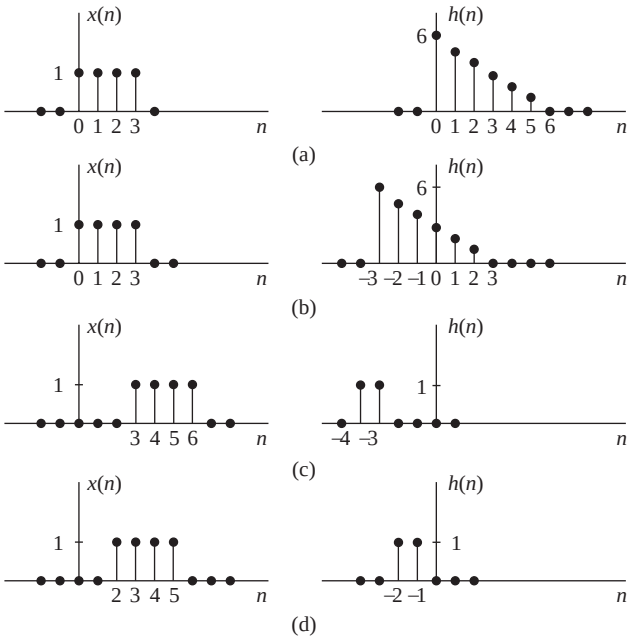


Figura P.2.17.

2.20 Considere las tres operaciones siguientes:

(a) Multiplicar los números enteros 131 y 122.

(b) Calcular la convolución de las señales $\{1,3,1\} * \{1,2,2\}$.

(c) Multiplicar los polinomios $1+3z+z^2$ y $1+2z+2z^2$.

(d) Repita el apartado (a) para los números 1.31 y 12.2.

(e) Comente los resultados.

2.21 Calcule la convolución $y(n) = x(n) * h(n)$ de las siguientes parejas de señales.

(a) $x(n) = a^n u(n)$, $h(n) = b^n u(n)$ para $a \neq b$ y para $a = b$

(b) $x(n) = \begin{cases} 1, & n = -2,0,1 \\ 2, & n = -1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad h(n) = \delta(n) - \delta(n-1) + \delta(n-4) + \delta(n-5)$

(c) $x(n) = u(n+1) - u(n-4) - \delta(n-5); h(n) = [u(n+2) - u(n-3)] \cdot (3 - |n|)$

(d) $x(n) = u(n) - u(n-5); h(n) = u(n-2) - u(n-8) + u(n-11) - u(n-17)$

2.22 Sea $x(n)$ la señal de entrada a un filtro discreto en el tiempo con una respuesta al impulso $h_i(n)$ y sea $y_i(n)$ la salida correspondiente.

(a) Calcule y dibuje $x(n)$ e $y_i(n)$ para los casos siguientes, utilizando la misma escala en todas las figuras.

$$x(n) = \{1,4,2,3,5,3,3,4,5,7,6,9\}$$
$$h_1(n) = \{1,1\}$$
$$h_2(n) = \{1,2,1\}$$
$$h_3(n) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$$
$$h_4(n) = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}$$
$$h_5(n) = \{\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}$$

Dibuje $x(n)$, $y_1(n)$, $y_2(n)$ en la gráfica y $x(n)$, $y_3(n)$, $y_4(n)$, $y_5(n)$ en otra gráfica

(b) ¿Cuál es la diferencia entre $y_1(n)$ e $y_2(n)$? ¿Y entre $y_3(n)$ e $y_4(n)$?

(c) Comente el suavizado de $y_2(n)$ e $y_4(n)$. ¿Qué factores afectan al suavizado?

(d) Compare $y_4(n)$ con $y_5(n)$. ¿Cuál es la diferencia? ¿Puede explicarla?

(e) Sea $h_6(n) = \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$. Calcule $y_6(n)$. Dibuje $x(n)$, $y_2(n)$ e $y_6(n)$ sobre la misma figura y comente los resultados.

2.23 Exprese la salida $y(n)$ de un sistema lineal invariante en el tiempo con la respuesta al impulso $h(n)$ en función de su respuesta al escalón $s(n) = h(n)^* u(n)$ y de la entrada $x(n)$.

2.24 El sistema discreto en el tiempo

$$y(n) = ny(n-1) + x(n), \qquad n \geq 0$$

está en reposo $[y(-1) = 0]$. Compruebe si el sistema es lineal, invariante en el tiempo y estable BIBO.

2.25 Considere la señal $\gamma(n) = a^n u(n)$, $0 < a < 1$.

(a) Demuestre que cualquier secuencia $x(n)$ puede descomponerse como sigue

$$x(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k \gamma(n-k)$$

y exprese c_k en función de $x(n)$.

(b) Utilice las propiedades de linealidad e invarianza en el tiempo para expresar la salida $y(n) = \mathscr{T}[x(n)]$ en función de la entrada $x(n)$ y de la señal $g(n) = \mathscr{T}[\gamma(n)]$, donde $\mathscr{T}[\cdot]$ es un sistema LTI.

(c) Exprese la respuesta al impulso $h(n) = \mathscr{T}[\delta(n)]$ en función de $g(n)$.

2.26 Determine la respuesta a la entrada nula del sistema descrito por la ecuación en diferencias de segundo orden

$$x(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = 0$$

2.27 Determine la solución particular de la ecuación en diferencias

$$y(n) = \frac{5}{6}y(n-1) - \frac{1}{6}y(n-2) + x(n)$$

para la función $x(n) = 2^n u(n)$.

2.28 En el Ejemplo 2.4.8, la Ecuación (2.4.30) separa la secuencia de salida $y(n)$ en la respuesta transitoria y la respuesta en régimen permanente. Dibuje estas dos respuestas para $a_1 = -0.9$.

2.29 Determine la respuesta al impulso para la conexión en cascada de dos sistemas lineales invariantes en el tiempo que tienen las respuestas al impulso:

$$h_1(n) = a^n[u(n) - u(n-N)] \quad \text{y} \quad h_2(n) = [u(n) - u(n-M)]$$

2.30 Determine la respuesta $y(n)$, $n \geq 0$ del sistema descrito mediante la ecuación en diferencias de segundo orden

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1)$$

a la entrada $x(n) = 4^n u(n)$.

2.31 Determine la respuesta al impulso del siguiente sistema causal:

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1)$$

2.32 Sean $x(n)$, $N_1 \leq n \leq N_2$ y $h(n)$, $M_1 \leq n \leq M_2$ dos señales de duración finita.

(a) Determine el rango $L_1 \leq n \leq L_2$ de su convolución en función de N_1, N_2, M_1 y M_2.

(b) Determine los límites en los casos siguientes: solapamiento parcial por la izquierda, solapamiento total, solapamiento parcial por la derecha. Por comodidad, suponga que $h(n)$ tiene una duración más corta que $x(n)$.

(c) Ilustre la validez de sus resultados calculando la convolución de las señales

$$x(n) = \begin{cases} 1, & -2 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$h(n) = \begin{cases} 2, & -1 \leq n \leq 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2.33 Determine la respuesta al impulso y la respuesta al escalón unidad del sistema descrito por la ecuación en diferencias

(a) $y(n) = 0.6y(n-1) - 0.08y(n-2) + x(n)$

(b) $y(n) = 0.7y(n-1) - 0.1y(n-2) + 2x(n) - x(n-2)$

2.34 Considere un sistema con la respuesta al impulso

$$h(n) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^n, & 0 \le n \le 4 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine la entrada $x(n)$ para $0 \le n \le 8$ tal que genere la secuencia de salida

$$y(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 2.5, 3, 3, 3, 2, 1, 0, \ldots\}$$

2.35 Considere la interconexión de sistemas LTI mostrada en la Figura P.2.35.

(a) Exprese la respuesta al impulso global en función de $h_1(n)$, $h_2(n)$, $h_3(n)$ y $h_4(n)$.

(b) Determine $h(n)$ cuando

$$\begin{aligned} h_1(n) &= \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\} \\ h_2(n) &= h_3(n) = (n+1)u(n) \\ h_4(n) &= \delta(n-2) \end{aligned}$$

(c) Determine la respuesta del sistema en el apartado (b) si

$$x(n) = \delta(n+2) + 3\delta(n-1) - 4\delta(n-3)$$

2.36 Considere el sistema de la Figura P.2.36 con $h(n) = a^n u(n)$, $-1 < a < 1$. Determine la respuesta $y(n)$ del sistema a la excitación

$$x(n) = u(n+5) - u(n-10)$$

2.37 Calcule y dibuje la respuesta al escalón del sistema

$$y(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x(n-k)$$

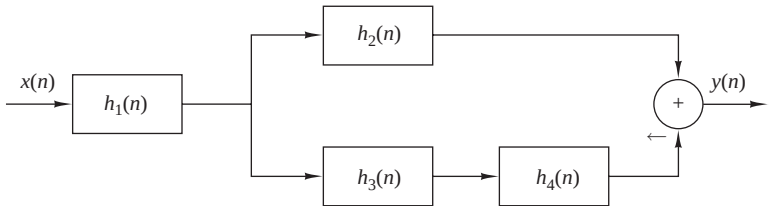


Figura P.2.35.

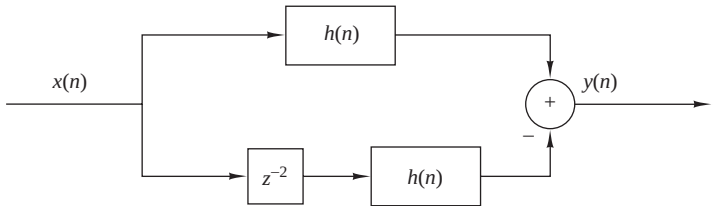


Figura P.2.36.

2.38 Determine el rango de valores del parámetro a para el que el sistema lineal invariante en el tiempo con la respuesta al impulso

$$h(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0,\ n \text{ par} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es estable.

2.39 Determine la respuesta del sistema con la respuesta al impulso

$$h(n) = a^n u(n)$$

a la señal de entrada

$$x(n) = u(n) - u(n-10)$$

(*Consejo*: la solución se puede obtener fácil y rápidamente aplicando las propiedades de linealidad e invarianza en el tiempo al resultado obtenido en el Ejemplo 2.3.5.)

2.40 Determine la respuesta del sistema en reposo caracterizado por la respuesta al impulso

$$h(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$$

a la señal de entrada

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < 10 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2.41 Determine la respuesta del sistema en reposo caracterizado por la respuesta al impulso

$$h(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$$

a las señales de entrada

(a) $x(n) = 2^n u(n)$

(b) $x(n) = u(-n)$

2.42 Se conectan en cascada tres sistemas con respuestas al impulso $h_1(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$, $h_2(n) = h(n)$, and $h_3(n) = u(n)$,

(a) ¿Cuál es la respuesta al impulso, $h_c(n)$, del sistema completo?

(b) ¿Afecta el orden de interconexión al sistema completo?

2.43 **(a)** Demuestre y explique gráficamente la diferencia entre las relaciones

$$x(n)\delta(n-n_0) = x(n_0)\delta(n-n_0) \qquad \text{y} \qquad x(n) * \delta(n-n_0) = x(n-n_0)$$

(b) Demuestre que un sistema discreto en el tiempo descrito mediante una convolución es un sistema LTI en reposo.

(c) ¿Cuál es la respuesta al impulso del sistema descrito por $y(n) = x(n - n_0)$?

2.44 Dos señales $s(n)$ y $v(n)$ están relacionadas a través de las siguientes ecuaciones en diferencias.

$$s(n) + a_1 s(n-1) + \cdots + a_N s(n-N) = b_0 v(n)$$

Diseñe el diagrama de bloques de:

(a) El sistema que genera $s(n)$ cuando se excita con $v(n)$.

(b) El sistema que genera $v(n)$ cuando se excita con $s(n)$.

(c) ¿Cuál es la respuesta al impulso de la conexión en cascada de los sistemas de (a) y (b)?

2.45 Calcule la respuesta para el estado nulo del sistema descrito mediante la ecuación en diferencias

$$y(n) + \frac{1}{2} y(n-1) = x(n) + 2x(n-2)$$

a la entrada

$$x(n) = \{1, 2, \underset{\uparrow}{3}, 4, 2, 1\}$$

resolviendo la ecuación en diferencias de forma recursiva.

2.46 Determine la realización usando la forma directa II de cada uno de los siguientes sistemas LTI:

(a) $2y(n) + y(n-1) - 4y(n-3) = x(n) + 3x(n-5)$

(b) $y(n) = x(n) - x(n-1) + 2x(n-2) - 3x(n-4)$

2.47 Considere el sistema discreto en el tiempo mostrado en la Figura P.2.47.

(a) Calcule las 10 primeras muestras de su respuesta al impulso.

(b) Halle la relación entrada–salida.

(c) Aplique la entrada $x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 1, 1, \ldots\}$ y calcule las 10 primeras muestras de la salida.

(d) Calcule las 10 primeras muestras de la salida para la entrada dada en el apartado (c) utilizando la operación de convolución.

(e) ¿Es el sistema causal? ¿Es estable?

2.48 Considere el sistema descrito por la ecuación en diferencias $y(n) = ay(n-1) + bx(n)$

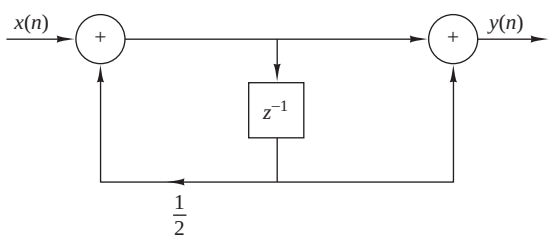


Figura P.2.47.

(a) Determine b en función de a de modo que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) = 1$$

(b) Calcule la respuesta al escalón en el estado nulo $s(n)$ del sistema y elija b de modo que $s(\infty) = 1$.

(c) Compare los valores de b obtenidos en los apartados (a) y (b). ¿Qué destacaría?

2.49 Un sistema discreto en el tiempo se implementa según la estructura mostrada en la Figura P.2.49.

(a) Determine la respuesta al impulso.

(b) Determine una realización para el sistema inverso, es decir, el sistema que genera $x(n)$ como salida cuando se usa $y(n)$ como entrada.

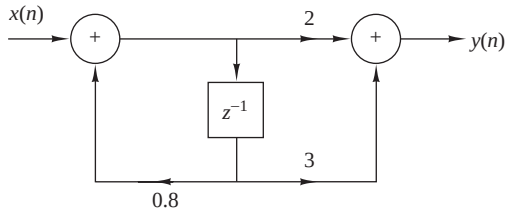


Figura P.2.49.

2.50 Considere el sistema discreto en el tiempo mostrado en la Figura P.2.50.

(a) Calcule los seis primeros valores de la respuesta al impulso del sistema.

(b) Calcule los seis primeros valores de la respuesta al escalón del estado nulo del sistema.

(c) Determine una expresión analítica para la respuesta al impulso del sistema.

2.51 Determine y dibuje la respuesta al impulso de los siguientes sistemas para $n = 0, 1, \ldots, 9$.

(a) Figura P.2.51(a).

(b) Figura P.2.51(b).

(c) Figura P.2.51(c).

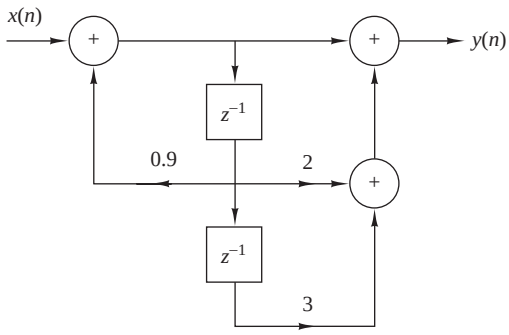


Figura P.2.50.

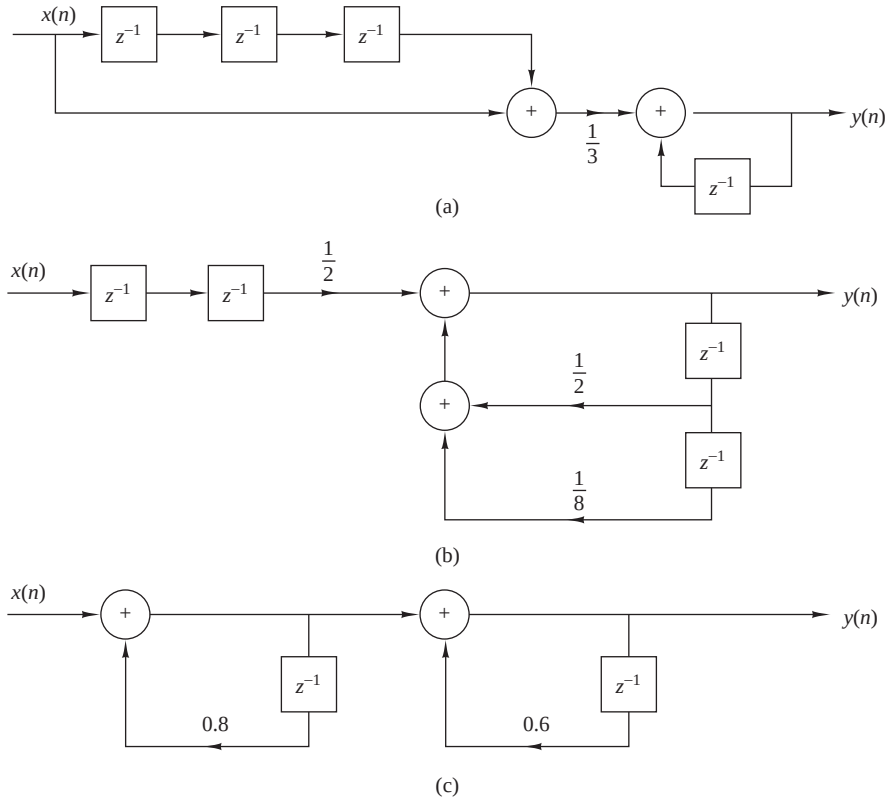


Figura P.2.51.

(d) Clasifique los sistemas anteriores como sistemas FIR o IIR.

(e) Halle una expresión explícita para la respuesta al impulso del sistema del apartado (c).

2.52 Considere los sistemas mostrados en la Figura P.2.52.

(a) Determine y dibuje sus respuestas al impulso $h_1(n)$, $h_2(n)$ y $h_3(n)$.

(b) ¿Es posible seleccionar los coeficientes de estos sistemas de manera que $h_1(n) = h_2(n) = h_3(n)$?

2.53 Considere el sistema mostrado en la Figura P.2.53.

(a) Determine su respuesta al impulso $h(n)$.

(b) Demuestre que $h(n)$ es igual a la convolución de las señales:

$$h_1(n) = \delta(n) + \delta(n-1) \quad \text{y} \quad h_2(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$$

2.54 Calcule y dibuje la convolución $y_i(n)$ y la correlación $r_i(n)$ de las siguientes parejas de señales y comente los resultados obtenidos.

(a) $x_1(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 4\} \qquad h_1(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 1, 1, 1, 1\}$

(b) $x_2(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, -2, 3, -4\} \qquad h_2(n) = \{\frac{1}{2}, 1, \underset{\uparrow}{2}, 1, \frac{1}{2}\}$

(c) $x_3(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4\} \qquad h_3(n) = \{\underset{\uparrow}{4}, 3, 2, 1\}$

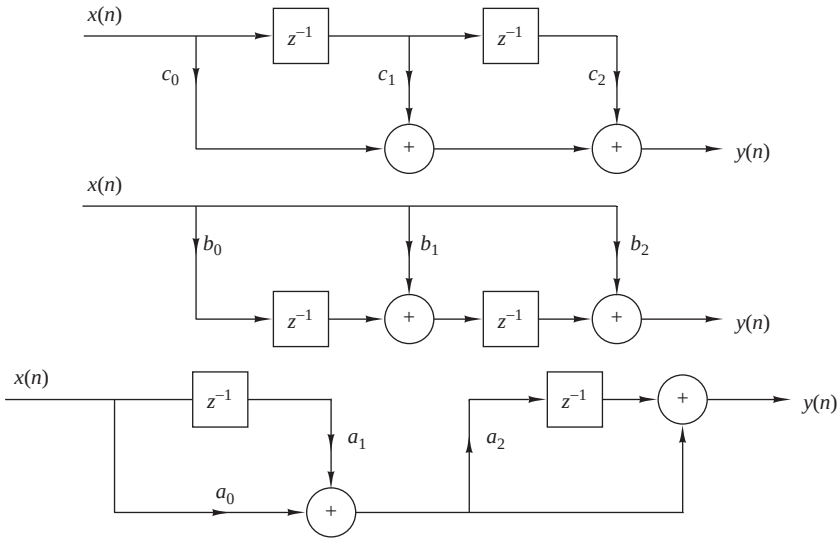


Figura P.2.52.

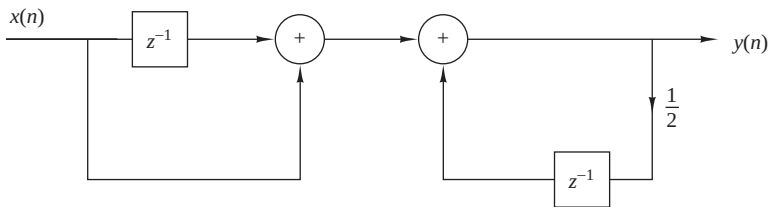


Figura P.2.53.

(d) $x_4(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4\}$ $\qquad h_4(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4\}$

2.55 La respuesta al estado nulo de un sistema LTI causal a la entrada $x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 3, 3, 1\}$ es $y(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 4, 6, 4, 1\}$. Determine su respuesta al impulso.

2.56 Demuestre por medio de la sustitución directa la equivalencia de las ecuaciones (2.5.9) y (2.5.10), que describen la estructura correspondiente a la forma directa II, con la relación (2.5.6), que describe la estructura de la forma directa I.

2.57 Determine la respuesta $y(n)$, $n \geq 0$ del sistema descrito por la ecuación en diferencias de segundo orden $y(n) - 4y(n-1) + 4y(n-2) = x(n) - x(n-1)$ cuando la entrada es $x(n) = (-1)^n u(n)$ y las condiciones iniciales son $y(-1) = y(-2) = 0$.

2.58 Determine la respuesta al impulso $h(n)$ para el sistema descrito por la ecuación en diferencias de segundo orden $y(n) - 4y(n-1) + 4y(n-2) = x(n) - x(n-1)$

2.59 Demuestre que cualquier señal discreta en el tiempo $x(n)$ se puede expresar como

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [x(k) - x(k-1)]u(n-k)$$

donde $u(n-k)$ es un escalón unidad retardado k unidades de tiempo, es decir,

$$u(n-k) = \begin{cases} 1, & n \geq k \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2.60 Demuestre que la salida de un sistema LTI se puede expresar en función de su respuesta al escalón unidad $s(n)$ como sigue.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [s(k) - s(k-1)]x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [x(k) - x(k-1)]s(n-k)$$

2.61 Calcule las secuencias de correlación $r_{xx}(l)$ y $r_{xy}(l)$ para las siguientes secuencias de señal.

$$x(n) = \begin{cases} 1, & n_0 - N \leq n \leq n_0 + N \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$y(n) = \begin{cases} 1, & -N \leq n \leq N \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2.62 Determine la autocorrelación de las señales siguientes.

(a) $x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 1, 1\}$

(b) $y(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 1, 2, 1\}$

¿Cuál es su conclusión?

2.63 Determine la autocorrelación normalizada de la señal $x(n)$ dada por

$$x(n) = \begin{cases} 1, & -N \leq n \leq N \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2.64 Una señal de audio $s(t)$ generada por un altavoz se refleja en dos paredes diferentes con coeficientes de reflexión r_1 y r_2. La señal $x(t)$ registrada por un micrófono próximo al altavoz, después del muestreo, es $x(n) = s(n) + r_1 s(n-k_1) + r_2 s(n-k_2)$ donde k_1 y k_2 son los retardos de los dos ecos.

(a) Determine la autocorrelación $r_{xx}(l)$ de la señal $x(n)$.

(b) ¿Puede obtener r_1, r_2, k_1 y k_2 observando $r_{xx}(l)$?

(c) ¿Qué ocurre si $r_2 = 0$?

2.65 *Estimación del tiempo de retardo en señales de radar.* Sea $x_a(t)$ la señal transmitida e $y_a(t)$ la señal recibida en un sistema de radar igual a $y_a(t) = ax_a(t-t_d) + v_a(t)$. Sea $v_a(t)$ un ruido aleatorio aditivo. Las señales $x_a(t)$ e $y_a(t)$ se muestrean en el receptor de acuerdo con el teorema de muestreo y se procesan digitalmente para determinar el retardo de tiempo y, por tanto, la distancia del objeto. La señales discretas en el tiempo resultantes son

$$\begin{aligned} x(n) &= x_a(nT) \\ y(n) &= y_a(nT) = ax_a(nT - DT) + v_a(nT) \\ &\triangleq \quad ax(n-D) + v(n) \end{aligned}$$

(a) Explique cómo podemos medir el retardo D calculando la correlación cruzada $r_{xy}(l)$.

(b) Sea $x(n)$ la *secuencia de Barker* de 13-puntos

$$x(n) = \{+1, +1, +1, +1, +1, -1, -1, +1, +1, -1, +1, -1, +1\}$$

y $v(n)$ un secuencia aleatoria gaussiana con media igual a cero y varianza $\sigma^2 = 0.01$. Escriba un programa que genere la secuencia $y(n)$, $0 \leq n \leq 199$ para $a = 0.9$ y $D = 20$. Dibuje las señales $x(n)$, $y(n)$, $0 \leq n \leq 199$.

(c) Calcule y dibuje la correlación cruzada $r_{xy}(l)$, $0 \leq l \leq 59$. Utilice la gráfica para estimar el valor del retardo D.

(d) Repita los apartados (b) y (c) para $\sigma^2 = 0.1$ y $\sigma^2 = 1$.

(e) Repita los apartados (b) y (c) para la secuencia

$$x(n) = \{-1, -1, -1, +1, +1, +1, +1, -1, +1, -1, +1, +1, -1, -1, +1\}$$

que se obtiene a partir del registro de desplazamiento de cuatro etapas mostrado en la Figura P.2.65. Observe que $x(n)$ es sólo un período de la secuencia periódica obtenida del registro de desplazamiento.

(f) Repita los apartados (b) y (c) para una secuencia de período $N = 2^7 - 1$, la cual se ha obtenido de un registro de desplazamiento de siete etapas. La Tabla 2.2 proporciona las etapas conectadas al sumador de módulo-2 para secuencias del registro de desplazamiento de longitud $N = 2^m - 1$.

2.66 *Implementación de sistemas LTI.* Considere el sistema discreto en el tiempo recursivo descrito por la ecuación en diferencias $y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + b_0 x(n)$ donde $a_1 = -0.8$, $a_2 = 0.64$ y $b_0 = 0.866$.

(a) Escriba un programa para calcular y dibujar la respuesta al impulso $h(n)$ del sistema para $0 \leq n \leq 49$.

(b) Escriba un programa para calcular y dibujar la respuesta al escalón de estado nulo $s(n)$ del sistema para $0 \leq n \leq 100$.

(c) Defina un sistema FIR con la respuesta al impulso $h_{\text{FIR}}(n)$ dada por

$$h_{\text{FIR}}(n) = \begin{cases} h(n), & 0 \leq n \leq 19 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $h(n)$ es la respuesta al impulso calculada en el apartado (a). Escriba un programa para calcular y dibujar su respuesta al escalón.

(d) Compare los resultados obtenidos en los apartados (b) y (c), y explique sus similitudes y diferencias.

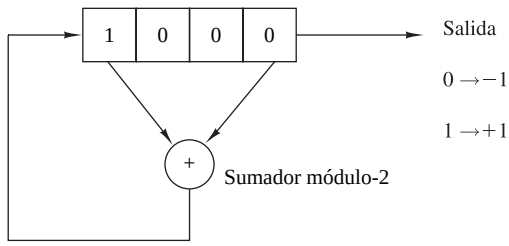


Figura P.2.65. Registro de desplazamiento lineal.

m	Etapas conectadas al sumador módulo-2
1	1
2	1, 2
3	1, 3
4	1, 4
5	1, 4
6	1, 6
7	1, 7
8	1, 5, 6, 7
9	1, 6
10	1, 8
11	1, 10
12	1, 7, 9, 12
13	1, 10, 11, 13
14	1, 5, 9, 14
15	1, 15
16	1, 5, 14, 16
17	1, 15

Tabla 2.2. Conexiones del registro de desplazamiento para generar secuencias de longitud máxima.

2.67 Escriba un programa de computadora que calcule la respuesta al impulso global $h(n)$ del sistema mostrado en la Figura P.2.67 para $0 \leq n \leq 99$. Los sistemas $\mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_2$, $\mathscr{T}_3$ y $\mathscr{T}_4$ se especifican como sigue

$$\begin{aligned}
\mathscr{T}_1 : h_1(n) &= \{\underset{\uparrow}{1}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{16}, \tfrac{1}{32}\} \\
\mathscr{T}_2 : h_2(n) &= \{\underset{\uparrow}{1}, 1, 1, 1, 1\} \\
\mathscr{T}_3 : y_3(n) &= \tfrac{1}{4}x(n) + \tfrac{1}{2}x(n-1) + \tfrac{1}{4}x(n-2) \\
\mathscr{T}_4 : y(n) &= 0.9y(n-1) - 0.81y(n-2) + v(n) + v(n-1)
\end{aligned}$$

Dibuje $h(n)$ para $0 \leq n \leq 99$.

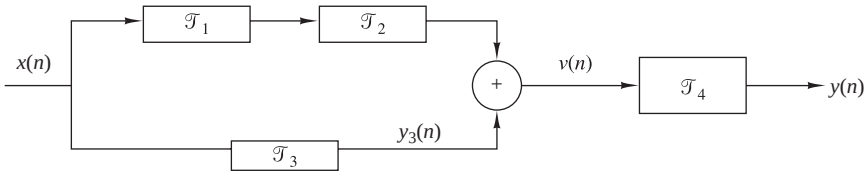


Figura P.2.67.

3

La transformada z y sus aplicaciones al análisis de los sistemas LTI

Las técnicas de transformación constituyen una herramienta importante en el análisis de las señales y sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI). En este capítulo vamos a presentar la transformada-z, vamos a desarrollar sus propiedades y a demostrar su importancia en el análisis y la caracterización de los sistemas LTI.

La transformada-z desempeña el mismo papel en el análisis de las señales discretas en el tiempo y los sistemas LTI que la transformada de Laplace en el análisis de las señales continuas en el tiempo y los sistemas LTI. Por ejemplo, veremos que en el dominio z (plano z complejo), la convolución de dos señales en el dominio del tiempo es equivalente a la multiplicación de sus correspondientes transformadas z. Esta propiedad simplifica enormemente el análisis de la respuesta de un sistema a varias señales. Además, la transformada z proporciona un medio de caracterizar los sistemas LTI y su respuesta a diversas señales mediante las posiciones de sus polos y ceros.

Comenzaremos este capítulo definiendo la transformada z. En la Sección 3.2 se presentan sus propiedades. En la Sección 3.3, se utiliza la transformada para caracterizar las señales en función de sus patrones de polos y ceros. En la Sección 3.4 se describen los métodos para invertir la transformada z de una señal, con el fin de obtener la representación en el dominio del tiempo de la señal. Por último, en la Sección 3.6, vamos a ocuparnos de la transformada z unilateral y vamos a utilizarla para resolver las ecuaciones en diferencias lineales con condiciones iniciales distintas de cero. La Sección 3.5 se centra en el uso de la transformada z en el análisis de los sistemas LTI.

3.1 La transformada z

En esta sección vamos a presentar la transformada z de una señal discreta en el tiempo, vamos a investigar sus propiedades de convergencia y a ver brevemente la trasformada z inversa.

3.1.1 La transformada z directa

La transformada z de una señal discreta en el tiempo $x(n)$ se define como la serie de potencias

$$X(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \tag{3.1.1}$$

donde z es una variable compleja. La relación (3.1.1) a veces se denomina *transformada z directa*, ya que transforma la señal en el dominio del tiempo $x(n)$ en su representación en el plano complejo $X(z)$. El procedimiento inverso [es decir, obtener $x(n)$ a partir de $X(z)$] se conoce como *transformada z inversa* y se examinará brevemente en la Sección 3.1.2 y más en detalle en la Sección 3.4.

Por comodidad, la transformada z de una señal $x(n)$ se designa como

$$X(z) \equiv Z\{x(n)\} \tag{3.1.2}$$

mientras que la relación entre $x(n)$ y $X(z)$ se indica como

$$x(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) \tag{3.1.3}$$

Dado que la transformada z es una serie infinita de potencias, sólo existe para aquellos valores de z para los que la serie converge. La *región de convergencia* (ROC, *region of convergence*) de $X(z)$ es el conjunto de todos los valoers de z para los que $X(z)$ toma un valor finito. Por tanto, siempre que hablemos de una transformada z deberemos indicar también su ROC.

Vamos a ilustrar estos conceptos con varios ejemplos sencillos.

EJEMPLO 3.1.1

Determine la transformada z de las siguientes señales de *duración finita*.

(a) $x_1(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 5, 7, 0, 1\}$

(b) $x_2(n) = \{1, 2, \underset{\uparrow}{5}, 7, 0, 1\}$

(c) $x_3(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 0, 1, 2, 5, 7, 0, 1\}$

(d) $x_4(n) = \{2, 4, \underset{\uparrow}{5}, 7, 0, 1\}$

(e) $x_5(n) = \delta(n)$

(f) $x_6(n) = \delta(n-k), k > 0$

(g) $x_7(n) = \delta(n+k), k > 0$

Solución. A partir de la definición (3.1.1), tenemos

(a) $X_1(z) = 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + z^{-5}$, ROC: plano z completo excepto $z = 0$

(b) $X_2(z) = z^2 + 2z + 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$, ROC: plano z completo excepto $z = 0$ y $z = \infty$

(c) $X_3(z) = z^{-2} + 2z^{-3} + 5z^{-4} + 7z^{-5} + z^{-7}$, ROC: plano z completo excepto $z = 0$

(d) $X_4(z) = 2z^2 + 4z + 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$, ROC: plano z completo excepto $z = 0$ y $z = \infty$

(e) $X_5(z) = 1$ [es decir, $\delta(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} 1$], ROC: plano z completo

(f) $X_6(z) = z^{-k}$ [es decir, $\delta(n-k) \overset{z}{\longleftrightarrow} z^{-k}$], $k > 0$, ROC: plano z completo excepto $z = 0$

(g) $X_7(z) = z^k$ [es decir, $\delta(n+k) \overset{z}{\longleftrightarrow} z^k$], $k > 0$, ROC: plano z completo excepto $z = \infty$

En este ejemplo se ve fácilmente que la ROC de una *señal de duración finita* es el plano z completo, excepto posiblemente los puntos $z = 0$ y/o $z = \infty$. Estos puntos se excluyen, porque z^k $(k > 0)$ no está acotada para $z = \infty$ y z^{-k} $(k > 0)$ no está acotada para $z = 0$.

Desde el punto de vista matemático, la transformada z es simplemente una representación alternativa de una señal. Esto se ilustra en el Ejemplo 3.1.1, donde podemos ver que los coeficientes de z^{-n}, en una transformada dada, se corresponden con el valor de la señal en el instante n. En otras palabras, el exponente de z contiene la información temporal que necesitamos para identificar las muestras de la señal.

En muchos casos, podremos escribir la suma de la serie finita o infinita para la transformada z en una serie compacta. En dichos casos, la transformada z proporciona una representación alternativa compacta de la señal.

EJEMPLO 3.1.2

Determine the transformada z de la señal

$$x(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$$

Solución. La señal $x(n)$ está formada por un número infinito de valores distintos de cero

$$x(n) = \{1, (\frac{1}{2}), (\frac{1}{2})^2, (\frac{1}{2})^3, \ldots, (\frac{1}{2})^n, \ldots\}$$

La transformada z de $x(n)$ es la serie infinita de potencias

$$\begin{aligned} X(z) &= 1 + \frac{1}{2}z^{-1} + (\frac{1}{2})^2 z^{-2} + (\frac{1}{2})^n z^{-n} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2}z^{-1})^n \end{aligned}$$

Se trata de una serie geométrica infinita. Recordemos que

$$1 + A + A^2 + A^3 + \cdots = \frac{1}{1-A} \qquad \text{si} \quad |A| < 1$$

En consecuencia, para $|\frac{1}{2}z^{-1}| < 1$, o lo que es lo mismo, para $|z| > \frac{1}{2}$, $X(z)$ converge a

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{2}$$

Podemos ver que, en este caso, la transformada z proporciona una representación alternativa compacta de la señal $x(n)$.

Podemos expresar la variable compleja z en forma polar como sigue

$$z = re^{j\theta} \tag{3.1.4}$$

donde $r = |z|$ and $\theta = \sphericalangle z$. Luego $X(z)$ puede expresarse como

$$X(z)|_{z=re^{j\theta}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-j\theta n}$$

En la ROC de $X(z)$, $|X(z)| < \infty$. Pero

$$\begin{aligned} |X(z)| &= \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-j\theta n} \right| \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n) r^{-n} e^{-j\theta n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n) r^{-n}| \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Puesto que $|X(z)|$ es finito si la secuencia $x(n)r^{-n}$ es absolutamente sumable.

El problema de hallar la ROC de $X(z)$ es equivalente a determinar el rango de valores de r para el que la secuencia $x(n)r^{-n}$ es absolutamente sumable. Para ello, expresamos (3.1.5) como sigue

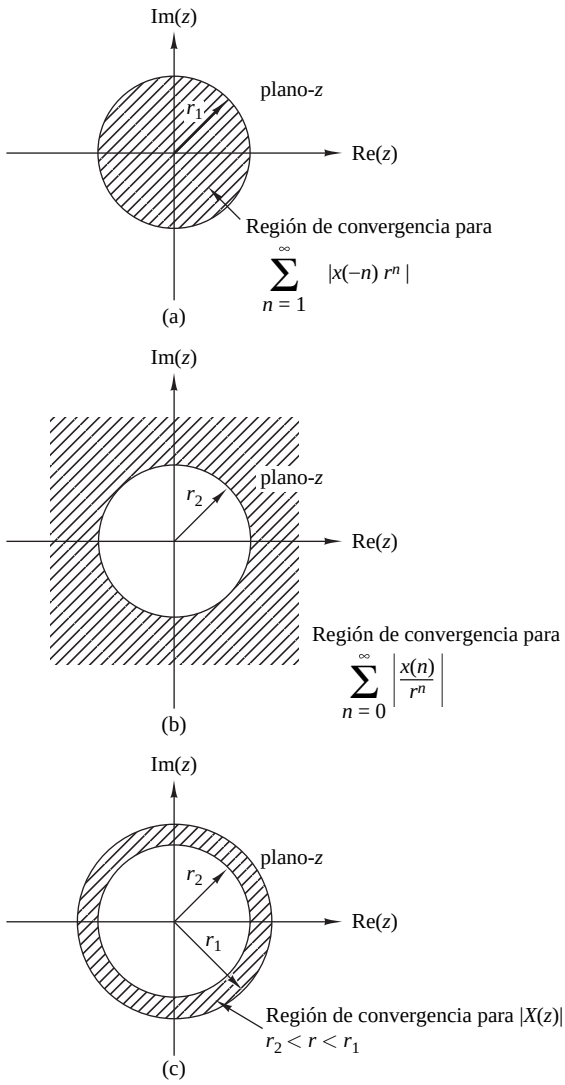


Figura 3.1.1. Región de convergencia para $X(z)$ y sus correspondientes componentes causal y anticausal.

$$\begin{aligned} |X(z)| &\leq \sum_{n=-\infty}^{-1} |x(n)r^{-n}| + \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x(n)}{r^n} \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |x(-n)r^n| + \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x(n)}{r^n} \right| \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Si $X(z)$ converge en alguna región del plano complejo, ambos sumatorios de la Ecuación (3.1.6) serán finitos en dicha región. Si el primer sumatorio de (3.1.6) converge, tienen que existir valores de r lo suficientemente pequeños como para que la secuencia producto $x(-n)r^n, 1 \leq n < \infty$ sea absolutamente sumable. Por tanto, la ROC para la primera suma consiste en todos los puntos de un círculo de un determinado radio r_1, donde $r_1 < \infty$, como se ilustra en la Figura 3.1.1(a). Por el contrario, si el segundo sumatorio de (3.1.6) converge, tienen que existir valores de r lo suficientemente grandes como para que la secuencia producto $x(n)/r^n$, $0 \leq n < \infty$ sea absolutamente sumable. Por tanto, la ROC del segundo sumatorio de (3.1.6) consta de todos los puntos externos a una circunferencia de radio $r > r_2$, como se ilustra en la Figura 3.1.1(b).

Dado que la convergencia de $X(z)$ requiere que ambos sumatorios de (3.1.6) sean finitos, se deduce que la ROC de $X(z)$ es, generalmente, la región anular en el plano z, $r_2 < r < r_1$, que es la región común en que ambos sumatorios son finitos. Esta región se ilustra en la Figura 3.1.1(c). Por otro lado, si $r_2 > r_1$, no existe ninguna región común de convergencia para los dos sumatorios y, por tanto, $X(z)$ no existe.

Los siguientes ejemplos ilustran estos importantes conceptos.

EJEMPLO 3.1.3

Determine the transformada z de la señal

$$x(n) = \alpha^n u(n) = \begin{cases} \alpha^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

Solución. A partir de la definición (3.1.1), tenemos

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n$$

Si $|\alpha z^{-1}| < 1$ o, lo que es lo mismo, $|z| > |\alpha|$, esta serie de potencias converge a $1/(1-\alpha z^{-1})$. Por tanto, tenemos la pareja de transformadas z

$$x(n) = \alpha^n u(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}, \qquad \text{ROC: } |z| > |\alpha| \tag{3.1.7}$$

La ROC es la parte exterior de un círculo que tiene un radio $|\alpha|$. La Figura 3.1.2 muestra una gráfica de la señal $x(n)$ y su correspondiente región de convergencia. Observe que, en general, α no tiene que ser real.

Si hacemos $\alpha = 1$ en (3.1.7), obtenemos la transformada z de la señal escalón unidad.

$$x(n) = u(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}, \qquad \text{ROC: } |z| > 1 \tag{3.1.8}$$

EJEMPLO 3.1.4

Determine la transformada z de la señal

$$x(n) = -\alpha^n u(-n-1) = \begin{cases} 0, & n \geq 0 \\ -\alpha^n, & n \leq -1 \end{cases}$$

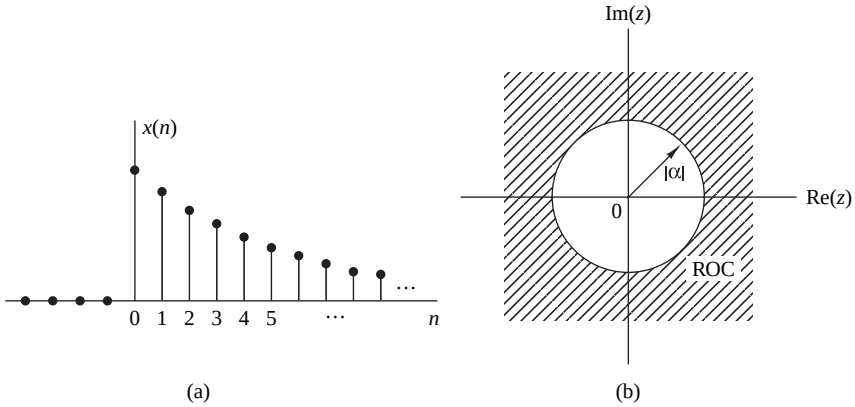


Figura 3.1.2. (a) La señal exponencial $x(n) = \alpha^n u(n)$. (b) La ROC de su transformada z.

Solución. A partir de la definición (3.1.1), tenemos

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-\alpha^n) z^{-n} = -\sum_{l=1}^{\infty} (\alpha^{-1} z)^l$$

donde $l = -n$. Utilizando la fórmula

$$A + A^2 + A^3 + \cdots = A(1 + A + A^2 + \cdots) = \frac{A}{1-A}$$

cuando $|A| < 1$, se obtiene

$$X(z) = -\frac{\alpha^{-1} z}{1 - \alpha^{-1} z} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

siempre que $|\alpha^{-1} z| < 1$ o, lo que es lo mismo, $|z| < |\alpha|$. Por tanto,

$$x(n) = -\alpha^n u(-n-1) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) = -\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}, \qquad \text{ROC: } |z| < |\alpha| \tag{3.1.9}$$

Ahora, la región de convergencia (ROC) es el interior de un círculo que tiene un radio igual a $|\alpha|$, lo que se muestra en la Figura 3.1.3.

Los Ejemplos 3.1.3 y 3.1.4 ilustran dos importantes cuestiones. La primera hace referencia a la unicidad de la transformada z. A partir de (3.1.7) y (3.1.9), vemos que la señal causal $\alpha^n u(n)$ y la señal anticausal $-\alpha^n u(-n-1)$ tienen expresiones idéntidas para la transformada z, es decir,

$$Z\{\alpha^n u(n)\} = Z\{-\alpha n u(-n-1)\} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

Esto implica que una expresión compacta de la transformada z no especifica de forma unívoca la señal en el dominio del tiempo. La ambigüedad sólo se puede resolver si además de la expresión compacta de la transformada z se especifica la ROC. Resumiendo, *una señal discreta en el tiempo $x(n)$ queda determinada de forma unívoca por su transformada z $X(z)$ y por la región de convergencia de $X(z)$*. En este texto, el término "transformada z" se emplea para hacer referencia a la expresión compacta y a la correspondiente ROC. El Ejemplo 3.1.3 también ilustra el punto de que *la ROC de una señal causal es el exterior de un círculo de un determinado r_2, mientras*

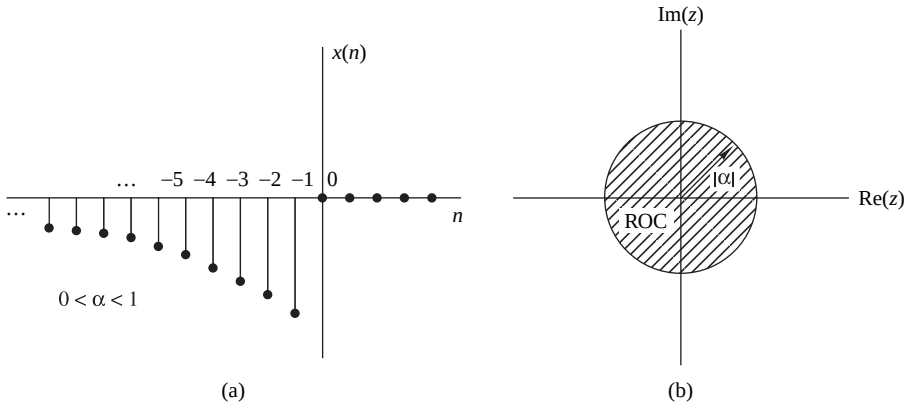


Figura 3.1.3. (a) Señal anticausal $x(n) = -\alpha^n u(-n-1)$ y (b) la región de convergencia de su transformada z.

que la ROC de un señal anticausal es el interior de un círculo de un determinado radio r_1. El siguiente ejemplo considera una secuencia que es distinta de cero para $-\infty < n < \infty$.

EJEMPLO 3.1.5

Determine la transformada z de la señal

$$x(n) = \alpha^n u(n) + b^n u(-n-1)$$

Solución. A partir de la definición (3.1.1), tenemos

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n + \sum_{l=1}^{\infty} (b^{-1} z)^l$$

La primera serie de potencias converge si $|\alpha z^{-1}| < 1$ o $|z| > |\alpha|$. La segunda serie de potencias converge si $|b^{-1}z| < 1$ o $|z| < |b|$.

Para determinar la convergencia de $X(z)$, consideremos dos casos diferentes.

Caso 1 $|b| < |\alpha|$: en este caso, las dos regiones ROC anteriores no se solapan, como se muestra en la Figura 3.1.4(a). En consecuencia, no podemos hallar valores de z para los que ambas series de potencias converjan simultáneamente. Claramente, en este caso, $X(z)$ no existe.

Caso 2 $|b| > |\alpha|$: en este caso, existe un anillo en el plano z donde ambas series de potencias convergen simultáneamente, como se muestra en la Figura 3.1.4(b), por lo que tenemos

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} - \frac{1}{1-bz^{-1}} \\ &= \frac{b-\alpha}{\alpha + b - z - \alpha b z^{-1}} \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

La ROC de $X(z)$ es $|\alpha| < |z| < |b|$.

Este ejemplo muestra que *si existe una ROC para una señal bilateral de duración infinita, es un anillo (región anular) en el plano z.* A partir de los Ejemplos 3.1.1, 3.1.3, 3.1.4 y 3.1.5, vemos que la ROC de una señal depende tanto de su duración (finita o infinita) como de si es causal, anticausal o bilateral. Estos hechos se resumen en la Tabla 3.1.

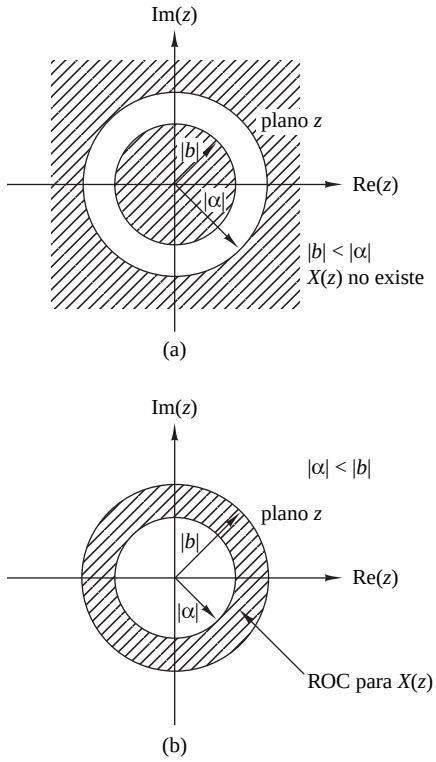


Figura 3.1.4. Región de convergencia para la transformada z del Ejemplo 3.1.5.

Un caso especial de una señal bilateral es una señal con duración infinita en su lado derecho pero no en el izquierdo [es decir, $x(n) = 0$ para $n < n_0 < 0$]. Un segundo caso es una señal que tiene una duración infinita por el lado izquierdo pero no por el derecho [$x(n) = 0$ para $n > n_1 > 0$]. Un tercer caso especial es una señal que tiene duración finita por ambos lados [$x(n) = 0$ para $n < n_0 < 0$ y $n > n_1 > 0$]. Estos tipos de señales se denominan en ocasiones señales *unilateral por la derecha, unilateral por la izquierda* y *bilateral de duración finita*, respectivamente. La determinación de la ROC de estos tres tipos de señales se deja como ejercicio para el lector (Problema 3.5).

Por último, observe que en ocasiones se hace referencia a la transformada z definida por (3.1.1) como la *transformada bilateral* para diferenciarla de la *transformada z unilateral* dada por

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \tag{3.1.11}$$

La transformada z unilateral se examina en la Sección 3.6. En este libro, utilizamos la expresión transformada z exclusivamente para referirmos a la transformada z bilateral definida por (3.1.1). El término "bilateral" se utilizará sólo en los casos en que queramos resolver cualquier ambiguedad. Evidentemente, si $x(n)$ es causal [es decir, $x(n) = 0$ para $n < 0$], las transformadas z unilateral y bilateral son idénticas. En cualquier otro caso, son diferentes.

3.1.2 La transformada z inversa

Normalmente, disponemos de la transformada z $X(z)$ de una señal y necesitamos determinar la señal. El procedimiento de transformación del dominio z al dominio del tiempo se conoce como *transformada z inversa*.

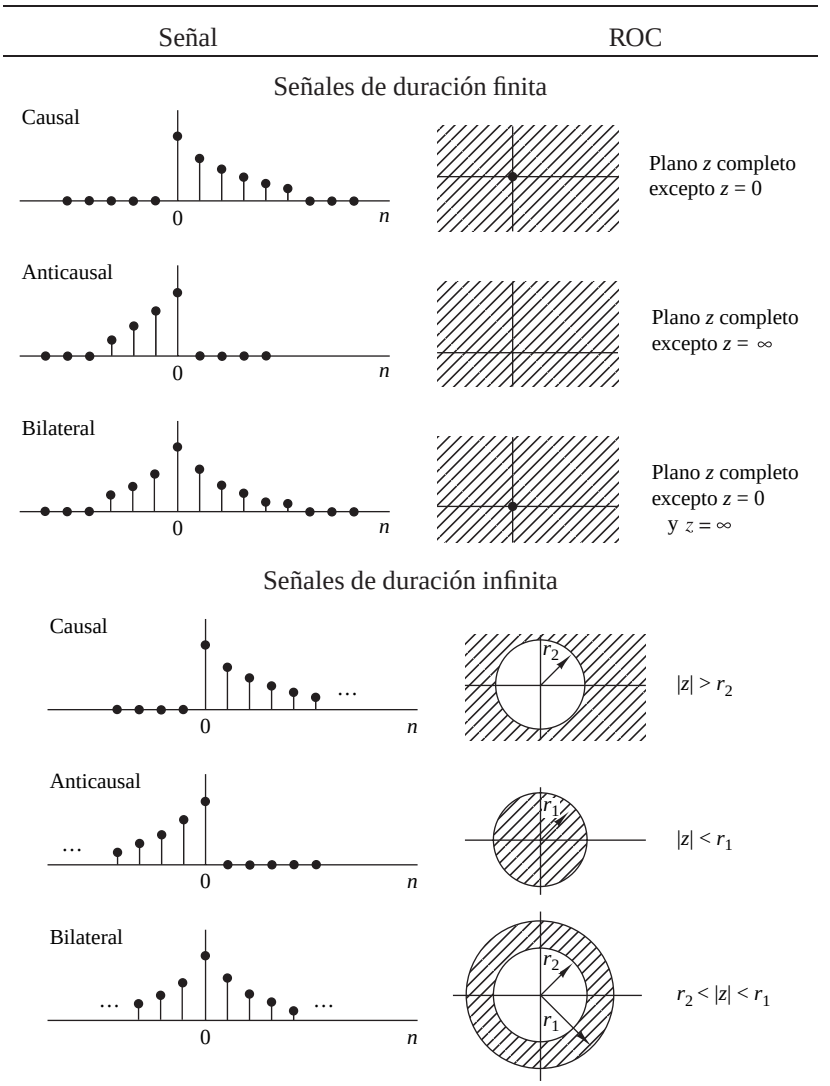


Tabla 3.1. Familias de señales características con sus correspondientes ROC.

Podemos obtener una fórmula de inversión para obtener $x(n)$ a partir de $X(z)$ utilizando el *teorema de la integral de Cauchy*, que es un importante teorema dentro de la teoría de variable compleja.

Tenemos la transformada z definida por (3.1.1) como

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} \tag{3.1.12}$$

Suponga que multiplicamos ambos lados de la Ecuación (3.1.12) por z^{n-1} y los integramos sobre un contorno cerrado dentro de la ROC de $X(z)$ que contiene el origen. Dicho contorno se ilustra en la Figura 3.1.5. Por tanto, tenemos

$$\oint_C X(z)z^{n-1}\,dz = \oint_C \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{n-1-k}\,dz \tag{3.1.13}$$

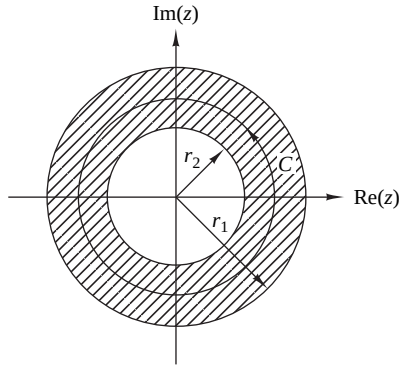


Figura 3.1.5. Contorno C para la integral de la Ecuación (3.1.13).

donde C indica el contorno cerrado dentro de la región de convergencia de $X(z)$ recorrido en sentido antihorario. Puesto que la serie converge en este contorno, podemos intercambiar el orden de las operaciones de integración y suma en el lado derecho de la ecuación (3.1.13). Luego (3.1.13) queda como sigue

$$\oint_C X(z)z^{n-1}dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \oint_C z^{n-1-k}dz \tag{3.1.14}$$

Ahora podemos invocar el teorema de la integral de Cauchy, que establece que

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{n-1-k}\, dz = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \tag{3.1.15}$$

donde C es cualquier contorno que contiene el origen. Aplicando (3.1.15), el lado derecho de (3.1.14) se reduce a $2\pi j x(n)$ y, por tanto, la fórmula de inversión deseada es

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1}\, dz \tag{3.1.16}$$

Aunque la integral de contorno en (3.1.16) nos proporciona la fórmula de inversión para determinar la secuencia $x(n)$ a partir de la transformada z, no vamos a emplear (3.1.16) directamente al evaluar la transformada z inversa. En nuestras aplicaciones vamos a trabajar con señales y sistemas en el dominio z que tienen transformadas z racionales (es decir, transformadas z que se definen como una relación entre dos polinomios). Para tales transformadas z vamos a desarrollar un método sencillo para realizar la inversión que se deduce a partir de (3.1.16) y emplea un sistema de búsqueda en una tabla.

3.2 Propiedades de la transformada z

La transformada z es una herramienta muy potente en el estudio de las señales y los sistemas discretos en el tiempo. La potencia de esta transformada es una consecuencia de algunas propiedades muy importantes que tiene. A continuación, vamos a examinar algunas de estas propiedades.

Debemos recordar que cuando se combinan varias transformadas z, la ROC de la transformada resultante es, al menos, la intersección de la ROC de las transformadas individuales. Esta afirmación se comprenderá más adelante cuando veamos algunos ejemplos concretos.

Linealidad. Si

$$x_1(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X_1(z)$$

y

$$x_2(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X_2(z)$$

entonces

$$x(n) = a_1x_1(n) + a_2x_2(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) = a_1X_1(z) + a_2X_2(z) \tag{3.2.1}$$

para cualesquiera constantes a_1 y a_2. La demostración de esta propiedad se obtiene de forma inmediata a partir de la definición de linealidad y se deja como ejercicio al lector.

La propiedad de linealidad puede generalizarse fácilmente para un número arbitrario de señales. Básicamente, implica que la transformada z de una combinación de señales es igual a la combinación lineal de sus transformadas z. Por tanto, la propiedad de la linealidad nos ayuda a hallar la transformada z de una señal expresando la señal como una suma de señales elementales cuyas transformadas z son conocidas.

EJEMPLO 3.2.1

Determine la transformada z y la ROC de la señal

$$x(n) = [3(2^n) - 4(3^n)]u(n)$$

Solución. Si definimos las señales

$$x_1(n) = 2^n u(n)$$

y

$$x_2(n) = 3^n u(n)$$

entonces $x(n)$ puede escribirse como

$$x(n) = 3x_1(n) - 4x_2(n)$$

De acuerdo con (3.2.1), su transformada z es

$$X(z) = 3X_1(z) - 4X_2(z)$$

A partir de (3.1.7), recordemos que

$$\alpha^n u(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}, \qquad \text{ROC: } |z| > |\alpha| \tag{3.2.2}$$

Haciendo $\alpha = 2$ y $\alpha = 3$ en (3.2.2), obtenemos

$$x_1(n) = 2^n u(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X_1(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}, \qquad \text{ROC: } |z| > 2$$

$$x_2(n) = 3^n u(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X_2(z) = \frac{1}{1-3z^{-1}}, \qquad \text{ROC: } |z| > 3$$

La intersección de la ROC de $X_1(z)$ y $X_2(z)$ es $|z| > 3$. Por tanto, la transformada resultante $X(z)$ es

$$X(z) = \frac{3}{1-2z^{-1}} - \frac{4}{1-3z^{-1}}, \qquad \text{ROC: } |z| > 3$$

EJEMPLO 3.2.2

Determine la transformada z de las señales

(a) $x(n) = (\cos \omega_0 n)u(n)$

(b) $x(n) = (\operatorname{sen} \omega_0 n)u(n)$

Solución.

(a) Utilizando la identidad de Euler, la señal $x(n)$ se puede expresar como

$$x(n) = (\cos \omega_0 n)u(n) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 n}u(n) + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}u(n)$$

Por tanto, (3.2.1) implica que

$$X(z) = \frac{1}{2}Z\{e^{j\omega_0 n}u(n)\} + \frac{1}{2}Z\{e^{-j\omega_0 n}u(n)\}$$

Si hacemos $\alpha = e^{\pm j\omega_0}$ ($|\alpha| = |e^{\pm j\omega_0}| = 1$) en (3.2.2), obtenemos

$$e^{j\omega_0 n}u(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - e^{j\omega_0}z^{-1}}, \qquad \text{ROC: } |z| > 1$$

y

$$e^{-j\omega_0 n}u(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0}z^{-1}}, \qquad \text{ROC: } |z| > 1$$

Por tanto,

$$X(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{1 - e^{j\omega_0}z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1 - e^{-j\omega_0}z^{-1}}, \qquad \text{ROC: } |z| > 1$$

Después de algunas sencillas manipulaciones algebraicas obtenemos el resultado deseado,

$$(\cos \omega_0 n)u(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1 - z^{-1}\cos \omega_0}{1 - 2z^{-1}\cos \omega_0 + z^{-2}}, \qquad \text{ROC: } |z| > 1 \tag{3.2.3}$$

(b) A partir de la identidad de Euler,

$$x(n) = (\operatorname{sen} \omega 0 n)u(n) = \frac{1}{2j}[e^{j\omega_0 n}u(n) - e^{-j\omega_0 n}u(n)]$$

Luego

$$X(z) = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1 - e^{j\omega_0}z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0}z^{-1}}\right), \qquad \text{ROC: } |z| > 1$$

y por último,

$$(\operatorname{sen} \omega_0 n)u(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{z^{-1}\operatorname{sen} \omega_0}{1 - 2z^{-1}\cos \omega_0 + z^{-2}}, \qquad \text{ROC: } |z| > 1 \tag{3.2.4}$$

Desplazamiento temporal. Si

$$x(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z)$$

entonces

$$x(n-k) \overset{z}{\longleftrightarrow} z^{-k}X(z) \tag{3.2.5}$$

La ROC de $z^{-k}X(z)$ es la misma que la de $X(z)$ excepto para $z = 0$ si $k > 0$ y $z = \infty$ si $k < 0$. La demostración de esta propiedad se deduce de forma inmediata aplicando la definición de la transformada z dada por (3.1.1).

Las propiedades de linealidad y de desplazamiento en el tiempo son las características clave que hacen que la transformada z sea extremadamente útil en el análisis de los sistemas LTI discretos en el tiempo.

EJEMPLO 3.2.3

Aplicando la propiedad de desplazamiento en el tiempo, determine la transformada z de las señales $x_2(n)$ y $x_3(n)$ del Ejemplo 3.1.1 a partir de la transformada z de $x_1(n)$.

Solución. Es fácil ver que

$$x_2(n) = x_1(n+2)$$

y

$$x_3(n) = x_1(n-2)$$

Luego a partir de (3.2.5) obtenemos

$$X_2(z) = z^2 X_1(z) = z^2 + 2z + 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$$

y

$$X_3(z) = z^{-2} X_1(z) = z^{-2} + 2z^{-3} + 5z^{-4} + 7z^{-5} + z^{-7}$$

Observe que a causa de la multiplicación por z^2, la ROC de $X_2(z)$ no incluye el punto $z = \infty$, incluso aunque esté contenido en la ROC de $X_1(z)$.

El Ejemplo 3.2.3 ilustra el significado de la propiedad de desplazamiento en el tiempo. De hecho, si tenemos en cuenta que el coeficiente de z^{-n} es el valor de la muestra en el instante n, se ve de forma inmediata que retardar una señal k $(k > 0)$ muestras [es decir, $x(n) \to x(n-k)$] es lo mismo que multiplicar todos los términos de la transformada z por z^{-k}. El coeficiente de z^{-n} se convierte en el coeficiente de $z^{-(n+k)}$.

EJEMPLO 3.2.4

Determine la transformada de la señal

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{3.2.6}$$

Solución. Podemos determinar la transformada z de esta señal utilizando la definición (3.1.1). Por tanto,

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} 1 \cdot z^{-n} = 1 + z^{-1} + \cdots + z^{-(N-1)} = \begin{cases} N, & \text{si } z = 1 \\ \dfrac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}, & \text{si } z \neq 1 \end{cases} \tag{3.2.7}$$

Puesto que $x(n)$ tiene duración finita, su ROC es el plano z completo, excepto $z = 0$.

Vamos a deducir también esta transformada utilizando las propiedades de linealidad y desplazamiento en el tiempo. Observe que $x(n)$ se puede expresar en función de dos señales escalón unidad

$$x(n) = u(n) - u(n-N)$$

Utilizando (3.2.1) y (3.2.5), tenemos

$$X(z) = Z\{u(n)\} - Z\{u(n-N)\} = (1 - z^{-N}) Z\{u(n)\} \tag{3.2.8}$$

Sin embargo, a partir de (3.1.8) tenemos

$$Z\{u(n)\} = \frac{1}{1-z^{-1}}, \qquad \text{ROC: } |z| > 1$$

que, cuando se combina con (3.2.8), nos lleva a (3.2.7).

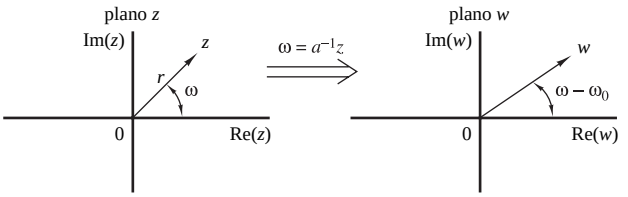


Figura 3.2.1. Correspondencia del plano z con el plano w a través de la transformación $\omega = a^{-1}z$, $a = r_0 e^{j\omega_0}$.

El Ejemplo 3.2.4 nos permite aclarar una cuestión muy importante relacionada con la ROC de la combinación de varias transformadas z. Si la combinación lineal de varias señales tiene duración finita, la ROC de su transformada z queda determinada exclusivamente por la naturaleza finita de esta señal, no por la ROC de las transformadas individuales.

Cambio de escala en el dominio z. Si

$$x(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z), \qquad \text{ROC:} \quad r_1 < |z| < r_2$$

entonces

$$a^n x(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(a^{-1}z), \qquad \text{ROC:} \quad |a|r_1 < |z| < |a|r_2 \tag{3.2.9}$$

para cualquier constante a real o compleja.

Demostración. A partir de la definición (3.1.1)

$$Z\{a^n x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(a^{-1}z)^{-n} = X(a^{-1}z)$$

Dado que la ROC de $X(z)$ es $r_1 < |z| < r_2$, la ROC de $X(a^{-1}z)$ será

$$r_1 < |a^{-1}z| < r_2$$

o

$$|a|r_1 < |z| < |a|r_2$$

Para comprender mejor el significado y las implicaciones de la propiedad de cambio de escala, expresamos a y z en forma polar como $a = r_0 e^{j\omega_0}$, $z = re^{j\omega}$, e introducimos una nueva variable compleja $w = a^{-1}z$. Por tanto, $Z\{x(n)\} = X(z)$ y $Z\{a^n x(n)\} = X(w)$. Podemos ver fácilmente que

$$w = a^{-1}z = \left(\frac{1}{r_0} r\right) e^{j(\omega - \omega_0)}$$

Este cambio de variables da lugar al estrechamiento (si $r_0 > 1$) o a la expansión (si $r_0 < 1$) del plano z en combinación con una rotación (si $\omega_0 \neq 2k\pi$) del plano z (*véase* la Figura 3.2.1). Esto explica por qué tenemos un cambio en la ROC de la nueva transformada donde $|a| < 1$. El caso $|a| = 1$, es decir, $a = e^{j\omega_0}$ tiene un interés especial, ya que sólo se corresponde con la rotación del plano z.

EJEMPLO 3.2.5

Determine la transformada z de las señales

(a) $x(n) = a^n(\cos\omega_0 n)u(n)$

(b) $x(n) = a^n(\operatorname{sen}\omega_0 n)u(n)$

Solución.

(a) A partir de (3.2.3) y (3.2.9), obtenemos

$$a^n(\cos\omega_0 n)u(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1 - az^{-1}\cos\omega_0}{1 - 2az^{-1}\cos\omega_0 + a^2z^{-2}}, \qquad |z| > |a| \tag{3.2.10}$$

(b) Del mismo modo, (3.2.4) y (3.2.9) proporcionan

$$a^n(\operatorname{sen}\omega_0 n)u(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{az^{-1}\operatorname{sen}\omega_0}{1 - 2az^{-1}\cos\omega_0 + a^2z^{-2}}, \qquad |z| > |a| \tag{3.2.11}$$

Inversión temporal. Si

$$x(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z), \qquad \text{ROC:} \quad r_1 < |z| < r_2$$

entonces

$$x(-n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z^{-1}), \qquad \text{ROC: } \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1} \tag{3.2.12}$$

Demostración. A partir de la definición (3.1.1), tenemos

$$Z\{x(-n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)z^{-n} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)(z^{-1})^{-l} = X(z^{-1})$$

donde se hace el cambio de variable $l = -n$. La ROC de $X(z^{-1})$ es

$$r_1 < |z^{-1}| < r_2$$

o, lo que es equivalente

$$\frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$$

Observe que la ROC para $x(n)$ es la inversa de la de $x(-n)$. Esto significa que si z_0 pertenece a la ROC de $x(n)$, entonces $1/z_0$ pertenece a la ROC de $x(-n)$.

Una demostración intuitiva de (3.2.12) es la siguiente: si reflejamos una señal, el coeficiente de z^{-n} se convierte en el coeficiente de z^n. Por tanto, reflejar una señal es equivalente a reemplazar z por z^{-1} en la fórmula de la transformada z. En otras palabras, la reflexión en el dominio del tiempo se corresponde con la inversión en el dominio de z.

EJEMPLO 3.2.6

Determine la transformada z de la señal $x(n) = u(-n)$

Solución. A partir de (3.1.8), sabemos que

$$u(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - z^{-1}}, \qquad \text{ROC: } |z| > 1$$

Utilizando (3.2.12), obtenemos fácilmente

$$u(-n) \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-z}, \qquad \text{ROC: } |z| < 1 \tag{3.2.13}$$

Diferenciación en el dominio z**.** Si

$$x(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z)$$

entonces

$$nx(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz} \tag{3.2.14}$$

Demostración. Diferenciando ambos lados de la Ecuación (3.1.1), tenemos

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(-n)z^{-n-1} = -z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[nx(n)]z^{-n} = -z^{-1}Z\{nx(n)\}$$

Observe que ambas transformadas tienen la misma región de convergencia.

EJEMPLO 3.2.7

Determine la transformada z de la señal $x(n) = na^n u(n)$

Solución. La señal $x(n)$ puede expresarse como $nx_1(n)$, donde $x_1(n) = a^n u(n)$. A partir de (3.2.2), tenemos que

$$x_1(n) = a^n u(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X_1(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \qquad \text{ROC: } \ |z| > |a|$$

Por tanto, utilizando (3.2.14), obtenemos

$$na^n u(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) = -z\frac{dX_1(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \qquad \text{ROC: } |z| > |a| \tag{3.2.15}$$

Si hacemos $a = 1$ en (3.2.15), obtenemos la transformada z de la señal rampa unidad

$$nu(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}, \qquad \text{ROC: } |z| > 1 \tag{3.2.16}$$

EJEMPLO 3.2.8

Determine la señal $x(n)$ cuya transformada z está dada por

$$X(z) = \log(1+az^{-1}), \qquad |z| > |a|$$

Solución. Tomando la primera derivada de $X(z)$, obtenemos

$$\frac{dX(z)}{dz} = \frac{-az^{-2}}{1+az^{-1}}$$

Luego

$$-z\frac{dX(z)}{dz} = az^{-1}\left[\frac{1}{1-(-a)z^{-1}}\right], \qquad |z| > |a|$$

La transformada z inversa del término entre corchetes es $(-a)^n$. La multiplicación por z^{-1} implica un retardo temporal de una muestra (propiedad de desplazamiento temporal), que resulta en $(-a)^{n-1}u(n-1)$. Por último, a partir de la propiedad de la diferenciación tenemos

$$nx(n) = a(-a)^{n-1}u(n-1)$$

o

$$x(n) = (-1)^{n+1}\frac{a^n}{n}u(n-1)$$

Convolución de dos secuencias. Si

$$x_1(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X_1(z)$$

$$x_2(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X_2(z)$$

entonces

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) = X_1(z)X_2(z) \tag{3.2.17}$$

La ROC de $X(z)$ es, al menos, la intersección de las regiones de convergencia de $X_1(z)$ y $X_2(z)$.

Demostración. La convolución de $x_1(n)$ y $x_2(n)$ se define como

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k)$$

La transformada z de $x(n)$ es

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k)\right]z^{-n}$$

Intercambiando el orden de los sumatorios y aplicando la propiedad de desplazamiento en temporal en (3.2.5), obtenemos

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n-k)z^{-n}\right] \\ &= X_2(z)\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)z^{-k} = X_2(z)X_1(z) \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.2.9

Calcule la convolución $x(n)$ de las señales

$$x_1(n) = \{1, -2, 1\}$$

$$x_2(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 5 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Solución. A partir de (3.1.1), tenemos

$$X_1(z) = 1 - 2z^{-1} + z^{-2}$$

$$X_2(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5}$$

De acuerdo con (3.2.17), realizamos la multiplicación de $X_1(z)$ por $X_2(z)$. Luego

$$X(z) = X_1(z)X_2(z) = 1 - z^{-1} - z^{-6} + z^{-7}$$

Por tanto,

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, -1, 0, 0, 0, 0, -1, 1\}$$

El mismo resultado puede obtenerse fijándose en que

$$X_1(z) = (1 - z^{-1})^2$$

$$X_2(z) = \frac{1 - z^{-6}}{1 - z^{-1}}$$

Entonces

$$X(z) = (1 - z^{-1})(1 - z^{-6}) = 1 - z^{-1} - z^{-6} + z^{-7}$$

Animamos al lector a obtener este mismo resultado explícitamente utilizando la fórmula de la convolución (aproximación en el dominio del tiempo).

La propiedad de la convolución es una de las propiedades más potentes de la transformada z, porque convierte la convolución de dos señales (en el dominio del tiempo) en la multiplicación de sus transformadas. El cálculo de la convolución de dos señales utilizando la transformada z, requiere los pasos siguientes:

1. Calcular las transformadas z de las señales que se van a convolucionar.

$$\begin{aligned} X_1(z) &= Z\{x_1(n)\} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \text{(dominio del tiempo} \longrightarrow \text{dominio } z) \\ X_2(z) &= Z\{x_2(n)\} \end{aligned}$$

2. Multiplicar las dos transformadas z.

$$X(z) = X_1(z)X_2(z), \qquad \text{(dominio } z)$$

3. Hallar la transformada z inversa de $X(z)$.

$$x(n) = Z^{-1}\{X(z)\}, \qquad \text{(dominio de } z \longrightarrow \text{dominio del tiempo)}$$

Este procedimiento es, en muchos casos, más fácil de calcular que la evaluación directa de la convolución.

Correlación de dos secuencias. Si

$$x_1(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X_1(z)$$

$$x_2(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X_2(z)$$

entonces

$$r_{x_1x_2}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2(n-l) \overset{z}{\longleftrightarrow} R_{x_1x_2}(z) = X_1(z)X_2(z^{-1}) \tag{3.2.18}$$

Demostración. Recordemos que

$$r_{x_1x_2}(l) = x_1(l) * x_2(-l)$$

Utilizando las propiedades de convolución e inversión temporal, se obtiene fácilmente

$$R_{x_1x_2}(z) = Z\{x_1(l)\}Z\{x_2(-l)\} = X_1(z)X_2(z^{-1})$$

La ROC de $R_{x_1x_2}(z)$ es al menos la intersección de las regiones de convergencia de $X_1(z)$ y $X_2(z^{-1})$.

Como en el caso de la convolución, la correlación cruzada de dos señales se calcula más fácilmente a través de la multiplicación de polinomios de acuerdo con (3.2.18) y aplicando la transformación inversa al resultado.

EJEMPLO 3.2.10

Determine la secuencia de autocorrelación de la señal

$$x(n) = a^n u(n), \qquad -1 < a < 1$$

Solución. Dado que la secuencia de autocorrelación de una señal es la correlación consigo misma, (3.2.18) da

$$R_{xx}(z) = Z\{r_{xx}(l)\} = X(z)X(z^{-1})$$

A partir de (3.2.2), tenemos

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \qquad \text{ROC:} \quad |z| > |a| \qquad \text{(señal causal)}$$

y utilizando (3.2.15), obtenemos

$$X(z^{-1}) = \frac{1}{1-az}, \qquad \text{ROC:} \quad |z| < \frac{1}{|a|} \qquad \text{(señal anticausal)}$$

Por tanto,

$$R_{xx}(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}\frac{1}{1-az} = \frac{1}{1-a(z+z^{-1})+a^2}, \qquad \text{ROC:} \quad |a| < |z| < \frac{1}{|a|}$$

Dado que la ROC de $R_{xx}(z)$ es un anillo, $r_{xx}(l)$ es una señal bilateral, incluso si $x(n)$ es causal.

Para obtener $r_{xx}(l)$, observe que la transformada z de la secuencia del Ejemplo 3.1.5 con $b = 1/a$ es simplemente $(1-a^2)R_{xx}(z)$. Por tanto, se deduce que

$$r_{xx}(l) = \frac{1}{1-a^2}\, a^{|l|}, \qquad -\infty < l < \infty$$

Animamos al lector a comparar este método con la solución en el dominio del tiempo del mismo problema dado en la Sección 2.6.

Multiplicación de dos secuencias. Si

$$x_1(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X_1(z)$$

$$x_2(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X_2(z)$$

entonces

$$x(n) = x_1(n)x_2(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}\,dv \tag{3.2.19}$$

donde C es un contorno cerrado que contiene el origen y se encuentra en la región de convergencia común a $X_1(v)$ y $X_2(1/v)$.

Demostración. La transformada z de $x_3(n)$ es

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2(n)z^{-n}$$

Sustituimos la transformada inversa

$$x_1(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)v^{n-1}dv$$

para $x_1(n)$ en la transformada z $X(z)$ e intercambiamos el orden de las operaciones de suma e integración. Obtenemos entonces

$$X(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)\left(\frac{z}{v}\right)^{-n}\right]v^{-1}dv$$

La suma entre corchetes es simplemente la transformada $X_2(z)$ evaluada en z/v. Por tanto,

$$X(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}\,dv$$

que es el resultado deseado.

Para obtener la ROC de $X(z)$, observe que si $X_1(v)$ converge para $r_{1l} < |v| < r_{1u}$ y $X_2(z)$ converge para $r_{2l} < |z| < r_{2u}$, entonces la ROC de $X_2(z/v)$ es

$$r_{2l} < \left|\frac{z}{v}\right| < r_{2u}$$

Por tanto, la ROC para $X(z)$ es al menos

$$r_{1l}r_{2l} < |z| < r_{1u}r_{2u} \tag{3.2.20}$$

Aunque esta propiedad no vamos a emplearla de forma inmediata, resultará útil más adelante, en particular cuando abordemos el diseño de filtros basados en las técnicas de ventana, donde se multiplica la respuesta al impulso de un sistema IIR por una "ventana" de duración finita, que sirve para truncar la respuesta al impulso del sistema IIR.

Para las secuencias complejas $x_1(n)$ y $x_2(n)$ podemos definir la secuencia producto como $x(n) = x_1(n)x_2^*(n)$. La correspondiente integral de convolución compleja será

$$x(n) = x_1(n)x_2^*(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2^*\left(\frac{z^*}{v^*}\right)v^{-1}\,dv \tag{3.2.21}$$

La demostración de (3.2.21) se deja como ejercicio para el lector.

Relación de Parseval. Si $x_1(n)$ y $x_2(n)$ son secuencias complejas, entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}\,dv \tag{3.2.22}$$

siempre que $r_{1l}r_{2l} < 1 < r_{1u}r_{2u}$, donde $r_{1l} < |z| < r_{1u}$ y $r_{2l} < |z| < r_2u$ son las ROC de $X_1(z)$ y $X_2(z)$. La demostración de (3.2.22) es inmediata evaluando $X(z)$ en la expresión (3.2.21) para $z = 1$.

Teorema del valor inicial. Si $x(n)$ es *causal* [es decir, $x(n) = 0$ para $n < 0$], entonces

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z) \tag{3.2.23}$$

Demostración. Dado que $x(n)$ es causal, (3.1.1) proporciona

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots$$

Obviamente, como $z \to \infty$, $z^{-n} \to 0$ ya que $n > 0$, y se obtiene (3.2.23).

Todas las propiedades de la transformada z presentadas en esta sección se resumen en la Tabla 3.2. Están enumeradas en el mismo orden que se han ido explicando en el texto. Las propiedades de conjugación y la relación de Parseval se dejan como ejercicios para el lector.

Propiedad	Dominio del tiempo	Dominio z	ROC
Notación	$x(n)$ $x_1(n)$ $x_2(n)$	$X(z)$ $X_1(z)$ $X_2(z)$	ROC: $r_2 < \|z\| < r_1$ ROC_1 ROC_2
Linealidad	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$	Al menos la intersección de ROC_1 y ROC_2
Desplazamiento temporal	$x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$	La de $X(z)$, excepto $z = 0$ si $k > 0$ y $z = \infty$ si $k < 0$
Cambio de escala en el dominio z	$a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$	$\|a\|r_2 < \|z\| < \|a\|r_1$
Inversión temporal	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{r_1} < \|z\| < \frac{1}{r_2}$
Conjugación	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	ROC
Parte real	$\text{Re}\{x(n)\}$	$\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$	Incluye la ROC
Parte imaginaria	$\text{Im}\{x(n)\}$	$\frac{1}{2}j[X(z) - X^*(z^*)]$	Incluye la ROC
Diferenciación en el dominio z	$nx(n)$	$-z\dfrac{dX(z)}{dz}$	$r_2 < \|z\| < r_1$
Convolución	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$	Al menos, la intersección de ROC_1 y ROC_2
Correlación	$r_{x_1x_2}(l) =$ $x_1(l) * x_2(-l)$	$R_{x_1x_2}(z) = X_1(z)X_2(z^{-1})$	Al menos, la intersección de la ROC de $X_1(z)$ y $X_2(z^{-1})$
Teorema del valor inicial	Si $x(n)$ es causal	$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$	
Multiplicación	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}\,dv$	Como mínimo, $r_{1l}r_{2l} < \|z\| < r_{1u}r_{2u}$
Relación de Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n)$	$= \frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2^*(1/v^*)v^{-1}dv$	

Tabla 3.2. Propiedades de la transformada z.

	Señal, $x(n)$	Transformada z, $X(z)$	ROC
1	$\delta(n)$	1	Todo z
2	$u(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
3	$a^n u(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
4	$na^n u(n)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
5	$-a^n u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
6	$-na^n u(-n-1)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
7	$(\cos\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
8	$(\operatorname{sen}\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{z^{-1}\operatorname{sen}\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
9	$(a^n\cos\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1-az^{-1}\cos\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
10	$(a^n\operatorname{sen}\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{az^{-1}\operatorname{sen}\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

Tabla 3.3. Algunas parejas comunes de trasformadas z.

Ahora vamos a deducir muchas de las transformadas z que se emplean en muchas aplicaciones prácticas. Estas parejas de transformadas z se resumen en la Tabla 3.3 como referencia rápida. Una simple inspección de esta tabla demuestra que estas transformadas z son todas ellas *funciones racionales* (es decir, relaciones de polinomios en z^{-1}). Como pronto será evidente, las transformadas z racionales no sólo se emplean como transformadas z de varias señales importantes, sino también en la caracterización de sistemas LTI discretos en el tiempo descritos mediante ecuaciones en diferencias de coeficientes constantes.

3.3 Transformadas z racionales

Como se ha indicado en la Sección 3.2, una importante familia de transformadas z son aquellas para las que $X(z)$ es una función racional, es decir, una relación de dos polinomios en z^{-1} (o z). En esta sección, vamos a ver algunas cuestiones relacionadas con la clase de transformadas z racionales.

3.3.1 Polos y ceros

Los *ceros* de una transformada z $X(z)$ son los valores de z para los que $X(z)=0$. Los *polos* de una transformada z son los valores de z para los que $X(z)=\infty$. Si $X(z)$ es una función racional, entonces

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_Mz^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+\cdots+a_Nz^{-N}}=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_kz^{-k}}{\sum_{k=0}^{N}a_kz^{-k}} \tag{3.3.1}$$

Si $a_0 \neq 0$ y $b_0 \neq 0$, podemos evitar las potencias negativas de z sacando factor común los términos $b_0 z^{-M}$ y $a_0 z^{-N}$ como sigue:

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z^{-M}}{a_0 z^{-N}} \frac{z^M + (b_1/b_0)z^{M-1} + \cdots + b_M/b_0}{z^N + (a_1/a_0)z^{N-1} + \cdots + a_N/a_0}$$

Dado que $B(z)$ y $A(z)$ son polinomios en z, podemos expresarlos en forma de factores como

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0}{a_0} z^{-M+N} \frac{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_M)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_N)}$$

$$X(z) = G z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^{M}(z-z_k)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)} \tag{3.3.2}$$

donde $G \equiv b_0/a_0$. Por tanto, $X(z)$ tiene M ceros en $z = z_1, z_2, \ldots, z_M$ (las raíces del polinomio del numerador), N polos en $z = p_1, p_2, \ldots, p_N$ (las raíces del polinomio del denominador) y $|N-M|$ ceros (si $N > M$) o polos (si $N < M$) en el origen $z = 0$. Los polos o ceros también pueden producirse en $z = \infty$. Existe un cero en $z = \infty$ si $X(\infty) = 0$ y existe un polo en $z = \infty$ si $X(\infty) = \infty$. Si contamos los polos y los ceros en cero e infinito, comprobaremos que $X(z)$ tiene exactamente el mismo número de polos que de ceros.

Podemos representar gráficamente $X(z)$ mediante un *diagrama de polos y ceros* (o *patrón*) en el plano complejo, que muestra la posición de los polos mediante cruces ($\times$) y la posición de los ceros mediante círculos ($\circ$). La multiplicidad de los polos o ceros de orden múltiple se indica mediante un número junto a la cruz o el círculo. Obviamente, por definición, la ROC de una transformada z no puede contener ningún polo.

EJEMPLO 3.3.1

Determine el diagrama de polos y ceros de la señal $x(n) = a^n u(n),\ a > 0$

Solución. A partir de la Tabla 3.3, tenemos que

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \qquad \text{ROC:} \quad |z| > a$$

Por tanto, $X(z)$ tiene un cero en $z_1 = 0$ y un polo en $p_1 = a$. El diagrama de polos y ceros se muestra en Figura 3.3.1. Observe que el polo $p_1 = a$ no está incluido en la ROC, ya que la transformada z no converge en un polo.

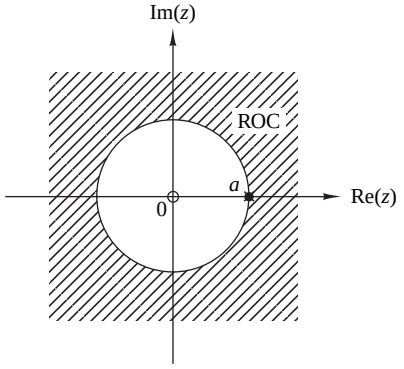


Figura 3.3.1. Diagrama de polos y ceros de la señal exponencial causal $x(n) = a^n u(n)$.

EJEMPLO 3.3.2

Determine el diagrama de polos y ceros de la señal

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & 0 \le n \le M-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $a > 0$.

Solución A partir de la definición (3.1.1), obtenemos

$$X(z) = \sum_{n=0}^{M-1} (az^{-1})^n = \frac{1-(az^{-1})^M}{1-az^{-1}} = \frac{z^M - a^M}{z^{M-1}(z-a)}$$

Dado que $a > 0$, la ecuación $z^M = a^M$ tiene M raíces en

$$z_k = ae^{j2\pi k/M} \qquad k = 0, 1, \ldots, M-1$$

El cero $z_0 = a$ cancela el polo en $z = a$. Por tanto,

$$X(z) = \frac{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_{M-1})}{z^{M-1}}$$

que tiene $M-1$ ceros y $M-1$ polos, colocados como se muestra en la Figura 3.3.2 para $M = 8$. Observe que la ROC es el plano z completo excepto $z = 0$, porque los $M-1$ polos están ubicados en el origen.

Evidentemente, si disponemos de un diagrama de polos y ceros, podemos determinar $X(z)$, utilizando (3.3.2), con la excepción del factor de escala G. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.3.3

Determine la transformada z y la señal que corresponde al diagrama de polos y ceros de la Figura 3.3.3.

Solución. Tiene dos ceros $(M = 2)$ en $z_1 = 0$, $z_2 = r\cos\omega_0$ y dos polos $(N = 2)$ en $p_1 = re^{j\omega_0}$, $p_2 = re^{-j\omega_0}$. Sustituyendo estas relaciones en (3.3.2), obtenemos

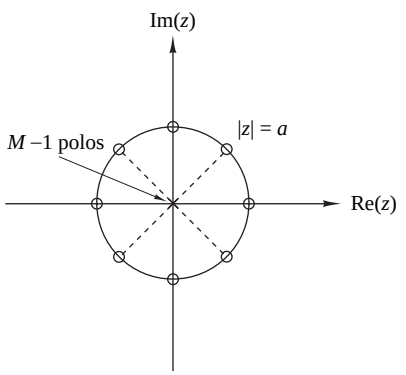


Figura 3.3.2. Patrón de polos y ceros de la señal duración finita $x(n) = a^n$, $0 \le n \le M-1 (a > 0)$, para $M = 8$.

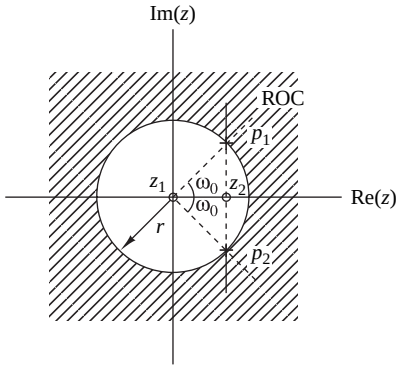


Figura 3.3.3. Patrón de polos y ceros del Ejemplo 3.3.3.

$$X(z) = G\frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z-p_1)(z-p_2)} = G\frac{z(z-r\cos\omega 0)}{(z-re^{j\omega_0})(z-re^{-j\omega_0})}, \qquad \text{ROC:} \quad |z| > r$$

Después de llevar a cabo algunas manipulaciones algebraicas, obtenemos

$$X(z) = G\frac{1-rz^{-1}\cos\omega 0}{1-2rz^{-1}\cos\omega_0 + r^2z^{-2}}, \qquad \text{ROC:} \quad |z| > r$$

A partir de la Tabla 3.3, tenemos que

$$x(n) = G(r^n\cos\omega_0 n)u(n)$$

En el Ejemplo 3.3.3, vemos que el producto $(z-p_1)(z-p_2)$ es un polinomio con coeficientes reales, cuando p_1 y p_2 son conjugados complejos. En general, si un polinomio tiene coeficientes reales, sus raíces pueden ser reales o parejas de complejos conjugados.

Como hemos visto, la transformada z $X(z)$ es una función compleja de la variable compleja $z = \Re(z) + j\Im(z)$. Obviamente, $|X(z)|$, el módulo de $X(z)$, es una función real y positiva de z. Dado que z representa un punto en el plano complejo, $|X(z)|$ es una función bidimensional y describe una "superficie", como se ilustra en la Figura 3.3.4 para la transformada z

$$X(z) = \frac{z^{-1} - z^{-2}}{1 - 1.2732z^{-1} + 0.81z^{-2}} \tag{3.3.3}$$

que tiene un cero en $z_1 = 1$ y dos polos en p_1, $p_2 = 0.9e^{\pm j\pi/4}$. Observe los altos picos próximos a las singularidades (polos) y los profundos valles próximos al cero.

3.3.2 Posición de los polos y comportamiento en el dominio del tiempo de señales causales

En esta subsección vamos a considerar la relación entre la posición en el plano z de un par de polos y la forma de la señal correspondiente en el dominio del tiempo. Generalmente, la explicación se basa en la colección de pares de transformadas z dada en la Tabla 3.3 y los resultados de la subsección anterior. Vamos a tratar exclusivamente con señales reales y causales. En particular, vamos a ver que el comportamiento característico de las señales causales depende de si los polos de la transformada están contenidos en la región $|z| < 1$, o en la región $|z| > 1$, o en el círculo $|z| = 1$. Puesto que esta circuferencia tiene un radio igual a 1, se denomina *circunferencia unidad*.

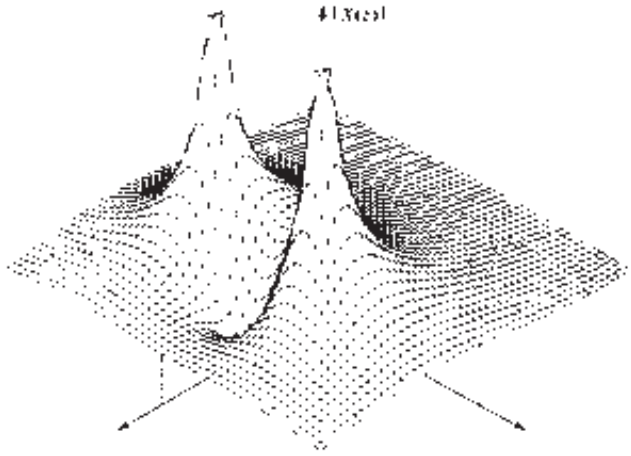


Figura 3.3.4. Gráfica de $|X(z)|$ para la transformada z dada por (3.3.3).

Si una señal real tiene una transformada z con un polo, este polo tiene que ser real. La única señal así es la exponencial real

$$x(n) = a^n u(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \qquad \text{ROC:} \quad |z| > |a|$$

que tiene un cero en $z_1 = 0$ y un polo en $p_1 = a$ sobre el eje real. La Figura 3.3.5 ilustra el comportamiento de la señal con respecto a la posición del polo relativa a la circunferencia unidad. La señal es decreciente si el polo

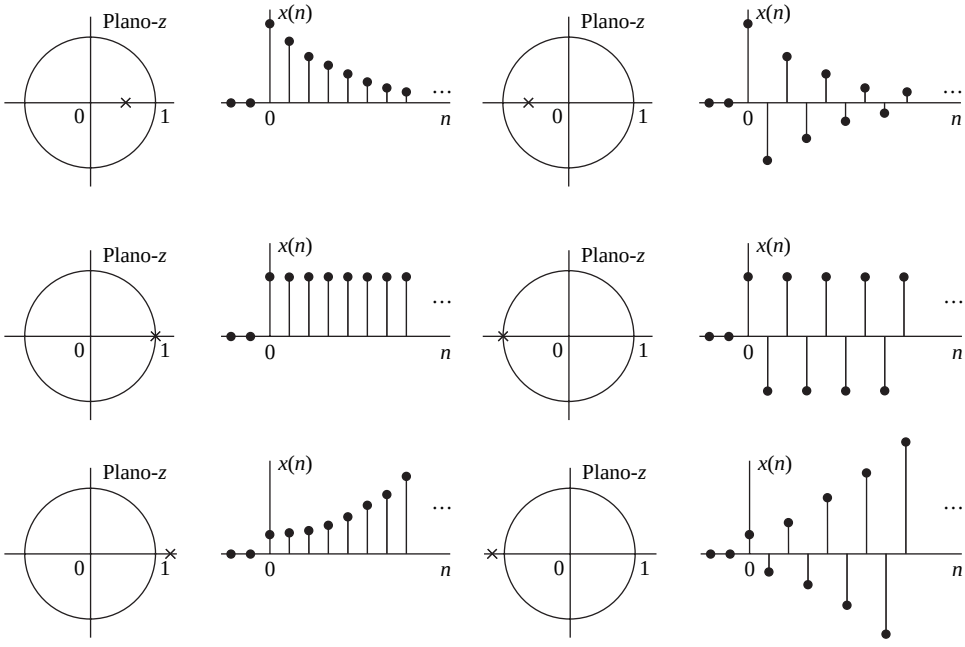


Figura 3.3.5. Comportamiento en el dominio del tiempo de una señal causal de un solo polo real como función de la posición del polo con respecto a la circunferencia unidad.

se encuentra en el interior de la circunferencia unidad, constante si el polo se encuentra sobre la circunferencia unidad, y creciente si el polo está fuera de la circunferencia unidad. Además, un polo negativo produce una señal que alterna en signo. Obviamente, las señales causales con polos en el exterior de la circunferencia unidad son no acotadas, lo que da lugar a que se produzcan desbordamientos en los sistemas digitales, por lo que en general deben evitarse.

Una señal real causal con un polo real doble tiene la forma

$$x(n) = na^n u(n)$$

(*véase* la Tabla 3.3) y su comportamiento se ilustra en la Figura 3.3.6. Observe que en comparación con una señal de un único polo, un polo real doble sobre la circunferencia unidad da lugar a una señal no acotada.

La Figura 3.3.7 ilustra el caso de un par de polos conjugados complejos. De acuerdo con la Tabla 3.3, esta configuración de polos se corresponde con una señal sinusoidal ponderada exponencialmente. La distancia r de los polos respecto del origen determina la envolvente de la señal sinusoidal y su ángulo con el eje real positivo es la frecuencia relativa. Observe que la amplitud de la señal es creciente si $r > 1$, constante si $r = 1$ (señales sinusoidales) y decreciente si $r < 1$.

Por último, la Figura 3.3.8 muestra el comportamiento de una señal causal con una pareja de polos dobles sobre la circunferencia unidad. Esto confirma los resultados mostrados en la Figura 3.3.6 e ilustra que múltiples polos sobre la circunferencia unidad deben tratarse con mucho cuidado.

En resumen, las señales reales causales con polos reales simples o parejas de polos complejos conjugados simples, que se encuentran dentro o sobre la circunferencia unidad, siempre están acotadas en amplitud. Además, una señal con un polo (o una pareja de polos complejos conjugados) próximo al origen decrece más rapidamente que una asociada con un polo próximo (o interior) a la circunferencia unidad. Por tanto, el comportamiento en el tiempo de una señal depende fuertemente de la ubicación de sus polos respecto a la circunferencia unidad.

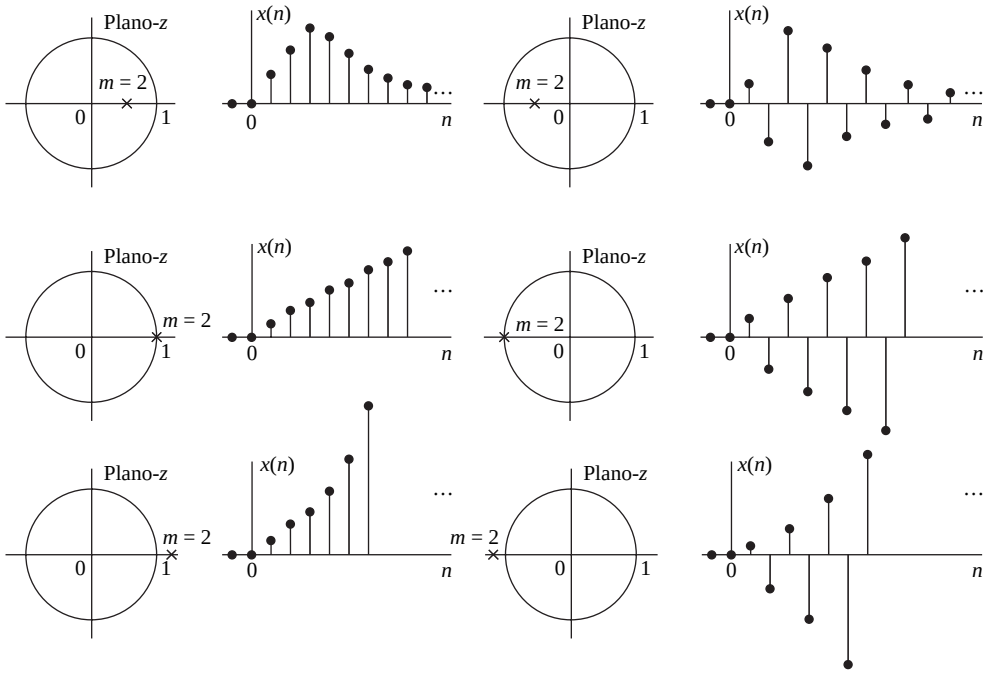


Figura 3.3.6. Comportamiento en el dominio del tiempo de las señales causales correspondientes a un polo real doble $(m = 2)$, como una función de la posición del polo.

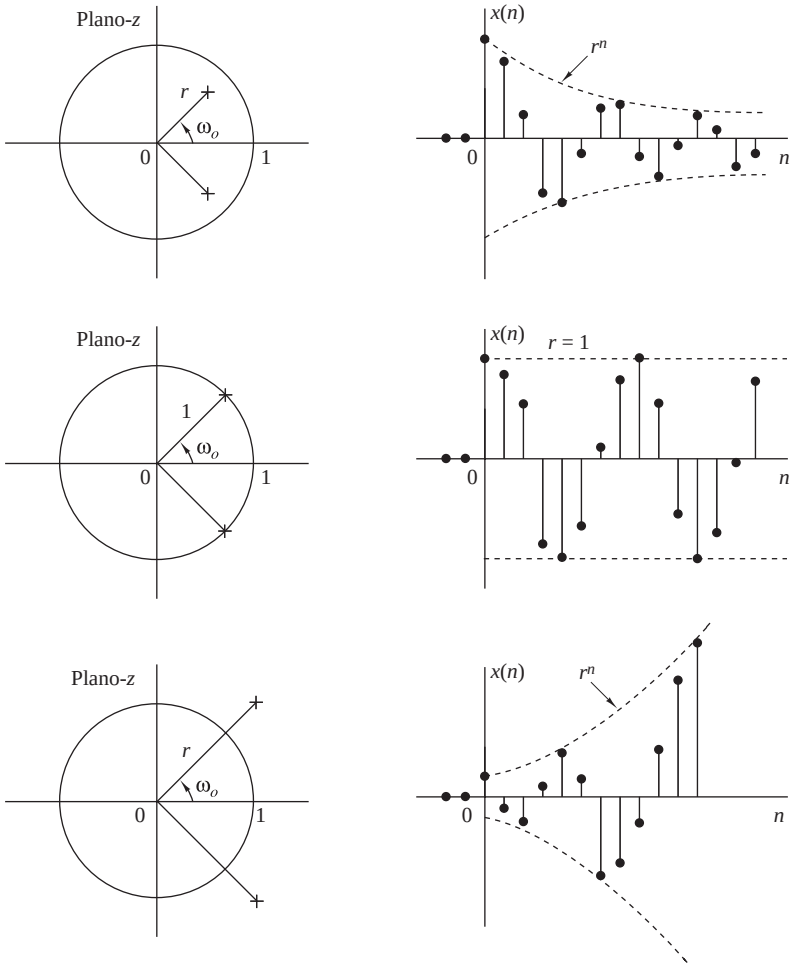


Figura 3.3.7. Una pareja de polos complejos conjugados se corresponde con señales causales con comportamiento oscilatorio.

Los ceros afectan al comportamiento de una señal aunque no de manera tan significativa como los polos. Por ejemplo, en el caso de señales sinusoidales, la presencia y la posición de los ceros sólo afecta a su fase.

En este punto, debemos destacar que todo lo que hemos dicho sobre las señales causales también se aplica a los sistemas LTI causales, ya que su respuesta al impulso es una señal causal. De aquí que si un polo de un sistema está fuera de la circunferencia unidad, la respuesta al impulso del sistema será no acotada y, en consecuencia, el sistema será inestable.

3.3.3 Función de transferencia de un sistema lineal invariante en el tiempo

En el Capítulo 2 hemos demostrado que la salida de un sistema lineal invariante en el tiempo (en reposo) a una secuencia de entrada $x(n)$ puede obtenerse calculando la convolución de $x(n)$ con la respuesta al impulso unitario del sistema. La propiedad de convolución, deducida en la Sección 3.2, nos permite expresar esta relación en el dominio z como

$$Y(z) = H(z)X(z) \tag{3.3.4}$$

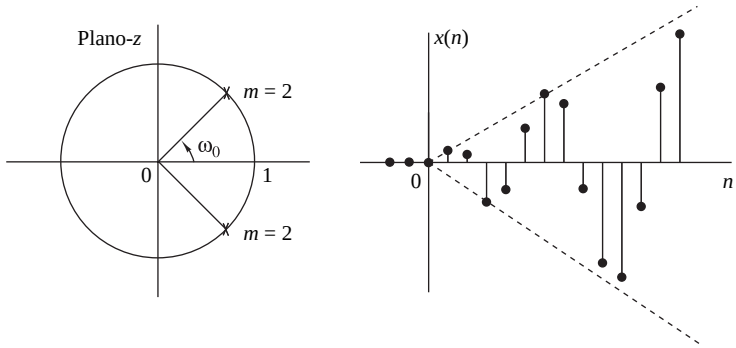


Figura 3.3.8. Señal causal correspondiente a una pareja de polos complejos conjugados dobles ubicados sobre la circunferencia unidad.

donde $Y(z)$ es la transformada z de la secuencia de salida $y(n)$, $X(z)$ es la transformada z de la secuencia de entrada $x(n)$ y $H(z)$ es la transformada z de la respuesta al impulso unitario $h(n)$.

Si conocemos $h(n)$ y $x(n)$, podemos determinar sus correspondientes transformadas z $H(z)$ y $X(z)$ y multiplicarlas para obtener $Y(z)$, y por tanto determinar $y(n)$ evaluando la transformada z inversa de $Y(z)$. Alternativamente, si conocemos $x(n)$ y observamos la salida $y(n)$ del sistema, podemos determinar la respuesta al impulso unitario obteniendo en primer lugar $H(z)$ mediante la relación

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \tag{3.3.5}$$

y evaluando a continuación la transformada z inversa de $H(z)$. Puesto que

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} \tag{3.3.6}$$

es evidente que $H(z)$ representa la caracterización de un sistema en el dominio z, mientras que $h(n)$ es la caracterización en el dominio del tiempo del sistema. En otras palabras, $H(z)$ y $h(n)$ son descripciones equivalentes de un sistema en los dos dominios. La transformada $H(z)$ se conoce como *función de transferencia*.

La relación dada por (3.3.5) es particularmente útil para obtener $H(z)$ cuando el sistema se describe mediante una ecuación en diferencias de coeficientes constantes de la forma

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \tag{3.3.7}$$

la función de transferencia puede determinarse directamente a partir de (3.3.7) calculando la transformada z de ambos lados de dicha ecuación. Por tanto, aplicando la propiedad de desplazamiento en el tiempo, obtenemos

$$\begin{aligned} Y(z) &= -\sum_{k=1}^{N} a_k Y(z) z^{-k} + \sum_{k=0}^{M} b_k X(z) z^{-k} \\ Y(z)\left(1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}\right) &= X(z)\left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\right) \\ \frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) &= \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Por tanto, un sistema lineal invariante en el tiempo descrito por una ecuación en diferencias de coeficientes constantes tiene una función de transferencia racional.

Ésta es la forma general de la función de transferencia de un sistema descrito mediante una ecuación en diferencias de coeficientes constantes. A partir de esta forma general se obtienen dos formas especiales muy importantes. La primera, si $a_k = 0$ para $1 \leq k \leq N$, la expresión (3.3.8) se reduce a

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} = \frac{1}{z^M} \sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k} \tag{3.3.9}$$

En este caso, $H(z)$ contiene M ceros, cuyos valores están determinados por los parámetros del sistema $\{b_k\}$ y un polo de orden M en el origen $z = 0$. Puesto que el sistema contiene sólo polos triviales (en $z = 0$) y M ceros no triviales, se dice que es un *sistema de sólo ceros*. Evidentemente, un sistema así tiene una respuesta al impulso de duración finita (FIR), y se conoce como sistema FIR o sistema de media móvil (sistema MA) .

Por el contrario, si $b_k = 0$ para $1 \leq k \leq M$, la función de transferencia se reduce a

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{b_0 z^N}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{N-k}}, \qquad a_0 \equiv 1 \tag{3.3.10}$$

En este caso, $H(z)$ tiene N polos, cuyos valores quedan determinados por los parámetros del sistema $\{a_k\}$ y un cero de orden N en el origen $z = 0$. Normalmente, no haremos referencia a estos ceros triviales. En consecuencia, la función de transferencia dada por (3.3.10) sólo contiene los polos no triviales y el sistema correspondiente se dice que es un *sistema de todo polos*. A causa de la presencia de polos, la respuesta al impulso de tal sistema tiene duración infinita y, por tanto, es un sistema IIR.

La forma general de la función de transferencia dada por la expresión (3.3.8) contiene polos y ceros, y por tanto el sistema correspondiente se dice que es un *sistema de polos y ceros*, con N polos y M ceros. Los polos y/o ceros en $z = 0$ y $z = \infty$ existen pero no se cuentan de forma explícita. Debido a la presencia de polos, un sistema de polos y ceros es un sistema IIR.

El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento que permite determinar la función de transferencia y la respuesta al impulso unitario de la ecuación en diferencias.

EJEMPLO 3.3.4

Determine la función de transferencia y la respuesta al impulso unitario del sistema descrito por la siguiente ecuación en diferencias

$$y(n) = \frac{1}{2} y(n-1) + 2x(n)$$

Solución. Calculando la transformada z de la ecuación en diferencias, obtenemos

$$Y(z) = \frac{1}{2} z^{-1} Y(z) + 2X(z)$$

Por tanto, la función de transferencia es

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

Este sistema tiene un polo en $z = \frac{1}{2}$ y un cero en el origen. Utilizando la Tabla 3.3 obtenemos la transformada inversa

$$h(n) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

Ésta es la respuesta del sistema al impulso unitario.

Ahora que hemos demostrado que las transformadas z racionales se emplean en sistemas de uso común y en la caracterización de los sistemas lineales invariantes en el tiempo, en la Sección 3.4 vamos a describir varios métodos para determinar la transformada z inversa de las funciones racionales.

3.4 Inversión de la transformada z

Como hemos visto en la Sección 3.1.2, la transformada z inversa viene determinada por

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \tag{3.4.1}$$

donde la integral es una integral de contorno sobre un camino cerrado C que encierra el origen y se encuentra dentro de la región de convergencia de $X(z)$. Por simplicidad, C puede ser una circunferencia dentro de la ROC de $X(z)$ en el plano z.

Existen tres métodos que se emplean a menudo en la práctica para evaluar la transformada z inversa:

1. Evaluación directa de (3.4.1), mediante integración de contorno.
2. Expansión en una serie de términos en función de las variables z y z^{-1}.
3. Expansión en fracciones simples y búsqueda en una tabla.

3.4.1 Transformada z inversa por integración de contorno

En esta sección vamos a demostrar el uso del teorema de la integral de Cauchy para determinar la transformada z inversa directamente a partir de la integral de contorno.

Teorema de la integral de Cauchy. Sea $f(z)$ una función de la variable compleja z y sea C un camino cerrado en el plano z. Si existe la derivada $df(z)/dz$ dentro y sobre el contorno C y si $f(z)$ no tiene polos en $z = z_0$, entonces

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} f(z_0), & \text{si } z_0 \text{ está contenido en } C \\ 0, & \text{si } z_0 \text{ no está contenido en } C \end{cases} \tag{3.4.2}$$

De forma más general, si existe la derivada de orden $(k+1)$ de $f(z)$ y $f(z)$ no tiene polos en $z = z_0$, entonces

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^k} dz = \begin{cases} \dfrac{1}{(k-1)!} \dfrac{d^{k-1} f(z)}{dz^{k-1}} \Bigg|_{z=z_0}, & \text{si } z_0 \text{ está contenido en } C \\ 0, & \text{si } z_0 \text{ no está contenido en } C \end{cases} \tag{3.4.3}$$

Los valores del lado derecho de las expresiones (3.4.2) y (3.4.3) son los residuos del polo en $z = z_0$. Los resultados de (3.4.2) y (3.4.3) son dos formas del *teorema de la integral de Cauchy*.

Podemos aplicar las expresiones (3.4.2) y (3.4.3) para obtener los valores de las integrales de contorno más generales. En concreto, supongamos que el integrando de la integral de contorno es una fracción $f(z)/g(z)$, donde $f(z)$ no tiene polos dentro del contorno C y $g(z)$ es un polinomino con raíces (simples) distintas $z_1, z_2, \ldots, z_n$ dentro del contorno C. Luego,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{g(z)}\,dz &= \frac{1}{2\pi j}\oint_C \left[\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{z-z_i}\right]dz \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{A_i}{z-z_i}\,dz \qquad (3.4.4)\\ &= \sum_{i=1}^{n} A_i\end{aligned}$$

donde

$$A_i = (z-z_i)\,\frac{f(z)}{g(z)}\bigg|_{z=z_i} \qquad (3.4.5)$$

Los valores $\{A_i\}$ son los residuos de los polos correspondientes en $z = z_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Por tanto, el valor de la integral de contorno es igual a la suma de los residuos de todos los polos contenidos en el contorno C.

Observe que (3.4.4) se ha obtenido haciendo una expansión en fracciones simples del integrando y aplicando (3.4.2). Como $g(z)$ tiene raíces de orden múltiple, así como raíces simples dentro del contorno, la expansión en fracciones simples con las apropiadas modificaciones y la expresión (3.4.3) pueden emplearse para evaluar los residuos en los polos correspondientes.

En el caso de la transformada z inversa, tenemos

$$\begin{aligned}x(n) &= \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}\,dz \\ &= \sum_{\text{todos los polos } \{z_i\} \text{ contenidos en } C} [\text{residuo de } X(z)z^{n-1} \text{ en } z = z_i] \qquad (3.4.6)\\ &= \sum_i (z-z_i)X(z)z^{n-1}|_{z=z_i}\end{aligned}$$

simpre que los polos $\{z_i\}$ sean simples. Si $X(z)z^{n-1}$ no tiene polos dentro del contorno C para uno o más valores de n, entonces $x(n) = 0$ para dichos valores.

El siguiente ejemplo ilustra la evaluación de la transformada z inversa aplicando el teorema de la integral de Cauchy.

EJEMPLO 3.4.1

Evalúe la transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \qquad |z| > |a|$$

utilizando la integral de inversión compleja.

Solución. Tenemos

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{z^{n-1}}{1-az^{-1}}\,dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{z^n\,dz}{z-a}$$

donde C es una circunferencia de radio mayor que $|a|$. Evaluemos esta integral utilizando (3.4.2) con $f(z) = z^n$. Vamos a diferenciar dos casos.

1. Si $n \geq 0$, $f(z)$ sólo tiene ceros y, por tanto, ningún polo dentro del contorno C. El único polo dentro de C es $z = a$. Luego,

$$x(n) = f(z_0) = a^n, \qquad n \geq 0$$

2. Si $n < 0$, $f(z) = z^n$ tiene un polo de orden n en $z = 0$, que está dentro de C. Por tanto, existen contribuciones de ambos polos. Para $n = -1$, tenemos que

$$x(-1) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{z(z-a)}\, dz = \left.\frac{1}{z-a}\right|_{z=0} + \left.\frac{1}{z}\right|_{z=a} = 0$$

Si $n = -2$, tenemos

$$x(-2) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{z^2(z-a)}\, dz = \left.\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-a}\right)\right|_{z=0} + \left.\frac{1}{z^2}\right|_{z=a} = 0$$

Continuando con este procedimiento podemos demostrar que $x(n) = 0$ para $n < 0$. Por tanto,

$$x(n) = a^n u(n)$$

3.4.2 Transformada z inversa mediante expansión en serie de potencias

La idea básica de este método es la siguiente: dada una transformada z $X(z)$ con su correspondiente ROC, podemos expandir $X(z)$ en una serie de potencias de la forma

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n} \tag{3.4.7}$$

que converge en la región de convergencia dada. Gracias a la unicidad de la transformada z, $x(n) = c_n$ para todo n. Si $X(z)$ es racional, la expansión puede realizarse mediante división.

Para ilustrar esta técnica, vamos a invertir algunas transformadas z que emplean la misma expresión para $X(z)$, pero tienen una ROC diferente. Esto también nos permite hacer hincapié de nuevo en la importancia de la ROC cuando se trabaja con transformadas z.

EJEMPLO 3.4.2

Determine la transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{1}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

para

(a) ROC: $|z| > 1$

(b) ROC: $|z| < 0.5$

Solución.

(a) Ya que la ROC es el exterior de un círculo, podemos esperar que $x(n)$ sea una señal causal. Luego buscamos una expansión en serie de potencias negativas de z. Dividiendo el numerador de $X(z)$ entre su denominador, obtenemos la serie de potencias

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = 1 + \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{7}{4}z^{-2} + \frac{15}{8}z^{-3} + \frac{31}{16}z^{-4} + \cdots$$

Comparando esta relación con (3.1.1), podemos concluir que

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \ldots\}$$

Observe que en cada paso del proceso de división, eliminamos el término con la menor potencia de z^{-1}.

(b) En este caso, la ROC es el interior de un círculo. En consecuencia, la señal $x(n)$ es anticausal. Para obtener una expansión en serie de potencias positivas de z, realizamos las sucesivas divisiones de la forma siguiente:

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad

3.4.3 Transformada z inversa mediante expansión en fracciones parciales

Con el método de búsqueda en tablas, podemos expresar la función $X(z)$ como una combinación lineal

$$X(z) = \alpha_1 X_1(z) + \alpha_2 X_2(z) + \cdots + \alpha_K X_K(z) \tag{3.4.8}$$

donde $X_1(z), \ldots, X_K(z)$ son expresiones cuyas transformadas inversas $x_1(n), \ldots, x_K(n)$ pueden encontrarse en una tabla de parejas de transformadas z. Si dicha descomposición es posible, entonces $x(n)$, la transformada z inversa de $X(z)$, puede encontrarse fácilmente aplicando la propiedad de linealidad como sigue

$$x(n) = \alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n) + \cdots + \alpha_K x_K(n) \tag{3.4.9}$$

Este método es particularmente útil si $X(z)$ es una función racional, como la dada por (3.3.1). Sin perder generalidad, podemos suponer que $a_0 = 1$, de modo que (3.3.1) puede expresarse de la forma siguiente

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} \tag{3.4.10}$$

Observe que si $a_0 \neq 1$, podemos obtener (3.4.10) a partir de (3.3.1) dividiendo tanto el numerador como el denominador entre a_0.

Una función racional de la forma (3.4.10) se denomina *propia* si $a_N \neq 0$ y $M < N$. A partir de (3.3.2), se deduce que es equivalente a decir que el número de ceros finitos es menor que el número de polos finitos.

Una función racional impropia $(M \geq N)$ siempre se puede escribir como la suma de un polinomio y una función racional propia. Este procedimiento se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.4.4

Exprese la transformada racional impropia

$$X(z) = \frac{1 + 3z^{-1} + \frac{11}{6}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}$$

en función de un polinomio y una función propia.

Solución. En primer lugar, tendremos que reducir el numerador de manera que los términos z^{-2} y z^{-3} sean eliminados. A continuación, se realizan las divisiones sucesivas con estos dos polinomios escribiéndolos en orden *inverso*. Dejaremos de dividir cuando el oden del resto sea z^{-1}. Así, obtenemos

$$X(z) = 1 + 2z^{-1} + \frac{\frac{1}{6}z^{-1}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}$$

En general, cualquier función racional impropia $(M \geq N)$ puede expresarse de la forma

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = c_0 + c_1 z^{-1} + \cdots + c_{M-N} z^{-(M-N)} + \frac{B_1(z)}{A(z)} \tag{3.4.11}$$

La transformada z inversa del polinomio puede hallarse fácilmente por inspección. Vamos a centrar nuestra atención en la inversión de la transformada racional propia, ya que cualquier función impropia se puede transformar en una función propia utilizando (3.4.11). Vamos a llevar a cabo el desarrollo en dos pasos. En primer lugar, realizamos una expansión en fracciones parciales de la función racional propia y luego invertimos cada uno de los términos.

Sea $X(z)$ una función racional propia, es decir,

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} \tag{3.4.12}$$

donde

$$a_N \neq 0 \qquad \text{y} \qquad M < N$$

Para simplificar esta exposición vamos a eliminar las potencias negativas de z multiplicando tanto el numerador como el denominador de (3.4.12) por z^N. Esto da como resultado

$$X(z) = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \cdots + b_M z^{N-M}}{z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_N} \tag{3.4.13}$$

que sólo contiene las potencias positivas de z. Puesto que $N > M$, la función

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{b_0 z^{N-1} + b_1 z^{N-2} + \cdots + b_M z^{N-M-1}}{z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_N} \tag{3.4.14}$$

siempre es una función propia.

La tarea de obtener la expansión en fracciones parciales consiste en expresar (3.4.14) o, lo que es equivalente, (3.4.12) como una suma de fracciones simples. Con este propósito, en primer lugar descomponemos el primer factor del polinomio del denominador de la expresión (3.4.14) en factores que contengan los polos $p_1, p_2, \ldots, p_N$ de $X(z)$. Podemos distinguir dos casos.

Polos diferentes. Suponga que los polos $p_1, p_2, \ldots, p_N$ son todos diferentes (distintos). Luego tenemos que buscar una expansión de la forma

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z - p_1} + \frac{A_2}{z - p_2} + \cdots + \frac{A_N}{z - p_N} \tag{3.4.15}$$

El problema consiste en determinar los coeficientes $A_1, A_2, \ldots, A_N$. En el siguiente ejemplo se ilustran dos formas de resolver este problema.

EJEMPLO 3.4.5

Determine la expansión en fracciones parciales de la función propia

$$X(z) = \frac{1}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}} \tag{3.4.16}$$

Solución. En primer lugar, eliminamos las potencias negativas, multiplicando tanto el numerador como el denominador por z^2. Luego,

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1.5z + 0.5}$$

Los polos de $X(z)$ son $p_1 = 1$ y $p_2 = 0.5$. Luego, la expansión de la forma (3.4.15) es

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z-0.5} \tag{3.4.17}$$

Un método muy simple que permite determinar A_1 y A_2 consiste en multiplicar la ecuación por el término del denominador $(z-1)(z-0.5)$. Así, obtenemos

$$z = (z-0.5)A_1 + (z-1)A_2 \tag{3.4.18}$$

Si ahora hacemos $z = p_1 = 1$ en (3.4.18), eliminamos el término que incluye A_2. Por tanto,

$$1 = (1-0.5)A_1$$

Obtenemos de este modo el resultado $A_1 = 2$. A continuación, volvemos a la expresión (3.4.18) y hacemos $z = p_2 = 0.5$, para eliminar el término que incluye A_1, obteniendo

$$0.5 = (0.5-1)A_2$$

y, por tanto, $A_2 = -1$. Luego el resultado de la expansión en fracciones parciales es

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2}{z-1} - \frac{1}{z-0.5} \tag{3.4.19}$$

El ejemplo anterior sugiere que podemos determinar los coeficientes $A_1, A_2, \ldots, A_N$, multiplicando ambos lados de la Ecuación (3.4.15) por cada uno de los términos $(z-p_k)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, y evaluando las expresiones resultantes en las correspondientes posiciones de los polos $p_1, p_2, \ldots, p_N$. Por tanto, en general, tenemos

$$\frac{(z-p_k)X(z)}{z} = \frac{(z-p_k)A_1}{z-p_1} + \cdots + A_k + \cdots + \frac{(z-p_k)A_N}{z-p_N} \tag{3.4.20}$$

En consecuencia, con $z = p_k$, (3.4.20) proporciona el coeficiente k-ésimo como sigue

$$A_k = \left.\frac{(z-p_k)X(z)}{z}\right|_{z=p_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, N \tag{3.4.21}$$

EJEMPLO 3.4.6

Determine la expansión en fracciones parciales de

$$X(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}} \tag{3.4.22}$$

Solución. Para eliminar las potencias negativas de z en (3.4.22), multiplicamos tanto el numerador como el denominador por z^2. Luego,

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+1}{z^2-z+0.5}$$

Los polos de $X(z)$ son los complejos conjugados

$$p_1 = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}$$

y

$$p_2 = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}$$

Ya que $p_1 \neq p_2$, buscamos una expansión de la forma (3.4.15). Luego,

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+1}{(z-p_1)(z-p_2)} = \frac{A_1}{z-p_1} + \frac{A_2}{z-p_2}$$

Para obtener A_1 y A_2, utilizamos la fórmula (3.4.21). Por tanto, tenemos

$$A_1 = \left.\frac{(z-p_1)X(z)}{z}\right|_{z=p_1} = \left.\frac{z+1}{z-p_2}\right|_{z=p_1} = \frac{\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - j\frac{3}{2}$$

$$A_2 = \left.\frac{(z-p_2)X(z)}{z}\right|_{z=p_2} = \left.\frac{z+1}{z-p_1}\right|_{z=p_2} = \frac{\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}+j\frac{3}{2}$$

La expansión dada por (3.4.15) y la fórmula (3.4.21) son válidas tanto para polos reales como complejos. La única restricción es que todos los polos tienen que ser diferentes. Observe también que $A_2 = A_1^*$. Puede verse fácilmente que esto es una consecuencia del hecho de que $p_2 = p_1^*$. En palabras, *los polos complejos conjugados producen coeficientes complejos conjugados en la expansión en fracciones parciales*. Este simple resultado nos será muy útil más adelante.

Polos de orden múltiple. Si $X(z)$ tiene un polo de multiplicidad l, es decir, contiene en su denominador el factor $(z-p_k)^l$, entonces la expansión dada por (3.4.15) ya no se cumple. En este caso, se necesita una forma de expansión distinta. En primer lugar, vamos a ver el caso de un polo doble ($l = 2$).

EJEMPLO 3.4.7

Determine la expansión en fracciones parciales de

$$X(z) = \frac{1}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})^2} \tag{3.4.23}$$

Solución. En primer lugar, expresamos (3.4.23) en términos de las potencias positivas de z, de la forma

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}$$

$X(z)$ tiene un único polo en $p_1 = -1$ y un polo doble en $p_2 = p_3 = 1$. En este caso, la expansión en fracciones parciales apropiada es:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2} = \frac{A_1}{z+1} + \frac{A_2}{z-1} + \frac{A_3}{(z-1)^2} \tag{3.4.24}$$

El problema consiste en determinar los coeficientes A_1, A_2 y A_3.

Vamos a proceder como en el caso en que los polos son diferentes. Para determinar A_1, multiplicamos ambos lados de la Ecuación (3.4.24) por $(z+1)$ y evaluamos el resultado en $z = -1$. Luego (3.4.24) se transforma en

$$\frac{(z+1)X(z)}{z} = A_1 + \frac{z+1}{z-1}A_2 + \frac{z+1}{(z-1)^2}A_3$$

que, cuando se evalúa en $z = -1$, da

$$A_1 = \left.\frac{(z+1)X(z)}{z}\right|_{z=-1} = \frac{1}{4}$$

A continuación, si multiplicamos ambos lados de (3.4.24) por $(z-1)^2$, obtenemos

$$\frac{(z-1)^2X(z)}{z} = \frac{(z-1)^2}{z+1}A_1 + (z-1)A_2 + A_3 \tag{3.4.25}$$

Si ahora evaluamos (3.4.25) en $z = 1$, obtenemos A_3. Luego,

$$A_3 = \left.\frac{(z-1)2X(z)}{z}\right|_{z=1} = \frac{1}{2}$$

El coeficiente que queda, A_2, puede obtenerse diferenciando ambos lados de la expresión (3.4.25) con respecto a z y evaluando el resultado en $z = 1$. Observe que no es necesario hacer la deriva del lado derecho de la Ecuación (3.4.25), ya que todos los términos excepto A_2 se eliminan cuando hacemos $z = 1$. Luego,

$$A_2 = \frac{d}{dz}\left[\frac{(z-1)^2 X(z)}{z}\right]_{z=1} = \frac{3}{4} \tag{3.4.26}$$

La generalización del procedimiento utilizado en el ejemplo anterior al caso de un polo de orden m $(z-p_k)^m$ es muy simple. La expansión en fracciones parciales debe contener los términos

$$\frac{A_{1k}}{z-p_k} + \frac{A_{2k}}{(z-p_k)^2} + \cdots + \frac{A_{mk}}{(z-p_k)^m}$$

Los coeficientes $\{A_{ik}\}$ pueden evaluarse diferenciando como se ha hecho en el Ejemplo 3.4.7 para $m = 2$.

Ahora que hemos visto cómo obtener la expansión en fracciones parciales, estamos preparados para abordar el paso final de la inversión de $X(z)$. En primer lugar, consideremos el caso en el que $X(z)$ contiene polos diferentes. A partir de la expansión en fracciones parciales dada por (3.4.15), es fácil deducir que

$$X(z) = A_1 \frac{1}{1-p_1 z^{-1}} + A_2 \frac{1}{1-p_2 z^{-1}} + \cdots + A_N \frac{1}{1-p_N z^{-1}} \tag{3.4.27}$$

La transformada z inversa, $x(n) = Z^{-1}\{X(z)\}$, puede obtenerse invirtiendo cada uno de los términos de la expresión (3.4.27) y realizando la correspondiente combinación lineal. A partir de la Tabla 3.3, se obtiene que dichos términos pueden invertirse utilizando la fórmula

$$Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-p_k z^{-1}}\right\} = \begin{cases} (p_k)^n u(n), & \text{si ROC: } |z| > |p_k| \quad \text{(señales causales)} \\ -(p_k)^n u(-n-1), & \text{si ROC: } |z| < |p_k| \quad \text{(señales anticausales)} \end{cases} \tag{3.4.28}$$

Si la señal $x(n)$ es causal, la ROC es $|z| > p_{\max}$, donde $p_{\max} = \max\{|p_1|, |p_2|, \ldots, |p_N|\}$. En este caso, todos los términos de (3.4.27) dan lugar a componentes de señal causales y la señal $x(n)$ está dada por

$$x(n) = (A_1 p_1^n + A_2 p_2^n + \cdots + A_N p_N^n) u(n) \tag{3.4.29}$$

Si todos los polos son reales, (3.4.29) es la expresión apropiada para la señal $x(n)$. Luego una señal causal, con una transformada z que contenga polos diferentes y reales, es una combinación lineal de señales exponenciales reales.

Supongamos ahora que todos los polos son diferentes, pero que algunos de ellos son complejos. En este caso, algunos de los términos de la expresión (3.4.27) producen componentes exponenciales complejas. Sin embargo, si la señal $x(n)$ es real, podremos reducir dichos términos a componentes reales. Si $x(n)$ es real, los polinomios de $X(z)$ tendrán coeficientes reales. En este caso, como hemos visto en la Sección 3.3, si p_j es un polo, su complejo conjugado p_j^* también es un polo. Como hemos demostrado en el Ejemplo 3.4.6, los correspondientes coeficientes de la expansión en fracciones parciales también son conjugados complejos. Luego la contribución de dos polos complejos conjugados es de la forma

$$x_k(n) = [A_k (p_k)^n + A_k^* (p_k^*)^n] u(n) \tag{3.4.30}$$

Estos dos términos se pueden combinar para formar una componente de señal real. En primer lugar, expresamos A_j y p_j en forma polar (es decir, amplitud y fase) como

$$A_k = |A_k| e^{j\alpha_k} \tag{3.4.31}$$

$$p_k = r_k e^{j\beta_k} \tag{3.4.32}$$

donde α_k y β_k son las componentes de fase de A_k y p_k. Sustituyendo estas relaciones en (3.4.30), obtenemos

$$x_k(n) = |A_k| r_k^n [e^{j(\beta_k n + \alpha_k)} + e^{-j(\beta_k n + \alpha_k)}] u(n)$$

o, lo que es equivalente,

$$x_k(n) = 2|A_k| r_k^n \cos(\beta_k n + \alpha_k) u(n) \tag{3.4.33}$$

Por tanto, podemos concluir que

$$Z^{-1}\left(\frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} + \frac{A_k^*}{1 - p_k^* z^{-1}}\right) = 2|A_k| r_k^n \cos(\beta_k n + \alpha_k) u(n) \tag{3.4.34}$$

si la ROC es $|z| > |p_k| = r_k$.

A partir de (3.4.34), observamos que cada pareja de polos complejos conjugados en el dominio z da lugar a una componente de señal sinusoidal causal con una envolvente exponencial. La distancia r_k del polo respecto del origen determina la variación de la exponencial (creciente si $r_k > 1$, decreciente si $r_k < 1$ y constante si $r_k = 1$). El ángulo de los polos con respecto al eje real positivo proporciona la frecuencia de la señal sinusoidal. Los ceros, o lo que es lo mismo, el numerador de la transformada racional, sólo afecta de forma indirecta a la amplitud y la fase de $x_k(n)$ a través de A_k.

En el caso de polos *múltiples*, reales o complejos, se necesita la transformada inversa de los términos de la forma $A/(z - p_k)^n$. En el caso de un polo doble, la siguiente pareja de transformadas (*véase* la Tabla 3.3) resulta muy útil

$$Z^{-1}\left\{\frac{pz^{-1}}{(1 - pz^{-1})^2}\right\} = np^n u(n) \tag{3.4.35}$$

siempre que la ROC sea $|z| > |p|$. La generalización al caso de polos con multiplicidades mayores se obtiene mediante diferenciación múltiple.

EJEMPLO 3.4.8

Determine la transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{1}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

si

(a) ROC: $|z| > 1$

(b) ROC: $|z| < 0.5$

(c) ROC: $0.5 < |z| < 1$

Solución. Se trata de mismo problema visto en el Ejemplo 3.4.2. En el Ejemplo 3.4.5 se ha determinado la expansión en fracciones parciales de $X(z)$, que es

$$X(z) = \frac{2}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} \tag{3.4.36}$$

Para invertir $X(z)$ debemos aplicar la expresión (3.4.28) para $p_1 = 1$ y $p_2 = 0.5$. Sin embargo, esto requiere la especificación de la correspondiente región de convergencia.

(a) En el caso en que la ROC es $|z| > 1$, la señal $x(n)$ es causal y ambos términos de (3.4.36) son términos causales. De acuerdo con (3.4.28), obtenemos

$$x(n) = 2(1)^n u(n) - (0.5)^n u(n) = (2 - 0.5^n) u(n) \tag{3.4.37}$$

lo que está de acuerdo con el resultado del Ejemplo 3.4.2(a).

(b) Cuando la ROC es $|z| < 0.5$, la señal $x(n)$ es anticausal. Por tanto, ambos términos de la expresión (3.4.36) producen componentes anticausales. A partir de (3.4.28), obtenemos

$$x(n) = [-2 + (0.5)^n]u(-n-1) \tag{3.4.38}$$

(c) En este caso, la ROC $0.5 < |z| < 1$ es un anillo, lo que implica que la señal $x(n)$ es bilateral. Luego uno de los términos corresponde a una señal causal y el otro a una señal anticausal. Obviamente, la ROC dada es el solapamiento de las regiones $|z| > 0.5$ y $|z| < 1$. Por tanto, el polo $p_2 = 0.5$ proporciona la parte causal y el polo $p_1 = 1$ es la anticausal. Por tanto,

$$x(n) = -2(1)^n u(-n-1) - (0.5)^n u(n) \tag{3.4.39}$$

EJEMPLO 3.4.9

Determine la señal causal $x(n)$ cuya transformada z está dada por

$$X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

Solución. En el Ejemplo 3.4.6 hemos obtenido la expansión en fracciones parciales como

$$X(z) = \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - p_2 z^{-1}}$$

donde

$$A_1 = A_2^* = \frac{1}{2} - j\frac{3}{2}$$

y

$$p_1 = p_2^* = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}$$

Puesto que tenemos una pareja de polos complejos conjugados, tenemos que utilizar la Ecuación (3.4.34). La forma polar de A_1 y p_1 son

$$A_1 = \frac{\sqrt{10}}{2} e^{-j71.565}$$
$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\pi/4}$$

Por tanto,

$$x(n) = \sqrt{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \cos\left(\frac{\pi n}{4} - 71.565^\circ\right) u(n)$$

EJEMPLO 3.4.10

Determine la señal causal $x(n)$ cuya transformada z es

$$X(z) = \frac{1}{(1 + z^{-1})(1 - z^{-1})^2}$$

Solución. A partir del Ejemplo 3.4.7, tenemos

$$X(z) = \frac{1}{4}\frac{1}{1+z^{-1}} + \frac{3}{4}\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})2}$$

Aplicando las relaciones de la transformada inversa dadas por (3.4.28) y (3.4.35), obtenemos

$$x(n) = \frac{1}{4}(-1)^n u(n) + \frac{3}{4}u(n) + \frac{1}{2}nu(n) = \left[\frac{1}{4}(-1)^n + \frac{3}{4} + \frac{n}{2}\right]u(n)$$

3.4.4 Descomposición de las transformadas z racionales

Ahora es el momento apropiado de ver algunas cuestiones relacionadas con la descomposición de las transformadas z racionales, que resultarán ser muy útiles en la implementación de sistemas discretos en el tiempo.

Supongamos que tenemos una transformada z racional $X(z)$ expresada como

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = b_0 \frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - p_k z^{-1})} \tag{3.4.40}$$

donde, por simplicidad, hemos supuesto que $a_0 \equiv 1$. Si $M \geq N$ [es decir, $X(z)$ es impropia], convertimos $X(z)$ en una suma de un polinomio y una función propia

$$X(z) = \sum_{k=0}^{M-N} c_k z^{-k} + X_{\text{pr}}(z) \tag{3.4.41}$$

Si los polos de $X_{\text{pr}}(z)$ son distintos, podemos obtener la expansión en fracciones parciales como

$$X_{\text{pr}}(z) = A_1 \frac{1}{1 - p_1 z^{-1}} + A_2 \frac{1}{1 - p_2 z^{-1}} + \cdots + A_N \frac{1}{1 - p_N z^{-1}} \tag{3.4.42}$$

Como ya hemos mencionado, pueden existir parejas de polos complejos conjugados en la expresión (3.4.42). Ya que normalmente tratamos con señales reales, debemos evitar los coeficientes complejos en la descomposición. Esto puede conseguirse agrupando y combinando los términos que contienen polos complejos conjugados de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{A}{1 - pz^{-1}} + \frac{A^*}{1 - p^* z^{-1}} &= \frac{A - Ap^* z^{-1} + A^* - A^* p z^{-1}}{1 - pz^{-1} - p^* z^{-1} + pp^* z^{-2}} \\ &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \end{aligned} \tag{3.4.43}$$

donde

$$\begin{aligned} b_0 &= 2\,\text{Re}(A), & a_1 &= -2\,\text{Re}(p) \\ b_1 &= 2\,\text{Re}(Ap*), & a_2 &= |p|^2 \end{aligned} \tag{3.4.44}$$

son los coeficientes deseados. Obviamente, cualquier transformada racional de la forma (3.4.43) con coeficientes dados por (3.4.44), que es el caso en que $a_1^2 - 4a_2 < 0$, puede invertirse utilizando (3.4.34). Combinando (3.4.41),

(3.4.42) y (3.4.43), obtenemos una expansión en fracciones parciales para la transformada z con polos *diferentes* que contienen coeficientes reales. El resultado general es

$$X(z) = \sum_{k=0}^{M-N} c_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{K_1} \frac{b_k}{1+a_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{K_2} \frac{b_{0k}+b_{1k}z^{-1}}{1+a_{1k}z^{-1}+a_{2k}z^{-2}} \tag{3.4.45}$$

donde $K_1 + 2K_2 = N$. Obviamente, si $M = N$, el primer término es una constante, y si $M < N$, el término se elimina. Cuando existen también múltiples polos, es necesario incluir en la expresión (3.4.45) algunos términos adicionales de orden mayor.

Una forma alternativa se obtiene expresando $X(z)$ como un producto de términos simples como en la expresión (3.4.40). Sin embargo, los polos complejos conjugados y los ceros deben combinarse para evitar los coeficientes complejos en la descomposición. Tales combinaciones dan lugar a términos racionales de segundo orden de la forma:

$$\frac{(1-z_k z^{-1})(1-z_k^* z^{-1})}{(1-p_k z^{-1})(1-p_k^* z^{-1})} = \frac{1+b_{1k}z^{-1}+b_{2k}z^{-2}}{1+a_{1k}z^{-1}+a_{2k}z^{-2}} \tag{3.4.46}$$

donde

$$\begin{aligned} b_{1k} &= -2\,\mathrm{Re}(z_k), & a_{1k} &= -2\,\mathrm{Re}(p_k) \\ b_{2k} &= |z_k|^2, & a_{2k} &= |p_k|^2 \end{aligned} \tag{3.4.47}$$

Si para simplificar suponemos que $M = N$, vemos que $X(z)$ puede descomponerse de la forma siguiente:

$$X(z) = b_0 \prod_{k=1}^{K_1} \frac{1+b_k z^{-1}}{1+a_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{K_2} \frac{1+b_{1k}z^{-1}+b_{2k}z^{-2}}{1+a_{1k}z^{-1}+a_{2k}z^{-2}} \tag{3.4.48}$$

donde $N = K_1 + 2K_2$. En los Capítulo 9 y 10 volveremos a abordar estas importantes expresiones.

3.5 Análisis en el dominio z de sistemas LTI

En la Sección 3.3.3 hemos presentado la función de transferencia de un sistema lineal invariante en el tiempo y la hemos relacionado con la respuesta al impulso unitario y con la descripción mediante la ecuación en diferencias del sistema. En esta sección, vamos a describir el uso de la función de transferencia para determinar la respuesta del sistema a una determinada señal de excitación. En la Sección 3.6.3, ampliaremos este método de análisis a los sistemas que no están en reposo. Vamos a centrar nuestra atención en la importante clase de sistemas de polos y ceros representados mediante ecuaciones en diferencias de coeficientes constantes con condiciones iniciales arbitrarias.

También vamos a considerar el tema de la estabilidad de los sistemas lineales invariantes en el tiempo y a describir una prueba para determinar la estabilidad de un sistema basado en los coeficientes del polinomio del denominador de la función de transferencia. Por último, proporcionaremos un análisis en detalle de los sistemas de segundo orden, que son los bloques básicos de construcción para la realización de sistemas de orden superior.

3.5.1 Respuesta de sistemas con funciones de transferencia racionales

Consideremos el sistema de polos y ceros descrito por la ecuación en diferencias general lineal de coeficientes constantes dada por (3.3.7) y la correspondiente función de transferencia dada por (3.3.8). Vamos a representar $H(z)$ como una relación de dos polinomios $B(z)/A(z)$, donde $B(z)$ es el polinomio del numerador que contiene los ceros de $H(z)$ y $A(z)$ es el polinomio del denominador que determina los polos de $H(z)$. Además, supongamos que la señal de entrada $x(n)$ tiene una transformada z racional $X(z)$ de la forma

$$X(z) = \frac{N(z)}{Q(z)} \tag{3.5.1}$$

Esta suposición no es demasiado restrictiva, ya que, como se ha indicado anteriormente, la mayor parte de las señales de interés práctico tienen transformadas z racionales. Si el sistema está inicialmente en reposo, es decir, las condiciones iniciales para la ecuación en diferencias son cero, $y(-1) = y(-2) = \cdots = y(-N) = 0$, la transformada z de la salida del sistema tiene la forma

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{B(z)N(z)}{A(z)Q(z)} \tag{3.5.2}$$

Supongamos ahora que el sistema contiene polos simples $p_1, p_2, \ldots, p_N$ y la transformada z de la señal de entrada contiene los polos $q_1, q_2, \ldots, q_L$, donde $p_k \neq q_m$ para todo $k = 1, 2, \ldots, N$ y $m = 1, 2, \ldots, L$. Además, suponemos que los ceros de los polinomios del numerador $B(z)$ y $N(z)$ no coinciden con los polos $\{p_k\}$ y $\{q_k\}$, de modo que no existe la cancelación entre polos y ceros. Así, la expansión en fracciones parciales de $Y(z)$ es

$$Y(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{L} \frac{Q_k}{1 - q_k z^{-1}} \tag{3.5.3}$$

La transformada inversa de $Y(z)$ proporciona la señal de salida del sistema en la forma

$$y(n) = \sum_{k=1}^{N} A_k (p_k)^n u(n) + \sum_{k=1}^{L} Q_k (q_k)^n u(n) \tag{3.5.4}$$

Observe que la secuencia de salida $y(n)$ puede subdividirse en dos partes. La primera parte es una función de los polos $\{p_k\}$ del sistema y se conoce como *respuesta natural* del sistema. La influencia de la señal de entrada en esta parte de la respuesta es a través de los factores de escala $\{A_k\}$. La segunda parte de la respuesta es una función de los polos $\{q_k\}$ de la señal de entrada y es la *respuesta forzada* del sistema. La influencia del sistema sobre esta respuesta se ejerce a través de los factores de escala $\{Q_k\}$.

Debemos destacar que los factores de escala $\{A_k\}$ y $\{Q_k\}$ son funciones de ambos conjuntos de polos $\{p_k\}$ y $\{q_k\}$. Por ejemplo, si $X(z) = 0$, de modo que la entrada es cero, entonces $Y(z) = 0$ y, en consecuencia, la salida es cero. Evidentemente, en este caso, la respuesta natural del sistema es cero, lo que implica que la respuesta natural del sistema es diferente de la respuesta para la entrada nula.

Si $X(z)$ y $H(z)$ tienen uno o más polos en común o si $X(z)$ y/o $H(z)$ contienen polos de orden múltiple, entonces $Y(z)$ tendrá polos de orden múltiple. En consecuencia, la expansión en fracciones parciales de $Y(z)$ contendrá factores de la forma $1/(1 - p_l z^{-1})^k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, donde m es el orden del polo. La inversión de estos factores producirá términos de la forma $n^{k-1} p_l^n$ en la salida $y(n)$ del sistema, como se ha indicado en la Sección 3.4.3.

3.5.2 Respuestas transitoria y en régimen permanente

Como ya hemos visto anteriormente, la respuesta para el estado nulo de un sistema con una determinada entrada puede separarse en dos componentes: la respuesta natural y la respuesta forzada. La respuesta natural de un sistema causal tiene la forma

$$y_{\text{nr}}(n) = \sum_{k=1}^{N} A_k (p_k)^n u(n) \tag{3.5.5}$$

donde $\{p_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, N$ son los polos del sistema y $\{A_k\}$ son los factores de escala que dependen de las condiciones iniciales y de las características de la secuencia de entrada.

Si $|p_k| < 1$ para todo k, entonces $y_{\text{nr}}(n)$ decrece hasta cero cuando n tiende a infinito. En tal caso, hacemos referencia a la respuesta natural del sistema como la *respuesta transitoria*. La velocidad a la que $y_{\text{nr}}(n)$ disminuye hasta cero depende del módulo de las posiciones de los polos. Si todos los polos tienen módulos pequeños, el decreciemiento es muy rápido. Por el contrario, si uno o más polos se encuentran próximos a la circunferencia unidad, los términos correspondientes de $y_{\text{nr}}(n)$ disminuirán lentamente hasta cero y el estado transitorio persistirá durante un tiempo relativamente largo.

La respuesta forzada del sistema tiene la forma

$$y_{\text{fr}}(n) = \sum_{k=1}^{L} Q_k (q_k)^n u(n) \tag{3.5.6}$$

donde $\{q_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, L$ son los polos de la función forzada y $\{Q_k\}$ son los factores de escala que dependen de la secuencia de entrada y de las características del sistema. Si todos los polos de la señal de entrada caen dentro de la circunferencia unidad, $y_{\text{fr}}(n)$ decrecerá hasta cero cuando n tiende a infinito, al igual que en el caso de la respuesta natural. Esto no debe sorprendernos ya que la señal de entrada también es una señal transitoria. Por el contrario, cuando la señal de entrada es una sinusoide, los polos caen sobre la circunferencia unidad y, en consecuencia, la respuesta forzada también es una sinusoide que existe para todo $n \geq 0$. En este caso, la respuesta forzada se conoce como *respuesta en régimen permanente* del sistema. Por tanto, para que el sistema mantenga la salida en régimen permanente para $n \geq 0$, la señal de entrada debe mantenerse para todo $n \geq 0$.

El siguiente ejemplo ilustra la presencia de la respuesta en régimen permanente.

EJEMPLO 3.5.1

Determine las respuestas transitoria y en régimen permanente del sistema caracterizado por la ecuación en diferencias

$$y(n) = 0.5y(n-1) + x(n)$$

si la señal de entrada es $x(n) = 10\cos(\pi n/4)u(n)$. El sistema inicialmente está en reposo.

Solución. La función de transferencia para este sistema es

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

y, por tanto, el sistema tiene un polo en $z = 0.5$. La transformada z de la señal de entrada es (a partir de la Tabla 3.3)

$$X(z) = \frac{10(1 - (1/\sqrt{2})z^{-1})}{1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z)X(z) \\ &= \frac{10(1 - (1/\sqrt{2})z^{-1})}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - e^{-j\pi/4}z^{-1})} \\ &= \frac{6.3}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{6.78e^{-j28.7^\circ}}{1 - e^{j\pi/4}z^{-1}} + \frac{6.78e^{j28.7^\circ}}{1 - e^{-j\pi/4}z^{-1}} \end{aligned}$$

La respuesta natural o transitoria es

$$y_{\text{nr}}(n) = 6.3(0.5)^n u(n)$$

y la respuesta forzada o de régimen permanente es

$$\begin{aligned} y_{\text{fr}}(n) &= [6.78e^{-j28.7}(e^{j\pi n/4}) + 6.78e^{j28.7}e^{-j\pi n/4}]u(n) \\ &= 13.56\cos\left(\frac{\pi}{4}n - 28.7^\circ\right)u(n) \end{aligned}$$

Por tanto, vemos que la respuesta en régimen permanente persiste para todo $n \geq 0$, siempre que se mantenga la señal de entrada para todo $n \geq 0$.

3.5.3 Causalidad y estabilidad

Como se ha definido anteriormente, un sistema LTI causal es aquel cuya respuesta al impulso unitario $h(n)$ satisface la siguiente condición

$$h(n) = 0, \qquad n < 0$$

También hemos demostrado que la ROC de la transformada z de una secuencia causal es el exterior de un círculo. En consecuencia, *un sistema lineal invariante en el tiempo es causal si y sólo si la ROC de la función de transferencia es el exterior de un círculo de radio $r < \infty$, incluyendo el punto $z = \infty$.*

La estabilidad de un sistema lineal invariante en el tiempo puede expresarse también en función de las características de la función de transferencia. Recordemos de la exposición anterior que una condición necesaria y suficiente para que un sistema lineal invariante en el tiempo sea un sistema estable BIBO es

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

A su vez, esta condición implica que $H(z)$ debe contener la circunferencia unidad dentro de su región de convergencia (ROC).

En efecto, puesto que

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

se deduce que

$$|H(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n) z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)||z^{-n}|$$

Si se evalúa sobre la circunferencia unidad (es decir, $|z| = 1$),

$$|H(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|$$

Por tanto, si el sistemas es estable BIBO, la circunferencia unidad está contenida en la ROC de $H(z)$. La afirmación inversa tambiés es cierta. Por tanto, un *sistema lineal invariante en el tiempo* tiene estabilidad BIBO si y sólo si la ROC de la función de transferencia incluye la circunferencia unidad.

Sin embargo, debemos resaltar que las condiciones para la causalidad y la estabilidad son diferentes y que una no implica a la otra. Por ejemplo, un sistema causal puede ser estable o inestable, al igual que un sistema no causal puede ser estable o inestable. Del mismo modo, un sistema inestable puede ser causal o no causal, al igual que un sistema estable puede ser causal o no causal.

Sin embargo, en un sistema causal, la condición para la estabilidad puede reducirse en cierto grado. De hecho, un sistema causal queda caracterizado por una función de transferencia $H(z)$ que tiene como ROC el exterior de una determinada circunferencia de radio r. En un sistema estable, la ROC debe incluir la circunferencia unidad. En consecuencia, un sistema causal y estable debe tener una función de transferencia que converja para $|z| > r < 1$. Puesto que la ROC no puede contener ningún polo de $H(z)$, se deduce que un *sistema causal lineal invariante en el tiempo* es estable BIBO si y sólo si todos los polos de $H(z)$ se encuentran dentro de la circunferencia unidad.

EJEMPLO 3.5.2

Un sistema lineal invariante en el tiempo está caracterizado por la función de transferencia

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{3-4z^{-1}}{1-3.5z^{-1}+1.5z^{-2}} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1-3z^{-1}} \end{aligned}$$

Especifique la región de convergencia (ROC) de $H(z)$ y determine $h(n)$ para las condiciones siguientes:

(a) El sistema es estable.

(b) El sistema es causal.

(c) El sistema es anticausal.

Solución. El sistema tiene polos en $z = \frac{1}{2}$ y $z = 3$.

(a) Puesto que el sistema es estable, su ROC debe incluir la circunferencia unidad y, por tanto, $\frac{1}{2} < |z| < 3$. En consecuencia, $h(n)$ es no causal y está dada por

$$h(n) = (\frac{1}{2})^n u(n) - 2(3)^n u(-n-1)$$

(b) Puesto que el sistema es causal, su ROC es $|z| > 3$. En este caso,

$$h(n) = (\frac{1}{2})^n u(n) + 2(3)^n u(n)$$

Este sistema es inestable.

(c) Si el sistema es anticausal, su ROC es $|z| < 0.5$. Por tanto,

$$h(n) = -[(\frac{1}{2})^n + 2(3)^n]u(-n-1)$$

En este caso, el sistema es inestable.

3.5.4 Cancelaciones polo–cero

Cuando una transformada z tiene un polo que se encuentra en la misma posición que un cero, el polo queda cancelado por el cero y, en consecuencia, el término que contiene dicho polo en la transformada z inversa desaparece. Estas cancelaciones polo–cero son muy importantes en el análisis de los sistemas con polos y ceros.

Las cancelaciones polo–cero pueden producirse en la propia función de transferencia o en el producto de la función de transferencia por la transformada z de la señal de entrada. En el primer caso, decimos que el orden del sistema se reduce en una unidad. En el segundo caso, decimos que el polo del sistema queda suprimido por el cero en la señal de entrada, o viceversa. Así, seleccionando apropiadamente la posición de los ceros de la señal de entrada, es posible suprimir uno o más modos del sistema (factores con polos) en la respuesta del sistema. De forma similar, mediante la apropiada selección de los ceros de la función de transferencia, es posible suprimir uno o más modos de la señal de entrada de la respuesta del sistema.

Cuando un cero está muy próximo al polo pero no exactamente en la misma posición, el término de la respuesta tendrá una amplitud muy pequeña. Por ejemplo, en la práctica pueden producirse cancelaciones polo–cero no exactas como resultado de emplear una precisión numérica insuficiente en la representación de los

coeficientes del sistema. En consecuencia, no debe intentarse estabilizar un sistema inherentemente inestable colocando un cero en la señal de entrada en la posición del polo.

EJEMPLO 3.5.3

Determine la respuesta al impulso unitario del sistema caracterizado por la ecuación en diferencias

$$y(n) = 2.5y(n-1) - y(n-2) + x(n) - 5x(n-1) + 6x(n-2)$$

Solución. La función de transferencia es

$$H(z) = \frac{1-5z^{-1}+6z^{-2}}{1-2.5z^{-1}+z^{-2}} = \frac{1-5z^{-1}+6z^{-2}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}$$

El sistema tiene polos en $p_1 = 2$ y $p_1 = \frac{1}{2}$. Por tanto, a primera vista, parece que la respuesta al impulso unitario es

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z)X(z) = \frac{1-5z^{-1}+6z^{-2}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})} \\ &= z\left(\frac{A}{z-\frac{1}{2}} + \frac{B}{z-2}\right) \end{aligned}$$

Evaluando las constantes en $z = \frac{1}{2}$ y $z = 2$, tenemos que

$$A = \frac{5}{2}, \qquad B = 0$$

El hecho de que $B = 0$ indica que existe un cero en $z = 2$ que cancela el polo en $z = 2$. De hecho, los ceros se producen en $z = 2$ y $z = 3$. En consecuencia, $H(z)$ se reduce a

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1-3z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z-3}{z-\frac{1}{2}} \\ &= 1 - \frac{2.5z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$h(n) = \delta(n) - 2.5(\frac{1}{2})^{n-1}u(n-1)$$

El sistema de orden reducido obtenido cancelando el polo y el cero común está caracterizado por la ecuación en diferencias

$$y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + x(n) - 3x(n-1)$$

Aunque el sistema original también es estable BIBO debido a la cancelación polo–cero, en una implementación práctica de este sistema de segundo orden, podemos tener una inestabilidad debida a la cancelación imperfecta del polo y el cero.

EJEMPLO 3.5.4

Determine la respuesta del sistema

$$y(n) = \frac{5}{6}y(n-1) - \frac{1}{6}y(n-2) + x(n)$$

a la señal de entrada $x(n) = \delta(n) - \frac{1}{3}\delta(n-1)$.

Solución. La función de transferencia es

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}} \\ &= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} \end{aligned}$$

Este sistema tiene dos polos, uno en $z = \frac{1}{2}$ y el otro en $z = \frac{1}{3}$. La transformada z de la señal de entrada es

$$X(z) = 1 - \frac{1}{3}z^{-1}$$

En este caso, la señal de entrada contiene un cero en $z = \frac{1}{3}$ que cancela el polo en $z = \frac{1}{3}$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z)X(z) \\ Y(z) &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \end{aligned}$$

y por tanto la respuesta del sistema es

$$y(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$$

Evidentemente, el modo $(\frac{1}{3})^n$ se suprime de la salida como un resultado de la cancelación polo–cero.

3.5.5 Polos de orden múltiple y estabilidad

Como ya hemos visto, una condición necesaria y suficiente para que un sistema lineal invariante en el tiempo causal sea estable BIBO es que todos sus polos se encuentren dentro de la circunferencia unidad. La señal de entrada está acotada si su transformada z contiene polos $\{q_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, L$, que satisfacen la condición $|q_k| \leq 1$ para todo k. Observemos que la respuesta forzada del sistema dada por (3.5.6) también está acotada, incluso cuando la señal de entrada contiene uno o más polos distintos en la circunferencia unidad.

En vista del hecho de que una señal acotada puede tener polos sobre la circunferencia unidad, puede parecer que un sistema estable puede tener también polos sobre la circunferencia unidad. Sin embargo, esto no es así, ya que un sistema así produce una respuesta no acotada cuando se excita mediante una señal de entrada que también tiene un polo en la misma posición sobre la circunferencia unidad. El siguiente ejemplo ilustra esta cuestión.

EJEMPLO 3.5.5

Determine la respuesta al impulso del sistema causal descrito por la ecuación en diferencias

$$y(n) = y(n-1) + x(n)$$

Solución. La función de transferencia del sistema es

$$H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Observe que el sistema contiene un polo sobre la circunferencia unidad en $z = 1$. La transformada z de la señal de entrada $x(n) = u(n)$ es

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

que también tiene un polo en $z = 1$. Por tanto, la señal de salida tiene la transformada

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z)X(z) \\ &= \frac{1}{(1-z^{-1})^2} \end{aligned}$$

que tiene un polo doble en $z = 1$.

La transformada z inversa de $Y(z)$ es

$$y(n) = (n+1)u(n)$$

la cual es una señal en rampa. Por tanto, $y(n)$ no está acotada, incluso cuando la entrada está acotada. Por tanto, el sistema es inestable.

El Ejemplo 3.5.5 demuestra claramente que la estabilidad BIBO requiere que los polos del sistema estén estrictamente dentro de la circunferencia unidad. Si todos los polos del sistema están dentro de la circunferencia unidad y la secuencia de excitación $x(n)$ contiene uno o más polos que coinciden con los polos del sistema, la salida $Y(z)$ contendrá polos de orden múltiple. Como se ha indicado anteriormente, tales polos de orden múltiple dan lugar a una secuencia de salida que contiene términos de la forma

$$A_k n^b (p_k)^n u(n)$$

donde $0 \leq b \leq m-1$ y m es el orden del polo. Si $|p_k| < 1$, estos términos decrecen hasta cero cuando n tiende a infinito porque el factor exponencial $(p_k)^n$ domina el término n^b. En consecuencia, ninguna señal acotada puede producir una señal de salida no acotada si todos los polos del sistema se encuentran dentro de la circunferencia unidad.

Por último, debemos decir que los únicos sistemas útiles que contienen polos sobre la circunferencia unidad son los osciladores digitales que se estudiarán en el Capítulo 5. Tales sistemas se conocen como sistemas *marginalmente estables*.

3.5.6 Estabilidad de los sistemas de segundo orden

En esta sección vamos a proporcionar un análisis detallado de un sistema con dos polos. Como veremos en el Capítulo 9, los sistemas de dos polos forman los bloques básicos de construcción para la realización de sistemas de orden superior.

Consideremos el sistema causal de dos polos descrito por la ecuación en diferencias de segundo orden

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + b_0 x(n) \tag{3.5.7}$$

La función de transferencia es

$$\begin{aligned} H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-1}} \\ &= \frac{b_0 z^2}{z^2 + a_1 z + a_2} \end{aligned} \tag{3.5.8}$$

Este sistema tiene dos ceros en el origen y los polos en

$$p_1, p_2 = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2 - 4a_2}{4}} \tag{3.5.9}$$

El sistema es estable BIBO si los polos se encuentran dentro de la circunferencia unidad, es decir, si $|p_1| < 1$ y $|p_2| < 1$. Estas condiciones pueden estar relacionadas con los valores de los coeficientes a_1 y a_2. En particular, las raíces de una ecuación cuadrática satisfacen las siguientes relaciones

$$a_1 = -(p_1 + p_2) \tag{3.5.10}$$

$$a_2 = p_1 p_2 \tag{3.5.11}$$

A partir de (3.5.10) y (3.5.11) podemos obtener fácilmente las condiciones para a_1 y a_2 que deben satisfacerse para cumplir la condición de estabilidad. En primer lugar, a_2 debe satisfacer la condición

$$|a_2| = |p_1 p_2| = |p_1||p_2| < 1 \tag{3.5.12}$$

La condición para a_1 puede expresarse como

$$|a_1| < 1 + a_2 \tag{3.5.13}$$

Por tanto, un sistema de dos polos es estable si y sólo si los coeficientes a_1 y a_2 satisfacen las condiciones dadas por (3.5.12) y (3.5.13).

Las condiciones de estabilidad dadas en (3.5.12) y (3.5.13) definen una región en el plano de coeficientes (a_1, a_2) que tiene forma triangular, como se muestra en la Figura 3.5.1. El sistema es estable si y sólo si el punto (a_1, a_2) se encuentra dentro del triángulo, el cual denominamos *triángulo de estabilidad*.

Las características del sistema de dos polos dependen de la posición de los polos, o lo que es equivalente, de la posición del punto (a_1, a_2) dentro del triángulo de estabilidad. Los polos del sistema pueden ser reales o complejos conjugados, dependiendo del valor del discriminante $\Delta = a_1^2 - 4a_2$. La parábola $a_2 = a_1^2/4$ divide el triángulo de estabilidad en dos regiones, como se ilustra en la Figura 3.5.1. La región por debajo de la parábola $(a_1^2 > 4a_2)$ corresponde a dos polos reales y distintos. Los puntos sobre la parábola $(a_1^2 = 4a_2)$ producen polos reales e iguales (dobles). Por último, los puntos por encima de la parábola corresponden a los polos complejos conjugados.

Puede obtenerse información adicional sobre el comportamiento del sistema a partir de las respuestas al impulso unitario en los tres casos siguientes.

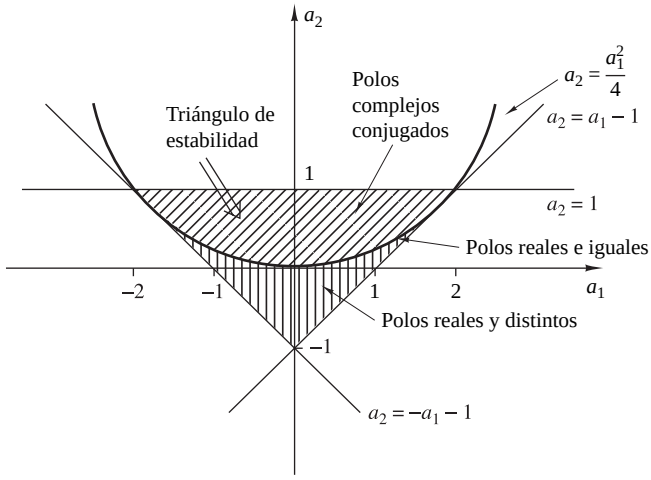


Figura 3.5.1. Región de estabilidad (triángulo de estabilidad) en el plano de coeficientes (a_1, a_2) para un sistema de segundo orden.

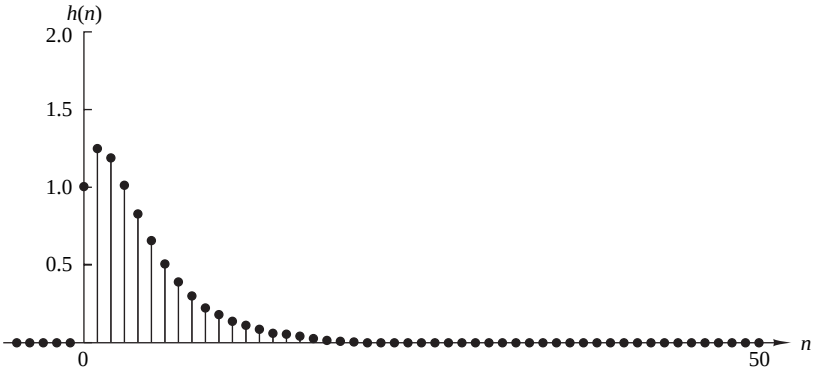


Figura 3.5.2. Gráfica de $h(n)$ dada por la Ecuación (3.5.16) con $p_1 = 0.5$, $p_2 = 0.75$; $h(n) = [1/(p_1 - p_2)](p_1^{n+1} - p_2^{n+1})u(n)$.

Polos reales y distintos ($a_1^2 > 4a_2$). Dado que p_1 y p_2 son reales y $p_1 \neq p_2$, la función de transferencia puede expresarse de la forma

$$H(z) = \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - p_2 z^{-1}} \tag{3.5.14}$$

donde

$$A_1 = \frac{b_0 p_1}{p_1 - p_2}, \qquad A_2 = \frac{-b_0 p_2}{p_1 - p_2} \tag{3.5.15}$$

Por tanto, la respuesta al impulso es

$$h(n) = \frac{b_0}{p_1 - p_2}(p_1^{n+1} - p_2^{n+1})u(n) \tag{3.5.16}$$

Por tanto, la respuesta al impulso es la diferencia de dos secuencias exponenciales decrecientes. La Figura 3.5.2 ilustra una gráfica típica para $h(n)$ cuando los polos son diferentes.

Polos reales e iguales ($a_1^2 = 4a_2$). En este caso, $p_1 = p_2 = p = -a_1/2$. La función de transferencia es

$$H(z) = \frac{b_0}{(1 - pz^{-1})^2} \tag{3.5.17}$$

y, por tanto, la respuesta al impulso unitario del sistema es

$$h(n) = b_0(n+1)p^n u(n) \tag{3.5.18}$$

Observe que $h(n)$ es el producto de una rampa por una exponencial decreciente real. La gráfica de $h(n)$ se muestra en la Figura 3.5.3.

Polos complejos conjugados ($a_1^2 < 4a_2$). Puesto que los polos son complejos conjugados, la función de transferencia puede descomponerse en factores y expresarse como sigue

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{A}{1 - pz^{-1}} + \frac{A^*}{1 - p^* z^{-1}} \\ &= \frac{A}{1 - re^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{A^*}{1 - re^{-j\omega_0} z^{-1}} \end{aligned} \tag{3.5.19}$$

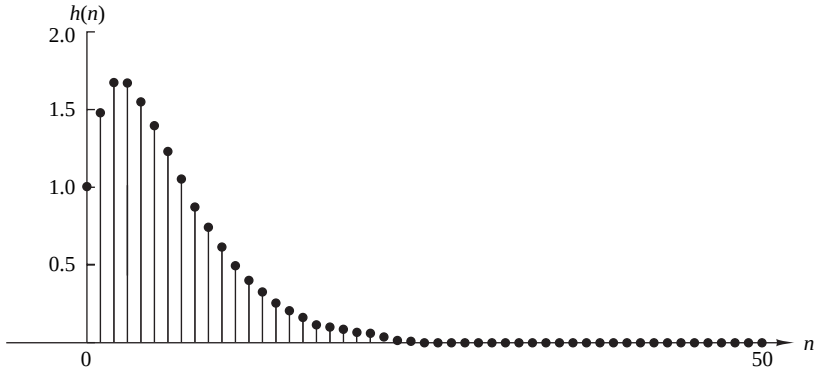


Figura 3.5.3. Gráfica de $h(n)$ dada por la Ecuación (3.5.18) con $p = \frac{3}{4}$; $h(n) = (n+1)p^n u(n)$.

donde $p = re^{j\omega}$ y $0 < \omega_0 < \pi$. Observe que cuando los polos son complejos conjugados, los parámetros a_1 y a_2 están relacionados con r y ω_0 según

$$\begin{aligned} a_1 &= -2r\cos\omega_0 \\ a_2 &= r^2 \end{aligned} \tag{3.5.20}$$

Es sencillo demostrar que la constante A en la expansión en fracciones parciales de $H(z)$ es igual a

$$A = \frac{b_0 p}{p - p^*} = \frac{b_0 r e^{j\omega_0}}{r(e^{j\omega_0} - e^{-j\omega_0})} = \frac{b_0 e^{j\omega_0}}{j2\,\text{sen}\,\omega_0} \tag{3.5.21}$$

Por tanto, la respuesta al impulso de un sistema con polos complejos conjugados es

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{b_0 r^n}{\text{sen}\,\omega_0}\frac{e^{j(n+1)\omega_0} - e^{-j(n+1)\omega_0}}{2j}u(n) \\ &= \frac{b_0 r^n}{\text{sen}\,\omega_0}\,\text{sen}(n+1)\omega_0 u(n) \end{aligned} \tag{3.5.22}$$

En este caso, $h(n)$ presenta un comportamiento oscilatorio con una envolvente que decrece exponencialmente cuando $r < 1$. El ángulo ω_0 de los polos determina la frecuencia de oscilación y la distancia r de los polos respecto del origen determina la velocidad de decrecimiento. Cuando r es próximo a la unidad, el decrecimiento es lento. Cuando r es próximo al origen, el decrecimiento es rápido. En la Figura 3.5.4 se muestra una gráfica típica de $h(n)$.

3.6 Transformada z unilateral

La transformada z unilateral requiere que las señales se especifiquen para el rango de tiempo completo $-\infty < n < \infty$. Este requisito permite su uso en una muy útil familia de problemas prácticos, principalmente en la evaluación de la salida de sistemas que no están en reposo. Recordemos que estos sistemas se describen mediante ecuaciones en diferencias con condiciones iniciales distintas de cero. Dado que la entrada se aplica en un instante finito, por ejemplo, en n_0, tanto la señal de entrada como la de salida se especifican para $n \geq n_0$, lo que no quiere decir que sean cero para $n < n_0$. Por tanto, la transformada z bilateral no se puede emplear. En esta sección vamos a desarrollar la transformada z unilateral, la cual se puede utilizar para resolver ecuaciones en diferencias con condiciones iniciales.

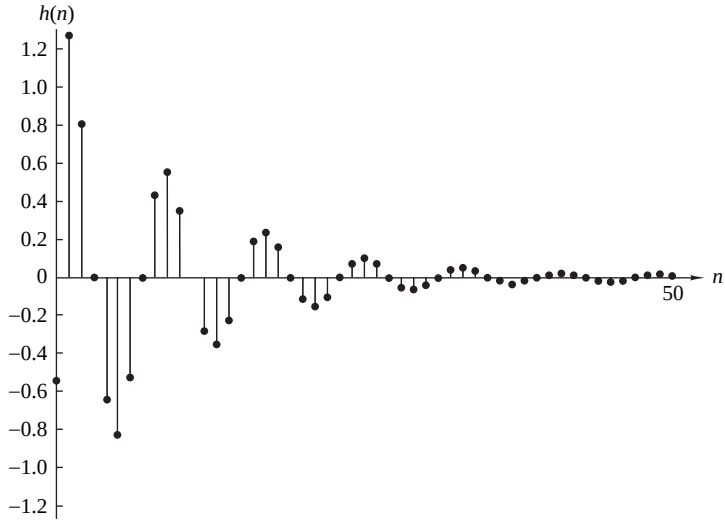


Figura 3.5.4. Gráfica de $h(n)$ dada por la Ecuación (3.5.22) con $b_0 = 1$, $\omega_0 = \pi/4$, $r = 0.9$; $h(n) = [b_0 r^n/(\operatorname{sen}\omega_0)]\operatorname{sen}[(n+1)\omega_0]u(n)$.

3.6.1 Definición y propiedades

La transformada *z unilateral* de una señal $x(n)$ se define como

$$X^+(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \tag{3.6.1}$$

También podemos emplear la notación $Z^+\{x(n)\}$, por lo que

$$x(n) \overset{z^+}{\longleftrightarrow} X^+(z)$$

La transformada z unilateral se diferencia de la transformada bilateral en el límite inferior del sumatorio, que es siempre cero independientemente de que la señal $x(n)$ sea cero para $n < 0$ (es decir, sea causal). Debido a esta elección del límite inferior, la transformada z unilateral tiene las características siguientes:

1. No contiene información acerca de la señal $x(n)$ para los instantes de tiempo negativos (es decir, para $n < 0$).
2. Es *unívoca* sólo para señales causales, ya que sólo estas señales son cero para $n < 0$.
3. La transformada z unilateral $X^+(z)$ de $x(n)$ es idéntica a la transformada z bilateral de la señal $x(n)u(n)$. Puesto que $x(n)u(n)$ es causal, la ROC de su transformada, y por tanto la ROC de $X^+(z)$, es siempre la región exterior a una circunferencia. Por tanto, cuando trabajemos con transformadas z unilaterales, no será necesario hacer referencia a su región de convergencia.

EJEMPLO 3.6.1

Determine la transformada z unilateral de la señales del Ejemplo 3.1.1.

Solución. A partir de la definición (3.6.1), obtenemos

$$x_1(n) = \{\underset{\uparrow}{1},2,5,7,0,1\} \overset{z^+}{\longleftrightarrow} X_1^+(z) = 1+2z^{-1}+5z^{-2}+7z^{-3}+z^{-5}$$

$$x_2(n) = \{1,2,\underset{\uparrow}{5},7,0,1\} \overset{z^+}{\longleftrightarrow} X_2^+(z) = 5+7z^{-1}+z^{-3}$$

$$x_3(n) = \{\underset{\uparrow}{0},0,1,2,5,7,0,1\} \overset{z^+}{\longleftrightarrow} X_3^+(z) = z^{-2}+2z^{-3}+5z^{-4}+7z^{-5}+z^{-7}$$

$$x_4(n) = \{2,4,\underset{\uparrow}{5},7,0,1\} \overset{z^+}{\longleftrightarrow} X_4^+(z) = 5+7z^{-1}+z^{-3}$$

$$x_5(n) = \delta(n) \overset{z^+}{\longleftrightarrow} X_5^+(z) = 1$$

$$x_6(n) = \delta(n-k), \qquad k>0 \overset{z^+}{\longleftrightarrow} X_6^+(z) = z^{-k}$$

$$x_7(n) = \delta(n+k), \qquad k>0 \overset{z^+}{\longleftrightarrow} X_7^+(z) = 0$$

Observe que para una señal no causal, la transformada z unilateral es unívoca. Por tanto, $X_2^+(z) = X_4^+(z)$ pero $x_2(n) \neq x_4(n)$. Para señales anticausales, $X^+(z)$ siempre es cero.

Casi todas las propiedades que hemos estudiado para la transformada z bilateral pueden extenderse a la transformada z unilateral con la excepción de la propiedad de *desplazamiento*.

Propiedad de desplazamiento.

CASO 1: RETARDO TEMPORAL. Si

$$x(n) \overset{z^+}{\longleftrightarrow} X^+(z)$$

entonces

$$x(n-k) \overset{z^+}{\longleftrightarrow} z^{-k}[X^+(z) + \sum_{n=1}^{k} x(-n)z^n], \qquad k>0 \tag{3.6.2}$$

Si $x(n)$ es causal, entonces

$$x(n-k) \overset{z^+}{\longleftrightarrow} z^{-k}X^+(z) \tag{3.6.3}$$

Demostración. A partir de la definición (3.6.1), tenemos

$$Z^+\{x(n-k)\} = z^{-k}\left[\sum_{l=-k}^{-1} x(l)z^{-l} + \sum_{l=0}^{\infty} x(l)z^{-l}\right]$$

$$= z^{-k}\left[\sum_{l=-1}^{-k} x(l)z^{-l} + X^+(z)\right]$$

Cambiando el índice de l a $n=-l$, se obtiene fácilmente el resultado dado por (3.6.2).

EJEMPLO 3.6.2

Determine la transformada z unilateral de las señales

(a) $x(n) = a^n u(n)$

(b) $x_1(n) = x(n-2)$ donde $x(n) = a^n$

Solución.

(a) A partir de (3.6.1), obtenemos fácilmente

$$X^+(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

(b) Aplicamos la propiedad de desplazamiento para $k = 2$. Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned} Z^+\{x(n-2)\} &= z^{-2}[X^+(z) + x(-1)z + x(-2)z^2] \\ &= z^{-2}X^+(z) + x(-1)z^{-1} + x(-2) \end{aligned}$$

Dado que $x(-1) = a^{-1}$, $x(-2) = a^{-2}$, obtenemos

$$X_1^+(z) = \frac{z^{-2}}{1-az^{-1}} + a^{-1}z^{-1} + a^{-2}$$

El significado de la propiedad de desplazamiento puede explicarse de forma intuitiva si escribimos la expresión (3.6.2) como sigue:

$$\begin{aligned} Z^+\{x(n-k)\} = [x(-k) + x(-k+1)z^{-1} + \cdots + x(-1)z^{-k+1}] \\ + z^{-k}X^+(z), \qquad k > 0 \end{aligned} \tag{3.6.4}$$

Para obtener $x(n-k)(k > 0)$ a partir de $x(n)$, desplazamos $x(n)$ k muestras a la derecha. Así, las k muestras "nuevas", $x(-k), x(-k+1), \ldots, x(-1)$, entran en el eje de tiempos positivo con $x(-k)$ colocado en el instante cero. El primer término de la expresión (3.6.4) establece la transformada z de estas señales. Las muestras "antiguas" de $x(n-k)$ son las mismas que las de $x(n)$ simplemente desplazadas k muestras hacia la derecha. Obviamente, su transformada z es $z^{-k}X^+(z)$, que es el segundo término de (3.6.4).

CASO 2: AVANCE TEMPORAL. Si

$$x(n) \overset{z^+}{\longleftrightarrow} X^+(z)$$

entonces

$$x(n+k) \overset{z^+}{\longleftrightarrow} z^k \left[X^+(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n)z^{-n} \right], \qquad k > 0 \tag{3.6.5}$$

Demostración. A partir de (3.6.1), tenemos

$$Z^+\{x(n+k)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n+k)z^{-n} = z^k \sum_{l=k}^{\infty} x(l)z^{-l}$$

donde hemos cambiado el índice del sumatorio de n a $l = n+k$. Ahora, a partir de (3.6.1), obtenemos

$$X^+(z) = \sum_{l=0}^{\infty} x(l)z^{-l} = \sum_{l=0}^{k-1} x(l)z^{-l} + \sum_{l=k}^{\infty} x(l)z^{-l}$$

Combinando las dos relaciones anteriores, obtenemos fácilmente (3.6.5).

EJEMPLO 3.6.3

Con la señal $x(n)$ dada en el Ejemplo 3.6.2, determine la transformada z unilateral de la señal

$$x_2(n) = x(n+2)$$

Solución. Aplicamos el teorema de desplazamiento para $k = 2$. A partir de la Ecuación (3.6.5), para $k = 2$, obtenemos

$$Z^+\{x(n+2)\} = z^2X^+(z) - x(0)z^2 - x(1)z$$

Pero $x(0) = 1$, $x(1) = a$ y $X^+(z) = 1/(1 - az^{-1})$. Por tanto,

$$Z^+\{x(n+2)\} = \frac{z^2}{1 - az^{-1}} - z^2 - az$$

La propiedad de avance temporal puede explicarse de forma intuitiva del siguiente modo: para obtener $x(n+k)$, $k > 0$, desplazamos $x(n)$ k muestras hacia la izquierda. Como resultado de esto, las muestras $x(0), x(1), \ldots, x(k-1)$ "abandonan" el eje de tiempos positivo. Por tanto, primero eliminamos su contribución a $X^+(z)$, y luego multiplicamos lo que queda por z^k para compensar el desplazamiento de la señal k muestras.

La importancia de la propiedad de desplazamiento está unida a su aplicación para la obtención de la solución de ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes y condiciones iniciales distintas de cero. Esto hace que la transformada z unilateral sea una útil herramienta en el análisis de los sistemas discretos en el tiempo LTI y recursivos.

Un teorema importante en el análisis de señales y sistemas es el teorema del valor final.

Teorema del valor final. Si

$$x(n) \overset{z^+}{\longleftrightarrow} X^+(z)$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(z-1)X^+(z) \tag{3.6.6}$$

El límite de la expresión (3.6.6) existe si la ROC de $(z-1)X^+(z)$ incluye a la circunferencia unidad.

La demostración de este teorema se deja como ejercicio al lector.

Este teorema resulta útil cuando estamos interesados en el comportamiento asintótico de una señal $x(n)$ y conocemos su transformada z, pero no la propia señal. En estos casos, especialmente si es complicado invertir $X^+(z)$, podemos utilizar el teorema del valor final para determinar el límite de $x(n)$ cuando n tiende a infinito.

EJEMPLO 3.6.4

La respuesta al impulso de un sistema lineal invariante en el tiempo en reposo es $h(n) = \alpha^n u(n)$, $|\alpha| < 1$. Determine el valor de la respuesta del sistema al escalón cuando $n \to \infty$.

Solución. La respuesta al escalón del sistema es

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

donde

$$x(n) = u(n)$$

Obviamente, si excitamos un sistema causal con una entrada causal, la salida será causal. Puesto que las señales $h(n)$, $x(n)$, $y(n)$ son causales, las transformadas z unilateral y bilateral son idénticas. Utilizando la propiedad de convolución dada por (3.2.17), sabemos que las transformadas z de $h(n)$ y $x(n)$ tienen que multiplicarse para proporcionar la transformada z de la salida. Así,

$$Y(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z^2}{(z-1)(z-\alpha)}, \qquad \text{ROC: } |z| > |\alpha|$$

Ahora

$$(z-1)Y(z) = \frac{z^2}{z-\alpha}, \qquad \text{ROC: } |z| < |\alpha|$$

Dado que $|\alpha| < 1$, la ROC de $(z-1)Y(z)$ incluye la circunferencia unidad. En consecuencia, podemos aplicar la expresión (3.6.6) y obtener

$$\lim_{n\to\infty} y(n) = \lim_{z\to 1} \frac{z^2}{z-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$$

3.6.2 Solución de las ecuaciones en diferencias

La transformada z unilateral es una herramienta muy eficiente para obtener la solución de ecuaciones en diferencias con condiciones iniciales distintas de cero. Se consigue reduciendo la ecuación en diferencias que relaciona las dos señales en el tiempo a una ecuación algebraica equivalente que relaciona sus transformadas z unilaterales. Esta ecuación se puede resolver fácilmente para obtener la transformada de la señal deseada. La señal en el dominio del tiempo se obtiene invirtiendo la transformada z resultante. Vamos a ilustrar este método mediante dos ejemplos.

EJEMPLO 3.6.5

La conocida secuencia de Fibonacci de números enteros se obtiene calculando cada término como la suma de los dos términos anteriores. Los primeros términos de la secuencia son

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$$

Determine una expresión cerrada para el término $n-$ésimo de la secuencia de Fibonacci.

Solución. Sea $y(n)$ el término $n-$ésimo de la secuencia de Fibonacci. Evidentemente, $y(n)$ satisface la ecuación en diferencias

$$y(n) = y(n-1) + y(n-2) \tag{3.6.7}$$

con las condiciones iniciales

$$y(0) = y(-1) + y(-2) = 1 \tag{3.6.8a}$$

$$y(1) = y(0) + y(-1) = 1 \tag{3.6.8b}$$

A partir de (3.6.8b) tenemos que $y(-1) = 0$. Luego, (3.6.8a) proporciona $y(-2) = 1$. Por tanto, tenemos que determinar $y(n)$, $n \geq 0$, que satisface (3.6.7), con las condiciones iniciales $y(-1) = 0$ e $y(-2) = 1$.

Tomando la transformada z unilateral de (3.6.7) y utilizando la propiedad de desplazamiento temporal (3.6.2), obtenemos

$$Y^+(z) = [z^{-1}Y^+(z) + y(-1)] + [z^{-2}Y^+(z) + y(-2) + y(-1)z^{-1}]$$

o

$$Y^+(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} - z^2} = \frac{z^2}{z^2 - z - 1} \tag{3.6.9}$$

donde hemos utilizado el hecho de que $y(-1) = 0$ e $y(-2) = 1$.

Podemos invertir $Y^+(z)$ aplicando el método de la expansión en fracciones parciales. Los polos de $Y^+(z)$ son

$$p_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad p_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

y los correspondientes coeficientes son $A_1 = p_1/\sqrt{5}$ y $A_2 = -p_2/\sqrt{5}$. Por tanto,

$$y(n) = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] u(n)$$

o, lo que es equivalente,

$$y(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1}\right]u(n) \tag{3.6.10}$$

EJEMPLO 3.6.6

Determine la respuesta al escalón del sistema

$$y(n) = \alpha y(n-1) + x(n), \qquad -1 < \alpha < 1 \tag{3.6.11}$$

cuando la condición inicial es $y(-1) = 1$.

Solución. Tomando la transformada z unilateral en ambos lados de la Ecuación (3.6.11), obtenemos

$$Y^+(z) = \alpha[z^{-1}Y^+(z) + y(-1)] + X^+(z)$$

Sustituyendo $y(-1)$ y $X^+(z)$ y resolviendo para obtener $Y^+(z)$, tenemos que

$$Y^+(z) = \frac{\alpha}{1-\alpha z^{-1}} + \frac{1}{(1-\alpha z^{-1})(1-z^{-1})} \tag{3.6.12}$$

Realizando una expansión en fracciones parciales y calculando la transformada inversa del resultado, tenemos

$$\begin{aligned} y(n) &= \alpha^{n+1}u(n) + \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}u(n) \\ &= \frac{1}{1-\alpha}(1-\alpha^{n+2})u(n) \end{aligned} \tag{3.6.13}$$

3.6.3 Respuesta de los sistemas de polos y ceros con condiciones iniciales distintas de cero

Supongamos que la señal $x(n)$ se aplica a un sistema de polos y ceros en $n = 0$. Por tanto, suponemos que la señal $x(n)$ es causal. Los efectos de todas las señales anteriores de entrada al sistema se reflejan en las condiciones iniciales $y(-1)$, $y(-2), \ldots, y(-N)$. Puesto que la entrada $x(n)$ es causal y dado que estamos interesados en determinar la salida $y(n)$ para $n \geq 0$, podemos utilizar la transformada z unilateral, que nos permite tratar con las condiciones iniciales. Luego la transformada z unilateral dada en (3.3.7) se transforma en

$$Y^+(z) = -\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}\left[Y^+(z) + \sum_{n=1}^{k} y(-n)z^n\right] + \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X^+(z) \tag{3.6.14}$$

Dado que $x(n)$ es causal, podemos hacer $X^+(z) = X(z)$. En cualquier caso, la Ecuación (3.6.14) se puede expresar como

$$\begin{aligned} Y^+(z) &= \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} X(z) - \frac{\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} \sum_{n=1}^{k} y(-n)z^n}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \\ &= H(z)X(z) + \frac{N_0(z)}{A(z)} \end{aligned} \tag{3.6.15}$$

donde

$$N_0(z) = -\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} \sum_{n=1}^{k} y(-n) z^n \tag{3.6.16}$$

A partir de (3.6.15) es evidente que la salida del sistema con condiciones iniciales distintas de cero se puede dividir en dos partes. La primera es la respuesta al estado nulo del sistema, definida en el dominio z como

$$Y_{\text{zs}}(z) = H(z)X(z) \tag{3.6.17}$$

La segunda componente corresponde a la salida resultante de las condiciones iniciales distintas de cero. Esta salida es la respuesta a la entrada nula del sistema, que se define en el dominio z como

$$Y_{\text{zi}}^{+}(z) = \frac{N_0(z)}{A(z)} \tag{3.6.18}$$

Luego la respuesta total es la suma de estas dos componentes de salida, que pueden expresarse en el dominio del tiempo determinando las transformadas z inversas $Y_{\text{zs}}(z)$ e $Y_{\text{zi}}(z)$ por separado, y sumando los resultados, así

$$y(n) = y_{\text{zs}}(n) + y_{\text{zi}}(n) \tag{3.6.19}$$

Puesto que el denominador de $Y_{\text{zi}}^{+}(z)$ es $A(z)$, sus polos son $p_1, p_2, \ldots, p_N$. En consecuencia, la respuesta para la entrada nula tiene la forma

$$y_{\text{zi}}(n) = \sum_{k=1}^{N} D_k (p_k)^n u(n) \tag{3.6.20}$$

lo que se puede sumar a (3.6.4) y los términos que implican los polos $\{p_k\}$ se pueden combinar para obtener la respuesta total de la forma

$$y(n) = \sum_{k=1}^{N} A_k' (p_k)^n u(n) + \sum_{k=1}^{L} Q_k (q_k)^n u(n) \tag{3.6.21}$$

donde, por definición,

$$A_k' = A_k + D_k \tag{3.6.22}$$

Este desarrollo indica claramente que el efecto de las condiciones iniciales es alterar la respuesta natural del sistema a través de la modificación de los factores de escala $\{A_k\}$. Las condiciones iniciales distintas de cero no introducen nuevos polos. Además, no tienen efecto sobre la respuesta forzada del sistema. Estas importantes cuestiones se refuerzan en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.6.7

Determine la respuesta al escalón unidad del sistema descrito por la ecuación en diferencias

$$y(n) = 0.9y(n-1) - 0.81y(n-2) + x(n)$$

bajo las siguientes condiciones iniciales $y(-1) = y(-2) = 1$.

Solución. La función de transferencia es

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}}$$

Este sistema tiene dos polos complejos conjugados en

$$p_1 = 0.9e^{j\pi/3}, \qquad p_2 = 0.9e^{-j\pi/3}$$

La transformada z de la secuencia escalón es

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} Y_{\text{zs}}(z) &= \frac{1}{(1-0.9e^{j\pi/3}z^{-1})(1-0.9e^{-j\pi/3}z^{-1})(1-z^{-1})} \\ &= \frac{0.0496-j0.542}{1-0.9e^{j\pi/3}z^{-1}} + \frac{0.0496+j0.542}{1-0.9e^{-j\pi/3}z^{-1}} + \frac{1.099}{1-z^{-1}} \end{aligned}$$

y la respuesta al estado nulo es

$$y_{\text{zs}}(n) = \left[1.099 + 1.088(0.9)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n - 5.2^\circ\right)\right] u(n)$$

Para las condiciones iniciales $y(-1) = y(-2) = 1$, la componente adicional en la transformada z es

$$\begin{aligned} Y_{\text{zi}}(z) &= \frac{N_0(z)}{A(z)} = \frac{0.09-0.81z^{-1}}{1-0.9z^{-1}+0.81z^{-2}} \\ &= \frac{0.045+j0.4936}{1-0.9e^{j\pi/3}z^{-1}} + \frac{0.045-j0.4936}{1-0.9e^{-j\pi/3}z^{-1}} \end{aligned}$$

En consecuencia, la respuesta a la entrada nula es

$$y_{\text{zi}}(n) = 0.988(0.9)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n + 87^\circ\right) u(n)$$

En este caso, la respuesta total tiene la transformada z

$$\begin{aligned} Y(z) &= Y_{\text{zs}}(z) + Y_{\text{zi}}(z) \\ &= \frac{1.099}{1-z^{-1}} + \frac{0.568+j0.445}{1-0.9e^{j\pi/3}z^{-1}} + \frac{0.568-j0.445}{1-0.9e^{-j\pi/3}z^{-1}} \end{aligned}$$

La transformada inversa proporciona la respuesta total de la forma

$$y(n) = 1.099u(n) + 1.44(0.9)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n + 38^\circ\right) u(n)$$

3.7 Resumen y referencias

La transformada z desempeña el mismo papel en las señales y sistemas discretos en el tiempo que la transformada de Laplace para las señales y sistemas continuos en el tiempo. En este capítulo hemos deducido importantes propiedades de la transformada z, que resultan extremadamente útiles en el análisis de los sistemas discretos en el tiempo. De particular importancia es la propiedad de la convolución, que transforma la convolución de dos secuencias en un producto de sus transformadas z.

En el contexto de los sistemas LTI, la propiedad de convolución resulta del producto de la transformada z $X(z)$ de la señal de entrada con la función de transferencia $H(z)$, donde esta última es la transformada z de la respuesta al impulso unitario. Esta relación nos permite determinar la salida de un sistema LTI en respuesta a una entrada cuya transformada es $X(z)$, calculando el producto $Y(z) = H(z)X(z)$ y determinando a continuación la transformada z inversa de $Y(z)$ para obtener la secuencia de salida $y(n)$.

Hemos visto que muchas señales de interés práctico tiene transformadas z racionales. Además, los sistemas LTI caracterizados por ecuaciones en diferencias lineales de coeficientes constantes también tienen funciones de transferencia racionales. En consecuencia, hemos hecho especial enfásis en la inversión de las transformadas racionales a la hora de determinar la transformada z inversa. Para el cálculo de las transformadas racionales, el método de expansión en fracciones parciales es relativamente fácil de aplicar, junto con la ROC, para determinar la correspondiente secuencia en el dominio del tiempo.

Nos hemos ocupado de la caracterización de los sistemas LTI en el dominio de la transformada z. En particular, hemos relacionado las posiciones de los polos y los ceros de un sistema con sus características en el dominio del tiempo y hemos enunciado de nuevo los requisitos de estabilidad y causalidad de los sistemas LTI en función de las posiciones de los polos. Hemos demostrado que un sistema causal tiene una función de transferencia $H(z)$ con una región de convergencia $|z| > r_1$, donde $0 < r_1 \leq \infty$. En un sistema estable y causal, los polos de $H(z)$ deben encontrarse dentro de la circunferencia unidad. Por el contrario, si el sistema es no causal, la condición de la estabilidad requiere que la circunferencia unidad pertenezca a la ROC de $H(z)$. Por tanto, un sistema LTI no causal estable tiene una función de transferencia con polos situados en el interior y en el exterior de la circunferencia unidad con una región de convergencia anular que incluye la circunferencia unidad. Por último, hemos presentado la transformada z unilateral para poder calcular la respuesta de los sistemas causales excitados por señales de entrada causales con condiciones iniciales distintas de cero.

Problemas

3.1 Determine la transformada z de las siguientes señales.

(a) $x(n) = \{3, 0, 0, 0, 0, \underset{\uparrow}{6}, 1, -4\}$

(b) $x(n) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^n, & n \geq 5 \\ 0, & n \leq 4 \end{cases}$

3.2 Determine la transformada z de las siguientes señales y dibuje los patrones de polos y ceros correspondientes.

(a) $x(n) = (1+n)u(n)$

(b) $x(n) = (a^n + a^{-n})u(n)$, a real

(c) $x(n) = (-1)^n 2^{-n} u(n)$

(d) $x(n) = (na^n \operatorname{sen} \omega_0 n)u(n)$

(e) $x(n) = (na^n \cos \omega_0 n)u(n)$

(f) $x(n) = Ar^n \cos(\omega_0 n + \phi)u(n), 0 < r < 1$

(g) $x(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n)(\frac{1}{3})^{n-1} u(n-1)$

(h) $x(n) = (\frac{1}{2})^n [u(n) - u(n-10)]$

3.3 Determine la transformada z y dibuje la ROC de las señales siguientes.

(a) $x_1(n) = \begin{cases} (\frac{1}{3})^n, & n \geq 0 \\ (\frac{1}{2})^{-n}, & n < 0 \end{cases}$

(b) $x_2(n) = \begin{cases} (\frac{1}{3})^n - 2^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$

(c) $x_3(n) = x_1(n+4)$

(d) $x_4(n) = x_1(-n)$

3.4 Determine la transformada z de las siguientes señales.

(a) $x(n) = n(-1)^n u(n)$

(b) $x(n) = n^2 u(n)$

(c) $x(n) = -na^n u(-n-1)$

(d) $x(n) = (-1)^n \left(\cos \frac{\pi}{3} n\right) u(n)$

(e) $x(n) = (-1)^n u(n)$

(f) $x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 0, -1, 0, 1, -1, \ldots\}$

3.5 Determine las regiones de convergencia de las secuencias unilaterales por la derecha y por la izquierda y bilateral de duración finita.

3.6 Exprese la transformada z de

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$

en función de $X(z)$. [*Consejo*: Halle la diferencia $y(n) - y(n-1)$.]

3.7 Calcule la convolución de las señales siguientes utilizando la transformada z.

$$x_1(n) = \begin{cases} (\frac{1}{3})^n, & n \geq 0 \\ (\frac{1}{2})^{-n}, & n < 0 \end{cases}$$

$$x_2(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$$

3.8 Utilice la propiedad de la convolución para:

(a) Expresar la transformada z de

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$

en función de $X(z)$.

(b) Determine la transformada z de $x(n) = (n+1)u(n)$. [*Consejo*: demuestre primero que $x(n) = u(n) * u(n)$.]

3.9 La transformada z $X(z)$ de una señal real $x(n)$ incluye una pareja de ceros complejos conjugados y una pareja de polos complejos conjugados. ¿Qué ocurre con estas parejas si multiplicamos $x(n)$ por $e^{j\omega_0 n}$? (*Consejo*: utilice el teorema de cambio de escala en el dominio z.)

3.10 Aplique el teorema del valor final para determinar $x(\infty)$ en la señal

$$x(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ es par} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

3.11 Utilizando divisiones sucesivas, determine la transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$$

si **(a)** $x(n)$ es causal y **(b)** $x(n)$ es anticausal.

3.12 Determine la señal causal $x(n)$ que tiene la transformada z

$$X(z) = \frac{1}{(1-2z^{-1})(1-z^{-1})2}$$

3.13 Sea $x(n)$ una secuencia con la transformada z $X(z)$. Determine, en función de $X(z)$, la transformada z de las siguientes señales.

(a) $x_1(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{2}\right), & \text{si } n \text{ par} \\ 0, & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$

(b) $x_2(n) = x(2n)$

3.14 Determine la señal causal $x(n)$ si su transformada z $X(z)$ está dada por:

(a) $X(z) = \dfrac{1+3z^{-1}}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}$

(b) $X(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$

(c) $X(z) = \dfrac{z^{-6}+z^{-7}}{1-z^{-1}}$

(d) $X(z) = \dfrac{1+2z^{-2}}{1+z^{-2}}$

(e) $X(z) = \dfrac{1}{4}\dfrac{1+6z^{-1}+z^{-2}}{(1-2z^{-1}+2z^{-2})(1-0.5z^{-1})}$

(f) $X(z) = \dfrac{2-1.5z^{-1}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}$

(g) $X(z) = \dfrac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1+4z^{-1}+4z^{-2}}$

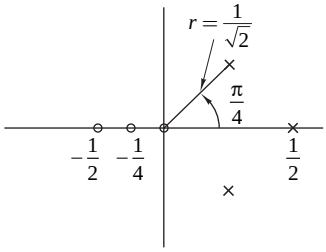


Figura P.3.14.

(h) $X(z)$ está especificada por el patrón de polos y ceros de la Figura P.3.14. La constante $G = \dfrac{1}{4}$.

(i) $X(z) = \dfrac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$

(j) $X(z) = \dfrac{1 - az^{-1}}{z^{-1} - a}$

3.15 Determine todas las señales $x(n)$ posibles asociadas a la transformada z

$$X(z) = \frac{5z^{-1}}{(1-2z^{-1})(3-z^{-1})}$$

3.16 Determine la convolución de las siguientes parejas de señales, utilizando la transformada z.

(a) $x_1(n) = (\frac{1}{4})^n u(n-1), \quad x_2(n) = [1 + (\frac{1}{2})^n]u(n)$

(b) $x_1(n) = u(n), \qquad x_2(n) = \delta(n) + (\frac{1}{2})^n u(n)$

(c) $x_1(n) = (\frac{1}{2})^n u(n), \quad x_2(n) = \cos \pi n u(n)$

(d) $x_1(n) = nu(n), \qquad x_2(n) = 2^n u(n-1)$

3.17 Demuestre el teorema del valor final para la transformada z unilateral.

3.18 Si $X(z)$ es la transformada z de $x(n)$, demuestre que:

(a) $Z\{x^*(n)\} = X^*(z^*)$

(b) $Z\{\mathrm{Re}[x(n)]\} = \frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$

(c) $Z\{\mathrm{Im}[x(n)]\} = \frac{1}{2}[X(z) - X^*(z^*)]$

(d) Si $x_k(n) = \begin{cases} x\left(\dfrac{n}{k}\right), & \text{si } n/k \text{ entero} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$ entonces $X_k(z) = X(z^k)$

(e) $Z\{e^{j\omega_0 n}x(n)\} = X(ze^{-j\omega_0})$

3.19 Diferenciando $X(z)$ en primer lugar y utilizando a continuación las propiedades adecuadas de la transformada z, determine $x(n)$ para las siguientes transformadas.

(a) $X(z) = \log(1-2z), \quad |z| < \dfrac{1}{2}$

(b) $X(z) = \log(1-z^{-1}), \quad |z| > \dfrac{1}{2}$

3.20 **(a)** Dibuje el patrón de polos y ceros de la señal

$$x_1(n) = (r^n \operatorname{sen} \omega_0 n)u(n), \qquad 0 < r < 1$$

(b) Calcule la transformada z $X_2(z)$, que se corresponde con el patrón de polos y ceros determinado en el apartado (a).

(c) Compare $X_1(z)$ con $X_2(z)$. ¿Son idénticas? Si no lo son, indique un método para deducir $X_1(z)$ a partir del patrón de polos y ceros.

3.21 Demuestre que las raíces de un polinomio con coeficientes reales son pares de valores reales o complejos conjugados. En general, la afirmación inversa no es cierta.

3.22 Demuestre las propiedades de convolución y correlación de la transformada z utilizando sólo su definición.

3.23 Determine la señal $x(n)$ cuya transformada z es

$$X(z) = e^z + e^{1/z}, \qquad |z| \neq 0$$

3.24 Determine, mediante una expresión cerrada, las señales causales $x(n)$ cuyas transformadas z están dadas por:

(a) $X(z) = \dfrac{1}{1 + 1.5z^{-1} - 0.5z^{-2}}$

(b) $X(z) = \dfrac{1}{1 - 0.5z^{-1} + 0.6z^{-2}}$

Compruebe parcialmente sus resultados calculando $x(0)$, $x(1)$, $x(2)$ y $x(\infty)$ aplicando un método alternativo.

3.25 Determine todas las señales posibles que pueden tener las transformadas z siguientes.

(a) $X(z) = \dfrac{1}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}$

(b) $X(z) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}$

3.26 Determine la señal $x(n)$ cuya transformada z es

$$X(z) = \frac{3}{1 - \frac{10}{3}z^{-1} + z^{-2}}$$

si $X(z)$ converge en la circunferencia unidad.

3.27 Demuestre la relación de convolución compleja dada por la expresión (3.2.22).

3.28 Demuestre las propiedades de conjugación y la relación de Parseval para la transformada z dada en la Tabla 3.2.

3.29 En el Ejemplo 3.4.1 hemos obtenido $x(n)$, $n < 0$, realizando integraciones de contorno para cada valor de n. En general, este procedimiento resulta tedioso. Y puede evitarse transformando la integral de contorno en el plano z al plano $w = 1/z$. Por tanto, un círculo de radio R en el plano z se corresponde con un círculo de radio $1/R$ en el plano w. En consecuencia, un polo situado dentro de la circunferencia unidad en el plano z se corresponde con un polo situado en el exterior de la circunferencia unidad en el plano w. Haciendo el cambio de variable $w = 1/z$ en la integral de contorno, determine la seceuncia $x(n)$ para $n < 0$ en el Ejemplo 3.4.1.

3.30 Sea $x(n)$, $0 \leq n \leq N-1$ una secuencia de duración finita, la cual es también una secuencia real y par. Demuestre que los ceros del polinomio $X(z)$ aparecen como pares reflejados alrededor de la circunferencia unidad. Es decir, si $z = re^{j\theta}$ es un cero de $X(z)$, entonces $z = (1/r)e^{j\theta}$ también es un cero.

3.31 Demuestre que la secuencia de Fibonacci puede interpretarse como la respuesta al impulso del sistema descrito por la ecuación en diferencias $y(n) = y(n-1) + y(n-2) + x(n)$. A continuación, determine $h(n)$ utilizando la transformada z.

3.32 Demuestre que los siguientes sistemas son equivalentes.

(a) $y(n) = 0.2y(n-1) + x(n) - 0.3x(n-1) + 0.02x(n-2)$

(b) $y(n) = x(n) - 0.1x(n-1)$

3.33 Considere la secuencia $x(n) = a^n u(n)$, $-1 < a < 1$. Determine al menos dos secuencias distintas de $x(n)$, pero que tengan la misma autocorrelación.

3.34 Calcule la respuesta al escalón unidad de un sistema que tiene la siguiente respuesta al impulso

$$h(n) = \begin{cases} 3^n, & n < 0 \\ (\dfrac{2}{5})^n, & n \geq 0 \end{cases}$$

3.35 Calcule la respuesta al estado nulo para las siguientes parejas de funciones del sistema y señales de entrada.

(a) $h(n) = (\frac{1}{3})^n u(n), \quad x(n) = (\frac{1}{2})^n \big(\cos \frac{\pi}{3} n\big) u(n)$

(b) $h(n) = (\frac{1}{2})^n u(n), \quad x(n) = (\frac{1}{3})^n u(n) + (\frac{1}{2})^{-n} u(-n-1)$

(c) $y(n) = -0.1y(n-1) + 0.2y(n-2) + x(n) + x(n-1) x(n) = (\frac{1}{3})^n u(n)$

(d) $y(n) = \frac{1}{2}x(n) - \frac{1}{2}x(n-1) x(n) = 10\big(\cos \frac{\pi}{2} n\big) u(n)$

(e) $y(n) = -y(n-2) + 10x(n) x(n) = 10\big(\cos \frac{\pi}{2} n\big) u(n)$

(f) $h(n) = (\frac{2}{5})^n u(n), \quad x(n) = u(n) - u(n-7)$

(g) $h(n) = (\frac{1}{2})^n u(n), \quad x(n) = (-1)^n, \quad -\infty < n < \infty$

(h) $h(n) = (\frac{1}{2})^n u(n), \quad x(n) = (n+1)(\frac{1}{4})^n u(n)$

3.36 Considere el sistema

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + 2z^{-2} - z^{-3}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.2z^{-1})}, \qquad \text{ROC: } 0.5|z| > 1$$

(a) Dibuje el patrón de polos y ceros. ¿Es estable este sistema?

(b) Determine la respuesta al impulso del sistema.

3.37 Calcule la respuesta del sistema

$$y(n) = 0.7y(n-1) - 0.12y(n-2) + x(n-1) + x(n-2)$$

a la entrada $x(n) = nu(n)$. ¿Es estable este sistema?

3.38 Determine la respuesta al impulso y la respuesta al escalón de los siguientes sistemas causales. Dibuje los patrones de polos y ceros y determine qué sistemas son estables.

(a) $y(n) = \dfrac{3}{4}y(n-1) - \dfrac{1}{8}y(n-2) + x(n)$

(b) $y(n) = y(n-1) - 0.5y(n-2) + x(n) + x(n-1)$

(c) $H(z) = \dfrac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$

(d) $y(n) = 0.6y(n-1) - 0.08y(n-2) + x(n)$

(e) $y(n) = 0.7y(n-1) - 0.1y(n-2) + 2x(n) - x(n-2)$

3.39 Sea $x(n)$ una secuencia causal con la transformada z, $X(z)$, cuya gráfica de polos y ceros se muestra en la Figura P.3.39. Dibuje el diagrama de polos y ceros y la ROC de la secuencia siguiente:

(a) $x_1(n) = x(-n+2)$

(b) $x_2(n) = e^{j(\pi/3)n}x(n)$

3.40 Deseamos diseñar un sistema discreto en el tiempo LTI causal con la propiedad de que si la entrada es

$$x(n) = (\frac{1}{2})^n u(n) - \frac{1}{4}(\frac{1}{2})^{n-1}u(n-1)$$

entonces la salida es

$$y(n) = (\frac{1}{3})^n u(n)$$

(a) Determine la respuesta al impulso $h(n)$ y la función de transferencia $H(z)$ de un sistema que satisface las condiciones anteriores.

(b) Halle la ecuación en diferencias que caracteriza este sistema.

(c) Determine una realización del sistema que requiera la menor cantidad posible de memoria.

(d) Determine si el sistema es estable.

3.41 Determine la región de estabilidad del sistema causal

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

calculando sus polos y restringiéndolos al interior de la circunferencia unidad.

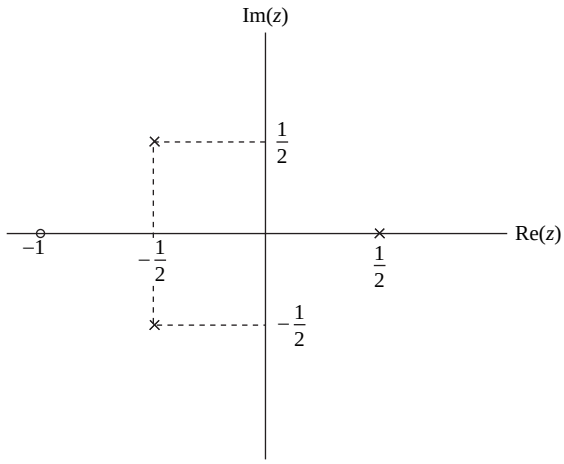


Figura P.3.39.

3.42 Considere el sistema

$$H(z) = \frac{z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{1 - \frac{3}{5}z^{-1} + \frac{2}{25}z^{-2}}$$

Determine:

(a) La respuesta al impulso.

(b) La respuesta al escalón en estado nulo.

(c) La respuesta al escalón si $y(-1) = 1$ e $y(-2) = 2$.

3.43 Determine la función de transferencia, la respuesta al impulso y la respuesta al escalón en estado nulo del sistema mostrado en la Figura P.3.43.

3.44 Considere el sistema causal

$$y(n) = -a_1 y(n-1) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1)$$

Determine:

(a) La respuesta al impulso.

(b) La respuesta al escalón en estado nulo.

(c) La respuesta al escalón si $y(-1) = A \neq 0$.

(d) La respuesta a la entrada $x(n) = \cos \omega_0 n,\ 0 \leq n < \infty$.

3.45 Determine la respuesta para el estado nulo del sistema

$$y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + 4x(n) + 3x(n-1)$$

a la entrada

$$x(n) = e^{j\omega_0 n}u(n)$$

¿Cuál es la respuesta en régimen permanente del sistema?

3.46 Considere el sistema causal definido por el patrón de polos y ceros mostrado en la Figura P.3.46.

(a) Determine la función de transferencia y la respuesta al impulso del sistema cuando $H(z)|_{z=1} = 1$.

(b) ¿Es estable este sistema?

(c) Dibuje una posible implementación del sistema y determine la ecuación en diferencias correspondiente.

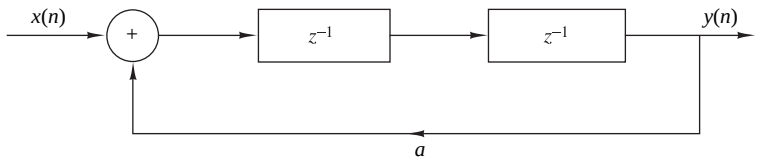


Figura P.3.43.

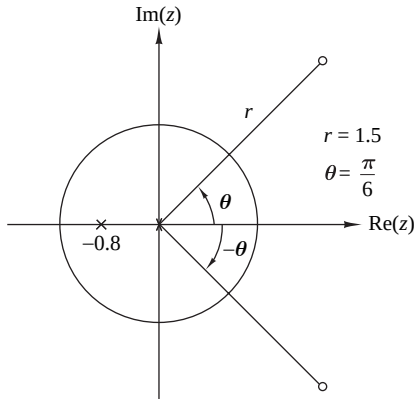


Figura P.3.46.

3.47 Calcule la convolución de las siguientes parejas de señales en el dominio del tiempo, y utilizando la transformada z unilateral.

(a) $x_1(n) = \{1, 1, \underset{\uparrow}{1}, 1, 1\}, \qquad x_2(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 1, 1\}$

(b) $x_1(n) = (\frac{1}{2})^n u(n), \qquad x_2(n) = (\frac{1}{3})^n u(n)$

(c) $x_1(n) = \{1, \underset{\uparrow}{2}, 3, 4\}, \qquad x_2(n) = \{4, 3, \underset{\uparrow}{2}, 1\}$

(d) $x_1(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 1, 1, 1, 1\}, \qquad x_2(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 1, 1\}$

¿Se obtienen los mismos resultados por ambos métodos? Explique su respuesta.

3.48 Determine la transformada z unilateral de la señal constante $x(n) = 1$, $-\infty < n < \infty$.

3.49 Utilice la transformada z unilateral para determinar $y(n)$, $n \geq 0$ en los casos siguientes.

(a) $y(n) + \frac{1}{2}y(n-1) - \frac{1}{4}y(n-2) = 0; \quad y(-1) = y(-2) = 1$

(b) $y(n) - 1.5y(n-1) + 0.5y(n-2) = 0; \quad y(-1) = 1, y(-2) = 0$

(c) $y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + x(n)x(n) = (\frac{1}{3})^n u(n), \quad y(-1) = 1$

(d) $y(n) = \frac{1}{4}y(n-2) + x(n)x(n) = u(n)y(-1) = 0; \quad y(-2) = 1$

3.50 Un sistema FIR LTI tiene una respuesta al impulso $h(n)$, que es real, par y tiene una duración finita de $2N+1$. Demuestre que si $z_1 = re^{j\omega_0}$ es un cero del sistema, entonces $z_1 = (1/r)e^{j\omega_0}$ también es un cero.

3.51 Considere un sistema discreto en el tiempo LTI cuyo patrón de polos y ceros se muestra en la Figura P.3.51.

(a) Determine la ROC de la función de transferencia $H(z)$ si se sabe que el sistema es estable.

(b) ¿Es posible que el patrón de polos y ceros se corresponda con un sistema causal y estable? En caso afirmativo, ¿cuál es la ROC apropiada?

(c) ¿Cuantos posibles sistemas pueden asociarse con este patrón de polos y ceros?

3.52 Sea $x(n)$ una secuencia causal.

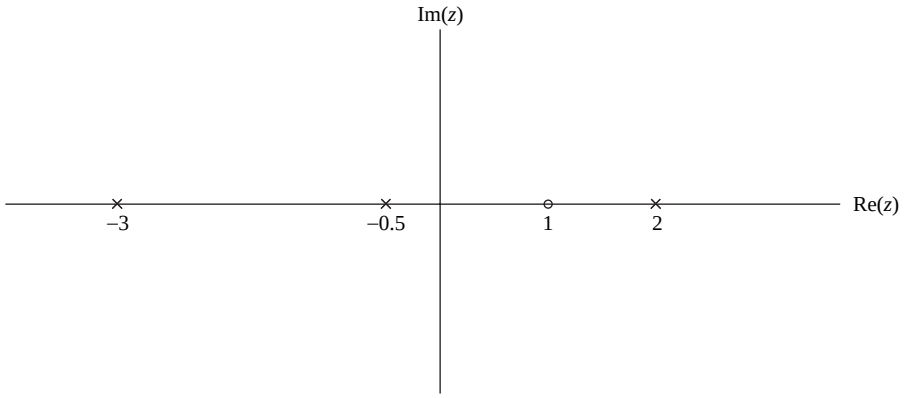


Figura P.3.51.

(a) ¿Qué conclusión puede extraer del valor de su transformada $z\,X(z)$ en $z=\infty$?

(b) Utilice el resultado del apartado (a) para determinar cuál de las siguientes transformadas no se puede asociar con una secuencia causal.

$$\text{(i)}\ \ X(z)=\frac{(z-\frac{1}{2})^4}{(z-\frac{1}{3})^3}\qquad \text{(ii)}\ \ X(z)=\frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})}\qquad \text{(iii)}\ \ X(z)=\frac{(z-\frac{1}{3})^2}{(z-\frac{1}{2})^3}$$

3.53 Un sistema de polos y ceros causal es estable BIBO si sus polos están dentro de la circunferencia unidad. Considere ahora un sistema de polos y ceros que es estable BIBO y que tiene sus polos en el interior de la circunferencia unidad. ¿Es el sistema siempre causal? [*Consejo:* considere los sistemas $h_1(n)=a^n u(n)$ y $h_2(n)=a^n u(n+3)$, $|a|<1$.]

3.54 Sea $x(n)$ una señal anticausal [es decir, $x(n)=0$ para $n>0$]. Formule y demuestre un teorema del valor inicial para señales anticausales.

3.55 La respuesta al escalón de un sistema LTI es

$$s(n)=(\frac{1}{3})^{n-2}u(n+2)$$

(a) Halle la función de transferencia $H(z)$ y dibuje la gráfica de polos y ceros.

(b) Determine la respuesta al impulso $h(n)$.

(c) Compruebe si el sistema es causal y estable.

3.56 Utilice integración de contorno para determinar la secuencia $x(n)$, cuya transformada z está dada por

(a) $X(z)=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},\qquad |z|>\dfrac{1}{2}$

(b) $X(z)=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},\qquad |z|<\dfrac{1}{2}$

(c) $X(z)=\dfrac{z-a}{1-az},\qquad |z|>|1/a|$

(d) $X(z) = \dfrac{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}{1 - \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}}, \qquad |z| > \dfrac{1}{2}$

3.57 Sea $x(n)$ una secuencia con la transformada z

$$X(z) = \frac{1 - a^2}{(1 - az)(1 - az^{-1})}, \qquad \text{ROC: } a > |z| > 1/a$$

siendo $0 < a < 1$. Determine $x(n)$ utilizando integración de contorno.

3.58 La transformada z de una secuencia $x(n)$ está dada por

$$X(z) = \frac{z^{20}}{(z - \frac{1}{2})(z - 2)^5 (z + \frac{5}{2})^2 (z + 3)}$$

Además, se sabe que $X(z)$ converge para $|z| = 1$.

(a) Determine la ROC de $X(z)$.

(b) Determine $x(n)$ en $n = -18$. (*Consejo:* utilice integración de contorno).

4

Análisis en frecuencia de señales

La transformada de Fourier es una de las diversas herramientas matemáticas que resulta útil en el análisis y el diseño de sistemas LTI. Otra de ellas es la serie de Fourier. Estas representaciones de señales implican, básicamente, la descomposición de las señales en función de componentes sinusoidales (o exponenciales complejas). Cuando se emplea una descomposición de este tipo, se dice que la señal está representada en el *dominio de la frecuencia*.

Como vamos a demostrar, la mayor parte de las señales de interés práctico se pueden descomponer en una suma de componentes sinusoidales. Cuando se trabaja con señales periódicas, tal descomposición se conoce como *serie de Fourier*. En el caso de señales de energía finita, la descomposición se conoce como *transformada de Fourier*. Estas descomposiciones son extremadamente importantes en el análisis de los sistemas LTI, porque la respuesta de un sistema LTI a una señal de entrada sinusoidal es una sinusoide de la misma frecuencia pero de diferente amplitud y fase. Además, la propiedad de linealidad del sistema LTI implica que una suma lineal de componentes sinusoidales en la entrada produce una suma lineal similar de componentes sinusoidales en la salida, la cual sólo difiere en las amplitudes y fases de las sinusoides de entrada. Este comportamiento característico de los sistemas LTI hace que la descomposición sinusoidal de señales sea muy importante. Aunque son posibles muchas otras descomposiciones, sólo las señales sinusoidales (o exponenciales complejas) presentan esta deseable propiedad al pasar a través de un sistema LTI.

Vamos a iniciar nuestro análisis de señales en el dominio de la frecuencia empleando la representación de señales periódicas y aperiódicas continuas en el tiempo mediante las series de Fourier y la transformada de Fourier, respectivamente. A continuación, veremos un tratamiento paralelo de las señales periódicas y aperiódicas discretas en el tiempo. Las propiedades de la transformada de Fourier se describen en detalle y también se presentan una serie de dualidades tiempo–frecuencia.

4.1 Análisis en frecuencia de las señales continuas en el tiempo

Se sabe que se puede utilizar un prisma para separar la luz blanca (la luz del sol) en los colores del arco iris (*véase* la Figura 4.1.1(a)). En un documento enviado en 1672 a la Royal Society, Isaac Newton utilizó el término *espectro* para describir las bandas *continuas* de colores producidas por dicho aparato. Para comprender este

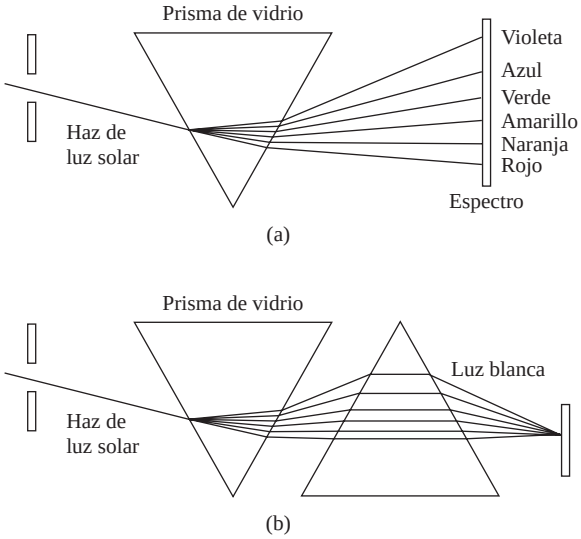


Figura 4.1.1. (a) Análisis y (b) síntesis de la luz blanca (luz solar) utilizando prismas de vidrio.

fenómeno, Newton colocó otro prisma invertido respecto del primero y demostró que los colores volvían a mezclarse para formar la luz blanca, como se muestra en la Figura 4.1.1(b). Newton demostró que si se coloca una ranura entre los dos prismas que impida que uno o más colores incidan sobre el segundo prisma, la luz que se obtiene ya no es luz blanca. Por tanto, la luz que atraviesa el primer prisma simplemente se descompone en sus colores componentes sin sufrir ningún otro cambio. Sin embargo, si se mezclan de nuevo todos esos colores se obtiene la luz blanca original.

Más tarde, Joseph Fraunhofer (1787–1826), haciendo medidas de la luz emitida por el sol y las estrellas, descubrió que el espectro de la luz observada constaba de líneas de colores distintos. Unos pocos años después (a mediados del siglo Xviii), Gustav Kirchhoff y Robert Bunsen descubrieron que cada elemento químico, cuando se calentaba hasta la incandescencia, radiaba su propio color de luz. En consecuencia, cada elemento químico puede identificarse mediante sus propias *líneas espectrales*.

Gracias a los conocimientos de la Física, sabemos que cada color se corresponde con una frecuencia específica del espectro visible. Por tanto, el análisis de la luz de acuerdo con los colores es realmente una forma de *análisis en frecuencia*.

El análisis de las frecuencias de una señal implica la descomposición de la señal en sus componentes de frecuencia (sinusoidales). En lugar de luz, nuestras formas de onda son básicamente funciones del tiempo. Las herramientas de análisis de Fourier que vamos a desarrollar, las series de Fourier y la transformada de Fourier, desempeñan el mismo papel que el prisma en el caso de la luz. La recombinación de las componentes sinusoidales para reconstruir la señal original es básicamente un problema de síntesis de Fourier. El problema del análisis de señales es fundamentalmente el mismo para el caso de una forma de onda que para el caso de la luz procedente de compuestos químicos calientes. Al igual que en el caso de los componentes químicos, las diferentes formas de onda tienen espectros distintos. Luego el espectro proporciona una “identidad” o una firma a la señal, en el sentido de que no existe ninguna otra señal que tenga el mismo espectro. Como veremos, este atributo está relacionado con el tratamiento matemático de las técnicas en el dominio de la frecuencia.

Si descomponemos una forma de onda en componentes sinusoidales, de la misma forma que un prisma separa la luz blanca en diferentes colores, la suma de estas componentes sinusoidales proporciona la forma de onda original. Por el contrario, si falta cualquiera de estas componentes, el resultado será una señal diferente.

En nuestro análisis en el dominio de la frecuencia, desarrollaremos las herramientas matemáticas apropiadas (“prismas”) para descomponer las señales (“luz”) en componentes de frecuencia sinusoidales (colores). Además,

también desarrollaremos las herramientas para sintetizar ("prismas invertidos") una determinada señal a partir de sus componentes en frecuencia.

El motivo fundamental de desarrollar estas herramientas para llevar a cabo el análisis en el dominio de la frecuencia es proporcionar una representación matemática y gráfica de las componentes de frecuencia contenidas en una determinada señal. Como en Física, se emplea el término *espectro* para hacer referencia al contenido en frecuencia de una señal. El proceso que permite obtener el espectro de una señal dada utilizando las herramientas matemáticas básicas que se describen en este capítulo se conoce como análisis *en frecuencia* o análisis *espectral*. En contraste, el proceso de determinar el espectro de una señal en la práctica, basándose en medidas reales de la señal, se denomina *estimación espectral*. Esta diferenciación es muy importante. En un problema práctico, la señal que se va a analizar no conduce a una descripción matemática exacta. Normalmente, la señal contiene cierta información a partir de la cual intentaremos extraer la información importante. Si la información que queremos extraer se puede obtener directa o indirectamente del espectro de la señal, podremos realizar una *estimación espectral* sobre la señal que contiene la información y luego obtener una estimación del espectro de la señal. De hecho, podemos interpretar la estimación espectral como un tipo de análisis espectral realizado sobre las señales obtenidas a partir de orígenes físicos (como por ejemplo, la voz, una señal de EEG o ECG, etc.). Los instrumentos o programas software utilizados para obtener estimaciones espectrales de tales señales son los *analizadores de espectros*.

Aquí vamos a ocuparnos del análisis espectral y en el Capítulo 14 abordaremos el tema de la estimación del espectro de potencia.

4.1.1 Series de Fourier para señales periódicas continuas en el tiempo

En esta sección vamos a ocuparnos de las herramientas disponibles para el análisis en frecuencia de señales periódicas continuas en el tiempo. Ejemplos de señales periódicas prácticas pueden ser ondas cuadradas, ondas rectangulares, ondas triangulares y, por supuesto, sinusoides y exponenciales complejas.

La representación matemática básica de las señales periódicas es la serie de Fourier, que es una suma lineal ponderada de exponenciales complejas o sinusoides armónicamente relacionadas. Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), un matemático francés, utilizó estas expansiones de series trigométricas para describir el fenómeno de la conducción del calor y la distribución de la temperatura en los cuerpos. Aunque su trabajo fue motivado por el problema de la conducción del calor, las técnicas matemáticas que desarrolló a principios del siglo XIX han encontrado aplicación en una amplia variedad de problemas de muchos campos diferentes, incluyendo distintas disciplinas como la óptica, las vibraciones en los sistemas mecánicos, la teoría de sistemas y el electromagnetismo.

Recordemos del Capítulo 1 que una combinación lineal de exponenciales complejas armónicamente relacionadas de la forma

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t} \tag{4.1.1}$$

es una señal periódica de período fundamental $T_p = 1/F_0$. Por tanto, podemos pensar en las señales exponenciales

$$\{e^{j2\pi k F_0 t}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

como en los "bloques de construcción" básicos que nos permiten construir señales periódicas de diversos tipos mediante la correcta elección de la frecuencia fundamental y los coeficientes $\{c_k\}$. F_0 determina el período fundamental de $x(t)$ y los coeficientes $\{c_k\}$ especifican la forma de la señal.

Suponga que tenemos una determinada señal periódica $x(t)$ de período T_p. Podemos representar la señal periódica mediante la serie (4.1.1), conocida como *serie de Fourier*, donde la frecuencia fundamental F_0 se selecciona para ser el recíproco del período dado T_p. Para determinar la expresión de los coeficientes $\{c_k\}$, en primer lugar multiplicamos ambos lados de la Ecuación (4.1.1) por la exponencial compleja

$$e^{-j2\pi F_0 l t}$$

donde l es un entero y luego integramos ambos lados de la ecuación resultante en un único período, es decir, entre 0 y T_p, o, de forma más general, entre t_0 y $t_0 + T_p$, donde t_0 es un valor inicial arbitrario y matemáticamente conveniente. Así, tenemos

$$\int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t)e^{-j2\pi lF_0 t}\, dt = \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j2\pi lF_0 t} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{+j2\pi kF_0 t} \right) dt \tag{4.1.2}$$

Para evaluar la integral del lado derecho de la Ecuación (4.1.2), intercambiamos el orden del sumatorio y la integral y combinamos las dos exponenciales. Por tanto,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{j2\pi F_0(k-l)t}\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left[\frac{e^{j2\pi F_0(k-l)t}}{j2\pi F_0(k-l)} \right]_{t_0}^{t_0+T_p} \tag{4.1.3}$$

Para $k \neq l$, el lado derecho de (4.1.3) evaluado para los límites inferior y superior, t_0 y $t_0 + T_p$, respectivamente, da cero. Por otro lado, si $k = l$, tenemos

$$\int_{t_0}^{t_0+T_p} dt = t\Big|_{t_0}^{t_0+T_p} = T_p$$

Por tanto, (4.1.2) se reduce a

$$\int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t)e^{-j2\pi lF_0 t}\, dt = c_l T_p$$

y así, la expresión para los coeficientes de Fourier en función de la señal periódica dada son

$$c_l = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t)e^{-j2\pi lF_0 t}\, dt$$

Puesto que t_0 es un valor arbitrario, esta integral puede evaluarse para cualquier intervalo de longitud T_p, es decir, para cualquier intervalo igual al período de la señal $x(t)$. En consecuencia, la integral para los coeficientes de la serie Fourier se escribirá como sigue

$$c_l = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t)e^{-j2\pi lF_0 t}\, dt \tag{4.1.4}$$

Una cuestión importante que surge en la representación de la señal periódica $x(t)$ mediante la serie de Fourier es si la serie converge o no a $x(t)$ para todo valor de t, es decir, si la señal $x(t)$ y su representación como serie de Fourier

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi kF_0 t} \tag{4.1.5}$$

son iguales para cualquier valor de t. Las *condiciones de Dirichlet* garantizan que la serie dada por (4.1.5) será igual a $x(t)$, excepto en los valores de t para los que $x(t)$ es discontinua. En dichos valores de t, (4.1.5) converge al valor medio de la discontinuidad. Las condiciones de Dirichlet son:

1. La señal $x(t)$ tiene un número finito de discontinuidades en cualquier período.
2. La señal $x(t)$ contiene un número finito de máximos y mínimos en cualquier período.
3. La señal $x(t)$ es absolutamente integrable en cualquier período, es decir,

$$\int_{T_p} |x(t)|\, dt < \infty \tag{4.1.6}$$

Todas las señales periódicas de interés práctico satisfacen estas condiciones.

La condición menos restrictiva, que establece que la señal tiene energía finita en un período,

$$\int_{T_p} |x(t)|^2 \, dt < \infty \tag{4.1.7}$$

garantiza que la energía en la señal diferencia

$$e(t) = x(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}$$

es cero, aunque $x(t)$ y su serie de Fourier no sean iguales para todos los valores de t. Observe que la expresión (4.1.6) implica la expresión (4.1.7), pero no al contrario. También, tanto (4.1.7) como las condiciones de Dirichlet son suficientes pero no necesarias (es decir, existen señales que tienen representación en serie de Fourier pero no satisfacen estas condiciones).

En resumen, si $x(t)$ es periódica y satisface las condiciones de Dirichlet, se puede representar mediante una serie de Fourier como la dada en (4.1.1), donde los coeficientes están especificados por (4.1.4). Estas relaciones se resumen en la siguiente tabla.

Análisis en frecuencia de señales periódicas continuas en el tiempo

Ecuación de síntesis	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}$	(4.1.8)
Ecuación de análisis	$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt$	(4.1.9)

En general, los coeficientes de Fourier c_k son valores complejos. Además, es fácil demostrar que si la señal periódica es real, c_k y c_{-k} son complejos conjugados. Por tanto, si

$$c_k = |c_k| e^{j\theta_k}$$

entonces

$$c_{-k} = |c_k|^{-j\theta_k}$$

En consecuencia, la serie de Fourier también puede representarse en la forma

$$x(t) = c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cos(2\pi k F_0 t + \theta_k) \tag{4.1.10}$$

donde c_0 es un valor real cuando $x(t)$ es real.

Por último, debemos indicar que se puede obtener cualquier otra forma de la serie de Fourier expandiendo la función coseno de la expresión (4.1.10) como

$$\cos(2\pi k F_0 t + \theta_k) = \cos 2\pi k F_0 t \cos\theta_k - \operatorname{sen} 2\pi k F_0 t \operatorname{sen}\theta_k$$

En consecuencia, podemos escribir (4.1.10) de la forma

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2\pi k F_0 t - b_k \operatorname{sen} 2\pi k F_0 t) \tag{4.1.11}$$

donde

$$a_0 = c_0, \quad a_k = 2|c_k| \cos\theta_k, \quad b_k = 2|c_k| \operatorname{sen}\theta_k$$

Las expresiones (4.1.8), (4.1.10) y (4.1.11) son tres formas equivalentes de la representación en serie de Fourier de una señal periódica real.

4.1.2 Espectro de densidad de potencia de señales periódicas

Una señal periódica tiene energía infinita y una potencia media finita, y se define con la expresión

$$P_x = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} |x(t)|^2\, dt \tag{4.1.12}$$

Si tomamos el complejo conjugado de (4.1.8) y sustituimos para $x^*(t)$ en (4.1.12), obtenemos

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{-j2\pi k F_0 t}\, dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* \left[\frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t}\, dt\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \end{aligned} \tag{4.1.13}$$

por tanto, hemos establecido la relación

$$P_x = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} |x(t)|^2\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \tag{4.1.14}$$

que es la *relación de Parseval* para señales de potencia.

Para ilustrar el significado físico de la Ecuación (4.1.14), supongamos que $x(t)$ consta de una única exponencial compleja

$$x(t) = c_k e^{j2\pi k F_0 t}$$

En este caso, todos los coeficientes de la serie de Fourier excepto c_k son cero. Luego, la potencia media de la señal es

$$P_x = |c_k|^2$$

Es obvio que $|c_k|^2$ representa la potencia en el armónico $k-$ésimo de la señal. Por tanto, la potencia media total de la señal periódica es simplemente la suma de las potencias medias de todos los armónicos.

Si dibujamos en una gráfica $|c_k|^2$ como una función de las frecuencias kF_0, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, la gráfica que obtendremos mostrará cómo se distribuye la potencia de la señal periódica entre las diferentes componentes de frecuencia. Esta gráfica, que se muestra en la Figura 4.1.2, es el *espectro de densidad de potencia*[1] de la señal periódica $x(t)$. Puesto que la potencia de una señal periódica sólo existe en los valores discretos de frecuencia (es decir, $F = 0$, $\pm F_0$, $\pm 2F_0, \ldots$), se dice que la señal tiene un *espectro de líneas.* El espacio entre dos líneas espectrales consecutivas es igual al recíproco del período fundamental T_p, mientras que la forma del espectro (es decir, la distribución de potencia de la señal), depende de las características de la señal en el dominio del tiempo.

Como se ha indicado en la sección anterior, los coeficientes de la serie de Fourier $\{c_k\}$ son valores complejos, es decir, pueden representarse como

$$c_k = |c_k| e^{j\theta_k}$$

donde

$$\theta_k = \angle c_k$$

En lugar de dibujar la gráfica del espectro de densidad de potencia, podemos representar el módulo de la tensión $\{|c_k|\}$ y la fase $\{\theta_k\}$ como funciones de la frecuencia. Evidentemente, la densidad espectral de potencia de la

[1] Esta función también se conoce como *densidad espectral de potencia* o, simplemente, *espectro de potencia.*

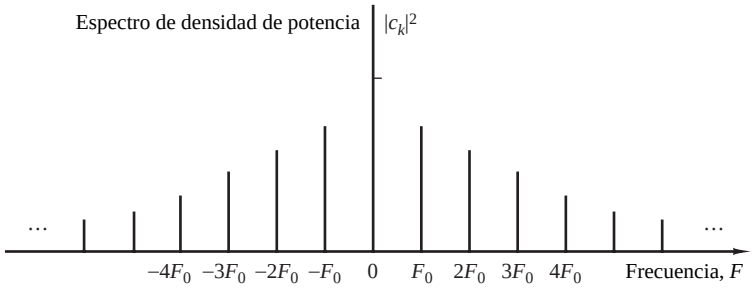


Figura 4.1.2. Espectro de densidad de potencia de una señal periódica continua en el tiempo.

señal periódica simplemente es el cuadrado del módulo de la tensión. La información de fase se pierde totalmente (o no aparece) en la densidad espectral de potencia.

Si la señal periódica es real, los coeficientes de la serie de Fourier $\{c_k\}$ satisfacen la condición

$$c_{-k} = c_k^*$$

En consecuencia, $|c_k|^2 = |c_k^*|^2$. Ya que el espectro de potencia es una función simétrica de la frecuencia, esta condición también implica que el módulo de la tensión es simétrico (función par) respecto del origen y la fase es una función impar. Gracias a la simetría, basta entonces con especificar el espectro de la señal real periódica sólo para las frecuencias positivas. Además, la potencia media total se puede expresar como

$$P_x = c_0^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \tag{4.1.15}$$

$$= a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \tag{4.1.16}$$

que se deduce directamente de las relaciones dadas en la Sección 4.1.1 para los coeficientes $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ y $\{c_k\}$ empleados en las expresiones de la serie de Fourier.

EJEMPLO 4.1.1

Determine la serie de Fourier y el espectro de densidad de potencia del tren de impulsos rectangulares que se muestra en la Figura 4.1.3.

Solución. La señal es periódica de período fundamental T_p y, evidentemente, satisface las condiciones de Dirichlet. Por tanto, podemos representar la señal según la serie de Fourier dada por (4.1.8) con los coeficientes de Fourier especificados por (4.1.9).

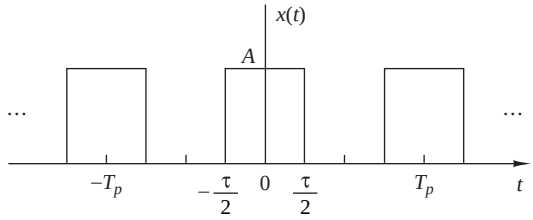


Figura 4.1.3. Tren de impulsos rectangulares periódicos continuos en el tiempo.

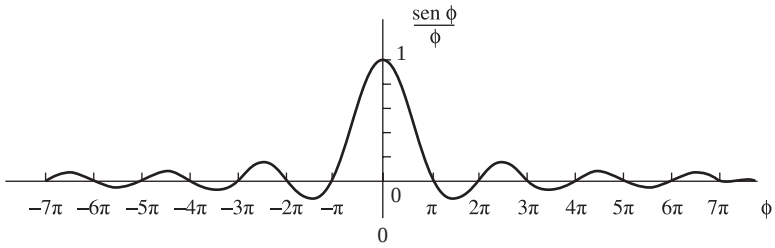


Figura 4.1.4. La función $(\operatorname{sen}\phi)/\phi$.

Dado que $x(t)$ es una señal par [es decir, $x(t) = x(-t)$], es cómodo seleccionar el intervalo de integración de $-T_p/2$ a $T_p/2$. Luego la expresión (4.1.9) para $k = 0$ da

$$c_0 = \frac{1}{T_p}\int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(t)\,dt = \frac{1}{T_p}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} A\,dt = \frac{A\tau}{T_p} \tag{4.1.17}$$

El término c_0 representa el valor medio (componente continua) de la señal $x(t)$. Para $k \neq 0$, tenemos

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_p}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{-j2\pi kF_0 t}\,dt = \frac{A}{T_p}\left[\frac{e^{-j2\pi F_0 kt}}{-j2\pi kF_0}\right]_{-\tau/2}^{\tau/2} \\ &= \frac{A}{\pi F_0 kT_p}\frac{e^{j\pi kF_0\tau} - e^{-j\pi kF_0\tau}}{j2} \\ &= \frac{A\tau}{T_p}\frac{\operatorname{sen}\pi kF_0\tau}{\pi kF_0\tau}, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned} \tag{4.1.18}$$

Es interesante destacar que el lado derecho de la Ecuación (4.1.18) tiene la forma $(\operatorname{sen}\phi)/\phi$, donde $\phi = \pi kF_0\tau$. En este caso, ϕ toma valores discretos, ya que F_0 y τ son fijos y el índice k varía. Sin embargo, si dibujamos $(\operatorname{sen}\phi)/\phi$ con ϕ como un parámetro continuo en el rango $-\infty < \phi < \infty$, obtenemos la gráfica mostrada en la Figura 4.1.4. Observe que esta función decrece hasta cero cuando $\phi \to \pm\infty$, tiene un valor máximo igual a la unidad en $\phi = 0$ y es cero en múltiplos de π (es decir, en $\phi = m\pi$, $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$). Es evidente que los coeficientes de Fourier dados por (4.1.18) son los valores de las muestras de la función $(\operatorname{sen}\phi)/\phi$ para $\phi = \pi kF_0\tau$, a cuya amplitud se ha aplicado el factor de escala $A\tau/T_p$.

Puesto que la función periódica $x(t)$ es par, los coeficientes de Fourier c_k son reales. Por tanto, el espectro de fase es cero cuando c_k es positivo o π cuando c_k es negativo. En lugar de dibujar los espectros de módulo y de fase por separado, podemos simplemente dibujar $\{c_k\}$ en una única gráfica, indicando los valores positivos y negativos de c_k. En la práctica, esto se suele hacer cuando los coeficientes de Fourier $\{c_k\}$ son reales.

La Figura 4.1.5 ilustra los coeficientes de Fourier del tren de impulsos rectangulares cuando T_p es fijo y la anchura del impulso τ puede variar. En este caso, $T_p = 0.25$ segundos, por lo que $F_0 = 1/T_p = 4$ Hz y $\tau = 0.05T_p$, $\tau = 0.1T_p$ y $\tau = 0.2T_p$. Observe que el efecto de disminuir τ manteniendo fijo T_p es dispersar la potencia de la señal en el rango de frecuencias. El espaciado entre líneas espectrales adyacentes es $F_0 = 4$ Hz, independientemente del valor de la anchura del impulso τ.

Por otro lado, también es interesante fijar τ y variar el período T_p cuando $T_p > \tau$. La Figura 4.1.6 ilustra esta condición cuando $T_p = 5\tau$, $T_p = 10\tau$ y $T_p = 20\tau$. En este caso, el espaciado entre líneas espectrales adyacentes disminuye cuando T_p aumenta. En el límite, cuando $T_p \to \infty$, los coeficientes de Fourier c_k tienden a cero debido al factor de T_p en el denominador de la Ecuación (4.1.18). Este comportamiento es coherente con el hecho de que cuando $T_p \to \infty$ y τ permanece fija, la señal resultante ya no es una señal de potencia. En lugar de ello, se ha convertido en una señal de energía y su potencia media es cero. Los espectros de las señales de energía finita se describen en la siguiente sección.

Observe también que si $k \neq 0$ y $\operatorname{sen}(\pi kF_0\tau) = 0$, entonces $c_k = 0$. Los armónicos con potencia cero se producen a frecuencias kF_0, tales que $\pi(kF_0)\tau = m\pi$, $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$, o en $kF_0 = m/\tau$. Por ejemplo, si $F_0 = 4$ Hz y $\tau = 0.2T_p$, se obtiene que las componentes espectrales en ± 20 Hz, ± 40 Hz, $\ldots$ tienen potencia cero. Estas frecuencias se corresponden con los coeficientes de Fourier c_k, $k = \pm 5, \pm 10, \pm 15, \ldots$. Por el contrario, si $\tau = 0.1T_p$, las componentes espectrales con potencia cero son $k = \pm 10, \pm 20, \pm 30, \ldots$.

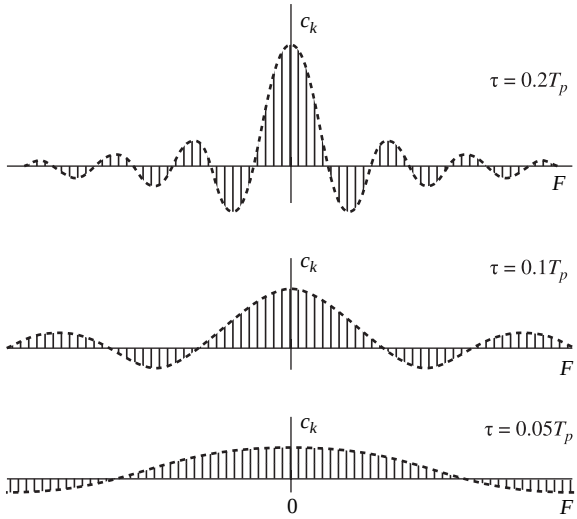


Figura 4.1.5. Coeficientes de Fourier del tren de impulsos rectangulares cuando T_p es fijo y la anchura del impulso τ varía.

El espectro de densidad de potencia para el tren de impulsos rectangulares es

$$|c_k|^2 = \begin{cases} \left(\dfrac{A\tau}{T_p}\right)^2, & k = 0 \\ \left(\dfrac{A\tau}{T_p}\right)^2 \left(\dfrac{\operatorname{sen} \pi k F_0 \tau}{\pi k F_0 \tau}\right)^2, & k = \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases} \tag{4.1.19}$$

4.1.3 Transformada de Fourier de señales aperiódicas continuas en el tiempo

En la Sección 4.1.1 hemos desarrollado la serie de Fourier para representar una señal periódica como una combinación lineal de exponenciales armónicamente relacionadas. Como consecuencia de la periodicidad, decimos que estas señales poseen espectros de líneas equidistantes. El espaciado de las líneas es igual a la frecuencia fundamental, que a su vez es la inversa del período fundamental de la señal. Podemos decir que el período fundamental es el número de líneas por unidad de frecuencia (densidad de líneas), como se ilustra en la Figura 4.1.6.

Teniendo en cuenta esta representación, es evidente que si permitimos que el período aumente sin límite, el espaciado entre las líneas tiende a cero. En el límite, cuando el período se hace infinito, la señal se hace aperiódica y su espectro continuo. Este argumento sugiere que el espectro de una señal aperiódica será la envolvente del espectro de líneas de la correspondiente señal periódica obtenida por la repetición de la señal aperiódica con un cierto período T_p.

Consideremos una señal aperiódica $x(t)$ con una duración finita como la mostrada en la Figura 4.1.7(a). A partir de esta señal aperiódica, podemos crear una señal periódica $x_p(t)$ con período T_p, como se muestra en la Figura 4.1.7(b). Evidentemente, $x_p(t) = x(t)$ en el límite, cuando $T_p \to \infty$, es decir,

$$x(t) = \lim_{T_p \to \infty} x_p(t)$$

Esta interpretación implica que será posible obtener el espectro de $x(t)$ a partir del espectro de $x_p(t)$, simplemente calculando el límite cuando $T_p \to \infty$.

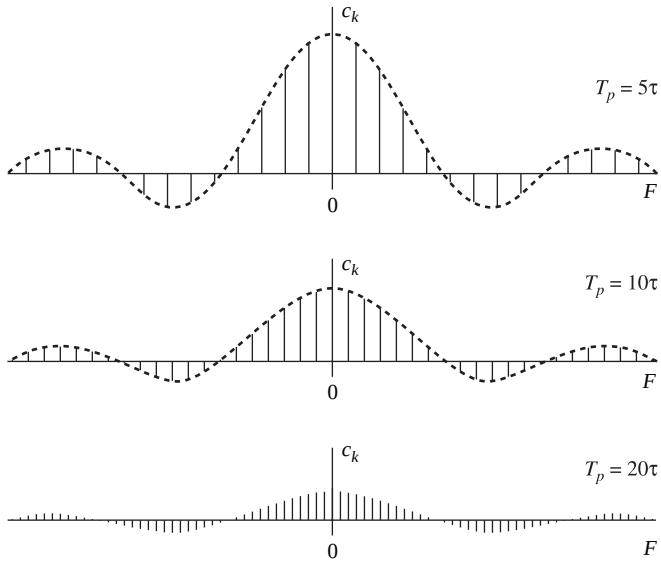


Figura 4.1.6. Coeficientes de Fourier de un tren de impulsos rectangulares con anchura de pulso fija τ y período variable T_p.

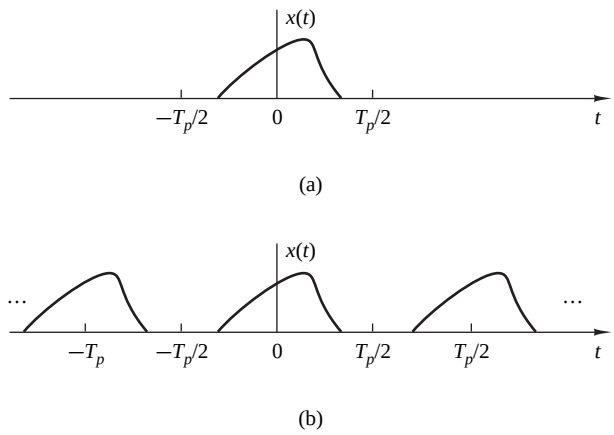


Figura 4.1.7. a) Señal aperiódica $x(t)$ y (b) señal periódica $x_p(t)$ construida mediante la repetición de $x(t)$ con un período T_p.

Comenzamos con la representación en serie de Fourier de $x_p(t)$,

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}, \qquad F_0 = \frac{1}{T_p} \tag{4.1.20}$$

donde

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x_p(t) e^{-j2\pi k F_0 t}\, dt \tag{4.1.21}$$

Dado que $x_p(t) = x(t)$ para $-T_p/2 \le t \le T_p/2$, (4.1.21) puede expresarse como

$$c_k = \frac{1}{T_p}\int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(t)e^{-j2\pi kF_0 t}\,dt \tag{4.1.22}$$

También se cumple que $x(t) = 0$ para $|t| > T_p/2$. Por tanto, los límites de la integral de (4.1.22) se pueden reemplazar por $-\infty$ e ∞. Luego,

$$c_k = \frac{1}{T_p}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi kF_0 t}\,dt \tag{4.1.23}$$

Ahora definimos una función $X(F)$, denominada *transformada de Fourier* de $x(t)$, como

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi Ft}\,dt \tag{4.1.24}$$

$X(F)$ es una función de la variable continua F; no depende de T_p ni de F_0. Sin embargo, si comparamos (4.1.23) y (4.1.24), es evidente que los coeficientes de Fourier c_k se pueden expresar en función de $X(F)$ como

$$c_k = \frac{1}{T_p}X(kF_0)$$

o, lo que es equivalente,

$$T_p c_k = X(kF_0) = X\left(\frac{k}{T_p}\right) \tag{4.1.25}$$

Por tanto, los coeficientes de Fourier son muestras de $X(F)$ tomadas en múltiplos de F_0 y a las que se ha aplicado un factor de escala F_0 (que es equivalente a multiplicar por $1/T_p$). Sustituyendo el valor de c_k dado por (4.1.25) en (4.1.20), tenemos

$$x_p(t) = \frac{1}{T_p}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{T_p}\right)e^{j2\pi kF_0 t} \tag{4.1.26}$$

Ahora tomamos el límite de (4.1.26) cuando T_p tiende a infinito. En primer lugar, definimos $\Delta F = 1/T_p$. Haciendo esta sustitución, (4.1.26) queda

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta F)e^{j2\pi k\Delta F t}\Delta F \tag{4.1.27}$$

Está claro que en el límite cuando T_p tiende a infinito, $x_p(t)$ se reduce a $x(t)$. Además, ΔF se convierte en el diferencial dF y $k\Delta F$ se convierte en la variable frecuencia continua F. A su vez, el sumatorio de (4.1.27) pasa a ser una integral de la variable frecuencia F. Por tanto,

$$\lim_{T_p\to\infty} x_p(t) = x(t) = \lim_{\Delta F\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta F)e^{-j2\pi k\Delta F t}\Delta F \tag{4.1.28}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F)e^{j2\pi Ft}\,dF$$

Esta integral proporciona $x(t)$ cuando se conoce $X(F)$, y recibe el nombre de *transformada inversa de Fourier*.

Esto concluye nuestra derivación heurística de la pareja de transformadas de Fourier dadas por (4.1.24) y (4.1.28) para una señal aperiódica $x(t)$. Aunque la dedución no es rigurosa matemáticamente, nos ha permitido obtener la relación de las transformadas de Fourier deseada empleando argumentos relativamente simples e intuitivos. En resumen, el análisis en frecuencia de señales aperiódicas continuas en el tiempo implica la siguiente pareja de transformadas de Fourier.

Análisis en frecuencia de señales aperiódicas continuas en el tiempo

Ecuación de síntesis (transformada inversa)	$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F)e^{j2\pi Ft}\, dF$	(4.1.29)
Ecuación de análisis (transformada directa)	$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi Ft}\, dt$	(4.1.30)

Es evidente que la diferencia esencial entre la serie de Fourier y la transformada de Fourier es que el espectro de esta última es continuo y la síntesis de una señal aperiódica a partir de su espectro se consigue mediante la operación de integración en lugar de la de suma.

Por último, deseamos indicar que la pareja de transformadas de Fourier dadas por (4.1.29) y (4.1.30) se pueden expresar en función de la variable de frecuencia en radianes $\Omega = 2\pi F$. Puesto que, $dF = d\Omega/2\pi$, (4.1.29) y (4.1.30) se transforman en

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t}\, d\Omega \tag{4.1.31}$$

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}\, dt \tag{4.1.32}$$

El conjunto de condiciones que garantiza la existencia de la transformada de Fourier es el correspondiente a las *condiciones de Dirichlet*, las cuales pueden expresarse como:

1. La señal $x(t)$ tiene un número finito de discontinuidades finitas.

2. La señal $x(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos.

3. La señal $x(t)$ es absolutamente integrable, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty \tag{4.1.33}$$

La tercera condición se deduce fácilmente a partir de la definición de la transformada dada en (4.1.30). En efecto,

$$|X(F)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi Ft}\, dt\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt$$

Luego $|X(F)| < \infty$ si se satisface (4.1.33).

Una condición menos restrictiva para asegurar la existencia de la transformada de Fourier es que $x(t)$ tiene energía finita; es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt < \infty \tag{4.1.34}$$

Observe que si una señal $x(t)$ es absolutamente integrable, también tendrá energía finita. Es decir, si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty$$

entonces

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt < \infty \tag{4.1.35}$$

Sin embargo, el inverso no es cierto. Es decir, una señal puede tener energía finita pero no ser absolutamente integrable. Por ejemplo, la señal

$$x(t) = \frac{\operatorname{sen} 2\pi F_0 t}{\pi t} \tag{4.1.36}$$

es cuadráticamente integrable pero no es absolutamente integrable. Esta señal tiene la transformada de Fourier

$$X(F) = \begin{cases} 1, & |F| \leq F_0 \\ 0, & |F| > F_0 \end{cases} \tag{4.1.37}$$

Puesto que esta señal viola la relación (4.1.33), es evidente que las condiciones de Dirichlet son suficientes pero no necesarias para asegurar la existencia de la transformada de Fourier. En cualquier caso, prácticamente todas las señales con energía finita tienen una transformada de Fourier, por lo que no tenemos que preocuparnos por señales que rara vez nos encontraremos en la práctica.

4.1.4 Espectro de densidad de energía de señales aperiódicas

Sea $x(t)$ cualquier señal de energía finita con la transformada de Fourier $X(F)$. Su energía es

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

que a su vez, puede expresarse en función de $X(F)$ como sigue:

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t) \, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \, dt \left[\int_{-\infty}^{\infty} X^*(F) e^{-j2\pi Ft} \, dF \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X^*(F) \, dF \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft} \, dt \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |X(F)|^2 \, dF \end{aligned}$$

Por tanto, concluimos que

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(F)|^2 \, dF \tag{4.1.38}$$

Ésta es la *relación de Parseval* para señales aperiódicas de energía finita y expresa el principio de conservación de la energía en los dominios del tiempo y de la frecuencia.

El espectro $X(F)$ de una señal es, en general, un valor complejo. Por tanto, normalmente se expresa en forma polar como sigue

$$X(F) = |X(F)| e^{j\Theta(F)}$$

donde $|X(F)|$ es el módulo del espectro y $\Theta(F)$ es la fase del espectro,

$$\Theta(F) = \sphericalangle X(F)$$

Por otro lado, la magnitud

$$S_{xx}(F) = |X(F)|^2 \tag{4.1.39}$$

que es el integrando de (4.1.38), representa la distribución de energía de la señal como una función de la frecuencia. Así, $S_{xx}(F)$ se conoce como *espectro de densidad de energía* de $x(t)$. La integral de $S_{xx}(F)$ para todas las frecuencias proporciona la energía total de la señal. Visto de otro modo, la energía de la señal $x(t)$ en la banda de frecuencias $F_1 \leq F \leq F_1 + \Delta F$ es

$$\int_{F_1}^{F_1+\Delta F} S_{xx}(F) \, dF \geq 0$$

lo que implica que $S_{xx}(f) \geq 0$ para todo F.

A partir de (4.1.39), puede verse que $S_{xx}(F)$ no contiene ninguna información sobre la fase [es decir, $S_{xx}(F)$ es puramente real y no negativa]. Puesto que la información de fase de $x(t)$ no está contenida en $S_{xx}(F)$, es imposible reconstruir la señal conocida $S_{xx}(F)$.

Por último, como en el caso de la serie de Fourier, es fácil demostrar que si la señal $x(t)$ es real, entonces

$$|X(-F)| = |X(F)| \tag{4.1.40}$$

$$\sphericalangle X(-F) = -\sphericalangle X(F) \tag{4.1.41}$$

Combinando (4.1.40) y (4.1.39), obtenemos

$$S_{xx}(-F) = S_{xx}(F) \tag{4.1.42}$$

En otras palabras, el espectro de densidad de energía de una señal real tiene simetría par.

EJEMPLO 4.1.2

Determine la transformada de Fourier y el espectro de densidad de energía de un impulso rectangular definido como

$$x(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases} \tag{4.1.43}$$

y que se ilustra en la Figura 4.1.8(a).

Solución. Evidentemente, esta señal es aperiódica y satisface las condiciones de Dirichlet. Por tanto, su transformada de Fourier existe. Aplicando la Ecuación (4.1.30), tenemos que

$$X(F) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j2\pi F t}\, dt = A\tau \frac{\operatorname{sen} \pi F \tau}{\pi F \tau} \tag{4.1.44}$$

Observe que $X(F)$ es real y por tanto puede representarse gráficamente utilizando sólo una gráfica, como se muestra en la Figura 4.1.8(b). Obviamente, $X(F)$ tiene la forma de la función $(\operatorname{sen} \phi)/\phi$ mostrada en la Figura 4.1.4. Luego el espectro de un impulso rectangular es la envolvente del espectro de líneas (coeficientes de Fourier) de la señal periódica obtenida mediante la repetición periódica del impulso con un período T_p, como se ve en la Figura 4.1.3. En otras palabras, los coeficientes de Fourier c_k de la señal periódica correspondiente $x_p(t)$ son simplemente muestras de $X(F)$ en las frecuencias $kF_0 = k/T_p$. Específicamente,

$$c_k = \frac{1}{T_p} X(kF_0) = \frac{1}{T_p} X\left(\frac{k}{T_p}\right) \tag{4.1.45}$$

A partir de (4.1.44), podemos ver que los cruces por cero de $X(F)$ se producen en múltiplos de $1/\tau$. Además, la anchura del lóbulo principal, que contiene la mayor parte de la energía de la señal, es igual a $2/\tau$. Cuando la duración del impulso τ disminuye (aumenta), el lóbulo principal se hace más ancho (más estrecho) y más energía se desplaza hacia las frecuencias más altas (más bajas), como se ilustra en la Figura 4.1.9. Por tanto, cuando el impulso se expande (comprime) en el tiempo, su transformada se comprime (expande) en frecuencia. Este comportamiento, entre la función del tiempo y su espectro, es una forma del principio de incertidumbre que aparece de diferentes maneras en distintas áreas de la Ciencia y la Ingeniería.

Por último, el espectro de densidad de energía del impulso rectangular es

$$S_{xx}(F) = (A\tau)^2 \left(\frac{\operatorname{sen} \pi F \tau}{\pi F \tau}\right)^2 \tag{4.1.46}$$

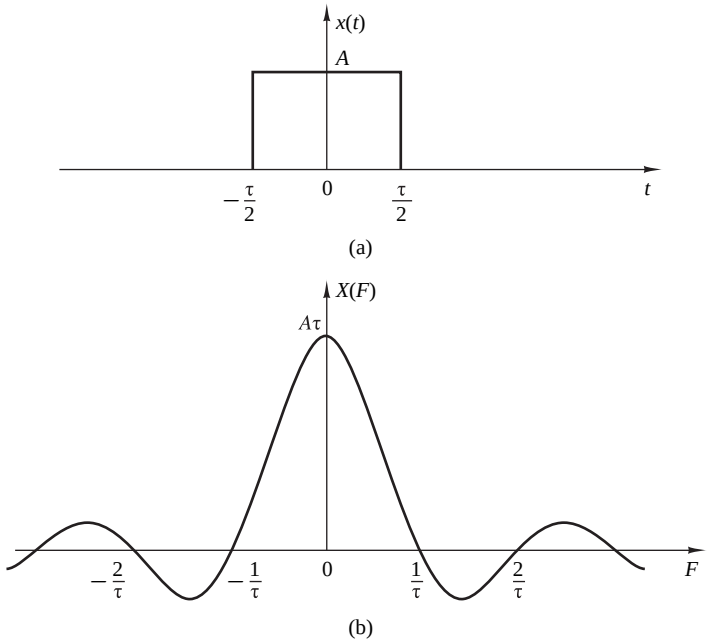


Figura 4.1.8. (a) Impulso rectangular y (b) su transformada de Fourier.

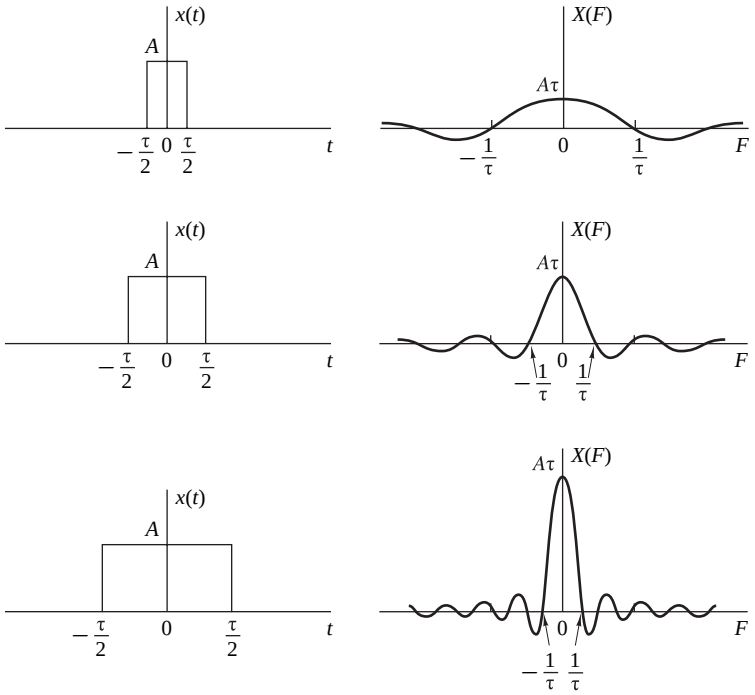


Figura 4.1.9. Transformada de Fourier de un impulso rectangular para diversos valores de la anchura.

4.2 Análisis en frecuencia de señales discretas en el tiempo

En la Sección 4.1 hemos desarrollado la representación en serie de Fourier de las señales (de potencia) aperiódicas continuas en el tiempo y la transformada de Fourier para señales de energía aperiódicas y finitas. En esta sección, vamos a repetir el desarrollo para las señales discretas en el tiempo.

Como ya hemos mencionado en la Sección 4.1, la representación en serie de Fourier de una señal periódica continua en el tiempo está formada por un número infinito de componentes de frecuencia, donde el espaciado entre dos frecuencias sucesivas armónicamente relacionadas es $1/T_p$, siendo T_p el período fundamental. Dado que el rango de frecuencias de las señales continuas en el tiempo va desde $-\infty$ hasta ∞, es posible disponer de señales que contienen un número infinito de componentes de frecuencia. Por el contrario, el rango de frecuencias para señales discretas en el tiempo se limita al intervalo $(-\pi,\pi)$ o $(0,2\pi)$. Una señal discreta en el tiempo de período fundamental N puede constar de componentes separadas $2\pi/N$ radianes o $f=1/N$ ciclos. En consecuencia, la representación en serie de Fourier de una señal periódica discreta en el tiempo contendrá como máximo N componentes de frecuencia. Ésta es la diferencia básica entre las representaciones en serie de Fourier de las señales periódicas continuas en el tiempo y discretas en el tiempo.

4.2.1 Serie de Fourier para señales periódicas discretas en el tiempo

Suponga que tenemos una secuencia periódica $x(n)$ de período N, es decir, $x(n)=x(n+N)$ para todo n. La representación en serie de Fourier de $x(n)$ consta de N funciones exponenciales armónicamente relacionadas.

$$e^{j2\pi kn/N}, \qquad k=0,1,\ldots,N-1$$

y se expresa como

$$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N} \tag{4.2.1}$$

donde los $\{c_k\}$ son los coeficientes de la representación en serie.

Para obtener la expresión de los coeficientes de Fourier, utilizamos la siguiente fórmula:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi kn/N}=\begin{cases} N, & k=0,\pm N,\pm 2N,\ldots \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{4.2.2}$$

Observe la similitud entre la Ecuación (4.2.2) y su contrapartida para señales continuas en el tiempo dada por (4.1.3). La demostración de (4.2.2) se obtiene de forma inmediata aplicando la siguiente fórmula de las series geométricas

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n=\begin{cases} N, & a=1 \\ \dfrac{1-a^N}{1-a}, & a\neq 1 \end{cases} \tag{4.2.3}$$

La expresión para los coeficientes de Fourier c_k se puede obtener multiplicando ambos lados de la Ecuación (4.2.1) por la exponencial $e^{-j2\pi ln/N}$ y sumando el producto desde $n=0$ hasta $n=N-1$. Por tanto,

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi ln/N}=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi(k-l)n/N} \tag{4.2.4}$$

Si calculamos en primer lugar el sumatorio de n términos especificado en el lado derecho de la Ecuación (4.2.4), obtenemos

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi(k-l)n/N}=\begin{cases} N, & k-l=0,\pm N,\pm 2N,\ldots \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{4.2.5}$$

donde hemos hecho uso de (4.2.2). Luego el lado derecho de la Ecuación (4.2.4) se reduce a Nc_l y, por tanto,

$$c_l = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi ln/N}, \qquad l = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{4.2.6}$$

Así, tenemos la expresión deseada para los coeficientes de Fourier en función de la señal $x(n)$.

Las relaciones (4.2.1) y (4.2.6) para el análisis en frecuencia de señales discretas en el tiempo se resumen a continuación.

Análisis en frecuencia de señales periódicas discretas en el tiempo

Ecuación de síntesis	$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}$	(4.2.7)
Ecuación de análisis	$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}$	(4.2.8)

La Ecuación (4.2.7) suele denominarse *serie de Fourier discreta en el tiempo* (DTFS, *discrete-time Fourier series*). Los coeficientes de Fourier $\{c_k\}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$ proporcionan la descripción de $x(n)$ en el dominio de la frecuencia, en el sentido de que c_k representa la amplitud y la fase asociadas con la componente de frecuencia

$$s_k(n) = e^{j2\pi kn/N} = e^{j\omega_k n}$$

donde $\omega_k = 2\pi k/N$.

Recuerde de la Sección 1.3.3 que las funciones $s_k(n)$ son periódicas de período N. Por tanto, $s_k(n) = s_k(n+N)$. Teniendo en cuenta esta periodicidad, se deduce que los coeficientes de Fourier c_k, que están más allá del rango $k = 0, 1, \ldots, N-1$, también satisfacen la condición de periodicidad. De hecho, a partir de la Ecuación (4.2.8), que se cumple para todo valor de k, tenemos

$$c_{k+N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi(k+N)n/N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} = c_k \tag{4.2.9}$$

Por tanto, los coeficientes de la serie de Fourier $\{c_k\}$ forman una secuencia periódica que se extiende fuera del rango $k = 0, 1, \ldots, N-1$. De aquí que

$$c_{k+N} = c_k$$

es decir, $\{c_k\}$ es una secuencia periódica de período fundamental N. *Luego el espectro de una señal $x(n)$ periódica de período N es una secuencia periódica de período N*. En consecuencia, cualesquiera N muestras consecutivas de la señal o de su espectro proporcionan una descripción completa de la señal en los dominios del tiempo o de la frecuencia.

Aunque los coeficientes de Fourier forman una secuencia periódica, vamos a fijar nuestra atención en el período de rango $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Esto resulta cómodo, ya que en el dominio de la frecuencia, es suficiente para cubrir el rango fundamental $0 \le \omega_k = 2\pi k/N < 2\pi$, para $0 \le k \le N-1$. Por el contrario, el rango de frecuencias $-\pi < \omega_k = 2\pi k/N \le \pi$ se corresponde con $-N/2 < k \le N/2$, que resulta inadecuado cuando N es impar. Evidentemente, si utilizamos una frecuencia de muestreo F_s, el rango $0 \le k \le N-1$ se corresponde con el rango de frecuencias $0 \le F < F_s$.

EJEMPLO 4.2.1

Determine los espectros de las señales

(a) $x(n) = \cos\sqrt{2}\pi n$

(b) $x(n) = \cos \pi n/3$

(c) $x(n)$ es periódica de período $N = 4$ y $x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 1, 0, 0\}$

Solución.

(a) Para $\omega_0 = \sqrt{2}\pi$, tenemos $f_0 = 1/\sqrt{2}$. Dado que f_0 no es un número racional, la señal no es periódica. Por tanto, esta señal no se puede expandir en una serie de Fourier. No obstante, la señal tiene un espectro. Su contenido espectral consta de una única componente de frecuencia en $\omega = \omega_0 = \sqrt{2}\pi$.

(b) En este caso, $f_0 = \frac{1}{6}$ y, por tanto, $x(n)$ es periódica de período fundamental $N = 6$. A partir de (4.2.8), tenemos

$$c_k = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x(n)e^{-j2\pi kn/6}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 5$$

Sin embargo, $x(n)$ se puede expresar como

$$x(n) = \cos\frac{2\pi n}{6} = \frac{1}{2}e^{j2\pi n/6} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi n/6}$$

que ya está en la forma de serie de Fourier exponencial dada por (4.2.7). Comparando los dos términos exponenciales de $x(n)$ con (4.2.7), es evidente que $c_1 = \frac{1}{2}$. La segunda exponencial de $x(n)$ se corresponde con el término $k = -1$ de (4.2.7). Sin embargo, este término también se puede escribir como sigue

$$e^{-j2\pi n/6} = e^{j2\pi(5-6)n/6} = e^{j2\pi(5n)/6}$$

lo que significa que $c_{-1} = c_5$. Por tanto, esto es coherente con la Ecuación (4.2.9) y con la observación anterior de que los coeficientes de la serie de Fourier forman una secuencia periódica de período N. En consecuencia, podemos concluir que

$$c_0 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$$
$$c_1 = \frac{1}{2}, \; c_5 = \frac{1}{2}$$

(c) A partir de (4.2.8), tenemos

$$c_k = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x(n)e^{-j2\pi kn/4}, \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

o

$$c_k = \frac{1}{4}(1 + e^{-j\pi k/2}), \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

Para $k = 0$, 1, 2, 3, tenemos

$$c_0 = \frac{1}{2}, \qquad c_1 = \frac{1}{4}(1 - j), \qquad c_2 = 0, \qquad c_3 = \frac{1}{4}(1 + j)$$

El módulo y la fase de los espectros son

$$|c_0| = \frac{1}{2}, \qquad |c_1| = \frac{\sqrt{2}}{4}, \qquad |c_2| = 0, \qquad |c_3| = \frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$\sphericalangle c_0 = 0, \qquad \sphericalangle c_1 = -\frac{\pi}{4}, \qquad \sphericalangle c_2 = \text{no definido}, \qquad \sphericalangle c_3 = \frac{\pi}{4}$$

La Figura 4.2.1 ilustra el contenido espectral de las señales de los apartados (b) y (c).

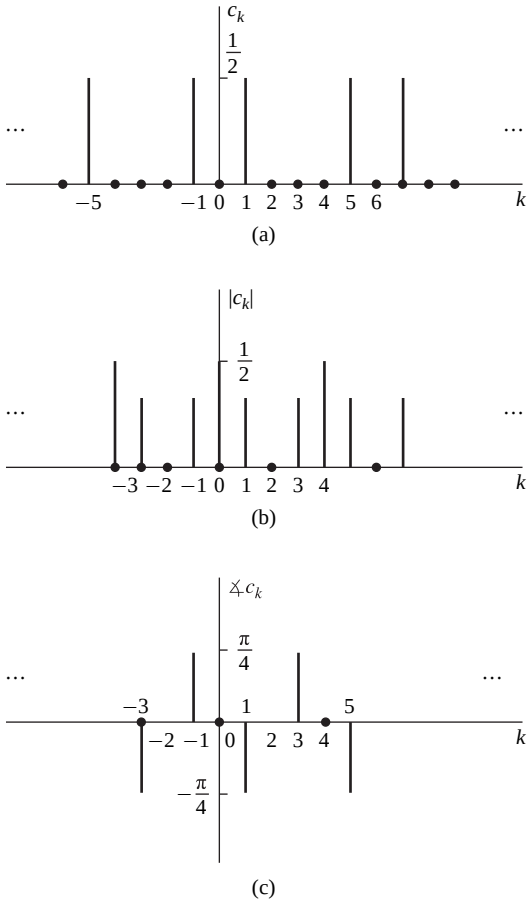


Figura 4.2.1. Espectros de las señales periódicas del Ejemplo 4.2.1 (b) y (c).

4.2.2 Espectro de densidad de potencia de señales periódicas

La potencia media de una señal periódica discreta en el tiempo de período N se ha definido en (2.1.23) como

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2 \tag{4.2.10}$$

Ahora vamos a deducir una expresión para P_x en función de los coeficientes de Fourier $\{c_k\}$.

Si empleamos la relación (4.2.7) en (4.2.10), obtenemos

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x^*(n) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\left(\sum_{k=0}^{N-1} c_k^* e^{-j2\pi kn/N}\right) \end{aligned}$$

Ahora podemos intercambiar el orden de los dos sumatorios y aplicar la Ecuación (4.2.8), obteniendo

$$\begin{aligned} P_x &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k^* \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

que es la expresión buscada para la potencia media de la señal periódica. En otras palabras, la potencia media de la señal es la suma de las potencias de las componentes de frecuencia individuales. Interpretamos (4.2.11) como la relación de Parseval para señales periódicas discretas en el tiempo. La secuencia $|c_k|^2$ para $k = 0, 1, \ldots, N-1$ es la distribución de potencia expresada como una función de la frecuencia y se conoce como *espectro de densidad de potencia* de la señal periódica.

Si estuviéramos interesados en conocer la energía de la secuencia $x(n)$ en un solo período, la expresión (4.2.11) implica que

$$E_N = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = N \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 \tag{4.2.12}$$

lo que es coherente con los resultados obtenidos anteriormente para las señales periódicas continuas en el tiempo. Si la señal $x(n)$ es real [es decir, $x^*(n) = x(n)$], entonces, procediendo como en la Sección 4.2.1, podemos demostrar fácilmente que

$$c_k^* = c_{-k} \tag{4.2.13}$$

o, lo que es equivalente,

$$|c_{-k}| = |c_k| \qquad \text{(simetría par)} \tag{4.2.14}$$

$$-\sphericalangle c_{-k} = \sphericalangle c_k \qquad \text{(simetría impar)} \tag{4.2.15}$$

Estas propiedades de simetría para el módulo y la fase del espectro de una señal periódica, junto con la propiedad de periodicidad, tienen importantes consecuencias en el rango de frecuencias de las señales discretas en el tiempo.

De hecho, si combinamos la expresión (4.2.9) con (4.2.14) y (4.2.15), obtenemos

$$|c_k| = |c_{N-k}| \tag{4.2.16}$$

y

$$\sphericalangle c_k = -\sphericalangle c_{N-k} \tag{4.2.17}$$

Más específicamente, tenemos que

$$\begin{array}{lll} |c_0| = |c_N|, & \sphericalangle c_0 = -\sphericalangle c_N = 0 & \\ |c_1| = |c_{N-1}|, & \sphericalangle c_1 = -\sphericalangle c_{N-1} & \\ |c_{N/2}| = |c_{N/2}|, & \sphericalangle c_{N/2} = 0 & \text{si } N \text{ es par} \\ |c_{(N-1)/2}| = |c_{(N+1)/2}|, & \sphericalangle c_{(N-1)/2} = -\sphericalangle c_{(N+1)/2} & \text{si } N \text{ es impar} \end{array} \tag{4.2.18}$$

Por tanto, para una señal real, el espectro c_k, $k = 0, 1, \ldots, N/2$ para N par, o $k = 0, 1, \ldots, (N-1)/2$ para N impar, especifica por completo la señal en el dominio de la frecuencia. Evidentemente, esto es coherente con el hecho de que la frecuencia relativa más alta que se puede representar mediante una señal discreta en el tiempo es igual a π. De hecho, si $0 \le \omega_k = 2\pi k/N \le \pi$, entonces $0 \le k \le N/2$.

Utilizando las propiedades de simetría de los coeficientes de la serie de Fourier de una señal real, la serie de Fourier dada por (4.2.7) también puede expresarse de las siguientes formas alternativas

$$x(n) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{L} |c_k| \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn + \theta_k\right) \tag{4.2.19}$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{L}\left(a_k \cos\frac{2\pi}{N}kn - b_k \operatorname{sen}\frac{2\pi}{N}kn\right) \tag{4.2.20}$$

donde $a_0 = c_0$, $a_k = 2|c_k|\cos\theta_k$, $b_k = 2|c_k|\operatorname{sen}\theta_k$, y $L = N/2$ si N es par y $L = (N-1)/2$ si N es impar.

Por último, observe que en el caso de señales continuas en el tiempo, la densidad espectral de potencia $|c_k|^2$ no contiene información acerca de la fase. Además, el espectro es discreto y periódico siendo su período fundamental igual al de la propia señal.

EJEMPLO 4.2.2

Señal periódica "cuadrada". Determine los coeficientes de la serie de Fourier y el espectro de densidad de potencia de la señal periódica mostrada en la Figura 4.2.2.

Solución. Aplicando la ecuación de análisis dada por (4.2.8) a la señal mostrada en la Figura 4.2.2, obtenemos

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{L-1} Ae^{-j2\pi kn/N}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

que es una suma geométrica. Ahora utilizamos la Ecuación (4.2.3) para simplificar el sumatorio anterior. Así, obtenemos

$$c_k = \frac{A}{N}\sum_{n=0}^{L-1}(e^{-j2\pi k/N})^n = \begin{cases} \dfrac{AL}{N}, & k = 0 \\ \dfrac{A}{N}\dfrac{1-e^{-j2\pi kL/N}}{1-e^{-j2\pi k/N}}, & k = 1, 2, \ldots, N-1 \end{cases}$$

La expresión anterior puede simplificarse aún más si tenemos en cuenta que

$$\begin{aligned} \frac{1-e^{-j2\pi kL/N}}{1-e^{-j2\pi k/N}} &= \frac{e^{-j\pi kL/N}}{e^{-j\pi k/N}}\frac{e^{j\pi kL/N} - e^{-j\pi kL/N}}{e^{j\pi k/N} - e^{-j\pi k/N}} \\ &= e^{-j\pi k(L-1)/N}\frac{\operatorname{sen}(\pi kL/N)}{\operatorname{sen}(\pi k/N)} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$c_k = \begin{cases} \dfrac{AL}{N}, & k = 0, +N, \pm 2N, \ldots \\ \dfrac{A}{N}e^{-j\pi k(L-1)/N}\dfrac{\operatorname{sen}(\pi kL/N)}{\operatorname{sen}(\pi k/N)}, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{4.2.21}$$

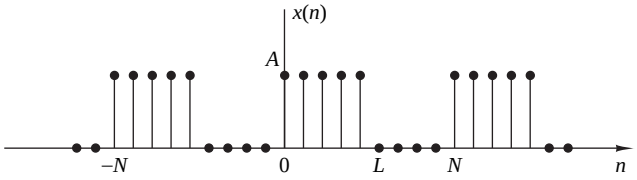


Figura 4.2.2. Señal periódica cuadrada discreta en el tiempo.

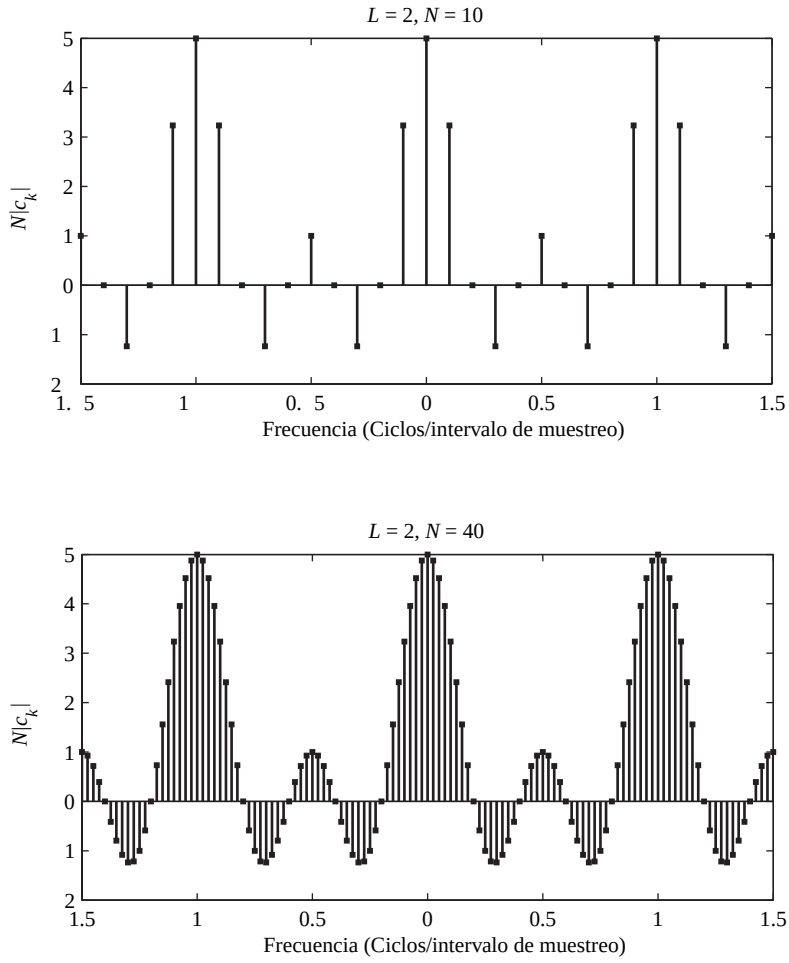


Figura 4.2.3. Gráfica del espectro de densidad de potencia dado por la Ecuación (4.2.22).

La densidad espectral de potencia de esta señal periódica es

$$|c_k|^2 = \begin{cases} \left(\dfrac{AL}{N}\right)^2, & k = 0, +N, \pm 2N, \ldots \\ \left(\dfrac{A}{N}\right)^2 \left(\dfrac{\operatorname{sen} \pi k L/N}{\operatorname{sen} \pi k/N}\right)^2, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{4.2.22}$$

La Figura 4.2.3 ilustra las gráficas de $|c_k|^2$ para $L = 2, N = 10$ y 40, y $A = 1$.

4.2.3 Transformada de Fourier de señales aperiódicas discretas en el tiempo

Al igual que en el caso de las señales de energía aperiódicas continuas en el tiempo, el análisis en frecuencia de las señales de energía finita aperiódicas y discretas en el tiempo utiliza la transformada de Fourier de la señal en el dominio del tiempo. En consecuencia, el desarrollo de esta sección es paralelo, en buena parte, al realizado en la Sección 4.1.3.

La transformada de Fourier de una señal de energía finita discreta en el tiempo $x(n)$ se define como

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \tag{4.2.23}$$

Físicamente, $X(\omega)$ representa el contenido en frecuencia de la señal $x(n)$. En otras palabras, $X(\omega)$ es una descomposición de $x(n)$ en sus componentes de frecuencia.

Podemos observar dos diferencias básicas entre la transformada de Fourier de una señal de energía finita discreta en el tiempo y la transformada de Fourier de una señal de energía finita analógica. Primero, para señales continuas en el tiempo, la transformada de Fourier y, por tanto, el espectro de la señal, el rango de frecuencias es $(-\infty,\infty)$. Por el contrario, el rango de frecuencias de una señal discreta en el tiempo es $(-\pi,\pi)$ o, lo que es equivalente, $(0,2\pi)$. Esta propiedad se refleja en la transformada de Fourier de la señal. De hecho, $X(\omega)$ es periódica de período 2π, es decir,

$$\begin{aligned} X(\omega+2\pi k) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega+2\pi k)n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}e^{-j2\pi kn} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = X(\omega) \end{aligned} \tag{4.2.24}$$

Por tanto, $X(\omega)$ es periódica de período 2π. Pero esta propiedad es sólo una consecuencia del hecho de que el rango de frecuencias de cualquier señal discreta en el tiempo está limitado a $(-\pi,\pi)$, o $(0,2\pi)$, y de que cualquier frecuencia externa a este intervalo es equivalente a una frecuencia que se encuentre dentro del intervalo.

La segunda diferencia básica también es consecuencia de la naturaleza discreta en el tiempo de la señal. Dado que la señal es discreta en el tiempo, la transformada de Fourier de la señal es una suma de términos en lugar de una integración, como en el caso de las señales continuas en el tiempo.

Como $X(\omega)$ es una función periódica de la variable de frecuencia ω, puede expandirse en serie de Fourier, siempre y cuando se satisfagan las condiciones de la existencia de la serie de Fourier descritas anteriormente. De hecho, a partir de la definición de la transformada de Fourier $X(\omega)$ de la secuencia $x(n)$, dada por (4.2.23), observamos que $X(\omega)$ tiene la forma de una serie de Fourier. Los coeficientes de Fourier de esta expansión en serie son los valores de la secuencia $x(n)$.

Para demostrar este punto, vamos a evaluar la secuencia $x(n)$ a partir de $X(\omega)$. En primer lugar, multiplicamos ambos lados de la Ecuación (4.2.23) por $e^{j\omega m}$ e integramos en el intervalo $(-\pi,\pi)$. Así, tenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega m}\,d\omega = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}\right]e^{j\omega m}\,d\omega \tag{4.2.25}$$

La integral del lado derecho de la Ecuación (4.2.25) puede evaluarse si se puede intercambiar el orden de las operaciones de suma e integración. Este intercambio puede hacerse si la serie

$$X_N(\omega) = \sum_{n=-N}^{N} x(n)e^{-j\omega n}$$

converge uniformemente a $X(\omega)$ cuando $N \to \infty$. Convergencia uniforme quiere decir que, para cualquier ω, $X_N(\omega) \to X(\omega)$, cuando $N \to \infty$. La convergencia de la transformada de Fourier se aborda más en detalle en

la siguiente sección. Por el momento, vamos a suponer que la serie converge uniformemente, de manera que podemos intercambiar el orden de las operaciones de suma e integración en la Ecuación (4.2.25). Luego

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)}\, d\omega = \begin{cases} 2\pi, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

En consecuencia,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)}\, d\omega = \begin{cases} 2\pi x(m), & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \tag{4.2.26}$$

Combinando (4.2.25) y (4.2.26), obtenemos el resultado deseado

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n}\, d\omega \tag{4.2.27}$$

Si comparamos la integral de (4.2.27) con (4.1.9), vemos que es sólo la expresión correspondiente a los coeficientes de la serie de Fourier de una función que es periódica de período 2π. La única diferencia entre (4.1.9) y (4.2.27) es el signo del exponente del integrando, lo cual es una consecuencia de nuestra definición de la transformada de Fourier dada por (4.2.23). Por tanto, la transformada de Fourier de la secuencia $x(n)$, definida por (4.2.23), tiene la forma de una expansión en serie de Fourier.

En resumen, el *par de transformadas de Fourier para señales discretas en el tiempo* es el siguiente.

Análisis en frecuencia de señales aperiódicas discretas en el tiempo

Ecuación de síntesis (transformada inversa)	$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\omega) e^{j\omega n}\, d\omega$ (4.2.28)
Ecuación de análisis (transformada directa)	$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$ (4.2.29)

4.2.4 Convergencia de la transformada de Fourier

En la obtención de la transformada inversa dada por (4.2.28), hemos supuesto que la serie

$$X_N(\omega) = \sum_{n=-N}^{N} x(n) e^{-j\omega n} \tag{4.2.30}$$

converge uniformemente a $X(\omega)$, dada por la integral de (4.2.25), cuando $N \to \infty$. Por convergencia uniforme entendemos que, para cada ω,

$$\lim_{N\to\infty} \{\sup_{\omega} |X(\omega) - X_N(\omega)|\} = 0 \tag{4.2.31}$$

La convergencia uniforme está garantizada si $x(n)$ es absolutamente sumable. De hecho, si

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \tag{4.2.32}$$

entonces

$$|X(\omega)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

Luego la expresión (4.2.32) define una condición suficiente para la existencia de la transformada de Fourier discreta en el tiempo. Observe que ésta es la contrapartida discreta en el tiempo de la tercera condición de Dirichlet para la transformada de Fourier de las señales continuas en el tiempo. Las dos primeras condiciones no se aplican a causa de la naturaleza discreta en el tiempo de $\{x(n)\}$.

Existen algunas secuencias que no son absolutamente sumables, sino cuadráticamente sumables. Es decir, tienen energía finita

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty \tag{4.2.33}$$

que es una condición menos restrictiva que la dada por (4.2.32). Nos gustaría definir la transformada de Fourier para secuencias de energía finita, pero para ello tenemos que hacer menos restrictiva la condición de convergencia uniforme. Para tales secuencias, podemos imponer la condición de convergencia cuadrática media:

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega) - X_N(\omega)|^2 \, d\omega = 0 \tag{4.2.34}$$

Por tanto, la energía del error $X(\omega) - X_N(\omega)$ tiende a cero, pero el error $|X(\omega) - X_N(\omega)|$ no necesariamente tiende a cero. De esta forma, podemos incluir señales de energía finita en la clase de señales para las que existe la transformada de Fourier.

Consideremos un ejemplo de señales de energía finita. Suponga que

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \le \pi \end{cases} \tag{4.2.35}$$

Recuerde que $X(\omega)$ es periódica de período 2π. Luego la Ecuación (4.2.35) sólo representa un período de $X(\omega)$. La transformada inversa de $X(\omega)$ es la secuencia

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} \, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} \, d\omega = \frac{\operatorname{sen} \omega_c n}{\pi n}, \qquad n \neq 0 \end{aligned}$$

Para $n = 0$, tenemos

$$x(0) = \frac{1}{2\pi} \int^{\omega_c} -\omega_c \, d\omega = \frac{\omega_c}{\pi}$$

Luego

$$x(n) = \begin{cases} \dfrac{\omega_c}{\pi}, & n = 0 \\ \dfrac{\omega_c}{\pi} \dfrac{\operatorname{sen} \omega_c n}{\omega_c n}, & n \neq 0 \end{cases} \tag{4.2.36}$$

Este par de transformadas se ilustra en la Figura 4.2.4.

En ocasiones, la secuencia $\{x(n)\}$ dada por (4.2.36) se expresa como

$$x(n) = \frac{\operatorname{sen} \omega_c n}{\pi n}, \qquad -\infty < n < \infty \tag{4.2.37}$$

entendiéndose que en $n = 0$, $x(n) = \omega_c/\pi$. Sin embargo, debemos hacer hincapié en que $(\operatorname{sen} \omega_c n)/\pi n$ no es una función continua y, por tanto, no se puede utilizar la regla de L'Hôpital para determinar $x(0)$.

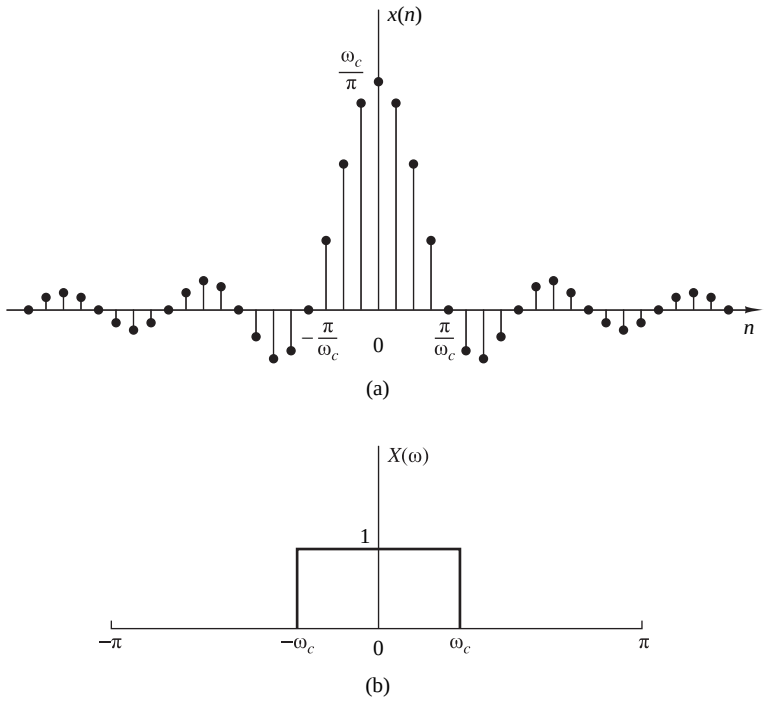


Figura 4.2.4. Par de transformadas de Fourier dadas por (4.2.35) y (4.2.36).

Considere ahora la determinación de la transformada de Fourier de la secuencia dada por (4.2.37). La secuencia $\{x(n)\}$ no es absolutamente sumable. Luego la serie infinita

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\omega_c n}{\pi n} e^{-j\omega n} \tag{4.2.38}$$

no converge uniformemente para todo ω. Sin embargo, la secuencia $\{x(n)\}$ tiene energía finita $E_x = \omega_c/\pi$, como demostraremos en la Sección 4.3. Por tanto, la suma de la expresión (4.2.38) converge a $X(\omega)$, dada en (4.2.35), en sentido cuadrático.

Para ilustrar este punto, consideremos la suma finita

$$X_N(\omega) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{\operatorname{sen}\omega_c n}{\pi n} e^{-j\omega n} \tag{4.2.39}$$

La Figura 4.2.5 muestra la función $X_N(\omega)$ para varios valores de N. Observe que aparece un sobreimpulso oscilatorio importante en $\omega = \omega_c$, independiente del valor de N. Cuando N aumenta, las oscilaciones se hacen más rápidas y el tamaño del rizado no varía. Se puede demostrar que cuando $N \to \infty$, las oscilaciones convergen hacia el punto de discontinuidad en $\omega = \omega_c$, pero su amplitud no llega a ser cero. Sin embargo, se satisface la expresión (4.2.34) y, por tanto, $X_N(\omega)$ converge a $X(\omega)$ en sentido cuadrático.

El comportamiento oscilatorio de la aproximación $X_N(\omega)$ a la función $X(\omega)$ en un punto de discontinuidad de $X(\omega)$ se conoce como *fenómeno de Gibbs*. Puede observarse un efecto similar en el truncamiento de la serie de Fourier de una señal periódica continua en el tiempo, dada por la ecuación de sintesis (4.1.8). Por ejemplo, el truncamiento de la serie de Fourier para la señal periódica cuadrada del Ejemplo 4.1.1 alcanza el mismo comportamiento oscilatorio de la suma finita que aproxima $x(t)$. En el Capítulo 10 veremos de nuevo el fenómeno de Gibbs en el diseño práctico de sistemas FIR discretos en el tiempo.

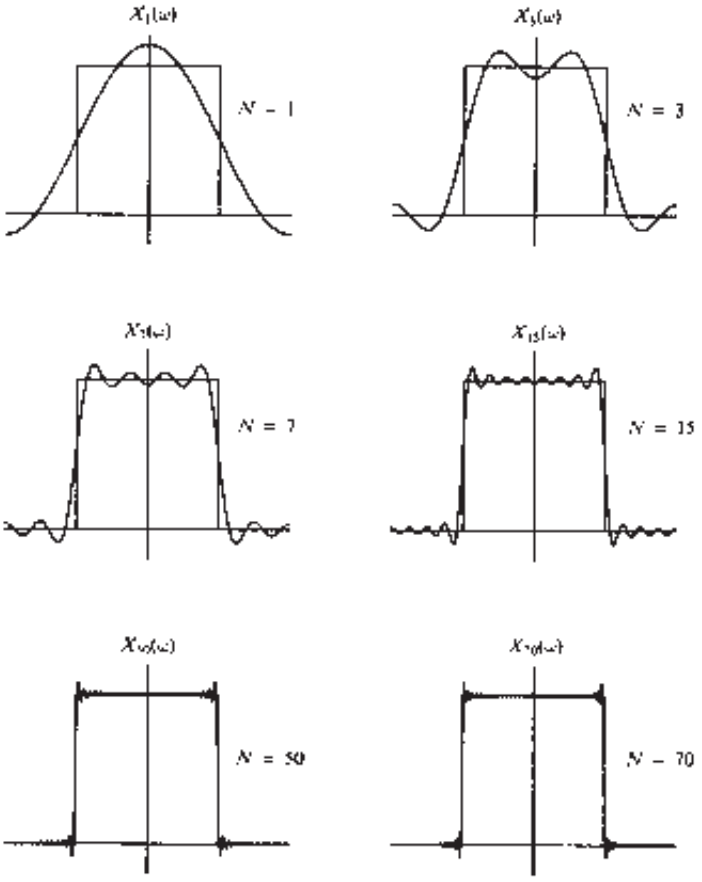


Figura 4.2.5. Ilustración de la convergencia de la transformada de Fourier y el fenómeno de Gibbs en el punto de discontinuidad.

4.2.5 Espectro de densidad de energía de señales aperiódicas

Recuerde que la energía de una señal discreta en el tiempo $x(n)$ se define como

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \tag{4.2.40}$$

Ahora expresamos la energía E_x en función de la característica espectral $X(\omega)$. En primer lugar, tenemos que

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)x(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(\omega)e^{-j\omega n}\,d\omega\right]$$

Si intercambiamos el orden de la operación de integración y de suma en la ecuación anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(\omega)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}\right]d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2\,d\omega \end{aligned}$$

Por tanto, la relación de energía entre $x(n)$ y $X(\omega)$ es

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 \, d\omega \tag{4.2.41}$$

Ésta es la relación de Parseval para señales aperiódicas discretas en el tiempo de energía finita.

En general, el espectro $X(\omega)$ es una función compleja de la frecuencia y se puede expresar como

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\Theta(\omega)} \tag{4.2.42}$$

donde

$$\Theta(\omega) = \sphericalangle X(\omega)$$

es la fase del espectro y $|X(\omega)|$ es el módulo.

Como en el caso de las señales continuas en el tiempo, la magnitud

$$S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2 \tag{4.2.43}$$

representa la distribución de energía como una función de la frecuencia y se conoce como *espectro de densidad de energía* de $x(n)$. Evidentemente, $S_{xx}(\omega)$ no contiene información acerca de la fase.

Suponga ahora que la señal $x(n)$ es real. En este caso, se puede deducir fácilmente que

$$X^*(\omega) = X(-\omega) \tag{4.2.44}$$

o, lo que es equivalente,

$$|X(-\omega)| = |X(\omega)|, \qquad \text{(simetría par)} \tag{4.2.45}$$

y

$$\sphericalangle X(-\omega) = -\sphericalangle X(\omega), \qquad \text{(simetría impar)} \tag{4.2.46}$$

A partir de la Ecuación (4.2.43), se deduce también que

$$S_{xx}(-\omega) = S_{xx}(\omega), \qquad \text{(simetría par)} \tag{4.2.47}$$

A partir de estas propiedades de simetría, concluimos que el rango de frecuencias de las señales reales discretas en el tiempo puede limitarse a $0 \le \omega \le \pi$ (es decir, la mitad del período). De hecho, si conocemos $X(\omega)$ en el rango $0 \le \omega \le \pi$, podremos determinarla para el rango $-\pi \le \omega < 0$, utilizando las propiedades de simetría anteriormente mencionadas. Como ya hemos visto, se obtienen resultados similares para las señales periódicas discretas en el tiempo. Por tanto, la descripción en el dominio de la frecuencia de una señal real discreta en el tiempo queda completamente especificada por su espectro en el rango de frecuencias $0 \le \omega \le \pi$.

Normalmente, trabajaremos en el intervalo fundamental $0 \le \omega \le \pi$ o $0 \le F \le F_s/2$, expresado en hercios. Sólo dibujaremos más de un semiperíodo cuando lo requiera la aplicación específica.

EJEMPLO 4.2.3

Determine y dibuje el espectro de densidad de energía $S_{xx}(\omega)$ de la señal

$$x(n) = a^n u(n), \qquad -1 < a < 1$$

Solución. Ya que $|a| < 1$, la secuencia $x(n)$ es absolutamente sumable, como puede verificarse aplicando la fórmula de la suma geométrica,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \frac{1}{1-|a|} < \infty$$

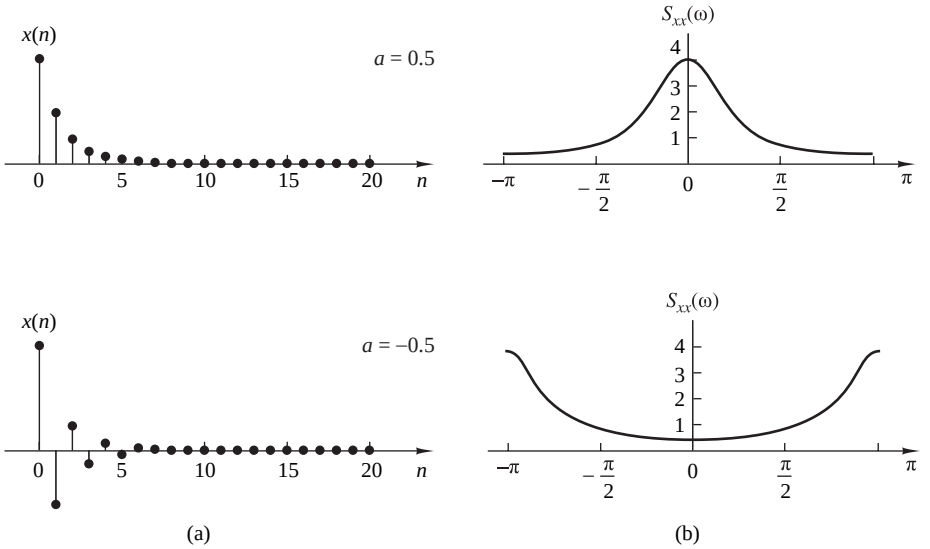


Figura 4.2.6. (a) Secuencias $x(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$ y $x(n) = (-\frac{1}{2})^n u(n)$. (b) Espectros de densidad de energía.

Por tanto, existe la transformada de Fourier de $x(n)$ y se obtiene aplicando (4.2.29). Luego,

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n$$

Como $|ae^{-j\omega}| = |a| < 1$, utilizamos de nuevo la fórmula de la suma geométrica para obtener

$$X(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

El espectro de densidad energía está dado por

$$S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|2 = X(\omega)X(\omega) = \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})(1 - ae^{j\omega})}$$

o, lo que es equivalente, por

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{1 - 2a\cos\omega + a^2}$$

Observe que $S_{xx}(-\omega) = S_{xx}(\omega)$ según (4.2.47).

La Figura 4.2.6 muestra la señal $x(n)$ y el espectro correspondiente para $a = 0.5$ y $a = -0.5$. Observe que para $a = -0.5$, la señal presenta variaciones más rápidas y, en consecuencia, su espectro presenta componentes más grandes a altas frecuencias.

EJEMPLO 4.2.4

Determine la transformada de Fourier y el espectro de densidad de energía de la secuencia

$$x(n) = \begin{cases} A, & 0 \le n \le L-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{4.2.48}$$

que se ilustra en la Figura 4.2.7.

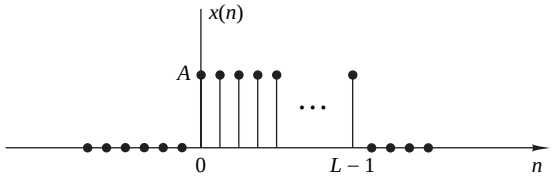


Figura 4.2.7. Impulso rectangular discreto en el tiempo.

Solución. Antes de calcular la transformada de Fourier, observe que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| = \sum_{n=0}^{L-1} |A| = L|A| < \infty$$

Por tanto, $x(n)$ es absolutamente sumable y su transformada de Fourier existe. Además, fíjese en que $x(n)$ es una señal de energía finita con $E_x = |A|^2 L$.

La transformada de Fourier de esta señal es

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{n=0}^{L-1} Ae^{-j\omega n} \\ &= A\frac{1-e^{-j\omega L}}{1-e^{-j\omega}} \\ &= Ae^{-j(\omega/2)(L-1)}\frac{\operatorname{sen}(\omega L/2)}{\operatorname{sen}(\omega/2)} \end{aligned} \tag{4.2.49}$$

Para $\omega = 0$, la transformada dada por (4.2.49) es $X(0) = AL$, lo que se obtiene fácilmente haciendo $\omega = 0$ en la ecuación de definición de $X(\omega)$, o aplicando la regla de L'Hôpital a (4.2.49), para resolver la forma indeterminada cuando $\omega = 0$.

El módulo y la fase del espectro de $x(n)$ son

$$|X(\omega)| = \begin{cases} |A|L, & \omega = 0 \\ |A|\left|\dfrac{\operatorname{sen}(\omega L/2)}{\operatorname{sen}(\omega/2)}\right|, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{4.2.50}$$

y

$$\sphericalangle X(\omega) = \sphericalangle A - \frac{\omega}{2}(L-1) + \sphericalangle\frac{\operatorname{sen}(\omega L/2)}{\operatorname{sen}(\omega/2)} \tag{4.2.51}$$

donde sabemos que la fase de una magnitud real es cero si dicha magnitud es positiva y π si es negativa.

Las gráficas de $|X(\omega)|$ y $\sphericalangle X(\omega)$ se muestran en la Figura 4.2.8 para el caso en que $A = 1$ y $L = 5$. El espectro de densidad de energía es simplemente el cuadrado de la expresión dada en (4.2.50).

Existe una interesante relación entre la transformada de Fourier del impulso de amplitud constante del Ejemplo 4.2.4 y la señal periódica rectangular del Ejemplo 4.2.2. Si evaluamos la transformada de Fourier dada por (4.2.49) en un conjunto de frecuencias igualmente espaciadas (armónicamente relacionadas)

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

obtenemos

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = Ae^{-j(\pi/N)k(L-1)}\frac{\operatorname{sen}[(\pi/N)kL]}{\operatorname{sen}[(\pi/N)k]} \tag{4.2.52}$$

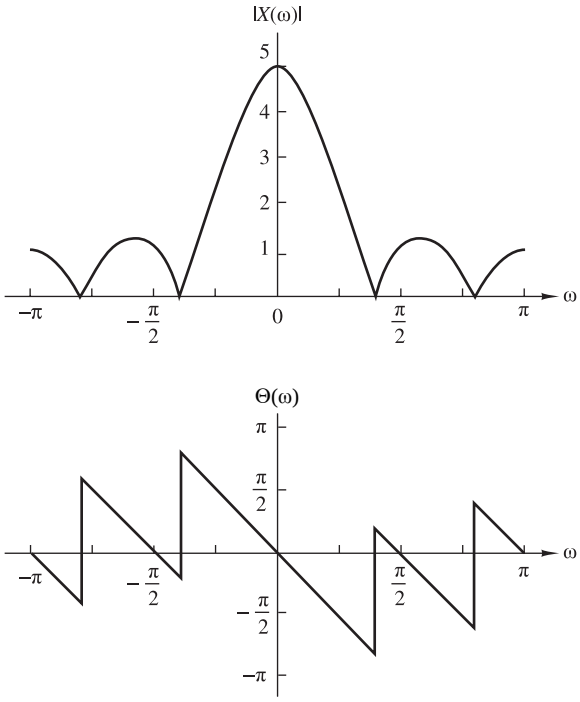


Figura 4.2.8. Módulo y fase de la transformada de Fourier del impulso rectangular discreto en el tiempo de la Figura 4.2.7.

Si comparamos este resultado con la expresión de los coeficientes de la serie de Fourier dada por (4.2.21) para la onda periódica rectangular, tenemos que

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = Nc_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{4.2.53}$$

Hemos establecido que la transformada de Fourier del impulso rectangular, que es idéntica a un solo período del tren de impulsos rectangulares periódico, evaluada en las frecuencias $\omega = 2\pi k/N, k = 0, 1, \ldots, N-1$, que son idénticas a las componentes de frecuencia armónicamente relacionadas utilizadas en la representación en serie de Fourier de la señal periódica, es simplemente un mútliplo de los coeficientes de Fourier $\{c_k\}$ en las frecuencias correspondientes.

La relación dada en la Ecuación (4.2.53) para la transformada de Fourier del impulso rectangular evaluada en $\omega = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, y los coeficientes de Fourier de la correspondiente señal periódica, no sólo se cumple para estas dos señales, sino que, de hecho, se cumple de manera general. Esta relación se desarrolla más en detalle en el Capítulo 7.

4.2.6 Relaciones entre la transformada de Fourier y la transformada z

La transformada z de una secuencia $x(n)$ se define como sigue:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}, \qquad \text{ROC: } r_2 < |z| < r_1 \tag{4.2.54}$$

donde $r_2 < |z| < r_1$ es la región de convergencia de $X(z)$. Expresamos la variable compleja z en forma polar como

$$z = re^{j\omega} \tag{4.2.55}$$

donde $r = |z|$ y $\omega = \sphericalangle z$. Por tanto, dentro de la región de convergencia de $X(z)$, podemos sustituir $z = re^{j\omega}$ en (4.2.54), lo que da

$$X(z)|_{z=re^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n)r^{-n}]e^{-j\omega n} \tag{4.2.56}$$

A partir de la relación dada en (4.2.56), vemos que $X(z)$ puede interpretarse como la transformada de Fourier de la secuencia $x(n)r^{-n}$. El factor de ponderación r^{-n} aumenta con n si $r < 1$ y disminuye si $r > 1$. Alternativamente, si $X(z)$ converge para $|z| = 1$, entonces

$$X(z)|_{z=e^{j\omega}} \equiv X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \tag{4.2.57}$$

Por tanto, la transformada de Fourier puede interpretarse como la transformada z de la secuencia evaluada en el círculo unidad. Si $X(z)$ no converge en la región $|z| = 1$ [es decir, si la circunferencia unidad no está contenida en la región de convergencia de $X(z)$], la transformada de Fourier $X(\omega)$ no existe. La Figura 4.2.9 ilustra la relación entre $X(z)$ y $X(\omega)$ para la secuencia rectangular del Ejemplo 4.2.4, donde $A = 1$ y $L = 10$.

Observe que la existencia de la transformada z requiere que la secuencia $\{x(n)r^{-n}\}$ sea absolutamente sumable para ciertos valores de r, es decir,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)r^{-n}| < \infty \tag{4.2.58}$$

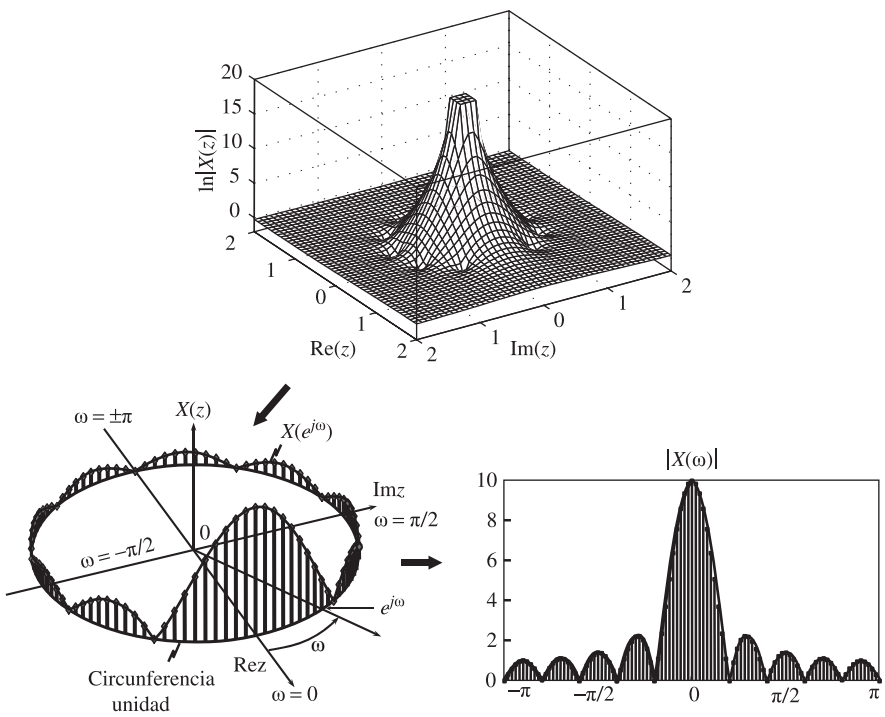


Figura 4.2.9. Relaciones entre $X(z)$ y $X(\omega)$ para la secuencia del Ejemplo 4.2.4, con $A = 1$ y $L = 10$.

Por tanto, si (4.2.58) sólo converge para los valores $r > r_0 > 1$, la transformada de z existe, pero la transformada de Fourier no existe. Éste es el caso por ejemplo de las secuencias causales de la forma $x(n) = a^n u(n)$, donde $|a| > 1$.

Sin embargo, existen secuencias que no satisfacen el requisito establecido por la expresión (4.2.58); por ejemplo, la secuencia

$$x(n) = \frac{\operatorname{sen} \omega_c n}{\pi n}, \qquad -\infty < n < \infty \tag{4.2.59}$$

Esta secuencia no tiene una transformada z. Puesto que tiene energía finita, su transformada de Fourier converge en sentido cuadrático medio a la función discontinua $X(\omega)$, definida como

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \tag{4.2.60}$$

En resumen, la existencia de la transformada z requiere que se satisfaga la expresión (4.2.58) para alguna región del plano z. Si esta región contiene la circunferencia unidad, entonces existe la transformada de Fourier $X(\omega)$. Sin embargo, la existencia de la transformada de Fourier, que se define para señales de energía finita, no asegura necesariamente la existencia de la transformada z.

4.2.7 El Cepstro

Considere una secuencia $\{x(n)\}$ cuya transformada z es $X(z)$. Suponga que $\{x(n)\}$ es una secuencia estable, tal que $X(z)$ converge en la circunferencia unidad. El *cepstro complejo* de la secuencia $\{x(n)\}$ se define como la secuencia $\{c_x(n)\}$, que es la transformada z inversa de $C_x(z)$, donde

$$C_x(z) = \ln X(z) \tag{4.2.61}$$

El cepstro complejo existe si $C_x(z)$ converge en la región anular $r_1 < |z| < r_2$, donde $0 < r_1 < 1$ y $r_2 > 1$. Dentro de esta región de convergencia, $C_x(z)$ puede representarse mediante la serie de Laurent

$$C_x(z) = \ln X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_x(n) z^{-n} \tag{4.2.62}$$

donde

$$c_x(n) = \frac{1}{2\pi j} \int_C \ln X(z) z^{n-1}\, dz \tag{4.2.63}$$

C es un contorno cerrado alrededor del origen y contenido dentro de la región de convergencia. Evidentemente, si $C_x(z)$ puede representarse como en (4.2.62), la secuencia cepstro complejo $\{c_x(n)\}$ es estable. Además, si existe el cepstro complejo, $C_x(z)$ converge en la circunferencia unidad y así tenemos

$$C_x(\omega) = \ln X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_x(n) e^{-j\omega n} \tag{4.2.64}$$

donde $\{c_x(n)\}$ es la secuencia obtenida a partir de la transformada inversa de Fourier de $\ln X(\omega)$, esto es,

$$c_x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln X(\omega) e^{j\omega n}\, d\omega \tag{4.2.65}$$

Si expresamos $X(\omega)$ en función de su módulo y su fase, tenemos

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\theta(\omega)} \tag{4.2.66}$$

entonces

$$\ln X(\omega) = \ln|X(\omega)| + j\theta(\omega) \tag{4.2.67}$$

Sustituyendo (4.2.67) en (4.2.65), obtenemos el cepstro complejo de la forma

$$c_x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\ln|X(\omega)| + j\theta(\omega)]e^{j\omega n}\,d\omega \tag{4.2.68}$$

Podemos separar la transformada inversa de Fourier dada por (4.2.68) en las transformadas inversas de Fourier de $\ln|X(\omega)|$ y $\theta(\omega)$:

$$c_m(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|X(\omega)|e^{j\omega n}\,d\omega \tag{4.2.69}$$

$$c_\theta(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\theta(\omega)e^{j\omega n}\,d\omega \tag{4.2.70}$$

En algunas aplicaciones, como por ejemplo el procesamiento de voz, sólo se calcula la componente $c_m(n)$. En dicho caso, la fase de $X(\omega)$ se ignora. Por tanto, la secuencia $\{x(n)\}$ no se puede recuperar a partir de $\{c_m(n)\}$. Es decir, el proceso de transformación de $\{x(n)\}$ en $\{c_m(n)\}$ no se puede invertir.

En el procesamiento de señales de voz, el cepstro (real) se emplea para separar y, por tanto, para estimar el contenido espectral de la señal de voz a partir de la frecuencia fundamental del orador. En la práctica, el cepstro complejo se utiliza para separar señales que se han convolucionado. El proceso de separación de dos señales convolucionadas se denomina *deconvolución* y el uso del cepstro complejo para llevar a cabo este proceso de separación se denomina *deconvolución homomórfica*. Este tema se aborda en la Sección 5.5.4.

4.2.8 Transformada de Fourier de señales con polos en la circunferencia unidad

Como se ha demostrado en la Sección 4.2.6, la transformada de Fourier de una secuencia $x(n)$ se puede determinar evaluando su transformada z $X(z)$ en la circunferencia unidad, siempre que dicha circunferencia esté dentro de la región de convergencia de $X(z)$. Sin embargo, la transformada de Fourier no existe.

Existen algunas secuencias aperiódicas que no son ni absolutamente sumables ni cuadráticamente sumables. Por tanto, sus transformadas de Fourier no existen. Una secuencia de este tipo es el escalón unidad, que tiene la transformada z

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Otra secuencia así es la señal sinusoidal causal $x(n) = (\cos\omega_0 n)u(n)$. Esta secuencia tiene la transformada z

$$X(z) = \frac{1 - z^{-1}\cos\omega_0}{1 - 2z^{-1}\cos\omega_0 + z^{-2}}$$

Observe que ambas secuencias tienen polos sobre la circunferencia unidad.

Para secuencias como las de estos dos ejemplos, a veces resulta útil ampliar la representación de la transformada de Fourier. Para ello, de una forma rigurosamente matemática, se permite que la transformada de Fourier contenga impulsos a determinadas frecuencias que se corresponden con la posición de los polos de $X(z)$ sobre la circunferencia unidad. Los impulsos son funciones de la variable de frecuencia ω y tienen amplitud infinita, anchura cero y área unidad. Puede pensarse en un impulso como en la forma límite de un impulso rectangular de altura $1/a$ y anchura a, cuando $a \to 0$. Por tanto, si permitimos impulsos en el espectro de una señal, es posible extender la transformada de Fourier a ciertas secuencias que no son ni absolutamente sumables ni cuadráticamente sumables.

El siguiente ejemplo ilustra la extensión de la transformada de Fourier para las tres secuencias.

EJEMPLO 4.2.5

Determine la transformada de Fourier de las señales siguientes:

(a) $x_1(n) = u(n)$

(b) $x_2(n) = (-1)^n u(n)$

(c) $x_3(n) = (\cos \omega_0 n) u(n)$

evaluando su transformada z en la circunferencia unidad.

Solución.

(a) De la Tabla 3.3, obtenemos

$$X_1(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}, \qquad \text{ROC: } |z| > 1$$

$X_1(z)$ tiene un polo, $p_1 = 1$, sobre la circunferencia unidad, pero converge para $|z| > 1$.
Si evaluamos $X_1(z)$ sobre la circunferencia unidad, excepto en $z = 1$, obtenemos

$$X_1(\omega) = \frac{e^{j\omega/2}}{2j\,\text{sen}(\omega/2)} = \frac{1}{2\,\text{sen}(\omega/2)} e^{j(\omega-\pi/2)}, \qquad \omega \neq 2\pi k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

En $\omega = 0$ y en los múltiplos de 2π, $X_1(\omega)$ contiene impulsos de área π.
Por tanto, la presencia de un polo en $z = 1$ (es decir, en $\omega = 0$) crea un problema sólo cuando queremos calcular $|X_1(\omega)|$ en $\omega = 0$, porque $|X_1(\omega)| \to \infty$ cuando $\omega \to 0$. Para cualquier otro valor de ω, $X_1(\omega)$ es finita (es decir, está bien condicionada). Aunque a primera vista, puede esperarse que la señal tenga componentes nulas en todas las frecuencias excepto en $\omega = 0$, no es así. Esto ocurre porque la señal $x_1(n)$ no es constante para todo $-\infty < n < \infty$. En lugar de ello, *se activa* en $n = 0$. Este salto abrupto crea todas las componentes de frecuencia que existen en el rango $0 < \omega \leq \pi$. Generalmente, todas las señales que se inician en un instante finito tienen componentes no nulas en cualquier punto del eje de frecuencias desde cero hasta la frecuencia de solapamiento.

(b) A partir de la Tabla 3.3, obtenemos que la transformada z de $a^n u(n)$ con $a = -1$ se reduce a

$$X_2(z) = \frac{1}{1+z^{-1}} = \frac{z}{z+1}, \qquad \text{ROC: } |z| > 1$$

que tiene un polo en $z = -1 = e^{j\pi}$. La transformada de Fourier evaluada en frecuencias distintas de $\omega = \pi$ y múltiplos de 2π es

$$X_2(\omega) = \frac{e^{j\omega/2}}{2\cos(\omega/2)}, \qquad \omega \neq 2\pi(k + \frac{1}{2}), \quad k = 0, 1, \ldots$$

En este caso, el impulso se produce en $\omega = \pi + 2\pi k$.
Luego el módulo es

$$|X_2(\omega)| = \frac{1}{2|\cos(\omega/2)|}, \qquad \omega \neq 2\pi k + \pi, \quad k = 0, 1, \ldots$$

y la fase es

$$\sphericalangle X_2(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\omega}{2}, & \text{si } \cos\dfrac{\omega}{2} \geq 0 \\ \dfrac{\omega}{2} + \pi, & \text{if } \cos\dfrac{\omega}{2} < 0 \end{cases}$$

Observe que debido a la presencia del polo en $a = -1$ (es decir, en la frecuencia $\omega = \pi$), el módulo de la transformada de Fourier se hace infinito. Por tanto, $|X(\omega)| \to \infty$ cuando $\omega \to \pi$. Observe que $(-1)^n u(n) = (\cos \pi n) u(n)$, que es la señal de oscilación más rápida posible discreta en el tiempo.

(c) A partir de la exposición anterior, tenemos que $X_3(\omega)$ es infinita en la frecuencia $\omega = \omega_0$. Utilizando la Tabla 3.3, tenemos que

$$x_3(n) = (\cos\omega_0 n)u(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X_3(z) = \frac{1 - z^{-1}\cos\omega_0}{1 - 2z^{-1}\cos\omega_0 + z^{-2}}, \qquad \text{ROC: } |z| > 1$$

La transformda de Fourier es

$$X_3(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega}\cos\omega_0}{(1 - e^{-j(\omega-\omega_0)})(1 - e^{j(\omega+\omega_0)})}, \qquad \omega \neq \pm\omega_0 + 2\pi k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

El módulo de $X_3(\omega)$ está dado por

$$|X_3(\omega)| = \frac{|1 - e^{-j\omega}\cos\omega_0|}{|1 - e^{-j(\omega-\omega_0)}||1 - e^{-j(\omega+\omega_0)}|}, \qquad \omega \neq \pm\omega_0 + 2\pi k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Ahora, si $\omega = -\omega_0$ u $\omega = \omega_0$, $|X_3(\omega)|$ se hace infinito. Para las restantes frecuencias, la transformada de Fourier está bien condicionada.

4.2.9 Clasificación de las señales en el dominio de la frecuencia: concepto de ancho de banda

Del mismo modo que hemos clasificado las señales según sus características en el dominio del tiempo, también es deseable clasificarlas de acuerdo con sus características en el dominio de la frecuencia. Es habitual clasificar las señales de acuerdo con conceptos amplios atendiendo a su contenido en frecuencia.

En particular, si una señal de potencia (o una señal de energía) tiene su espectro de densidad de potencia (o su espectro de densidad de energía) concentrado alrededor de la frecuencia cero, tal señal se dice que es una *señal de baja frecuencia*. La Figura 4.2.10(a) ilustra las características espectrales de una señal de este tipo. Por el contrario, si el espectro de densidad de potencia (o el espectro de densidad de energía) de la señal está concentrado en las altas frecuencias, se dice que la señal es una *señal de alta frecuencia*. El espectro de dicha señal se ilustra en la Figura 4.2.10(b). Una señal que tiene un espectro de densidad de potencia (o un espectro de densidad de energía) concentrado en algún punto dentro de un amplio rango de frecuencias entre las bajas y las altas frecuencias se dice que es una *señal de frecuencia media* o *señal paso banda*. La Figura 4.2.10(c) ilustra el espectro de este tipo de señal.

Además de esta clasificación de las señales en el dominio de la frecuencia relativamente amplia, a menudo es deseable expresar cuantitativamente el rango de las frecuencias en el que se concentra la densidad espectral de potencia o de energía. Esta medida cuantitativa se conoce como *ancho de banda* de la señal. Por ejemplo, suponga que una señal continua en el tiempo tiene el 95 % de su espectro de densidad de potencia (o de energía) concentrado en el rango de frecuencias $F_1 \leq F \leq F_2$. Entonces el 95 % del ancho de banda de la señal es $F_2 - F_1$. Del mismo modo, podemos definir el 75 %, el 90 % o el 99 % del ancho de banda de la señal.

En el caso de una señal paso banda, se emplea el término *banda estrecha* para describir la señal si su ancho de banda $F_2 - F_1$ es mucho más pequeño (por ejemplo, en un factor de 10 o más) que la frecuencia media $(F_2 + F_1)/2$. En caso contrario, se dice que la señal es de *banda ancha* .

Decimos que una señal es de *banda limitada* si su espectro es nulo fuera del rango de frecuencias $|F| \geq B$. Por ejemplo, una señal de energía finita continua en el tiempo $x(t)$ es de banda limitada si su transformada de Fourier cumple que $X(F) = 0$ para $|F| > B$. Una señal de energía finita discreta en el tiempo $x(n)$ se dice que es de *banda limitada (periódicamente)* si

$$|X(\omega)| = 0, \qquad \text{para} \quad \omega_0 < |\omega| < \pi$$

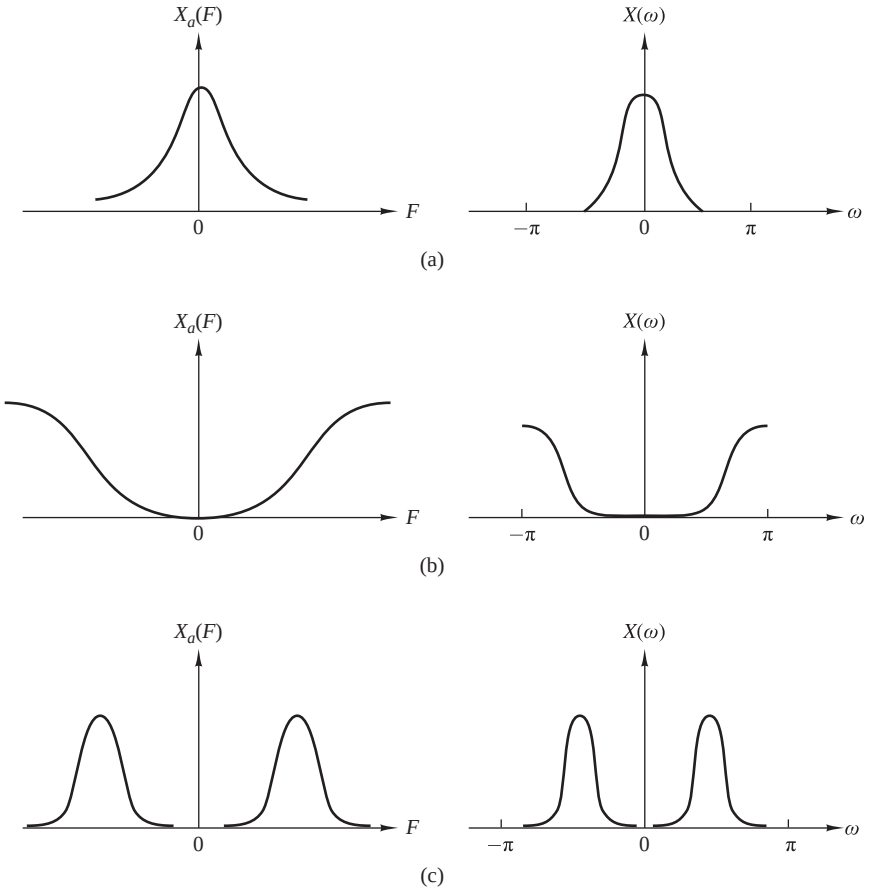


Figura 4.2.10. Señales de (a) baja frecuencia, (b) alta frecuencia y (c) media frecuencia.

Del mismo modo, una señal periódica continua en el tiempo $x_p(t)$ es de banda limitada periódicamente si sus coeficientes de Fourier cumplen que $c_k = 0$ para $|k| > M$, donde M es un entero positivo. Una señal periódica discreta en el tiempo de período fundamental N es de banda limitada periódicamente si sus coeficientes de Fourier cumplen que $c_k = 0$ para $k_0 < |k| < N$. La Figura 4.2.11 ilustra los cuatro tipos de señales de banda limitada.

Utilizando la dualidad entre el dominio de la frecuencia y el dominio del tiempo, podemos proporcionar medios similares para caracterizar las señales en el dominio del tiempo. En particular, diremos que una señal $x(t)$ está *limitada en el tiempo* si

$$x(t) = 0, \qquad |t| > \tau$$

Si la señal es periódica de período T_p, será *limitada en el tiempo periódicamente* si

$$x_p(t) = 0, \qquad \tau < |t| < T_p/2$$

Si tenemos una señal discreta en el tiempo $x(n)$ de duración finita, es decir,

$$x(n) = 0, \qquad |n| > N$$

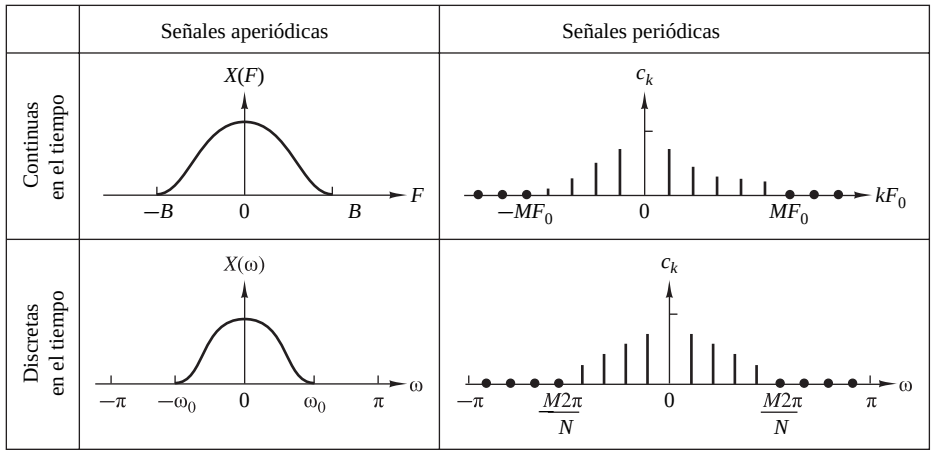


Figura 4.2.11. Algunos ejemplos de señales de banda limitada.

también se dice que es limitada en el tiempo. Cuando la señal es periódica con período fundamental N, se dice que es limitada en el tiempo periódicamente si

$$x(n) = 0, \qquad n_0 < |n| < N$$

Podemos establecer, aunque no lo vamos a demostrar, que ninguna *señal puede ser limitada en el tiempo y de banda limitada de forma simultánea*. Además, existe una relación recíproca entre la duración temporal y la duración en frecuencia de una señal. Si tenemos un impulso de corta duración en el dominio del tiempo, su espectro tiene una anchura que es inversamente proporcional a la duración del impulso en el dominio del tiempo. Cuanto más estrecho es el impulso en el dominio del tiempo, mayor es el ancho de banda de la señal. En consecuencia, el producto de la duración temporal por el ancho de banda de una señal no puede hacerse arbitrariamente pequeño. Una señal de corta duración tiene un ancho de banda grande y una señal con un ancho de banda pequeño tiene una duración larga. Por tanto, para cualquier señal, el producto tiempo–ancho de banda es fijo y no se puede hacer arbitrariamente pequeño.

Por último, observe que hemos abordado métodos para realizar el análisis en frecuencia de señales periódicas y aperiódicas con energía finita. Sin embargo, existe una familia de señales aperiódicas deterministas con potencia finita, que se forman por la superposición lineal de exponenciales complejas con frecuencias relacionadas no armónicamente, es decir,

$$x(n) = \sum_{k=1}^{M} A_k e^{j\omega_k n}$$

donde $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_M$ no están relacionadas armónicamente. Estas señales tienen espectros discretos pero las distancias entre las líneas no están armónicamente relacionadas. A veces, las señales con espectros discretos no armónicos se denominan señales quasi-periódicas.

4.2.10 Rangos de frecuencia de algunas señales naturales

Las herramientas para el análisis en frecuencia que hemos desarrollado en este capítulo normalmente se aplican a una amplia variedad de señales que pueden encontrarse en la práctica (como por ejemplo, señales sísmicas, biológicas y electromagnéticas). En general, el análisis en frecuencia se realiza con el fin de extraer información de la señal observada. Por ejemplo, en el caso de señales biológicas, como una señal de ECG, las herramientas analíticas se emplean para extraer información relevante para propósitos de diagnóstico. En el caso de las señales sísmicas, podemos estar interesados en detectar la presencia de una explosión nuclear o en determinar

las características y la ubicación de un terremoto. Una señal electromagnética, como por ejemplo una señal de radar reflejada desde un avión, contiene información sobre la posición del avión y su velocidad. Estos parámetros se pueden estimar observando la señal de radar recibida.

Al procesar cualquier señal con el fin de medir parámetros o extraer otro tipo de información, es preciso conocer de forma aproximada el rango de frecuencias contenidas en la señal. Como referencia, las Tablas 4.1, 4.2 y 4.3 proporcionan límites aproximados en el dominio de la frecuencia para señales biológicas, sísmicas y electromagnéticas.

Tipo de señal	Rango de frecuencias (Hz)
Electroretinograma[a]	0–20
Electronistagmograma[b]	0–20
Neumograma[c]	0–40
Electrocardiograma (ECG)	0–100
Electroencefalograma (EEG)	0–100
Electromiograma[d]	10–200
Esfigmomanograma[e]	0–200
Voz	100–4000

[a]Registro gráfico de las características de la retina.

[b]Registro gráfico del movimiento involuntario de los ojos .

[c]Registro gráfico de la actividad respiratoria.

[d]Registro gráfico de la actividad muscular, como por ejemplo una contracción muscular.

[e]Registro gráfico de la presión sanguínea.

Tabla 4.1. Rangos de frecuencia de algunas señales biológicas.

4.3 Propiedades de la señal en los dominios de la frecuencia y del tiempo

En las secciones anteriores del capítulo hemos presentado varios métodos para llevar a cabo el análisis en frecuencia de señales. Han sido necesarios varios métodos para poder acomodar los diferentes tipos de señales. En resumen, se han presentado las siguientes herramientas para llevar a cabo el análisis en frecuencia:

1. La serie de Fourier para señales periódicas continuas en el tiempo.
2. La transformada de Fourier para señales aperiódicas continuas en el tiempo.

Tipo de señal	Rango de frecuencias (Hz)
Ruido del viento	100–1000
Señales de exploración sísmica	10–100
Señales de terremotos y explosiones nucleares	0.01–10
Ruido sísmico	0.1–1

Tabla 4.2. Rangos de frecuencia de algunas señales sísmicas.

Tipo de señal	Longitud de onda (m)	Rango de frecuencias (Hz)
Radiodifusión	10^4–10^2	3×10^4–3×10^6
Señales de radio de onda corta	10^2–10^{-2}	3×10^6–3×10^{10}
Radar, comunicaciones por satélite, comunicaciones espaciales, enlaces de microondas	1–10^{-2}	3×10^8–3×10^{10}
Infrarrojos	10^{-3}–10^{-6}	3×10^{11}–3×10^{14}
Luz visible	3.9×10^{-7}–8.1×10^{-7}	3.7×10^{14}–7.7×10^{14}
Ultravioleta	10^{-7}–10^{-8}	3×10^{15}–3×10^{16}
Rayos gamma y rayos X	10^{-9}–10^{-10}	3×10^{17}–3×10^{18}

Tabla 4.3. Rangos de frecuencia de señales electromagnéticas.

3. La serie de Fourier para señales periódicas discretas en el tiempo.

4. La transformada de Fourier para señales aperiódicas discretas en el tiempo.

La Figura 4.3.1 resume las fórmulas de análisis y síntesis de estos tipos de señales.

Como ya hemos mencionado en varias ocasiones, existen dos características en el dominio del tiempo que determinan el tipo del espectro de señal que obtendremos. Éstas son: si la variable tiempo es continua o discreta y si la señal es periódica o aperiódica. Vamos a resumir brevemente los resultados obtenidos en las secciones anteriores.

Señales continuas en el tiempo con espectro aperiódico. Una inspección minuciosa de las fórmulas de análisis de la serie de Fourier y de la transformada de Fourier no revelan ningún tipo de periodicidad en el dominio espectral. Esta falta de periodicidad es una consecuencia del hecho de que la exponencial compleja $\exp(j2\pi Ft)$ es una función de la variable continua t y, por tanto, no es periódica en F. Luego el rango de frecuencias de las señales continuas en el tiempo se extiende desde $F=0$ hasta $F=\infty$.

Señales discretas en el tiempo con espectro periódico. Tanto la serie de Fourier como la transformada de Fourier para señales discretas en el tiempo son periódicas de período $\omega=2\pi$. Como consecuencia de esta periodicidad, el rango de frecuencias de las señales discretas en el tiempo es finito y se extiende desde $\omega=-\pi$ hasta $\omega=\pi$ radianes, donde $\omega=\pi$ corresponde a la máxima velocidad de oscilación posible.

Señales periódicas con espectro discreto. Como ya hemos señalado, las señales periódicas se describen mediante la serie de Fourier. Los coeficientes de la serie de Fourier proporcionan las "líneas" que forman el espectro discreto. El espaciado entre las líneas ΔF o Δf es igual a la inversa del período T_p o N, respectivamente, en el dominio del tiempo. Es decir, $\Delta F=1/T_p$ para señales periódicas continuas en el tiempo y $\Delta f=1/N$ para señales discretas en el tiempo.

Señales aperiódicas de energía finita con espectro continuo. Esta propiedad es una consecuencia directa del hecho de que tanto $X(F)$ como $X(\omega)$ son funciones de $\exp(j2\pi Ft)$ y $\exp(j\omega n)$, respectivamente, las cuales son funciones continuas de las variables F y ω. La continuidad en frecuencia es necesaria para romper la armonía y crear por tanto señales aperiódicas.

En resumen, podemos concluir que la *periodicidad de "período" α en un dominio implica automáticamente la discretización con un "espaciado" de $1/\alpha$ en el otro dominio, y viceversa.*

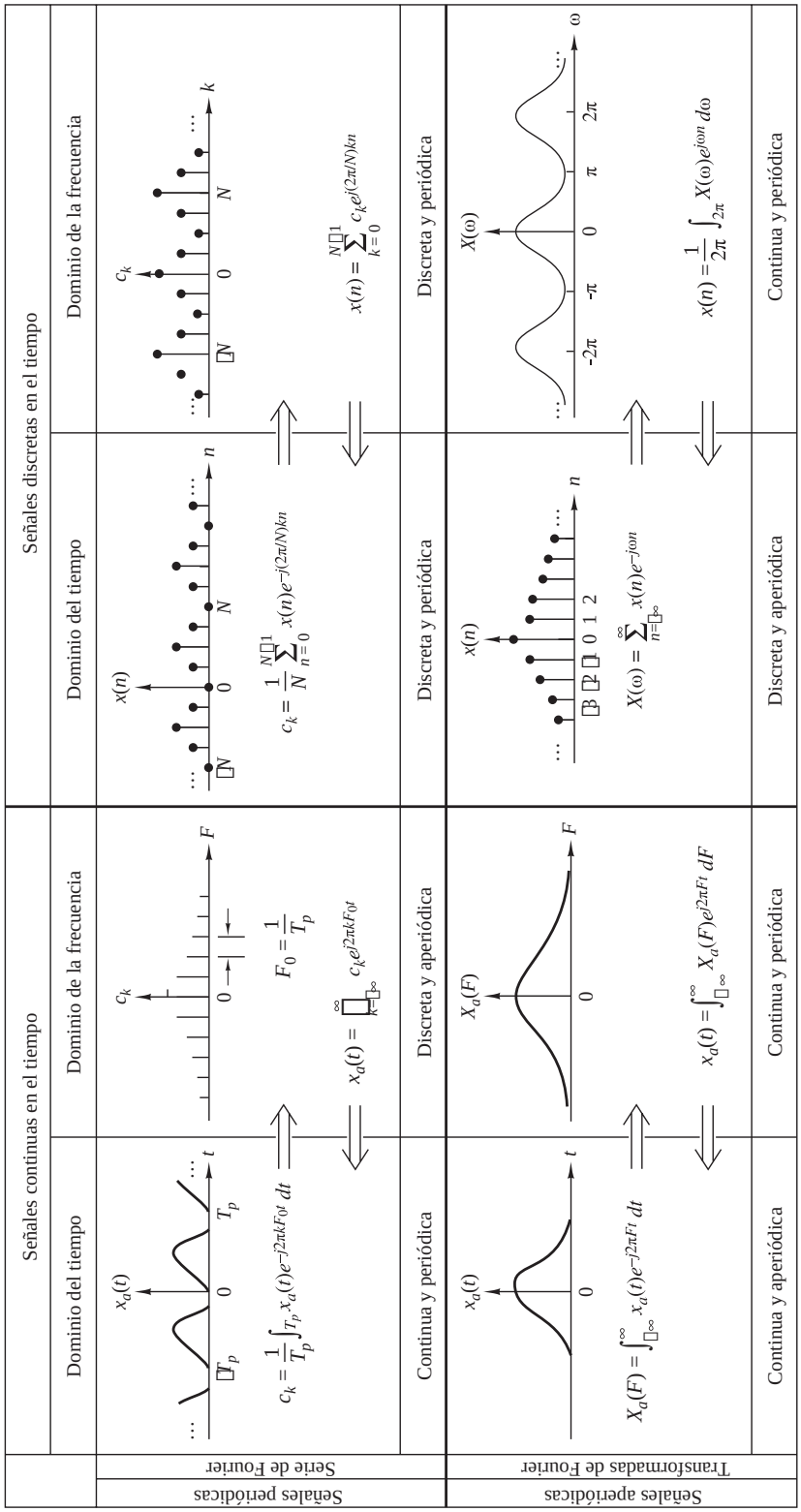


Figura 4.3.1. Resumen de las fórmulas de análisis y síntesis.

Si tenemos presente que el "período" en el dominio de la frecuencia hace referencia al rango de frecuencias, el "espaciado" en el dominio del tiempo se corresponde con el período de muestreo T, el espaciado entre líneas en el dominio de la frecuencia es ΔF, luego $\alpha = T_p$ implica que $1/\alpha = 1/T_p = \Delta F$, $\alpha = N$ implica que $\Delta f = 1/N$ y $\alpha = F_s$ implica que $T = 1/F_s$.

Estas dualidades tiempo-frecuencia son evidentes si observamos la Figura 4.3.1. Sin embargo, las ilustraciones de esta figura no se corresponden con ninguno de los pares de transformadas reales, por lo que debe evitarse realizar ninguna comparación entre ellas.

Una inspección detenida de la Figura 4.3.1 también revela algunas dualidades y simetrías matemáticas entre las distintas relaciones del análisis en frecuencia. En particular, podemos observar que existen dualidades entre las siguientes ecuaciones de análisis y síntesis:

1. Las ecuaciones de análisis y de síntesis de la transformada de Fourier continua en el tiempo.
2. Las ecuaciones de análisis y de síntesis de la serie de Fourier discreta en el tiempo.
3. La ecuación de análisis de la serie de Fourier continua en el tiempo y la ecuación de síntesis de la transformda de Fourier discreta en el tiempo.
4. La ecuación de análisis de la transformada de Fourier discreta en el tiempo y la ecuación de síntesis de la serie de Fourier continua en el tiempo.

Observe que todas las relaciones duales únicamente difieren en el signo del exponente de la correspondiente exponencial compleja. Es interesante destacar que este cambio de signo puede interpretarse como el solapamiento de la señal o como el solapamiento del espectro, ya que

$$e^{-j2\pi Ft} = e^{j2\pi(-F)t} = e^{j2\pi F(-t)}$$

Si nos fijamos ahora en la densidad espectral de las señales, debemos recordar que hemos empleado el término *densidad espectral de energía* para caracterizar las señales aperiódicas de energía finita y el término *densidad espectral de potencia* para las señales periódicas, por lo que esta terminología es coherente con el hecho de que las señales periódicas son señales de potencia y las señales aperiódicas con energía finita son señales de energía.

4.4 Propiedades de la transformada de Fourier para señales discretas en el tiempo

La transformada de Fourier para las señales aperiódicas discretas en el tiempo y con energía finita descritas en la sección anterior poseen una serie de propiedades que resultan muy útiles para reducir la complejidad de los problemas del análisis en frecuencia en muchas aplicaciones prácticas. En esta sección, vamos a desarrollar las propiedades más importantes de la transformada de Fourier. También se cumplen propiedades similares para la transformada de Fourier de señales aperiódicas continuas en el tiempo y energía finita.

Por comodidad, vamos adoptar la siguiente notación

$$X(\omega) \equiv F\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \tag{4.4.1}$$

para la transformada directa (ecuación de análisis) y

$$x(n) \equiv F^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\omega)e^{j\omega n}\, d\omega \tag{4.4.2}$$

para la transformada inversa (ecuación de sintesis). Haremos también referencia a $x(n)$ y $X(\omega)$ como un *par de transformadas de Fourier* e indicaremos esta relación mediante la notación

$$x(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega) \tag{4.4.3}$$

Recuerde que $X(\omega)$ es periódcia de período 2π. En consecuencia, cualquier intervalo de longitud 2π es suficiente para especificar el espectro. Normalmente, dibujaremos el espectro en el intervalo fundamental $[-\pi,\pi]$. Debemos insistir en que toda la información espectral contenida en el intervalo fundamental es necesaria para poder obtener la descripción o caracterización completa de la señal. Por esta razón, el rango de integración en (4.4.2) siempre es 2π, independientemente de las características específicas de la señal dentro del intervalo fundamental.

4.4.1 Propiedades de simetría de la transformada de Fourier

Cuando una señal satisface algunas de las propiedades de simetría en el dominio del tiempo, dichas propiedades imponen ciertas condiciones de simetría en su transformada de Fourier. La aplicación de cualquier característica de simetría nos lleva a fórmulas más sencillas tanto para la transformada directa como para la transformada inversa de Fourier. A continuación se exponen varias propiedades de simetría, así como sus implicaciones en el dominio de la frecuencia.

Suponga que tanto la señal $x(n)$ como su transformada $X(\omega)$ son funciones complejas. Entonces, podemos expresarlas en coordenadas rectangulares como sigue

$$x(n) = x_R(n) + jx_I(n) \tag{4.4.4}$$

$$X(\omega) = X_R(\omega) + jX_I(\omega) \tag{4.4.5}$$

Sustituyendo (4.4.4) y $e^{-j\omega} = \cos\omega - j\operatorname{sen}\omega$ en (4.4.1) y separando las partes real e imaginaria, obtenemos

$$X_R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_R(n)\cos\omega n + x_I(n)\operatorname{sen}\omega n] \tag{4.4.6}$$

$$X_I(\omega) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_R(n)\operatorname{sen}\omega n - x_I(n)\cos\omega n] \tag{4.4.7}$$

De manera similar, sustituyendo (4.4.5) y $e^{j\omega} = \cos\omega + j\operatorname{sen}\omega$ en (4.4.2), obtenemos

$$x_R(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} [X_R(\omega)\cos\omega n - X_I(\omega)\operatorname{sen}\omega n]\, d\omega \tag{4.4.8}$$

$$x_I(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} [X_R(\omega)\operatorname{sen}\omega n + X_I(\omega)\cos\omega n]\, d\omega \tag{4.4.9}$$

Veamos ahora algunos casos especiales.

Señales reales. Si $x(n)$ es real, entonces $x_R(n) = x(n)$ y $x_I(n) = 0$. Por tanto, (4.4.6) y (4.4.7) se reducen a

$$X_R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cos\omega n \tag{4.4.10}$$

y

$$X_I(\omega) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\operatorname{sen}\omega n \tag{4.4.11}$$

Dado que $\cos(-\omega n) = \cos \omega n$ y $\operatorname{sen}(-\omega n) = -\operatorname{sen} \omega n$, se deduce a partir de (4.4.10) y (4.4.11) que

$$X_R(-\omega) = X_R(\omega) \quad , \qquad \text{(par)} \tag{4.4.12}$$

$$X_I(-\omega) = -X_I(\omega), \qquad \text{(impar)} \tag{4.4.13}$$

Si combinamos (4.4.12) y (4.4.13) en una sola ecuación, tenemos

$$X^*(\omega) = X(-\omega) \tag{4.4.14}$$

En este caso, decimos que el espectro de una señal real tiene *simetría hermitiana*.

Con la ayuda de la Figura 4.4.1, podemos observar que el módulo y la fase del espectro para las señales reales son

$$|X(\omega)| = \sqrt{X_R^2(\omega) + X_I^2(\omega)} \tag{4.4.15}$$

$$\sphericalangle X|\omega| = \tan^{-1} \frac{X_I(\omega)}{X_R(\omega)} \tag{4.4.16}$$

Como consecuencia de (4.4.12) y (4.4.13), el módulo y la fase del espectro también presentan las propiedades de simetría

$$|X(\omega)| = |X(-\omega)| \quad , \qquad \text{(par)} \tag{4.4.17}$$

$$\sphericalangle X(-\omega) = -\sphericalangle X(\omega), \qquad \text{(impar)} \tag{4.4.18}$$

En el caso de la transformada inversa de una señal real [es decir, $x(n) = x_R(n)$], (4.4.8) implica que

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} [X_R(\omega) \cos \omega n - X_I(\omega) \operatorname{sen} \omega n] \, d\omega \tag{4.4.19}$$

Dado que ambos productos $X_R(\omega) \cos \omega n$ y $X_I(\omega) \operatorname{sen} \omega n$ son funciones pares de ω, tenemos

$$x(n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [X_R(\omega) \cos \omega n - X_I(\omega) \operatorname{sen} \omega n] \, d\omega \tag{4.4.20}$$

Señales reales pares. Si $x(n)$ es una señal real y par [es decir, $x(-n) = x(n)$], entonces $x(n) \cos \omega n$ es par y $x(n) \operatorname{sen} \omega n$ es impar. Por tanto, a partir de (4.4.10), (4.4.11) y (4.4.20), obtenemos

$$X_R(\omega) = x(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x(n) \cos \omega n, \qquad \text{(par)} \tag{4.4.21}$$

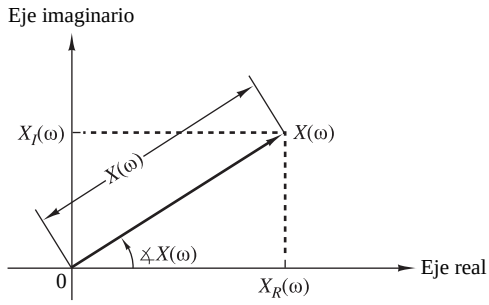


Figura 4.4.1. Funciones del módulo y de la fase.

$$X_I(\omega) = 0 \tag{4.4.22}$$

$$x(n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} X_R(\omega)\cos\omega n\, d\omega \tag{4.4.23}$$

Por tanto, las señales reales y pares poseen un espectro real, que además está formado por funciones pares de la variable frecuencia ω.

Señales reales e impares. Si $x(n)$ es real e impar [es decir, $x(-n) = -x(n)$], entonces $x(n)\cos\omega n$ es impar y $x(n)\operatorname{sen}\omega n$ es par. Por tanto, (4.4.10), (4.4.11) y (4.4.20) implican que

$$X_R(\omega) = 0 \tag{4.4.24}$$

$$X_I(\omega) = -2\sum_{n=1}^{\infty} x(n)\operatorname{sen}\omega n, \qquad \text{(impar)} \tag{4.4.25}$$

$$x(n) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} X_I(\omega)\operatorname{sen}\omega n\ \ d\omega \tag{4.4.26}$$

Luego las señales reales e impares poseen espectros imaginarios puros, que además están formados por funciones impares de la variable de frecuencia ω.

Señales imaginarias puras. En este caso, $x_R(n) = 0$ y $x(n) = jx_I(n)$. Luego las expresiones (4.4.6), (4.4.7) y (4.4.9) se reducen a

$$X_R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_I(n)\operatorname{sen}\omega n, \qquad \text{(impar)} \tag{4.4.27}$$

$$X_I(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_I(n)\cos\omega n, \qquad \text{(par)} \tag{4.4.28}$$

$$x_I(n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [X_R(\omega)\operatorname{sen}\omega n + X_I(\omega)\cos\omega n]\, d\omega \tag{4.4.29}$$

Si $x_I(n)$ es impar [es decir, $x_I(-n) = -x_I(n)$], entonces

$$X_R(\omega) = 2\sum_{n=1}^{\infty} x_I(n)\operatorname{sen}\omega n, \qquad \text{(impar)} \tag{4.4.30}$$

$$X_I(\omega) = 0 \tag{4.4.31}$$

$$x_I(n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} X_R(\omega)\operatorname{sen}\omega n\, d\omega \tag{4.4.32}$$

De forma similar, si $x_I(n)$ es par [es decir, $x_I(-n) = x_I(n)$], tenemos

$$X_R(\omega) = 0 \tag{4.4.33}$$

$$X_I(\omega) = x_I(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty} x_I(n)\cos\omega n, \qquad \text{(par)} \tag{4.4.34}$$

$$x_I(n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} X_I(\omega)\cos\omega n\, d\omega \tag{4.4.35}$$

Una señal compleja arbitraria $x(n)$ se puede descomponer como sigue

$$x(n) = x_R(n) + jx_I(n) = x_R^e(n) + x_R^o(n) + j[x_I^e(n) + x_I^o(n)] = x_e(n) + x_o(n) \tag{4.4.36}$$

donde, por definición,

$$x_e(n) = x_R^e(n) + jx_I^e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$$
$$x_o(n) = x_R^o(n) + jx_I^o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$$

Los superíndices e y o indican, respectivamente, las componentes de la señal pares e impares. Observe que $x_e(n) = x_e(-n)$ y $x_o(-n) = -x_o(n)$. A partir de la Ecuación (4.4.36) de las propiedades de la transformada de Fourier establecidas anteriormente, obtenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{array}{ccccccccc} x(n) & = & [x_R^e(n) & + & jx_I^e(n)] & + & [x_R^o(n) & + & jx_I^o(n)] & = & x_e(n) & + & x_o(n) \\ & & \updownarrow & & \updownarrow & & & & & & \updownarrow & & \updownarrow \\ X(\omega) & = & [X_R^e(\omega) & + & jX_I^e(\omega)] & + & [X_R^o(\omega) & - & jX_I^o(\omega)] & = & X_e(\omega) & + & X_o(\omega) \end{array} \tag{4.4.37}$$

Estas propiedades de simetría de la transformada de Fourier se resumen en la Tabla 4.4 y en la Figura 4.4.2. En la práctica se emplean a menudo para simplificar los cálculos de la transformada de Fourier.

Secuencia	DTFT
$x(n)$	$X(\omega)$
$x^*(n)$	$X^*(-\omega)$
$x^*(-n)$	$X^*(\omega)$
$x_R(n)$	$X_e(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega) + X^*(-\omega)]$
$jx_I(n)$	$X_o(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega) - X^*(-\omega)]$
$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$	$X_R(\omega)$
$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$	$jX_I(\omega)$
Señales reales	
	$X(\omega) = X^*(-\omega)$
Cualquier señal real	$X_R(\omega) = X_R(-\omega)$
$x(n)$	$X_I(\omega) = -X_I(-\omega)$
	$\lvert X(\omega)\rvert = \lvert X(-\omega)\rvert$
	$\sphericalangle X(\omega) = -\sphericalangle X(-\omega)$
$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)]$	$X_R(\omega)$
(real y par)	(real y par)
$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)]$	$jX_I(\omega)$
(real e impar)	(imaginaria e impar)

Tabla 4.4. Propiedades de simetría de la transformada discreta de Fourier en el tiempo.

EJEMPLO 4.4.1

Determine y dibuje $X_R(\omega)$, $X_I(\omega)$, $|X(\omega)|$ y $\sphericalangle X(\omega)$ para la transformada de Fourier

$$X(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \qquad -1 < a < 1 \tag{4.4.38}$$

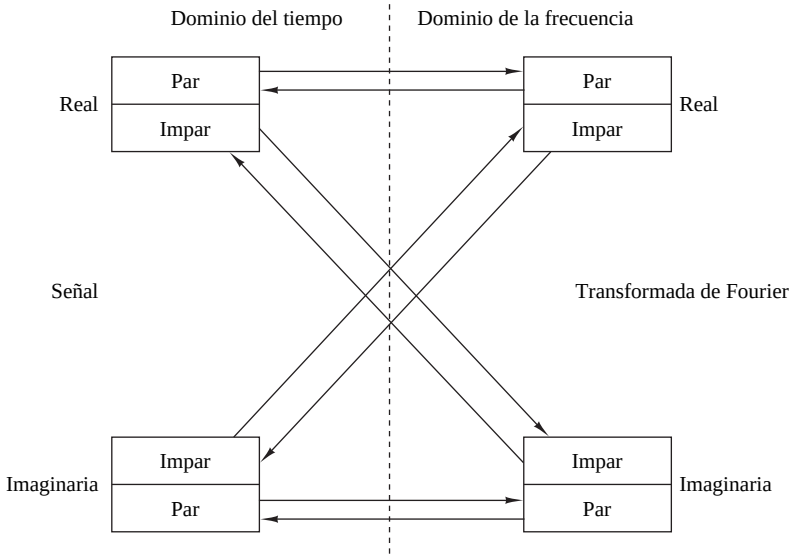


Figura 4.4.2. Resumen de las propiedades de simetría de la transformada de Fourier.

Solución. Multiplicando el numerador y el denominador de (4.4.38) por el complejo conjugado del denominador, obtenemos

$$X(\omega) = \frac{1 - ae^{j\omega}}{(1 - ae^{-j\omega})(1 - ae^{j\omega})} = \frac{1 - a\cos\omega - ja\operatorname{sen}\omega}{1 - 2a\cos\omega + a^2}$$

Esta expresión puede separase en sus partes imaginaria y real. Obtenemos así

$$X_R(\omega) = \frac{1 - a\cos\omega}{1 - 2a\cos\omega + a^2}$$

$$X_I(\omega) = -\frac{a\operatorname{sen}\omega}{1 - 2a\cos\omega + a^2}$$

Sustituyendo las dos últimas ecuaciones en (4.4.15) y (4.4.16) obtenemos el módulo y la fase del espectro como

$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a\cos\omega + a^2}} \tag{4.4.39}$$

y

$$\sphericalangle X(\omega) = -\tan^{-1}\frac{a\operatorname{sen}\omega}{1 - a\cos\omega} \tag{4.4.40}$$

Las Figuras 4.4.3 y 4.4.4 muestran la representación gráfica de estas funciones para $a = 0.8$. El lector puede verificar fácilmente que, como era de esperar, todas las propiedades de simetría de los espectros de las señales reales se cumplen también en este caso.

EJEMPLO 4.4.2

Determine la transformada de Fourier de la señal

$$x(n) = \begin{cases} A, & -M \le n \le M \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{4.4.41}$$

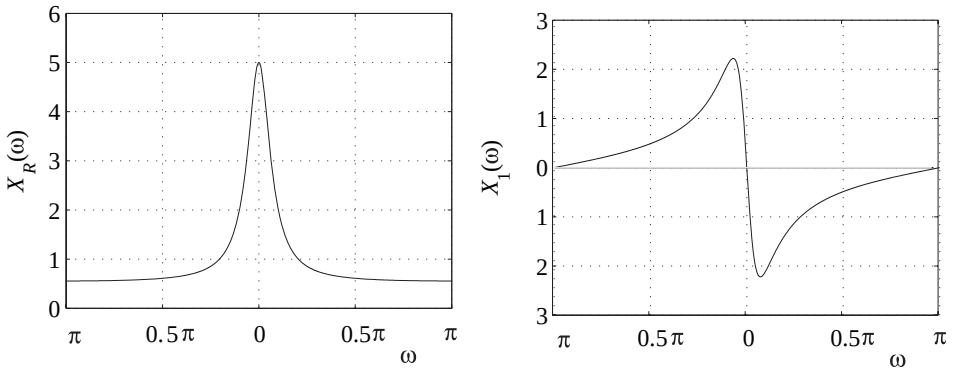


Figura 4.4.3. Gráficas de $X_R(\omega)$ y $X_I(\omega)$ para la transformada del Ejemplo 4.4.1.

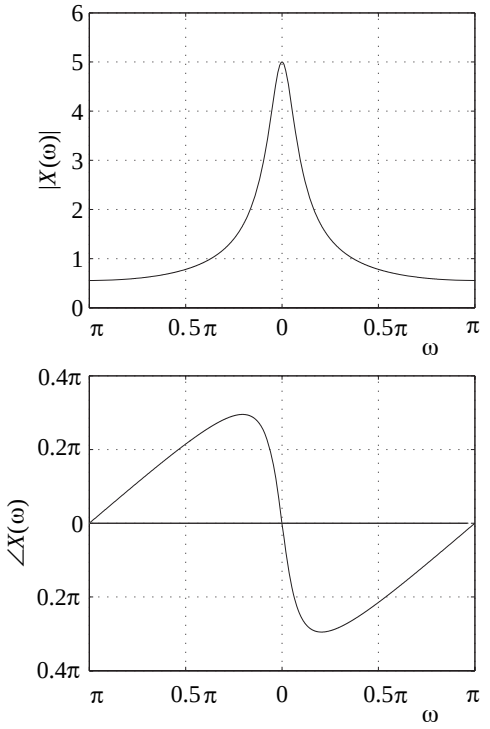


Figura 4.4.4. Módulo y fase del espectro de la transformada del Ejemplo 4.4.1.

Solución. Evidentemente, $x(-n) = x(n)$. Por tanto, $x(n)$ es una señal real y par. A partir de (4.4.21) obtenemos

$$X(\omega) = X_R(\omega) = A\left(1 + 2\sum_{n=1}^{M} \cos \omega n\right)$$

Si utilizamos la identidad dada en el Problema 4.13, obtenemos la forma más simplificada

$$X(\omega) = A\frac{\operatorname{sen}(M+\frac{1}{2})\omega}{\operatorname{sen}(\omega/2)}$$

Ya que $X(\omega)$ es real, el módulo y la fase del espectro están dados por

$$|X(\omega)| = \left| A \frac{\operatorname{sen}(M + \frac{1}{2})\omega}{\operatorname{sen}(\omega/2)} \right| \tag{4.4.42}$$

y

$$\sphericalangle X(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } X(\omega) > 0 \\ \pi, & \text{si } X(\omega) < 0 \end{cases} \tag{4.4.43}$$

La Figura 4.4.5 muestra las gráficas para $X(\omega)$.

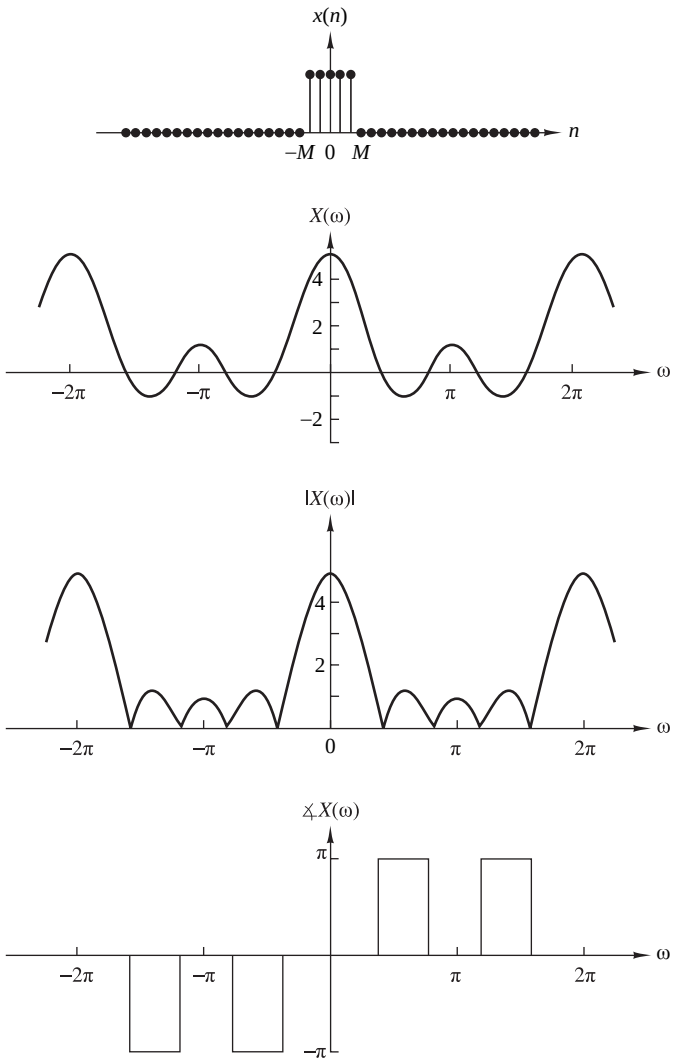


Figura 4.4.5. Características espectrales del impulso rectangular del Ejemplo 4.4.2.

4.4.2 Propiedades y teoremas de la transformada de Fourier

En esta sección vamos a presentar varios teoremas de la transformda de Fourier y a ilustrar su uso en la práctica mediante ejemplos.

Linealidad. Si

$$x_1(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_1(\omega)$$

y

$$x_2(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_2(\omega)$$

entonces

$$a_1x_1(n) + a_2x_2(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega) \tag{4.4.44}$$

Enunciado de forma simple, la transformación de Fourier, vista como una operación sobre una señal $x(n)$, es una transformación lineal. Por tanto, la transformada de Fourier de una combinación lineal de dos o más señales es igual a la misma combinación lineal de las transformadas de Fourier de las señales individuales. Esta propiedad puede demostrarse fácilmente utilizando la Ecuación (4.4.1). La propiedad de linealidad hace que la transformada de Fourier resulte útil en el estudio de los sistemas lineales.

EJEMPLO 4.4.3

Determine la transformada de Fourier de la señal

$$x(n) = a^{|n|}, \qquad -1 < a < 1 \tag{4.4.45}$$

Solución. En primer lugar, observamos que $x(n)$ se puede escribir como

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

donde

$$x_1(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

y

$$x_2(n) = \begin{cases} a^{-n}, & n < 0 \\ 0, & n \geq 0 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta la definición de la transformada de Fourier dada por (4.4.1), tenemos

$$X_1(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n$$

El sumatorio es una serie geométrica que converge a

$$X_1(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

siempre que

$$|ae^{-j\omega}| = |a| \cdot |e^{-j\omega}| = |a| < 1$$

que es una condición que se satisface en este caso. De forma similar, la transformada de Fourier de $x_2(n)$ es

$$\begin{aligned} X_2(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n}e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} (ae^{j\omega})^{-n} = \sum_{k=1}^{\infty} (ae^{j\omega})^k \\ &= \frac{ae^{j\omega}}{1 - ae^{j\omega}} \end{aligned}$$

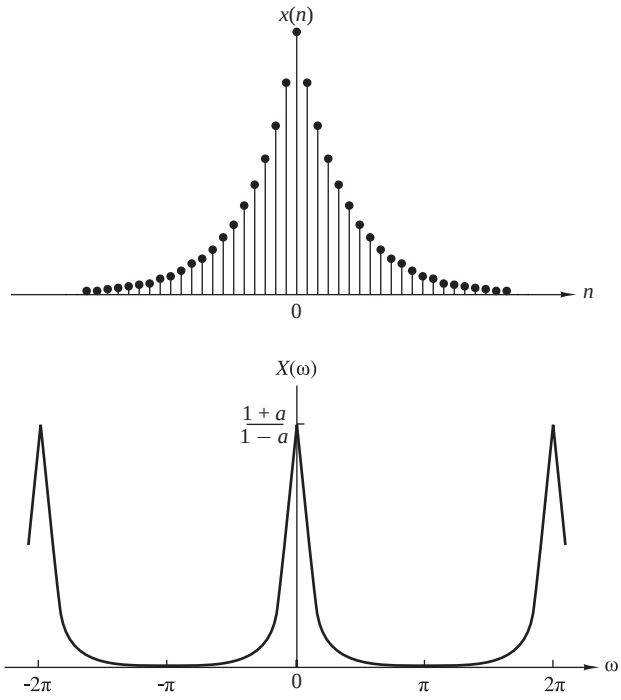


Figura 4.4.6. Secuencia $x(n)$ y su transformada de Fourier para el Ejemplo 4.4.3 con $a = 0.8$.

Combinando estas dos transformadas, obtenemos la transformada de Fourier de $x(n)$ en la forma

$$\begin{aligned} X(\omega) &= X_1(\omega) + X_2(\omega) \\ &= \frac{1-a^2}{1-2a\cos\omega + a^2} \end{aligned} \tag{4.4.46}$$

La Figura 4.4.6 ilustra $x(n)$ y $X(\omega)$ para el caso en que $a = 0.8$.

Desplazamiento temporal. Si

$$x(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega) \tag{4.4.47}$$

entonces

$$x(n-k) \overset{F}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega k} X(\omega)$$

La demostración de esta propiedad se obtiene de forma inmediata a partir de la transformada de Fourier de $x(n-k)$ haciendo un cambio en el índice del sumatorio. Así

$$\begin{aligned} F\{x(n-k)\} &= X(\omega)e^{-j\omega k} \\ &= |X(\omega)|e^{j[\sphericalangle X(\omega) - \omega k]} \end{aligned}$$

Esta relación indica que si una señal se desplaza en el dominio del tiempo k muestras, el espectro del módulo no cambia. Sin embargo, la fase del espectro varía en una cantidad $-\omega k$. Este resultado se puede explicar simplemente recordando que el contenido en frecuencias de una señal sólo depende de su forma. Desde un punto de vista matemático, podemos decir que un desplazamiento en el dominio del tiempo de k muestras es equivalente a multiplicar el espectro por $e^{-j\omega k}$ en el dominio de la frecuencia.

Inversión temporal. Si

$$x(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$$

entonces

$$x(-n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(-\omega) \tag{4.4.48}$$

Esta propiedad puede establecerse calculando la transformada de Fourier de $x(-n)$ y haciendo un sencillo cambio en el índice del sumatorio. Así

$$F\{x(-n)\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)e^{j\omega l} = X(-\omega)$$

Si $x(n)$ es real, entonces a partir de (4.4.17) y (4.4.18), obtenemos

$$\begin{aligned} F\{x(-n)\} = X(-\omega) &= |X(-\omega)|e^{j\sphericalangle X(-\omega)} \\ &= |X(\omega)|e^{-j\sphericalangle X(\omega)} \end{aligned}$$

Esto significa que si una señal se refleja respecto al origen de tiempos, el módulo del espectro no cambia y la fase cambia de signo (inversión de fase).

Teorema de convolución. Si

$$x_1(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_1(\omega)$$

y

$$x_2(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_2(\omega)$$

entonces

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega) = X_1(\omega)X_2(\omega) \tag{4.4.49}$$

Para demostrar la Ecuación (4.4.49), recordamos la fórmula de la convolución

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k)$$

Multiplicando ambos lados de esta ecuación por la exponencial $\exp(-j\omega n)$ y sumando para todo n, obtenemos

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k) \right] e^{-j\omega n}$$

Después de intercambiar el orden de los sumatorios y de hacer un sencillo cambio en el índice del sumatorio, el lado derecho de la esta ecuación se reduce al producto $X_1(\omega)X_2(\omega)$. Luego, la Ecuación (4.4.49) queda demostrada.

El teroema de convolución es una de las herramientas más potentes en el análisis de sistemas lineales. Establece que convolucionar dos señales en el dominio del tiempo es equivalente a multiplicar sus espectros en el dominio de la frecuencia. En capítulos posteriores veremos que el teorema de convolución proporciona una importante herramienta de cálculo en muchas aplicaciones de tratamiento digital de señales.

EJEMPLO 4.4.4

Utilizando la Ecuación (4.4.49), determine la convolución de estas secuencias

$$x_1(n) = x_2(n) = \{1, \underset{\uparrow}{1}, 1\}$$

Solución. A partir de (4.4.21), obtenemos

$$X_1(\omega) = X_2(\omega) = 1 + 2\cos\omega$$

Luego,

$$\begin{aligned} X(\omega) &= X_1(\omega)X_2(\omega) = (1+2\cos\omega)^2 \\ &= 3 + 4\cos\omega + 2\cos 2\omega \\ &= 3 + 2(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + (e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}) \end{aligned}$$

Por tanto, la convolución de $x_1(n)$ con $x_2(n)$ es

$$x(n) = \{1\ 2\ \underset{\uparrow}{3}\ 2\ 1\}$$

La Figura 4.4.7 ilustra las relaciones anteriores.

Teorema de correlación. Si

$$x_1(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_1(\omega)$$

y

$$x_2(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_2(\omega)$$

entonces

$$r_{x_1x_2}(m) \overset{F}{\longleftrightarrow} S_{x_1x_2}(\omega) = X_1(\omega)X_2(-\omega) \tag{4.4.50}$$

La demostración de la Ecuación (4.4.50) es similar a la de la Ecuación (4.4.49). En este caso, tenemos

$$r_{x_1x_2}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(k-n)$$

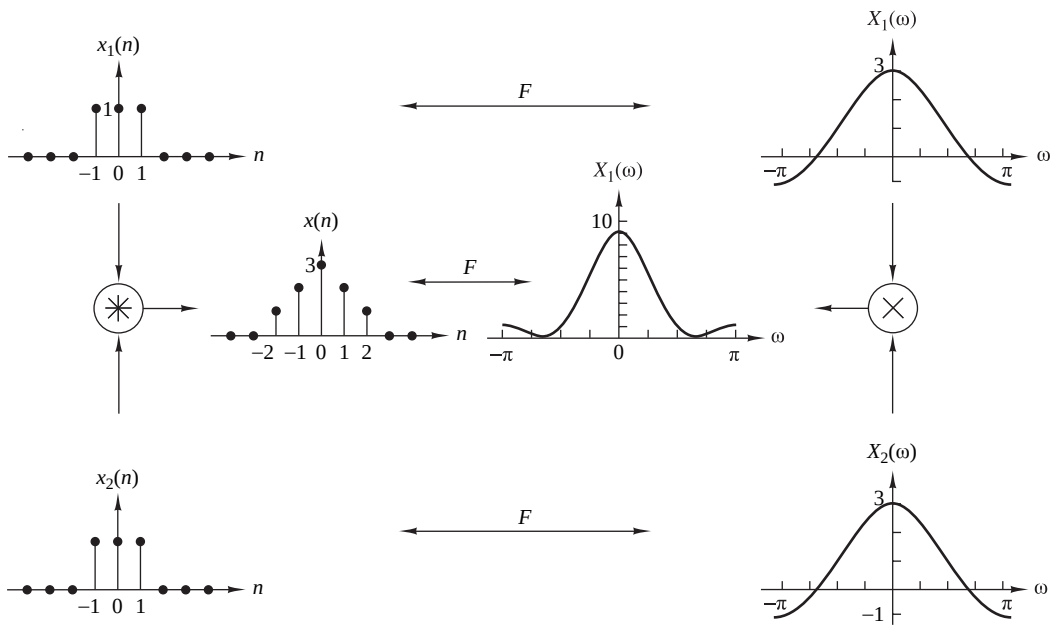


Figura 4.4.7. Representación gráfica de la propiedad de convolución.

Multiplicando ambos lados de esta ecuación por la exponencial $\exp(-j\omega n)$ y sumando para todo n, obtenemos

$$S_{x_1x_2}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_{x1x2}(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(k-n)\right]e^{-j\omega n}$$

Por último, intercambiamos el orden de los sumatorios y hacemos un cambio en el índice del sumatorio. Luego, el lado derecho de la ecuación anterior se reduce a $X_1(\omega)X_2(-\omega)$. La función $S_{x_1x_2}(\omega)$ se conoce como *densidad espectral de energía cruzada* de las señales $x_1(n)$ y $x_2(n)$.

Teorema de Wiener–Khintchine. Sea $x(n)$ una señal real. Entonces

$$r_{xx}(l) \overset{F}{\longleftrightarrow} S_{xx}(\omega) \tag{4.4.51}$$

Esto es, la densidad espectral de energía de una señal de energía es la transformada de Fourier de su autocorrelación. Se trata de un caso especial de la Ecuación (4.4.50).

Este resultado es muy importante, ya que implica que la autocorrelación de una señal y su densidad espectral de energía contienen la misma información acerca de la señal. Dado que ninguna de ellas contiene información acerca de la fase, es imposible reconstruir de forma unívoca la señal a partir de la función de autocorrelación o del espectro de densidad de energía.

EJEMPLO 4.4.5

Determine el espectro de densidad de energía de la señal

$$x(n) = a^n u(n), \qquad -1 < a < 1$$

Solución. A partir del Ejemplo 2.6.2, sabemos que la función de autocorrelación de esta señal es

$$r_{xx}(l) = \frac{1}{1-a2}a^{|l|}, \qquad \infty < l < \infty$$

Utilizando el resultado dado por (4.4.46) para la transformada de Fourier de $a^{|l|}$, deducido en el Ejemplo 4.4.3, tenemos

$$F\{r_{xx}(l)\} = \frac{1}{1-a^2}F\{a^{|l|}\} = \frac{1}{1-2a\cos\omega + a^2}$$

Por tanto, de acuerdo con el teorema de Wiener–Khintchine,

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{1-2a\cos\omega + a^2}$$

Desplazamiento en frecuencia. Si

$$x(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$$

entonces

$$e^{j\omega_0 n}x(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega-\omega_0) \tag{4.4.52}$$

Esta propiedad puede demostrarse fácilmente mediante la sustitución directa en la ecuación de análisis (4.4.1). De acuerdo con esta propiedad, la multiplicación de una secuencia $x(n)$ por $e^{j\omega_0 n}$ es equivalente a la traslación en frecuencia del espectro $X(\omega)$ una cantidad ω_0. Esta frecuencia de traslación se indica en la Figura 4.4.8. Como el espectro $X(\omega)$ es periódico, el desplazamiento ω_0 se aplica al espectro de la señal en cada período.

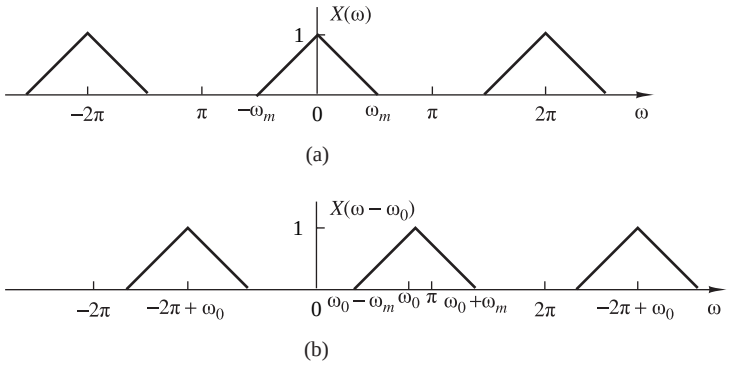


Figura 4.4.8. Ilustración de la propiedad de desplazamiento en frecuencia de la transformada de Fourier $(\omega_0 \leq 2\pi - \omega_m)$.

Teorema de modulación. Si

$$x(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$$

entonces

$$x(n)\cos\omega_0 n \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}[X(\omega+\omega_0)+X(\omega-\omega_0)] \tag{4.4.53}$$

Para demostrar el teorema de modulación, en primer lugar, expresamos la señal $\cos\omega_0 n$ como

$$\cos\omega_0 n = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n})$$

Multiplicando $x(n)$ por estas dos exponenciales y utilizando la propiedad del desplazamiento en frecuencia descrita anteriormente, obtenemos la expresión dada por (4.4.53).

Aunque la propiedad dada por (4.4.52) también puede interpretarse como una modulación (compleja), en la práctica, preferimos utilizar la Ecuación (4.4.53), porque la señal $x(n)\cos\omega_0 n$ es real. Evidentemente, en este caso, las propiedades de simetría dadas por (4.4.12) y (4.4.13) se conservan.

El teorema de modulación se ilustra en la Figura 4.4.9, que muestra una gráfica de los espectros de las señales $x(n), y_1(n) = x(n)\cos 0.5\pi n$ e $y_2(n) = x(n)\cos\pi n$.

Teorema de Parseval. Si

$$x_1(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_1(\omega)$$

y

$$x_2(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_2(\omega)$$

entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega)X_2^*(\omega)\,d\omega \tag{4.4.54}$$

Para demostrar este teorema utilizamos la Ecuación (4.4.1) con el fin de eliminar $X_1(\omega)$ del lado derecho de la Ecuación (4.4.54). Así, tenemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)e^{-j\omega n}\right]X_2^*(\omega)\,d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_2^*(\omega)e^{-j\omega n}\,d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n)$$

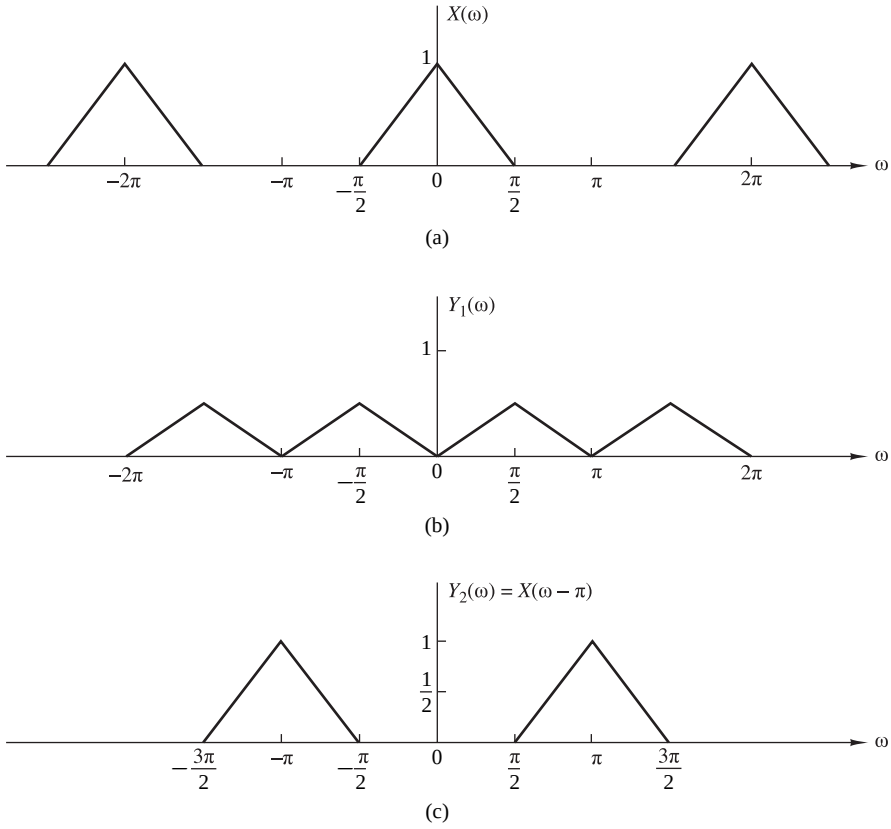


Figura 4.4.9. Representación gráfica del teorema de modulación.

En el caso especial en que $x_2(n) = x_1(n) = x(n)$, la relación de Parseval dada por (4.4.54) se reduce a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\omega)|^2 \, d\omega \tag{4.4.55}$$

Observe que el lado izquierdo de la Ecuación (4.4.55) es, simplemente, la energía E_x de la señal $x(n)$. También es igual a la autocorrelación de $x(n)$, $r_{xx}(l)$, evaluada en $l = 0$. El integrando del lado derecho de la Ecuación (4.4.55) es igual al espectro de densidad de energía, por lo que la integral en el intervalo $-\pi \leq \omega \leq \pi$ proporciona la energía total de la señal. Por tanto, podemos concluir que

$$E_x = r_{xx}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\omega)|^2 \, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(\omega) \, d\omega \tag{4.4.56}$$

Multiplicación de dos secuencias (teorema de ventanas). Si

$$x_1(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_1(\omega)$$

y

$$x_2(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_2(\omega)$$

entonces

$$x_3(n) \equiv x_1(n)x_2(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_3(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda) X_2(\omega - \lambda) d\lambda \tag{4.4.57}$$

La integral del lado derecho de la Ecuación (4.4.57) representa la convolución de las transformadas de Fourier $X_1(\omega)$ y $X_2(\omega)$. Esta relación es la dual de la convolución en el dominio del tiempo. En otras palabras, la multiplicación de dos secuencias en el dominio del tiempo es equivalente a la convolución de sus transformadas de Fourier. Asimismo, la convolución de dos secuencias en el dominio del tiempo es equivalente a la multiplicación de sus transformadas de Fourier.

Para demostrar (4.4.57), utilizamos la transformada de Fourier de $x_3(n) = x_1(n)x_2(n)$ y empleamos la fórmula de la transformada inversa, luego,

$$x_1(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda)e^{j\lambda n}d\lambda$$

Así, tenemos

$$\begin{aligned}
X_3(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_3(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2(n)e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda)e^{j\lambda n}d\lambda\right]x_2(n)e^{-j\omega n} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda)d\lambda\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)e^{-j(\omega-\lambda)n}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda)X_2(\omega-\lambda)d\lambda
\end{aligned}$$

La integral de convolución de la Ecuación (4.4.57) se conoce como *convolución periódica* de $X_1(\omega)$ y $X_2(\omega)$, porque es la convolución de dos funciones periódicas que tienen el mismo período. Observe que los límites de la integral se extienden a un período. Además, fíjese en que debido a la periodicidad de la transformada de Fourier para las señales discretas en el tiempo, no existe una dualidad "perfecta" entre los dominios del tiempo y de la frecuencia con respecto a la operación de convolución, como en el caso de las señales continuas en el tiempo. De hecho, la convolución en el dominio del tiempo (sumatorio aperiódico) es equivalente a la multiplicación de sus transformadas de Fourier continuas y periódicas. Sin embargo, la multiplicación de secuencias aperiódicas es equivalente a la convolución periódica de sus transformadas de Fourier.

El par de transformdas de Fourier dadas por (4.4.57) resultarán útiles en el diseño de filtros FIR basado en la técnica de ventanas.

Diferenciación en el dominio de la frecuencia. Si

$$x(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$$

entonces

$$nx(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} j\frac{dX(\omega)}{d\omega} \tag{4.4.58}$$

Para demostrar esta propiedad, utilizamos la definición de la transformada de Fourier dada por (4.4.1) y diferenciamos la serie término a término con respecto a ω. Así, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{dX(\omega}{d\omega} &= \frac{d}{d\omega}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}\right] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\frac{d}{d\omega}e^{-j\omega n} \\
&= -j\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)e^{-j\omega n}
\end{aligned}$$

Ahora multiplicamos ambos lados de la ecuación por j para obtener el resultado dado por (4.4.58).

Las propiedades obtenidas en esta sección se resumen en la Tabla 4.5, la cual es una buena herramienta de referencia. La Tabla 4.6 ilustra algunos pares de transformadas de Fourier útiles con los que nos encontraremos en capítulos posteriores.

Propiedad	Dominio del tiempo	Dominio de la frecuencia
Notación	$x(n)$ $x_1(n)$ $x_2(n)$	$X(\omega)$ $X_1(\omega)$ $X_2(\omega)$
Linealidad	$a_1x_1(n)+a_2x_2(n)$	$a_1X_1(\omega)+a_2X_2(\omega)$
Desplazamiento temporal	$x(n-k)$	$e^{-j\omega k}X(\omega)$
Inversión temporal	$x(-n)$	$X(-\omega)$
Convolución	$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$
Correlación	$r_{x_1x_2}(l)=x_1(l)*x_2(-l)$	$S_{x_1x_2}(\omega)=X_1(\omega)X_2(-\omega)$ $=X_1(\omega)X_2^*(\omega)$ [si $x_2(n)$ es real]
Teorema de Wiener–Khintchine	$r_{xx}(l)$	$S_{xx}(\omega)$
Desplazamiento de frecuencia	$e^{j\omega_0 n}x(n)$	$X(\omega-\omega_0)$
Modulación	$x(n)\cos\omega_0 n$	$\frac{1}{2}X(\omega+\omega_0)+\frac{1}{2}X(\omega-\omega_0)$
Multiplicación	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_1(\lambda)X_2(\omega-\lambda)d\lambda$
Diferenciación en el dominio de la frecuencia	$nx(n)$	$j\frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Conjugación	$x^*(n)$	$X^*(-\omega)$
Teorema de Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1(n)x_2^*(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_1(\omega)X_2^*(\omega)d\omega$	

Tabla 4.5. Propiedades de la transformada de Fourier para señales discretas en el tiempo.

4.5 Resumen y referencias

Las series de Fourier y la transformada de Fourier son las herramientas matemáticas que permiten analizar las características de las señales en el dominio de la frecuencia. La serie de Fourier es apropiada para representar una señal periódica como una suma ponderada de componentes sinusoidales armónicamente relacionadas, en la que los coeficientes ponderados representan la amplitud de cada uno de los armónicos, y el módulo al cuadrado de cada coeficiente ponderado representa la potencia del armónico correspondiente. Como hemos mencionado, la serie de Fourier es una de las muchas expansiones en serie ortogonales posibles de una señal periódica. Su importancia nace del comportamiento característico de los sistemas LTI, como veremos en el Capítulo 5.

La transformada de Fourier es apropiada para representar las características espectrales de señales aperiódicas con energía finita. A lo largo del capítulo se han presentado las propiedades más importantes de la transformada de Fourier.

Existen excelentes libros de texto dedicados a las series y las transformadas de Fourier. Como referencia, incluimos los libros de Bracewell (1978), Davis (1963), Dym y McKean (1972), y Papoulis (1962).

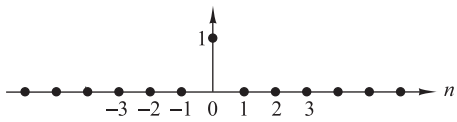
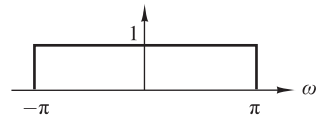
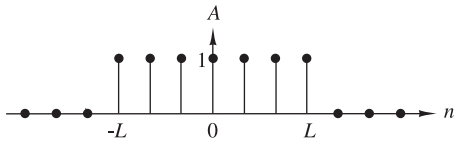
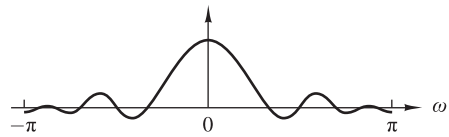
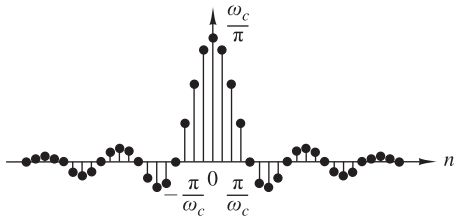
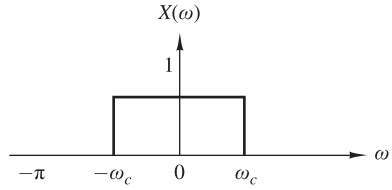
Señal $x(n)$	Espectro $X(\omega)$
 $x(n) = \delta(n)$	 $X(\pi) = 1$
 $x(n) = \begin{cases} A, & \lvert n\rvert \le L \\ 0, & \lvert n\rvert > L \end{cases}$	 $X(\omega) = A\,\dfrac{\operatorname{sen}\left(L+\frac{1}{2}\right)\omega}{\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}$
 $x(n) = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi}, & n = 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}\,\omega_c n}{\pi n}, & n \ne 0 \end{cases}$	 $X(\omega) = \begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert < \omega_C \\ 0, & \omega_C \le \lvert\omega\rvert \le \pi \end{cases}$
$x(n) = \begin{cases} a^n, & n \ge 0 \\ 0, & n > 0 \end{cases}$	$X(\omega) = \dfrac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$

Tabla 4.6. Parejas de transformadas de Fourier útiles para señales discretas en el tiempo aperiódicas.

Problemas

4.1 Considere la sinusoide rectificada de onda completa de la Figura P.4.1.

(a) Determine su espectro $X_a(F)$.

(b) Calcule la potencia de la señal.

(c) Dibuje la densidad espectral de potencia.

(d) Compruebe la validez de la relación de Parseval para esta señal.

4.2 Cálcule y dibuje el módulo y la fase del espectro de las señales siguientes para $(a > 0)$.

(a) $x_a(t) = \begin{cases} Ae^{-at}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

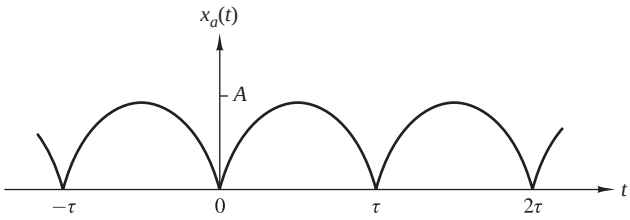


Figura P.4.1.

(b) $x_a(t) = Ae^{-a|t|}$

4.3 Considere la señal

$$x(t) = \begin{cases} 1 - |t|/\tau, & |t| \leq \tau \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Determine y dibuje el módulo y la fase de su espectro, $|X_a(F)|$ y $\sphericalangle X_a(F)$, respectivamente.

(b) Cree una señal periódica $x_p(t)$ de período fundamental $T_p \geq 2\tau$, tal que $x(t) = x_p(t)$ para $|t| < T_p/2$. ¿Cuáles son los coeficientes de Fourier c_k para la señal $x_p(t)$?

(c) Utilizando los resultados de los apartados (a) y (b), demuestre que $c_k = (1/T_p)X_a(k/T_p)$.

4.4 Considere la siguiente señal periódica:

$$x(n) = \{\ldots, 1, 0, 1, 2, \underset{\uparrow}{3}, 2, 1, 0, 1, \ldots\}$$

(a) Dibuje la señal $x(n)$ y el módulo y la fase de su espectro.

(b) Utilizando los resultados del apartado (a), verifique la relación de Parseval calculando la potencia en los dominios del tiempo y de la frecuencia.

4.5 Considere la señal

$$x(n) = 2 + 2\cos\frac{\pi n}{4} + \cos\frac{\pi n}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{3\pi n}{4}$$

(a) Determine y dibuje su espectro de densidad de potencia.

(b) Evalúe la potencia de la señal.

4.6 Determine y dibuje el módulo y la fase del espectro de las siguientes señales periódicas.

(a) $x(n) = 4\,\text{sen}\,\frac{\pi(n-2)}{3}$

(b) $x(n) = \cos\frac{2\pi}{3}n + \text{sen}\,\frac{2\pi}{5}n$

(c) $x(n) = \cos\frac{2\pi}{3}n\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{5}n$

(d) $x(n) = \{\ldots, -2, -1, \underset{\uparrow}{0}, 1, 2, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

(e) $x(n) = \{\ldots, -1, 2, \underset{\uparrow}{1}, 2, -1, 0, -1, 2, 1, 2, \ldots\}$

(f) $x(n) = \{\ldots, 0, 0, \underset{\uparrow}{1}, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \ldots\}$

(g) $x(n) = 1, -\infty < n < \infty$

(h) $x(n) = (-1)^n, -\infty < n < \infty$

4.7 Determine las señales periódicas $x(n)$, de período fundamental $N = 8$, si sus coeficientes de Fourier están dados por:

(a) $c_k = \cos\frac{k\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3k\pi}{4}$

(b) $c_k = \begin{cases} \operatorname{sen}\frac{k\pi}{3}, & 0 \le k \le 6 \\ 0, & k = 7 \end{cases}$

(c) $\{c_k\} = \{\ldots, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \underset{\uparrow}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0 \ldots\}$

4.8 Se dice que dos señales discretas, $s_k(n)$ y $s_l(n)$, son ortogonales en un intervalo $[N_1, N_2]$ si

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} s_k(n) s_l^*(n) = \begin{cases} A_k, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

Si $A_k = 1$, las señales son ortonormales.

(a) Demuestre la relación

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi kn/N} = \begin{cases} N, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(b) Ilustre la validez de la relación del apartado (a) dibujando para cada valor de $k = 1, 2, \ldots, 6$, las señales $s_k(n) = e^{j(2\pi/6)kn}$, $n = 0, 1, \ldots, 5$. [*Nota*: para un k dado, la señal n, $s_k(n)$, puede representarse como un vector en el plano complejo].

(c) Demuestre que las señales relacionadas armónicamente

$$s_k(n) = e^{j(2\pi/N)kn}$$

son ortogonales en cualquier intervalo de longitud N.

4.9 Calcule la transformada de Fourier de las siguientes señales:

(a) $x(n) = u(n) - u(n-6)$

(b) $x(n) = 2^n u(-n)$

(c) $x(n) = (\frac{1}{4})^n u(n+4)$

(d) $x(n) = (\alpha^n \operatorname{sen}\omega_0 n) u(n), \qquad |\alpha| < 1$

(e) $x(n) = |\alpha|^n \operatorname{sen}\omega_0 n, \qquad |\alpha| < 1$

(f) $x(n) = \begin{cases} 2 - (\frac{1}{2})n, & |n| \le 4 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

(g) $x(n) = \{-2, -1, \underset{\uparrow}{0}, 1, 2\}$

(h) $x(n) = \begin{cases} A(2M + 1 - |n|), & |n| \le M \\ 0, & |n| > M \end{cases}$

Dibuje el módulo y la fase del espectro para las señales de los apartados (a), (f) y (g).

4.10 Determine qué señales tienen las siguientes transformadas de Fourier:

(a) $X(\omega) = \begin{cases} 0, & 0 \le |\omega| \le \omega_0 \\ 1, & \omega_0 < |\omega| \le \pi \end{cases}$

(b) $X(\omega) = \cos^2 \omega$

(c) $X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega_0 - \delta\omega/2 \le |\omega| \le \omega_0 + \delta\omega/2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

(d) La señal mostrada en la Figura P.4.10.

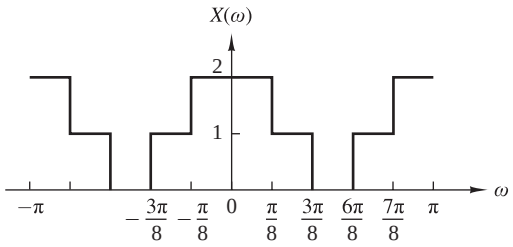


Figura P.4.10.

4.11 Considere la siguiente señal

$$x(n) = \{1, 0, -1, \underset{\uparrow}{2}, 3\}$$

cuya transformada de Fourier es $X(\omega) = X_R(\omega) + j(X_I(\omega))$. Determine y dibuje la señal $y(n)$ cuya transformada de Fourier es

$$Y(\omega) = X_I(\omega) + X_R(\omega)e^{j2\omega}$$

4.12 Determine la señal $x(n)$ si su transformada de Fourier es la dada en la Figura P.4.12.

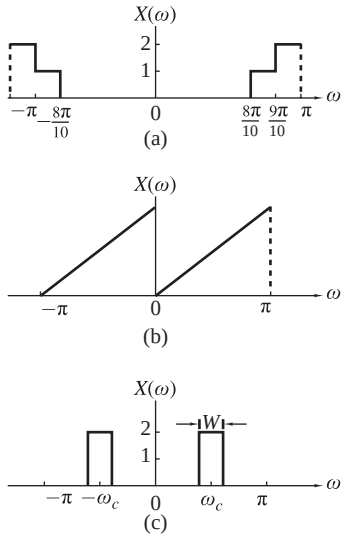


Figura P.4.12.

4.13 En el Ejemplo 4.4.2, se demostró que la transformada de Fourier de la señal

$$x(n) = \begin{cases} 1, & -M \leq n \leq M \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

era

$$X(\omega) = 1 + 2\sum_{n=1}^{M} \cos \omega n$$

Demostrar que las transformadas de Fourier de

$$x_1(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y

$$x_2(n) = \begin{cases} 1, & -M \leq n \leq -1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

son, respectivamente,

$$X_1(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega(M+1)}}{1 - e^{-j\omega}}$$

$$X_2(\omega) = \frac{e^{j\omega} - e^{j\omega(M+1)}}{1 - e^{j\omega}}$$

Con ello, demuestre que

$$\begin{aligned} X(\omega) &= X_1(\omega) + X_2(\omega) \\ &= \frac{\operatorname{sen}(M + \frac{1}{2})\omega}{\operatorname{sen}(\omega/2)} \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$1 + 2\sum_{n=1}^{M} \cos \omega n = \frac{\operatorname{sen}(M + \frac{1}{2})\omega}{\operatorname{sen}(\omega/2)}$$

4.14 Considere la señal

$$x(n) = \{-1, 2, \underset{\uparrow}{-3}, 2, -1\}$$

cuya transformada de Fourier es $X(\omega)$. Calcule las siguientes magnitudes, sin calcular explícitamente $X(\omega)$:

(a) $X(0)$

(b) $\angle X(\omega)$

(c) $\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)\, d\omega$

(d) $X(\pi)$

(e) $\int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2\, d\omega$

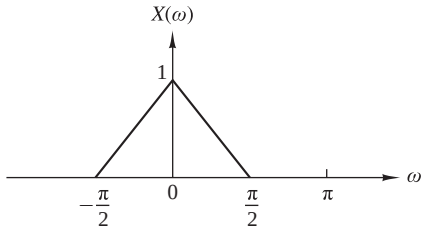


Figura P.4.15.

4.15 El centro de gravedad de una señal $x(n)$ se define como

$$c = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)}$$

y proporciona una medida del "retardo temporal" de la señal.

(a) Exprese c en función de $X(\omega)$.

(b) Calcule c para la señal $x(n)$ cuya transformada de Fourier se muestra en la Figura P.4.15.

4.16 Considere el par de transformadas de Fourier

$$a^n u(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}, \qquad |a| < 1$$

Utilizando el teorema de diferenciación en la frecuencia y por inducción, demuestre que

$$x(n) = \frac{(n+l-1)!}{n!(l-1)!} a^n u(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega) = \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^l}$$

4.17 Sea $x(n)$ una señal arbitraria, no necesariamente real, cuya transformada de Fourier es $X(\omega)$. Exprese las transformadas de Fourier de las siguientes señales en función de $X(\omega)$.

(a) $x^*(n)$

(b) $x^*(-n)$

(c) $y(n) = x(n) - x(n-1)$

(d) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$

(e) $y(n) = x(2n)$

(f) $y(n) = \begin{cases} x(n/2), & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$

4.18 Determine y dibuje las transformadas de Fourier $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$ y $X_3(\omega)$ de las siguientes señales:

(a) $x_1(n) = \{1, 1, \underset{\uparrow}{1}, 1, 1\}$

(b) $x_2(n) = \{1, 0, 1, 0, \underset{\uparrow}{1}, 0, 1, 0, 1\}$

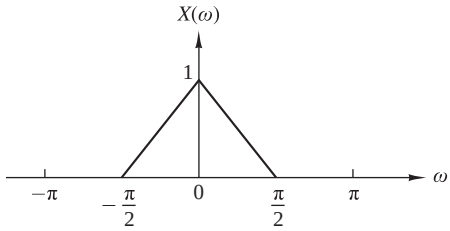


Figura P.4.19.

(c) $x_3(n) = \{1,0,0,1,0,0,\underset{\uparrow}{1},0,0,1,0,0,1\}$

(d) ¿Existe alguna relación entre $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$ y $X_3(\omega)$? ¿Cuál es su significado físico?

(e) Demuestre que si

$$x_k(n) = \begin{cases} x\left(\dfrac{n}{k}\right), & \text{si } n/k \text{ entero} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

entonces

$$X_k(\omega) = X(k\omega)$$

4.19 Sea $x(n)$ una señal cuya transformada de Fourier es la mostrada en la Figura P.4.19. Determine y dibuje las transformadas de Fourier de las siguientes señales:

(a) $x_1(n) = x(n)\cos(\pi n/4)$

(b) $x_2(n) = x(n)\,\mathrm{sen}(\pi n/2)$

(c) $x_3(n) = x(n)\cos(\pi n/2)$

(d) $x_4(n) = x(n)\cos \pi n$

Fíjese en que estas señales se han obtenido *modulando en amplitud* una portadora $\cos \omega_c n$ o $\mathrm{sen}\, \omega_c n$ mediante la secuencia $x(n)$.

4.20 Considere una señal aperiódica $x(n)$ cuya transformada de Fourier es $X(\omega)$. Demuestre que los coeficientes de la serie de Fourier C_k^y de la señal periódica

$$y(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - lN)$$

están dados por la expresión

$$C_k^y = \frac{1}{N} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

4.21 Demuestre que

$$X_N(\omega) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{\mathrm{sen}\, \omega_c n}{\pi n} e^{-j\omega n}$$

puede expresarse como

$$X_N(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int^{\omega_c} -\omega_c \frac{\mathrm{sen}[(2N+1)(\omega - \theta/2)]}{sin[(\omega - \theta)/2]} d\theta$$

4.22 Una señal $x(n)$ tiene la siguiente transformada de Fourier:

$$X(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

Determine las transformadas de Fourier de las señales siguientes:

(a) $x(2n+1)$

(b) $e^{\pi n/2}x(n+2)$

(c) $x(-2n)$

(d) $x(n)\cos(0.3\pi n)$

(e) $x(n) * x(n-1)$

(f) $x(n) * x(-n)$

4.23 Partiendo de una señal discreta en el tiempo $x(n)$ con una transformada de Fourier $X(\omega)$, como la mostrada en la Figura P.4.23, determine y dibuje la transformada de Fourier de las siguientes señales:

(a) $y_1(n) = \begin{cases} x(n), & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$

(b) $y_2(n) = x(2n)$

(c) $y_3(n) = \begin{cases} x(n/2), & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$

Observe que $y_1(n) = x(n)s(n)$, donde $s(n) = \{\ldots 0, 1, 0, \underset{\uparrow}{1}, 0, 1, 0, 1, \ldots\}$

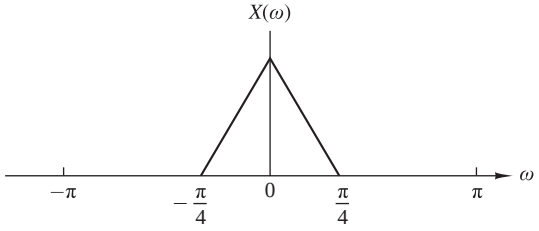


Figura P.4.23.

5

Análisis en el dominio de la frecuencia de sistemas LTI

En este capítulo vamos a ocuparnos de la caracterización de los sistemas lineales invariantes en el tiempo en el dominio de la frecuencia. En este desarrollo, las señales de excitación básicas utilizadas son funciones exponenciales complejas y sinusoides. Veremos que un sistema LTI efectúa, en su entrada, una discriminación o filtrado de diversas componentes de frecuencia. Esta observación nos permitirá caracterizar y clasificar sistemas LTI simples de acuerdo con el tipo de filtrado que realicen sobre cualquier señal de entrada. También describiremos el diseño de estos sencillos filtros, así como algunas aplicaciones determinadas.

También vamos a desarrollar las relaciones existentes entre los espectros de las secuencias de entrada y de salida de un sistema LTI. La última sección del capítulo está dedicada a la aplicación de sistemas LTI para realizar las operaciones de deconvolución y filtrado inverso.

5.1 Características en el dominio de la frecuencia de los sistemas LTI

En esta sección vamos a caracterizar los sistemas lineales invariantes en el tiempo en el dominio de la frecuencia. Las señales de excitación básicas que se utilizan en este desarrollo son funciones sinusoidales y exponenciales complejas. Las características del sistema se describen mediante una función de la variable de frecuencia ω, denominada respuesta en frecuencia, que es la transformada de Fourier de la respuesta del sistema al impulso $h(n)$.

La función de la respuesta en frecuencia caracteriza por completo a un sistema lineal invariante en el tiempo en el dominio de la frecuencia. Esto nos permite determinar la respuesta en régimen permanente del sistema a cualquier combinación lineal ponderada y arbitraria de sinusoides o exponenciales complejas. En particular, puesto que las secuencias periódicas pueden descomponerse en serie de Fourier como una suma ponderada de exponenciales complejas armónicamente relacionadas, resulta sencillo determinar la respuesta de un sistema

lineal invariante en el tiempo a este tipo de señales. Esta meotodología también se aplica a señales aperiódicas, ya que éstas pueden interpretarse como una superposición de exponenciales complejas de tamaño infinitesimal.

5.1.1 Respuesta a señales sinusoidales y exponenciales complejas: función de respuesta en frecuencia

En el Capítulo 2, hemos desmostrado que la respuesta de cualquier sistema lineal invariante en el tiempo en reposo a una señal de entrada arbitraria $x(n)$ está dada por la fórmula de la suma de convolución

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \tag{5.1.1}$$

En esta relación de entrada–salida, el sistema se caracteriza en el dominio del tiempo por su respuesta al impulso unitario $\{h(n), -\infty < n < \infty\}$.

Para desarrollar la caracterización en el dominio de la frecuencia del sistema, vamos a excitarlo con la exponencial compleja

$$x(n) = Ae^{j\omega n}, \qquad -\infty < n < \infty \tag{5.1.2}$$

donde A es la amplitud y ω es cualquier frecuencia arbitraria perteneciente al intervalo $[-\pi, \pi]$. Sustituyendo (5.1.2) en (5.1.1), obtenemos la respuesta

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)[Ae^{j\omega(n-k)}] \\ &= A\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}\right] e^{j\omega n} \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

Observe que el término entre corchetes de la Ecuación (5.1.3) es una función de la variable ω. En efecto, este término es la transformada de Fourier de la respuesta del sistema al impulso unitario $h(k)$. Por tanto, denotamos esta función como

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} \tag{5.1.4}$$

Evidentemente, la función $H(\omega)$ existe si el sistema es estable BIBO, es decir, si

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Con la definición dada en (5.1.4), la respuesta del sistema a la exponencial compleja dada por (5.1.2) es

$$y(n) = AH(\omega)e^{j\omega n} \tag{5.1.5}$$

Observe que la respuesta también tiene la forma de una exponencial compleja de la misma frecuencia que la entrada, pero modificada por el factor multiplicativo $H(\omega)$.

Como resultado de este comportamiento característico, la señal exponencial dada por la Ecuación (5.1.2) se denomina *autofunción* del sistema. En otras palabras, una autofunción de un sistema es una señal de entrada que produce una salida que difiere de la entrada en un factor multiplicativo constante. Este factor se conoce como *autovalor* del sistema. En este caso, una señal exponencial compleja de la forma dada por (5.1.2) es una autofunción de un sistema lineal invariante en el tiempo, y $H(\omega)$ evaluada en la frecuencia de la señal de entrada es el correspondiente autovalor.

EJEMPLO 5.1.1

Determine la secuencia de salida del sistema con respuesta de tipo impulso

$$h(n) = (\frac{1}{2})^n u(n) \tag{5.1.6}$$

cuando la entrada es la secuencia exponencial compleja

$$x(n) = Ae^{j\pi n/2}, \qquad -\infty < n < \infty$$

Solución. En primer lugar, calculamos la transformada de Fourier del impulso $h(n)$, y luego utilizamos (5.1.5) para determinar $y(n)$. Del Ejemplo 4.2.3, tenemos que

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \tag{5.1.7}$$

En $\omega = \pi/2$, (5.1.7) proporciona

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1+j\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}e^{-j26.6^\circ}$$

y por tanto la salida es

$$\begin{aligned} y(n) &= A\left(\frac{2}{\sqrt{5}}e^{-j26.6^\circ}\right)e^{j\pi n/2} \qquad (5.1.8)\\ y(n) &= \frac{2}{\sqrt{5}}Ae^{j(\pi n/2-26.6^\circ)}, \qquad -\infty < n < \infty \end{aligned}$$

Este ejemplo ilustra claramente que el único efecto del sistema sobre la señal de entrada es un cambio de escala de la amplitud de $2/\sqrt{5}$ y un desplazamiento de la fase de -26.6°. Por tanto, la salida también es una exponencial compleja de frecuencia $\pi/2$, amplitud $2\mathrm{A}/\sqrt{5}$ y fase -26.6°.

Si modificamos la frecuencia de la señal de entrada, el efecto del sistema sobre la señal de entrada también varía y, por tanto, la salida también cambia. En particular, si la secuencia de entrada es una exponencial compleja de frecuencia π, es decir,

$$x(n) = Ae^{j\pi n}, \qquad -\infty < n < \infty \tag{5.1.9}$$

entonces, en $\omega = \pi$,

$$H(\pi) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\pi}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

y la salida del sistema es

$$y(n) = \frac{2}{3}Ae^{j\pi n}, \qquad -\infty < n < \infty \tag{5.1.10}$$

Observe que $H(\pi)$ es real pura [es decir, la fase asociada a $H(\omega)$ es cero en $\omega = \pi$]. Por tanto, la amplitud de la señal de entrada sufre un cambio de escala determinado por el factor $H(\pi) = \frac{2}{3}$, pero el desplazamiento de fase es cero.

En general, $H(\omega)$ es una función compleja de la variable de frecuencia ω. Por tanto, se puede expresar en forma polar como sigue

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\Theta(\omega)} \tag{5.1.11}$$

donde $|H(\omega)|$ es el módulo de $H(\omega)$ y

$$\Theta(\omega) = \sphericalangle H(\omega)$$

es el desplazamiento de fase producido por el sistema sobre la señal de entrada a la frecuencia ω.

Puesto que $H(\omega)$ es la transformada de Fourier de $\{h(k)\}$, se deduce que $H(\omega)$ es una función periódica de período 2π. Además, podemos interpretar (5.1.4) como la expansión en serie de Fourier exponencial de $H(\omega)$, siendo $h(k)$ los coeficientes de la serie de Fourier. Por tanto, el impulso unitario $h(k)$ está relacionado con $H(\omega)$ por medio de la expresión integral

$$h(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\omega)e^{j\omega k}d\omega \tag{5.1.12}$$

En un sistema lineal invariante en el tiempo con respuesta al impulso real, las funciones del módulo y la fase poseen las propiedades de simetría, que se desarrollan a continuación. A partir de la definición de $H(\omega)$, tenemos

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\cos\omega k - j\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\operatorname{sen}\omega k \\ &= H_R(\omega) + jH_I(\omega) \\ &= \sqrt{H_R^2(\omega)+H_I^2(\omega)}\,e^{j\tan^{-1}[H_I(\omega)/H_R(\omega)]} \end{aligned} \tag{5.1.13}$$

donde $H_R(\omega)$ y $H_I(\omega)$ designan las componentes real e imaginaria de $H(\omega)$, definidas como

$$\begin{aligned} H_R(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\cos\omega k \\ H_I(\omega) &= -\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\operatorname{sen}\omega k \end{aligned} \tag{5.1.14}$$

Es evidente a partir de la Ecuación (5.1.12) que el módulo y la fase de $H(\omega)$, expresadas en función de $H_R(\omega)$ y $H_I(\omega)$, son

$$\begin{aligned} |H(\omega)| &= \sqrt{H_R^2(\omega)+H_I^2(\omega)} \\ \Theta(\omega) &= \tan^{-1}\frac{H_I(\omega)}{H_R(\omega)} \end{aligned} \tag{5.1.15}$$

Fíjese en que $H_R(\omega) = H_R(-\omega)$ y $H_I(\omega) = -H_I(-\omega)$, por lo que $H_R(\omega)$ es una función par de ω y $H_I(\omega)$ es una función impar de ω. Por tanto, se deduce que $|H(\omega)|$ es una función par de ω y $\Theta(\omega)$ es una función impar de ω. Así, si conocemos $|H(\omega)|$ y $\Theta(\omega)$ para $0 \le \omega \le \pi$, también conoceremos dichas funciones para $-\pi \le \omega \le 0$.

EJEMPLO 5.1.2

Filtro de media móvil. Determine el módulo y la fase de $H(\omega)$ para un sistema de media móvil (MA, *moving average*) de tres puntos

$$y(n) = \frac{1}{3}[x(n+1)+x(n)+x(n-1)]$$

y dibuje estas dos funciones para $0 \le \omega \le \pi$.

Solución. Puesto que

$$h(n) = \{\frac{1}{3}, \underset{\uparrow}{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3}\}$$

se deduce que

$$H(\omega) = \frac{1}{3}(e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega}) = \frac{1}{3}(1 + 2\cos\omega)$$

Por tanto,

$$|H(\omega)| = \frac{1}{3}|1 + 2\cos\omega| \tag{5.1.16}$$

$$\Theta(\omega) = \begin{cases} 0, & 0 \le \omega \le 2\pi/3 \\ \pi, & 2\pi/3 \le \omega < \pi \end{cases}$$

La Figura 5.1.1 muestra las gráficas del módulo y la fase de $H(\omega)$. Como hemos mencionado anteriormente, $|H(\omega)|$ es una función impar de la frecuencia y $\Theta(\omega)$ es una función impar de la frecuencia. Es evidente a partir de la característica de la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ que este filtro de media móvil suaviza los datos de entrada, como era de esperar conocida la ecuación de entrada–salida.

Las propiedades de simetría que las funciones del módulo y la fase de $H(\omega)$ satisfacen, así como el hecho de que una sinusoide pueda expresarse como una suma o una diferencia de dos funciones exponenciales conjugadas complejas, implican que la respuesta de un sistema lineal invariante en el tiempo a una sinusoide es similar en forma a la respuesta cuando la entrada es una señal exponencial compleja. De hecho, si la entrada es

$$x_1(n) = Ae^{j\omega n}$$

la salida será

$$y_1(n) = A|H(\omega)|e^{j\Theta(\omega)}e^{j\omega n}$$

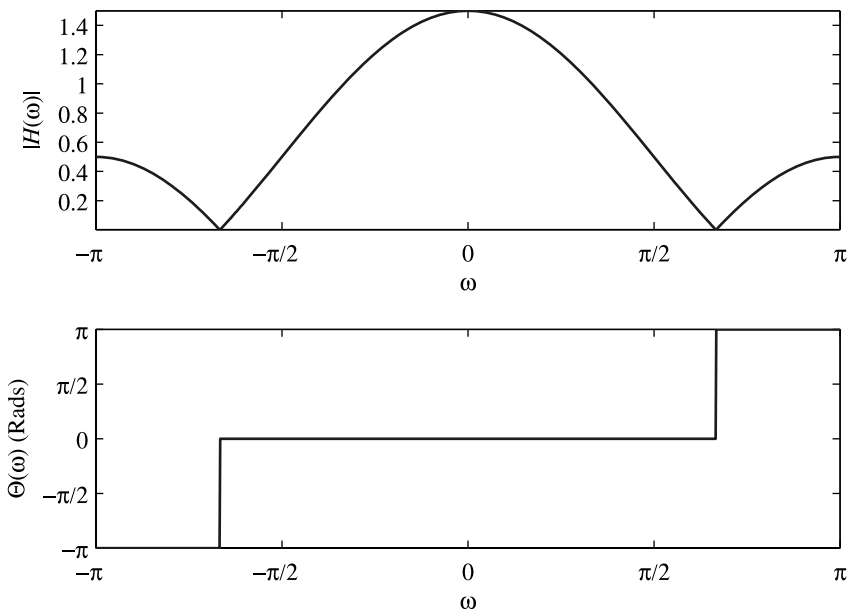


Figura 5.1.1. Módulo y fase de la respuesta del sistema MA del Ejemplo 5.1.2.

Por el contrario, si la entrada es

$$x_2(n) = Ae^{-j\omega n}$$

la respuesta del sistema es

$$\begin{aligned} y_2(n) &= A|H(-\omega)|e^{j\Theta(-\omega)}e^{-j\omega n} \\ &= A|H(\omega)|e^{-j\Theta(\omega)}e^{-j\omega n} \end{aligned}$$

donde, en la última expresión, hemos aplicado las propiedades de simetría $|H(\omega)| = |H(-\omega)|$ y $\Theta(\omega) = -\Theta(-\omega)$. Aplicando ahora la propiedad de superposición del sistema lineal invariante en el tiempo, tenemos que la respuesta del sistema a la entrada

$$x(n) = \frac{1}{2}[x_1(n) + x_2(n)] = A\cos\omega n$$

es

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{2}[y_1(n) + y_2(n)] \\ y(n) &= A|H(\omega)|\cos[\omega n + \Theta(\omega)] \end{aligned} \tag{5.1.17}$$

De forma similar, si la entrada es

$$x(n) = \frac{1}{j2}[x_1(n) - x_2(n)] = A\operatorname{sen}\omega n$$

la respuesta del sistema es

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{j2}[y_1(n) - y_2(n)] \\ y(n) &= A|H(\omega)|\operatorname{sen}[\omega n + \Theta(\omega)] \end{aligned} \tag{5.1.18}$$

Queda claro ahora que $H(\omega)$, o lo que es equivalente, $|H(\omega)|$ y $\Theta(\omega)$, caracteriza por completo el efecto del sistema sobre una señal de entrada sinusoidal de cualquier frecuencia arbitraria. Realmente, observe que $|H(\omega)|$ determina la amplificación ($|H(\omega)| > 1$) o la atenuación ($|H(\omega)| < 1$) que el sistema aplica sobre la sinusoide de entrada. La fase $\Theta(\omega)$ determina el desplazamiento de fase que el sistema aplica sobre la sinusoide de entrada. En consecuencia, conociendo $H(\omega)$, podremos determinar la respuesta del sistema a cualquier señal de entrada sinusoidal. Por tanto, $H(\omega)$ especifica la respuesta del sistema en el dominio de la frecuencia y se conoce como *respuesta en frecuencia* del sistema. Asimismo, $|H(\omega)|$ es el *módulo de la respuesta en frecuencia* y $\Theta(\omega)$ la *fase de la respuesta en frecuencia* del sistema.

Si la entrada al sistema consta de más de una sinusoide, se puede utilizar la propiedad de superposición de los sistemas lineales para determinar la respuesta. Los ejemplos siguientes ilustran el uso de esta propiedad.

EJEMPLO 5.1.3

Determine la respuesta del sistema del Ejemplo 5.1.1 a la siguiente señal de entrada

$$x(n) = 10 - 5\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}n + 20\cos\pi n, \qquad -\infty < n < \infty$$

Solución. La respuesta en frecuencia del sistema está dada por (5.1.7) como

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

El primer término de la señal de entrada es una componente de señal fija correspondiente a $\omega = 0$. Por tanto,

$$H(0) = \tfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

El segundo término de $x(n)$ tiene una frecuencia de $\pi/2$. Para esta frecuencia, la respuesta en frecuencia del sistema es

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-j26.6^\circ}$$

Por último, el tercer término de $x(n)$ tiene una frecuencia de $\omega = \pi$. A dicha frecuencia

$$H(\pi) = \frac{2}{3}$$

Por tanto, la respuesta del sistema a $x(n)$ es

$$y(n) = 20 - \frac{10}{\sqrt{5}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}n - 26.6^\circ\right) + \frac{40}{3}\cos \pi n, \qquad -\infty < n < \infty$$

EJEMPLO 5.1.4

Un sistema lineal invariante en el tiempo se describe mediante la siguiente ecuación en diferencias:

$$y(n) = ay(n-1) + bx(n), \qquad 0 < a < 1$$

(a) Determine el módulo y la fase de la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ del sistema.

(b) Seleccione el parámetro b de modo que el valor máximo de $|H(\omega)|$ sea la unidad y dibuje $|H(\omega)|$ y $\sphericalangle H(\omega)$ para $a = 0.9$.

(c) Determine la salida del sistema para la señal de entrada

$$x(n) = 5 + 12 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} n - 20 \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right)$$

Solución. La respuesta del sistema al impulso es

$$h(n) = ba^n u(n)$$

Como $|a| < 1$, el sistema es estable BIBO y, por tanto, $H(\omega)$ existe.

(a) La respuesta en frecuencia es

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n} \\ &= \frac{b}{1 - ae^{-j\omega}} \end{aligned}$$

Puesto que

$$1 - ae^{-j\omega} = (1 - a\cos\omega) + ja \operatorname{sen} \omega$$

se deduce que

$$\begin{aligned} |1 - ae^{-j\omega}| &= \sqrt{(1 - a\cos\omega)^2 + (a \operatorname{sen}\omega)^2} \\ &= \sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\omega} \end{aligned}$$

y

$$\sphericalangle(1 - ae^{-j\omega}) = \tan^{-1} \frac{a \operatorname{sen}\omega}{1 - a\cos\omega}$$

Por tanto,

$$|H(\omega)| = \frac{|b|}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\omega}}$$

$$\sphericalangle H(\omega) = \Theta(\omega) = \sphericalangle b - \tan^{-1}\frac{a\,\mathrm{sen}\,\omega}{1-a\cos\omega}$$

(b) Puesto que el parámetro a es positivo, el denominador de $|H(\omega)|$ alcanza un mínimo en $\omega = 0$. Por tanto, $|H(\omega)|$ alcanza su valor máximo en $\omega = 0$. Para esta frecuencia, tenemos que

$$|H(0)| = \frac{|b|}{1-a} = 1$$

lo que implica que $b = \pm(1-a)$. Seleccionamos $b = 1-a$, de modo que

$$|H(\omega)| = \frac{1-a}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\omega}}$$

y

$$\Theta(\omega) = -\tan^{-1}\frac{a\,\mathrm{sen}\,\omega}{1-a\cos\omega}$$

Las gráficas del módulo $|H(\omega)|$ y la fase $\Theta(\omega)$ de la respuesta en frecuencia se ilustran en la Figura 5.1.2. Observe que este sistema atenúa las señales de alta frecuencia.

(c) La señal de entrada consta de componentes en las frecuencias $\omega = 0$, $\pi/2$ y π. Para $\omega = 0$, $|H(0)| = 1$ y $\Theta(0) = 0$. Para $\omega = \pi/2$,

$$\left|H\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = \frac{1-a}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{0.1}{\sqrt{1.81}} = 0.074$$

$$\Theta\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\tan^{-1} a = -42^\circ$$

Para $\omega = \pi$,

$$|H(\pi)| = \frac{1-a}{1+a} = \frac{0.1}{1.9} = 0.053 \quad \text{y} \quad \Theta(\pi) = 0$$

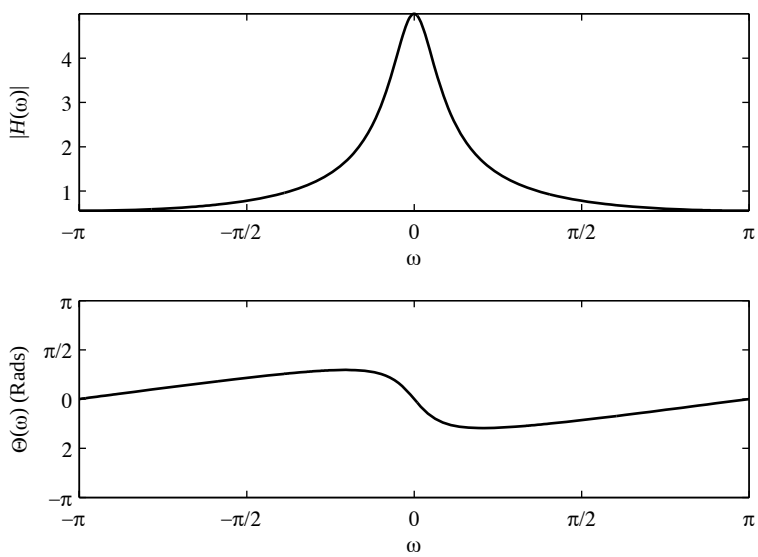


Figura 5.1.2. Módulo y fase de la respuesta en frecuencia del sistema del Ejemplo 5.1.4 con $a = 0.9$.

Por tanto, la salida del sistema es

$$\begin{aligned} y(n) &= 5|H(0)| + 12\left|H\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}n + \Theta\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &\quad -20|H(\pi)|\cos\left[\pi n + \frac{\pi}{4} + \Theta(\pi)\right] \\ &= 5 + 0.888\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}n - 42^\circ\right) - 1.06\cos\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right), \qquad -\infty < n < \infty \end{aligned}$$

En el caso más general, si la entrada al sistema es una combinación lineal arbitraria de sinusoides de la forma

$$x(n) = \sum_{i=1}^{L} A_i \cos(\omega_i n + \phi_i), \qquad -\infty < n < \infty$$

donde $\{A_i\}$ y $\{\phi_i\}$ son las amplitudes y fases de las correspondientes componentes sinusoidales, entonces la respuesta del sistema es simplemente

$$y(n) = \sum_{i=1}^{L} A_i |H(\omega_i)| \cos[\omega_i n + \phi_i + \Theta(\omega_i)] \tag{5.1.19}$$

donde $|H(\omega_i)|$ y $\Theta(\omega_i)$ son el módulo y la fase, respectivamente, de la respuesta del sistema a las componentes individuales de la señal de entrada.

Es evidente que dependiendo de la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ del sistema, las sinusoides de entrada de diferentes frecuencias se verán afectadas de forma diferente por el sistema. Por ejemplo, el sistema puede suprimir algunas sinusoides completamente si $H(\omega) = 0$ para las frecuencias de dichas sinusoides. Otras, pueden no ser atenuadas (o quizá, ser amplificadas). En efecto, podemos ver que el sistema lineal invariante en el tiempo funciona como un *filtro* para las sinusoides de diferentes frecuencias, dejando pasar a algunas componentes hasta la salida y suprimiendo o impidiendo que otras componentes lleguen a la salida. En realidad, como veremos en el Capítulo 10, el problema de diseñar el filtro implica determinar los parámetros de un sistema lineal invariante en el tiempo que proporcione la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ deseada.

5.1.2 Respuestas transitoria y en régimen permanente a señales de entrada sinusoidales

En la sección anterior hemos determinado la respuesta de un sistema lineal invariante en el tiempo a señales de entrada exponenciales y sinusoidales aplicadas al sistema en $n = -\infty$. Normalmente, denominamos a dichas señales exponenciales eternas o sinusoides eternas, porque se aplican en $n = -\infty$. En dichos casos, la respuesta que observamos en la salida del sistema es la respuesta en régimen permanente. Además, en este caso, no existe respuesta transitoria.

Por el contrario, si la señal exponencial o sinusoidal se aplica en un instante de tiempo finito, por ejemplo en $n = 0$, la respuesta del sistema constará de dos términos: la respuesta transitoria y la respuesta en régimen permanente. Para ilustrar este comportamiento, consideremos, por ejemplo, el sistema descrito por la ecuación en diferencias de primer orden

$$y(n) = ay(n-1) + x(n) \tag{5.1.20}$$

Este sistema se ha visto en la Sección 2.4.2. Su respuesta a cualquier entrada $x(n)$ aplicada en $n = 0$ está dada por la Ecuación (2.4.8) como sigue

$$y(n) = a^{n+1}y(-1) + \sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k), \qquad n \geq 0 \tag{5.1.21}$$

donde $y(-1)$ es la condición inicial.

Supongamos ahora que la entrada al sistema es la exponencial compleja

$$x(n) = Ae^{j\omega n}, \qquad n \geq 0 \tag{5.1.22}$$

aplicada en $n = 0$. Al sustituir (5.1.22) en (5.1.21), obtenemos

$$\begin{aligned} y(n) &= a^{n+1}y(-1) + A\sum_{k=0}^{n} a^k e^{j\omega(n-k)} \\ &= a^{n+1}y(-1) + A\left[\sum_{k=0}^{n}(ae^{-j\omega})^k\right]e^{j\omega n} \\ &= a^{n+1}y(-1) + A\frac{1-a^{n+1}e^{-j\omega(n+1)}}{1-ae^{-j\omega}}e^{j\omega n}, \qquad n \geq 0 \\ &= a^{n+1}y(-1) - \frac{Aa^{n+1}e^{-j\omega(n+1)}}{1-ae^{-j\omega}}e^{j\omega n} + \frac{A}{1-ae^{-j\omega}}e^{j\omega n}, \qquad n \geq 0 \end{aligned} \tag{5.1.23}$$

Recuerde que el sistema descrito por la Ecuación (5.1.20) es estable BIBO si $|a| < 1$. En este caso, los dos términos que incluyen a^{n+1} en la Ecuación (5.1.23) tienden a cero cuando n tiende a infinito. En consecuencia, nos queda la respuesta en régimen permanente

$$\begin{aligned} y_{\text{ss}}(n) &= \lim_{n\to\infty} y(n) = \frac{A}{1-ae^{-j\omega}}e^{j\omega n} \\ &= AH(\omega)e^{j\omega n} \end{aligned} \tag{5.1.24}$$

Los dos primeros términos de (5.1.23) constituyen la respuesta transitoria del sistema, es decir,

$$y_{\text{tr}}(n) = a^{n+1}y(-1) - \frac{Aa^{n+1}e^{-j\omega(n+1)}}{1-ae^{-j\omega}}e^{j\omega n}, \qquad n \geq 0 \tag{5.1.25}$$

que tiende a cero cuando n tiende a infinito. El primer término de la respuesta transitoria es la respuesta a la entrada nula del sistema y el segundo término es la respuesta transitoria generada por la señal exponencial de entrada.

En general, todos los sistemas lineales invariantes en el tiempo con estabilidad BIBO se comportan de forma similar cuando son excitados por una señal exponencial compleja o una sinusoide en $n = 0$ o en otro instante de tiempo finito. Esto es, la respuesta transistoria tiende a cero cuando $n \to \infty$, dejando sólo la respuesta en régimen permanente que hemos determinado en la sección anterior. En muchas aplicaciones prácticas, la respuesta transitoria del sistema no es importante y, por tanto, normalmente se ignora cuando se trabaja con la respuesta del sistema a entradas sinusoidales.

5.1.3 Respuesta en régimen permanente a señales de entrada periódicas

Supongamos que la entrada a un sistema lineal invariante en el tiempo estable es una señal periódica $x(n)$ de período fundamental N. Dado que una señal como ésta existe en el intervalo $-\infty < n < \infty$, la respuesta total del sistema en cualquier instante de tiempo n es igual a la respuesta en régimen permanente.

Para determinar la respuesta $y(n)$ del sistema, podemos emplear la representación en serie de Fourier de la señal periódica, que es

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{5.1.26}$$

donde $\{c_k\}$ son los coeficientes de la serie de Fourier. Ahora, la respuesta del sistema a la señal exponencial compleja

$$x_k(n) = c_k e^{j2\pi kn/N}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

es

$$y_k(n) = c_k H\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{j2\pi kn/N}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{5.1.27}$$

donde

$$H\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = H(\omega)|_{\omega=2\pi k/N}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

Utilizando el principio de superposición para sistemas lineales, obtenemos la respuesta del sistema a la señal periódica $x(n)$ dada por (5.1.26) como

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k H\left(\frac{2\pi k}{N}\right) e^{j2\pi kn/N}, \qquad -\infty < n < \infty \tag{5.1.28}$$

Este resultado implica que la respuesta del sistema a la señal de entrada periódica $x(n)$ también es periódica con el mismo período N. Los coeficientes de la serie de Fourier para $y(n)$ son

$$d_k \equiv c_k H\left(\frac{2\pi k}{N}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{5.1.29}$$

Por tanto, el sistema lineal puede cambiar la forma de la señal periódica de entrada cambiando la escala de la amplitud y desplazando la fase de las componentes de la serie de Fourier, pero sin afectar al período de dicha señal periódica de entrada.

5.1.4 Respuesta a señales de entrada aperiódicas

El teorema de convolución, dado por la Ecuación (4.4.49), proporciona la relación deseada en el dominio de la frecuencia para determinar la salida de un sistema LTI a una señal aperiódica de energía finita. Si $\{x(n)\}$ designa la señal de entrada, $\{y(n)\}$ la señal de salida y $\{h(n)\}$ es la respuesta al impulso unitario del sistema, entonces, a partir del teorema de la convolución, tenemos

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \tag{5.1.30}$$

donde $Y(\omega)$, $X(\omega)$ y $H(\omega)$ son las correspondientes transformadas de Fourier de $\{y(n)\}$, $\{x(n)\}$ y $\{h(n)\}$, respectivamente. A partir de esta relación, podemos observar que el espectro de la señal de salida es igual al espectro de la señal de entrada multiplicado por la respuesta en frecuencia del sistema.

Si expresamos $Y(\omega)$, $H(\omega)$ y $X(\omega)$ en coordenadas polares, el módulo y la fase de la señal de salida pueden expresarse del siguiente modo:

$$|Y(\omega)| = |H(\omega)||X(\omega)| \tag{5.1.31}$$

$$\sphericalangle Y(\omega) = \sphericalangle X(\omega) + \sphericalangle H(\omega) \tag{5.1.32}$$

donde $|H(\omega)|$ y $\sphericalangle H(\omega)$ son el módulo y la fase de la respuesta del sistema.

Por su naturaleza, una señal aperiódica de energía finita está formada por una serie continua de componentes de frecuencia. El sistema lineal invariante en el tiempo, a través de su función de respuesta en frecuencia, atenúa algunas frecuencias de la señal de entrada y amplifica otras. Por tanto, el sistema actúa como un *filtro* para la señal de entrada. Si observa la gráfica de $|H(\omega)|$ verá las frecuencias que son amplificadas y las que son

atenuadas. Por otro lado, el ángulo de $H(\omega)$ determina el desplazamiento de fase que se produce en la serie continua de frecuencias de la señal de entrada como una función de la frecuencia. Si el sistema modifica el espectro de la señal de entrada de una forma no deseada, decimos que el sistema ha causado una *distorsión de módulo y fase*.

Observe también que *la salida de un sistema lineal invariante en el tiempo no puede contener frecuencias que no se hallen en la señal de entrada*. Para crear frecuencias que no necesariamente estén contenidas en la señal de entrada, debe emplearse un sistema lineal variante en el tiempo o un sistema no lineal.

La Figura 5.1.3 ilustra las relaciones en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia que pueden utilizarse en el análisis de sistemas LTI con estabilidad BIBO. Observe que en el análisis en el dominio del tiempo, trabajamos con la convolución de la señal de entrada con la respuesta al impulso del sistema para obtener la secuencia de salida del mismo. Por el contrario, en el análisis en el dominio de la frecuencia, trabajamos con el espectro de la señal de entrada $X(\omega)$ y la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ del sistema, que están relacionadas a través de la mulitplicación, para obtener el espectro de la señal en la salida del sistema.

Podemos utilizar la relación (5.1.30) para determinar el espectro $Y(\omega)$ de la señal de salida. Después, puede determinarse la secuencia de salida $\{y(n)\}$ a partir de la transformada inversa de Fourier

$$y(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y(\omega)e^{j\omega n}d\omega \tag{5.1.33}$$

Sin embargo, este método se usa rara vez. En su lugar, la transformada z, presentada en el Capítulo 3, resulta ser un método más simple que permite resolver el problema de determinar la secuencia de salida $\{y(n)\}$.

Volvamos a la relación de entrada–salida básica dada por (5.1.30) y vamos a calcular el módulo al cuadrado en ambos lados. Así, obtenemos

$$\begin{aligned} |Y(\omega)|^2 &= |H(\omega)|^2|X(\omega)|^2 \\ S_{yy}(\omega) &= |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega) \end{aligned} \tag{5.1.34}$$

donde $S_{xx}(\omega)$ y $S_{yy}(\omega)$ son las densidades espectrales de energía de las señales de entrada y de salida, respectivamente. Integrando la expresión (5.1.34) en todo el rango de frecuencias $(-\pi,\pi)$, obtenemos la energía de la señal de salida como sigue

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{yy}(\omega)d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega)d\omega \end{aligned} \tag{5.1.35}$$

EJEMPLO 5.1.5

Un sistema lineal invariante en el tiempo queda caracterizado mediante su respuesta al impulso

$$h(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$$

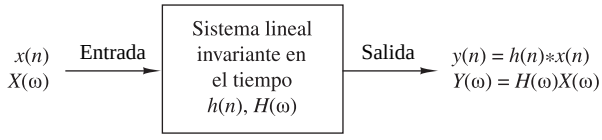


Figura 5.1.3. Relaciones entrada-salida en el dominio del tiempo y de la frecuencia en los sistemas LTI.

Determine el espectro y la densidad espectral de energía de la señal de salida cuando el sistema se excita con la señal

$$x(n) = (\frac{1}{4})^n u(n)$$

Solución. La respuesta en frecuencia del sistema es

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \end{aligned}$$

De forma similar, la secuencia de entrada $\{x(n)\}$ tiene una transformada de Fourier

$$X(\omega) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

Por tanto, el espectro de la señal a la salida del sistema es

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= H(\omega)X(\omega) \\ &= \frac{1}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})} \end{aligned}$$

La densidad espectral de energía correspondiente es

$$\begin{aligned} S_{yy}(\omega) &= |Y(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2|X(\omega)|^2 \\ &= \frac{1}{(\frac{5}{4}-\cos\omega)(\frac{17}{16}-\frac{1}{2}\cos\omega)} \end{aligned}$$

5.2 Respuesta en frecuencia de los sistemas LTI

En esta sección vamos a centrarnos en la determinación de la respuesta en frecuencia de los sistemas LTI cuyas funciones del sistema son racionales. Recuerde que este tipo de sistemas LTI se describe en el dominio del tiempo mediante ecuaciones en diferencias de coeficientes constantes.

5.2.1 Respuesta en frecuencia de un sistema definido mediante una función racional

En la Sección 4.2.6 hemos visto que si la función del sistema $H(z)$ converge en la cirunferencia unidad, es posible obtener la respuesta en frecuencia del sistema evaluando $H(z)$ en dicha circunferencia unidad. Por tanto,

$$H(\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} \tag{5.2.1}$$

En el caso en que $H(z)$ es una función racional de la forma $H(z) = B(z)/A(z)$, tenemos

$$H(\omega) = \frac{B(\omega)}{A(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k e^{-j\omega k}} \tag{5.2.2}$$

$$= b_0 \frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - z_k e^{-j\omega})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - p_k e^{-j\omega})} \tag{5.2.3}$$

donde $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ son reales, pero $\{z_k\}$ y $\{p_k\}$ pueden ser complejos.

En ocasiones, es deseable expresar el módulo al cuadrado de $H(\omega)$ en función de $H(z)$. En primer lugar, tenga en cuenta que

$$|H(\omega)|^2 = H(\omega)H^*(\omega)$$

Para la función del sistema racional dada por (5.2.3), tenemos

$$H^*(\omega) = b_0 \frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - z_k^* e^{j\omega})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - p_k^* e^{j\omega})} \tag{5.2.4}$$

Luego se deduce que $H^*(\omega)$ se obtiene evaluando $H^*(1/z^*)$ sobre la circunferencia unidad, donde para una función del sistema racional,

$$H^*(1/z^*) = b_0 \frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - z_k^* z)}{\prod_{k=1}^{N}(1 - p_k^* z)} \tag{5.2.5}$$

Sin embargo, cuando $\{h(n)\}$ es real o, lo que es equivalente, los coeficientes $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ son reales, podemos tener pares de polos y ceros complejos conjugados. En este caso, $H^*(1/z^*) = H(z^{-1})$. Luego, $H^*(\omega) = H(-\omega)$, y

$$|H(\omega)|^2 = H(\omega)H^*(\omega) = H(\omega)H(-\omega) = H(z)H(z^{-1})|_{z=e^{j\omega}} \tag{5.2.6}$$

De acuerdo con el teorema de correlación para la transformada z (*véase* la Tabla 3.2), la función $H(z)H(z^{-1})$ es la transformada z de la autocorrelación $\{r_{hh}(m)\}$ de la respuesta al impulso unidad $\{h(n)\}$. Luego se deduce a partir del teorema de Wiener–Khintchine que $|H(\omega)|^2$ es la transformada de Fourier de $\{r_{hh}(m)\}$.

De forma similar, si $H(z) = B(z)/A(z)$, las transformadas $D(z) = B(z)B(z^{-1})$ y $C(z) = A(z)A(z^{-1})$ son las transformadas z de las secuencias de autocorrelación $\{c_l\}$ y $\{d_l\}$, donde

$$c_l = \sum_{k=0}^{N-|l|} a_k a_{k+l}, \qquad -N \le l \le N \tag{5.2.7}$$

$$d_l = \sum_{k=0}^{M-|l|} b_k b_{k+l}, \qquad -M \le l \le M \tag{5.2.8}$$

Dado que los parámetros del sistema $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ son reales, se deduce que $c_l = c_{-l}$ y $d_l = d_{-l}$. Utilizando esta propiedad de simetría, $|H(\omega)|^2$ se puede expesar como

$$|H(\omega)|^2 = \frac{d_0 + 2\sum_{k=1}^{M} d_k \cos k\omega}{c_0 + 2\sum_{k=1}^{N} c_k \cos k\omega} \tag{5.2.9}$$

Por último, fíjese en que $\cos k\omega$ puede expresarse como una función polinómica de $\cos\omega$. Es decir,

$$\cos k\omega = \sum_{m=0}^{k} \beta_m (\cos\omega)^m \tag{5.2.10}$$

donde $\{\beta_m\}$ son los coeficientes de la expansión. En consecuencia, el numerador y el denominador de $|H(\omega)|^2$ pueden interpretarse como funciones polinómicas de $\cos\omega$. El siguiente ejemplo ilustra las relaciones anteriores.

EJEMPLO 5.2.1

Determine $|H(\omega)|^2$ para el sistema

$$y(n) = -0.1y(n-1) + 0.2y(n-2) + x(n) + x(n-1)$$

Solución. La función del sistema es

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1+0.1z^{-1}-0.2z^{-2}}$$

y su ROC es $|z| > 0.5$. Por tanto, $H(\omega)$ existe. Ahora

$$\begin{aligned} H(z)H(z^{-1}) &= \frac{1+z^{-1}}{1+0.1z^{-1}-0.2z^{-2}} \cdot \frac{1+z}{1+0.1z-0.2z^2} \\ &= \frac{2+z+z^{-1}}{1.05+0.08(z+z^{-1})-0.2(z^{-2}+z^{-2})} \end{aligned}$$

Evaluando $H(z)H(z^{-1})$ en la circunferencia unidad, obtenemos

$$|H(\omega)|^2 = \frac{2+2\cos\omega}{1.05+0.16\cos\omega-0.4\cos 2\omega}$$

Sin embargo, $\cos 2\omega = 2\cos^2\omega - 1$. En consecuencia, $|H(\omega)|^2$ se puede expresar como

$$|H(\omega)|^2 = \frac{2(1+\cos\omega)}{1.45+0.16\cos\omega-0.8\cos^2\omega}$$

Observe que dada $H(z)$, es inmediato determinar $H(z^{-1})$ y a continuación $|H(\omega)|^2$. Sin embargo, el problema inverso de determinar $H(z)$, dada $|H(\omega)|^2$ o la correspondiente respuesta al impulso $\{h(n)\}$, no es inmediato. Puesto que $|H(\omega)|^2$ no contiene la información de fase de $H(\omega)$, no es posible determinar $H(z)$ de forma unívoca.

Con el fin de desarrollar esta cuestión, suponemos que los N polos y los M ceros de $H(z)$ son $\{p_k\}$ y $\{z_k\}$, respectivamente. Los polos y ceros correspondientes de $H(z^{-1})$ son $\{1/p_k\}$ y $\{1/z_k\}$, respectivamente. Dada $|H(\omega)|^2$ o, lo que es equivalente, $H(z)H(z^{-1})$, podemos determinar diferentes funciones de sistema $H(z)$, asignando a $H(z)$, un polo p_k o su recíproco $1/p_k$, y un cero z_k o su recíproco $1/z_k$. Por ejemplo, si $N = 2$ y $M = 1$, los polos y ceros de $H(z)H(z^{-1})$ son $\{p_1, p_2, 1/p_1, 1/p_2\}$ y $\{z_1, 1/z_1\}$. Si p_1 y p_2 son reales, los posibles polos para $H(z)$ son $\{p_1, p_2\}$, $\{1/p_1, 1/p_2\}$, $\{p_1, 1/p_2\}$ y $\{p_2, 1/p_1\}$ y los posibles ceros son $\{z_1\}$ o $\{1/z_1\}$. Por tanto, existen ocho posibles funciones del sistema entre las que elegir, todas ellas resultantes de la misma función $|H(\omega)|^2$. Incluso aunque restrinjamos los polos de $H(z)$ al interior de la circunferencia unidad, todavía se tienen dos posibles opciones para $H(z)$, dependiendo de si elegimos el cero $\{z_1\}$ o $\{1/z_1\}$. Por tanto, no podemos determinar $H(z)$ de forma unívoca conocido únicamente el módulo de la respuesta $H(\omega)|$.

5.2.2 Cálculo de la respuesta en frecuencia

Cuando se calculan el módulo y la fase de la respuesta como funciones de la frecuencia, es conveniente expresar $H(\omega)$ en función de sus polos y ceros. Por tanto, escribimos $H(\omega)$ en forma de factores como sigue

$$H(\omega) = b_0 \frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - z_k e^{-j\omega k})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - p_k e^{-j\omega k})} \tag{5.2.11}$$

o, lo que es equivalente, como

$$H(\omega) = b_0 e^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{k=1}^{M}(e^{j\omega} - z_k)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega} - p_k)} \tag{5.2.12}$$

A continuación expresamos los factores complejos de la Ecuación (5.2.12) en forma polar como sigue

$$e^{j\omega} - z_k = V_k(\omega) e^{j\Theta_k(\omega)} \tag{5.2.13}$$

y

$$e^{j\omega} - p_k = U_k(\omega) e^{j\Phi_k(\omega)} \tag{5.2.14}$$

donde

$$V_k(\omega) \equiv |e^{j\omega} - z_k|, \quad \Theta_k(\omega) \equiv \sphericalangle(e^{j\omega} - z_k) \tag{5.2.15}$$

y

$$U_k(\omega) \equiv |e^{j\omega} - p_k|, \quad \Phi_k(\omega) = \sphericalangle(e^{j\omega} - p_k) \tag{5.2.16}$$

El módulo de $H(\omega)$ es igual al producto de los módulos de todos los términos de (5.2.12). Por tanto, utilizando las expresiones (5.2.13) hasta (5.2.16), obtenemos

$$|H(\omega)| = |b_0| \frac{V_1(\omega) \cdots V_M(\omega)}{U_1(\omega) U_2(\omega) \cdots U_N(\omega)} \tag{5.2.17}$$

ya que el módulo de $e^{j\omega(N-M)}$ es 1.

La fase de $H(\omega)$ es la suma de las fases de los factores del numerador menos las fases de los factores del denominador. Por tanto, combinando las ecuaciones (5.2.13) hasta (5.2.16), tenemos

$$\begin{aligned} \sphericalangle H(\omega) &= \sphericalangle b_0 + \omega(N-M) + \Theta_1(\omega) + \Theta_2(\omega) + \cdots + \Theta_M(\omega) \\ &\quad - [\Phi_1(\omega) + \Phi_2(\omega) + \cdots + \Phi_N(\omega)] \end{aligned} \tag{5.2.18}$$

La fase del término de ganancia b_0 es cero o π, dependiendo de si b_0 es positivo o negativo. Evidentemente, si conocemos los ceros y los polos de la función del sistema $H(z)$, podemos calcular la respuesta en frecuencia a partir de (5.2.17) y (5.2.18).

Podemos hacer una interpretación geométrica de las magnitudes que aparecen en las Ecuaciones (5.2.17) y (5.2.18). Consideremos un polo p_k y un cero z_k ubicados en los puntos A y B del plano z, como se muestra en la Figura 5.2.1(a). Supongamos que queremos calcular $H(\omega)$ para un valor específico de frecuencia ω. El valor dado de ω determina el ángulo de $e^{j\omega}$ con el eje real positivo. La punta del vector $e^{j\omega}$ especifica un punto L en

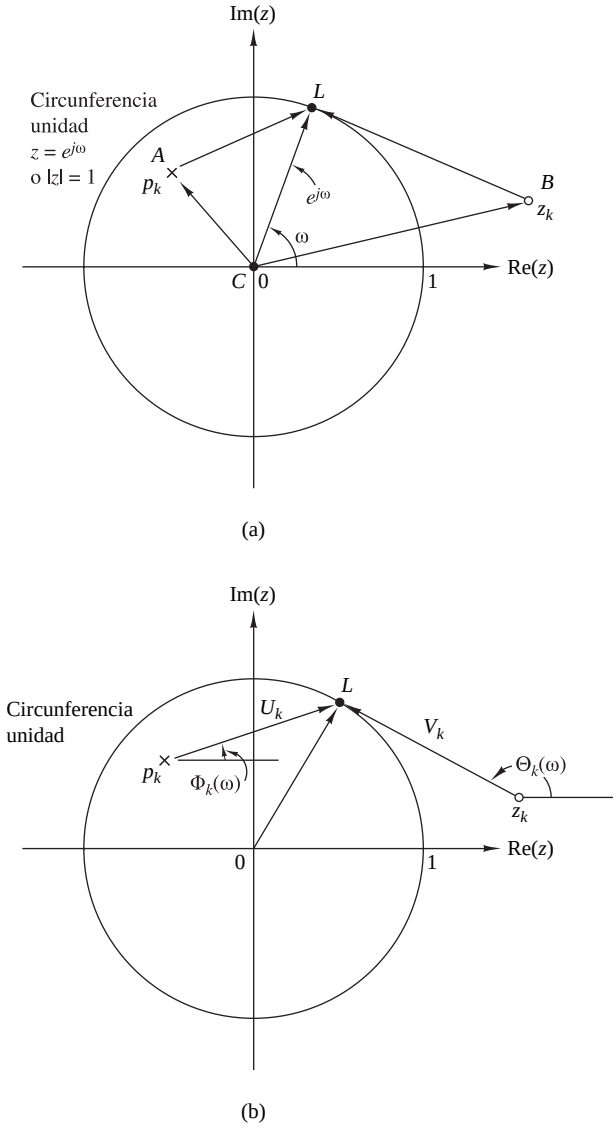


Figura 5.2.1. Interpretación geométrica de la contribución de un polo y un cero al (1) módulo de la transformada de Fourier: el factor V_k/U_k y (2) la fase: el factor $\Theta_k - \Phi_k$.

la circunferencia unidad. La evaluación de la transformada de Fourier para el valor dado de ω es equivalente a calcular la transformada z en el punto L del plano complejo. Dibujamos los vectores **AL** y **BL** desde las posiciones de los polos y ceros hasta el punto L, en el que deseamos calcular la transformada de Fourier. A partir de la Figura 5.2.1(a) se obtiene que

$$\mathbf{CL} = \mathbf{CA} + \mathbf{AL}$$

y

$$\mathbf{CL} = \mathbf{CB} + \mathbf{BL}$$

Sin embargo, $\mathbf{CL} = e^{j\omega}$, $\mathbf{CA} = p_k$ y $\mathbf{CB} = z_k$. Por tanto,

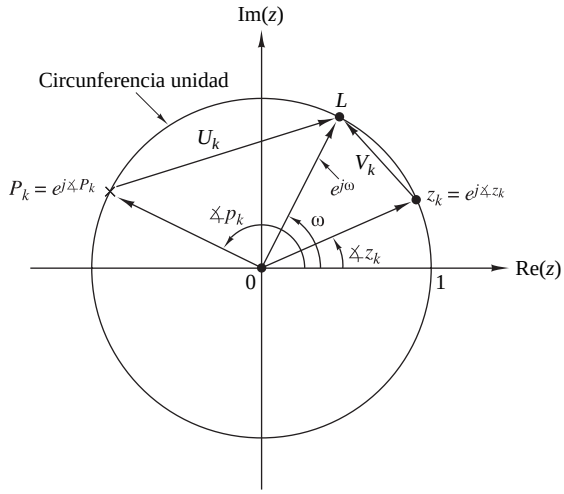


Figura 5.2.2. Un cero en la circunferencia unidad hace que $|H(\omega)| = 0$ y $\omega = \sphericalangle z_k$. Por otro lado, un polo sobre la circunferencia unidad da lugar a $|H(\omega)| = \infty$ en $\omega = \sphericalangle p_k$.

$$\mathbf{AL} = e^{j\omega} - p_k \tag{5.2.19}$$

y

$$\mathbf{BL} = e^{j\omega} - z_k \tag{5.2.20}$$

Combinando estas relaciones con (5.2.13) y (5.2.14), obtenemos

$$\mathbf{AL} = e^{j\omega} - p_k = U_k(\omega)e^{j\Phi_k(\omega)} \tag{5.2.21}$$

$$\mathbf{BL} = e^{j\omega} - z_k = V_k(\omega)e^{j\Theta_k(\omega)} \tag{5.2.22}$$

Por tanto, $U_k(\omega)$ es la longiutd de **AL**, es decir, la distancia del polo p_k desde el punto L correspondiente a $e^{j\omega}$, mientras que $V_k(\omega)$ es la distancia del cero z_k desde el mismo punto L. Las fases $\Phi_k(\omega)$ y $\Theta_k(\omega)$ son los ángulos que forman los vectores **AL** y **BL** con el eje real positivo, respectivamente. Estas interpretaciones geométricas se muestran en la Figura 5.2.1(b).

Las interpretaciones geométricas resultan muy útiles para comprender cómo afectan las posiciones de los polos y de los ceros al módulo y la fase de la transformada de Fourier. Suponga que un cero, por ejemplo z_k, y un polo, por ejemplo p_k, se encuentran en la circunferencia unidad, como se muestra en la Figura 5.2.2. Observe que en $\omega = \sphericalangle z_k$, $V_k(\omega)$ y, en consecuencia, $|H(\omega)|$ son cero. Del mismo modo, en $\omega = \sphericalangle p_k$, la longitud $U_k(\omega)$ se hace cero y, por tanto, $|H(\omega)|$ se hace infinito. Evidentemente, la evaluación de la fase en estos casos no es importante.

Ahora podemos ver fácilmente que la presencia de un cero cerca de la circunferencia unidad hace que el módulo de la respuesta en frecuencia, en frecuencias que corresponden a puntos de la circunferencia unidad próximos a dicho punto, sea pequeño. Por el contrario, la presencia de un polo en las proximidades de la circunferencia unidad hace que el módulo de la respuesta en frecuencia sea más grande en frecuencias próximas a dicho punto. Luego los polos tienen el efecto opuesto al de los ceros. Además, colocar un cero cerca de un polo cancela el efecto del polo, y viceversa. Esto se puede ver también en la Ecuación (5.2.12), ya que si $z_k = p_k$, los términos $e^{j\omega} - z_k$ y $e^{j\omega} - p_k$ se cancelan. Obviamente, la presencia de polos y ceros en una transformada da lugar a una amplia variedad de formas de $|H(\omega)|$ y $\sphericalangle H(\omega)$. Esta observación es muy importante en el diseño de filtros digitales. Vamos a terminar con un ejemplo que ilustra estos conceptos.

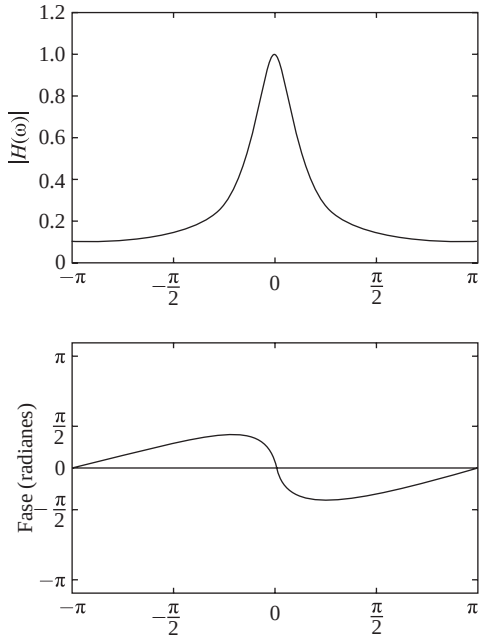


Figura 5.2.3. Módulo y fase del sistema con $H(z) = 1/(1-0.8z^{-1})$.

EJEMPLO 5.2.2

Halle la respuesta en frecuencia del sistema descrito por la función

$$H(z) = \frac{1}{1-0.8z^{-1}} = \frac{z}{z-0.8}$$

Solución Evidentemente, $H(z)$ tiene un cero en $z=0$ y un polo en $p=0.8$. Por tanto, la respuesta en frecuencia del sistema es

$$H(\omega) = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-0.8}$$

El módulo de la respuesta es

$$|H(\omega)| = \frac{|e^{j\omega}|}{|e^{j\omega}-0.8|} = \frac{1}{\sqrt{1.64-1.6\cos\omega}}$$

y la fase es

$$\theta(\omega) = \omega - \tan^{-1}\frac{\operatorname{sen}\omega}{\cos\omega - 0.8}$$

El módulo y la fase de la respuesta se ilustran en la Figura 5.2.3. Observe que el pico del módulo se produce en $\omega = 0$, el punto sobre la cirunferencia unidad más próximo al polo ubicado en 0.8.

Si el módulo de la respuesta de (5.2.17) se expresa en decibelios,

$$|H(\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|b_0| + 20\sum_{k=1}^{M}\log_{10}V_k(\omega) - 20\sum_{k=1}^{N}\log_{10}U_k(\omega) \tag{5.2.23}$$

De esta manera, el módulo de la respuesta se expresa como una suma de los factores del módulo de $|H(\omega)|$.

5.3 Espectros y funciones de correlación en la salida de los sistemas LTI

En esta sección vamos a deducir las relaciones espectrales entre las señales de entrada y de salida en los sistemas LTI. La Sección 5.3.1 describe las relaciones para los espectros de densidad de energía de señales deterministas de entrada y de salida. La Sección 5.3.2 se centra en las relaciones de las densidades espectrales de potencia de señales aleatorias de entrada y de salida.

5.3.1 Espectros y funciones de correlación de entrada–salida

En la Sección 2.6.4 se han desarrollado varias relaciones de correlación entre las secuencias de entrada y de salida de un sistema LTI. Específicamente, hemos obtenido las ecuaciones:

$$r_{yy}(m) = r_{hh}(m) * r_{xx}(m) \tag{5.3.1}$$

$$r_{yx}(m) = h(m) * r_{xx}(m) \tag{5.3.2}$$

donde $r_{xx}(m)$ es la autocorrelación de la señal de entrada $\{x(n)\}$, $r_{yy}(m)$ es la autocorrelación de la salida $\{y(n)\}$, $r_{hh}(m)$ es la autocorrelación de la respuesta al impulso $\{h(n)\}$ y $r_{yx}(m)$ es la correlación cruzada entre las señales de salida y de entrada. Como en las Ecuaciones (5.3.1) y (5.3.2) se aplica la operación de convolución, la transformada z de estas ecuaciones es

$$\begin{aligned} S_{yy}(z) &= S_{hh}(z)S_{xx}(z) \\ &= H(z)H(z^{-1})S_{xx}(z) \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

$$S_{yx}(z) = H(z)S_{xx}(z) \tag{5.3.4}$$

Si sustituimos $z = e^{j\omega}$ en (5.3.4), obtenemos

$$\begin{aligned} S_{yx}(\omega) &= H(\omega)S_{xx}(\omega) \\ &= H(\omega)|X(\omega)|^2 \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

donde $S_{yx}(\omega)$ es la densidad espectral de energía cruzada de $\{y(n)\}$ y $\{x(n)\}$. Del mismo modo, calculando $S_{yy}(z)$ sobre la circunferencia unidad obtenemos la densidad espectral de energía de la señal salida como

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega) \tag{5.3.6}$$

donde $S_{xx}(\omega)$ es la densidad espectral de energía de la señal de entrada.

Dado que $r_{yy}(m)$ y $S_{yy}(\omega)$ son un par de transformadas de Fourier, se deduce que

$$r_{yy}(m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{yy}(\omega)e^{j\omega m}d\omega \tag{5.3.7}$$

La energía total de la señal de salida es simplemente

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{yy}(\omega)d\omega = r_{yy}(0) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^2\, S_{xx}(\omega)d\omega \end{aligned} \tag{5.3.8}$$

El resultado de (5.3.8) puede utilizarse para demostrar fácilmente que $E_y \geq 0$.

Por último, observe que si la señal de entrada tiene un espectro plano [es decir, $S_{xx}(\omega) = S_x =$ constante para $\pi \leq \omega \leq -\pi$], la Ecuación (5.3.5) se reduce a

$$S_{yx}(\omega) = H(\omega)S_x \tag{5.3.9}$$

donde S_x es el valor constante del espectro. Por tanto,

$$H(\omega) = \frac{1}{S_x} S_{yx}(\omega) \tag{5.3.10}$$

o, lo que es equivalente,

$$h(n) = \frac{1}{S_x}\, r_{yx}(m) \tag{5.3.11}$$

La relación dada en (5.3.11) implica que $h(n)$ puede determinarse excitando la entrada del sistema con una señal $\{x(n)\}$ cuyo espectro sea plano, y calculando la correlación cruzada de la entrada con la salida del sistema. Este método resulta útil para medir la respuesta al impulso de un sistema desconocido.

5.3.2 Funciones de correlación y espectros de potencia de señales de entrada aleatorias

Este desarrollo es paralelo a las deducciones realizadas en la Sección 5.3.1, con la excepción de que ahora vamos a emplear medios estadísticos y la autocorrelación de las señales de entrada y de salida de un sistema LTI.

Consideremos un sistema discreto, lineal e invariante en el tiempo con una respuesta al impulso unitario $\{h(n)\}$ y una respuesta en frecuencia $H(f)$. En este desarrollo, vamos a suponer que $\{h(n)\}$ es real. Sea $x(n)$ una realización de un proceso aleatorio estacionario $X(n)$ que excita el sistema y sea $y(n)$ la respuesta del sistema a $x(n)$.

A partir de la convolución que relaciona la salida y la entrada, tenemos

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \tag{5.3.12}$$

Puesto que $x(n)$ es una señal de entrada aleatoria, la salida también será una señal aleatoria. En otras palabras, para cada realización $x(n)$ del proceso $X(n)$, existe la correspondiente realización $y(n)$ del proceso aleatorio de salida $Y(n)$. Deseamos relacionar las características estadísticas del proceso aleatorio de salida $Y(n)$ con las características del proceso de entrada y las del sistema.

El valor esperado de la salida $y(n)$ es

$$\begin{aligned} m_y \equiv E[y(n)] &= E[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)E[x(n-k)] \\ m_y &= m_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \end{aligned} \tag{5.3.13}$$

A partir de la relación de la transformada de Fourier

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} \tag{5.3.14}$$

tenemos

$$H(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \tag{5.3.15}$$

que es la ganancia en continua del sistema. La relación dada en (5.3.15) nos permite expresar el valor medio de (5.3.13) como

$$m_y = m_x H(0) \tag{5.3.16}$$

La autocorrelación del proceso aleatorio de salida se define como

$$\begin{aligned}
\gamma_{yy}(m) &= E[y^*(n)y(n+m)] \\
&= E\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x^*(n-k) \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(j)x(n+m-j)\right] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(k)h(j)E[x^*(n-k)x(n+m-j)] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(k)h(j)\gamma_{xx}(k-j+m)
\end{aligned} \tag{5.3.17}$$

Ésta es la forma general de la autocorrelación de la salida en función de la autocorrelación de la entrada y de la respuesta al impulso del sistema. Una forma especial de la Ecuación (5.3.17) se obtiene cuando el proceso aleatorio de entrada es ruido blanco, es decir, cuando $m_x = 0$ y

$$\gamma_{xx}(m) = \sigma_x^2 \delta(m) \tag{5.3.18}$$

donde $\sigma_x^2 \equiv \gamma_{xx}(0)$ es la potencia de la señal de entrada. Así, (5.3.17) se reduce a

$$\gamma_{yy}(m) = \sigma_x^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)h(k+m) \tag{5.3.19}$$

Para esta condición, el proceso de salida tiene una potencia media igual a

$$\gamma_{yy}(0) = \sigma_x^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} h^2(n) = \sigma_x^2 \int_{-1/2}^{1/2} |H(f)|^2 df \tag{5.3.20}$$

donde hemos aplicado el teorema de Parseval.

La relación dada por (5.3.17) puede transformarse en el dominio de la frecuencia determinando el espectro de densidad de potencia de $\gamma_{yy}(m)$. Así, tenemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{yy}(\omega) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_{yy}(m)e^{-j\omega m} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k)h(l)\gamma_{xx}(k-l+m)\right] e^{-j\omega m} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k)h(l) \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}(k-l+m)e^{-j\omega m}\right] \\
&= \Gamma_{xx}(f) \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j\omega k}\right] \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)e^{-j\omega l}\right] \\
&= |H(\omega)|^2 \Gamma_{xx}(\omega)
\end{aligned} \tag{5.3.21}$$

Ésta es la relación deseada para el espectro de densidad de potencia del proceso de salida en función del espectro de densidad de potencia del proceso de entrada y la respuesta en frecuencia del sistema.

La expresión equivalente para sistemas continuos en el tiempo con señales de entrada aleatorias es

$$\Gamma_{yy}(F) = |H(F)|^2 \Gamma_{xx}(F) \tag{5.3.22}$$

donde las densidades espectrales de potencia $\Gamma_{yy}(F)$ y $\Gamma_{xx}(F)$ son las transformadas de Fourier de las funciones de autocorrelación $\gamma_{yy}(\tau)$ y $\gamma_{xx}(\tau)$, respectivamente, y donde $H(F)$ es la respuesta en frecuencia del sistema, la cual está relacionada con la respuesta al impulso mediante la transformada de Fourier, esto es,

$$H(F) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi Ft}\, dt \tag{5.3.23}$$

Como ejercicio final, vamos a determinar la correlación cruzada de la salida $y(n)$ con la señal de entrada $x(n)$. Si multiplicamos ambos lados de la Ecuación (5.3.12) por $x^*(n-m)$ y tomamos el valor esperado, obtenemos

$$\begin{aligned} E[y(n)x^*(n-m)] &= E\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x^*(n-m)x(n-k)\right] \\ \gamma_{yx}(m) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)E[x^*(n-m)x(n-k)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\gamma_{xx}(m-k) \end{aligned} \tag{5.3.24}$$

Puesto que la expresión (5.3.24) tiene la forma de una convolución, la expresión equivalente en el dominio de la frecuencia es

$$\Gamma_{yx}(\omega) = H(\omega)\Gamma_{xx}(\omega) \tag{5.3.25}$$

En el caso especial en el que $x(n)$ es ruido blanco, la Ecuación (5.3.25) se reduce a

$$\Gamma_{yx}(\omega) = \sigma_x^2 H(\omega) \tag{5.3.26}$$

donde σ_x^2 es la potencia de ruido de entrada. Este resultado quiere decir que un sistema desconocido con una respuesta en frecuencia $H(\omega)$ puede identificarse excitando la entrada con ruido blanco, calculando la correlación cruzada de la señal de entrada con la señal de salida para obtener $\gamma_{yx}(m)$ y, hallando, por último, la transformada de Fourier de $\gamma_{yx}(m)$. El resultado de estos cálculos es proporcional a $H(\omega)$.

5.4 Sistemas LTI como filtros selectivos de frecuencia

El término *filtro* se utiliza habitualmente para describir un dispositivo que discrimina, de acuerdo con algún atributo de los objetos aplicados a su entrada, lo que pasa a su través. Por ejemplo, un filtro de aire deja pasar el aire e impide el paso a las partículas de polvo presentes en el aire. Un filtro de aceite realiza una función similar, con la diferencia de que es el aceite la sustancia que puede pasar a través del filtro, recolectándose las partículas de suciedad en la entrada del filtro y evitándose que pasen a través del mismo. En fotografía, a menudo se emplean filtros ultravioletas para impedir que la luz ultravioleta, que está presente en la luz solar y que no forma parte de la luz visible, pase a su través y afecte a la composición química de la película.

Como hemos mencionado en la sección anterior, un sistema lineal e invariante en el tiempo también realiza un tipo de discriminaición o filtrado entre las distintas componentes de frecuencia en su entrada. La naturaleza

de esta acción de filtrado está determinada por la respuesta en frecuencia $H(\omega)$, que a su vez depende de la elección de los parámetros del sistema (por ejemplo, de los coeficientes $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ de la ecuación en diferencias que caracteriza al sistema). Por tanto, seleccionando adecuadamente los coeficientes, podemos diseñar filtros selectivos de frecuencia que dejan pasar señales con componentes de frecuencia en determinadas bandas mientras que atenúan señales que contienen frecuencias en otras bandas.

En general, un sistema lineal invariante en el tiempo modifica el espectro de la señal de entrada $X(\omega)$ de acuerdo con su respuesta en frecuencia $H(\omega)$, para proporcionar una señal de salida de espectro $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$. De alguna manera, $H(\omega)$ actúa como una *función ponderada* o una *función de conformación espectral* para las diferentes componentes de frecuencia de la señal de entrada. En este contexto, cualquier sistema lineal invariante en el tiempo puede considerarse como un filtro de conformación de frecuencias, incluso aunque no necesariamente bloquee algunas o todas las componentes de frecuencia. Por tanto, los términos "sistema lineal invariante en el tiempo" y "filtro" son sinónimos y a menudo se emplean de forma indistinta.

Utilizamos el término *filtro* para describir un sistema lineal invariante en el tiempo empleado para llevar a cabo una operación de conformación espectral o un filtrado selectivo. El filtrado se emplea de formas muy variadas en el procesamiento digital de señales; por ejemplo, para eliminar el ruido indeseado que pueda existir en las señales deseadas, para conformación espectral en la ecualización de canales de comunicación, en la detección de señales de radar, sonar y de comunicaciones y para realizar el análisis espectral de señales, etc.

5.4.1 Características del filtro ideal

Normalmente, los filtros se clasifican de acuerdo con sus características en el dominio de la frecuencia como filtros paso bajo, paso alto, paso banda, banda eliminada y paso todo. Las características ideales del módulo de la respuesta de estos tipos de filtros se muestran en la Figura 5.4.1. Como puede ver, estos filtros ideales presentan una ganancia constante (tomada normalmente como ganancia unidad) en la banda de paso y ganancia cero en la banda eliminada.

Otra característica de un filtro ideal es que presenta una respuesta en fase lineal. Para demostrar este punto, supongamos que se pasa una señal $\{x(n)\}$ con sus componentes confinadas en el rango de frecuencias $\omega_1 < \omega < \omega_2$ a través de un filtro cuya respuesta en frecuencia es

$$H(\omega) = \begin{cases} Ce^{-j\omega n_0}, & \omega_1 < \omega < \omega_2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{5.4.1}$$

donde C y n_0 son constantes. La señal en la salida del filtro tiene el espectro

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= X(\omega)H(\omega) \\ &= CX(\omega)e^{-j\omega n_0}, \qquad \omega_1 < \omega < \omega_2 \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

Aplicando las propiedades de cambio de escala y de desplazamiento temporal de la transformada de Fourier, obtenemos la salida en el dominio del tiempo

$$y(n) = Cx(n - n_0) \tag{5.4.3}$$

Por tanto, la salida del filtro es simplemente una versión retardada con la amplitud escalada de la señal de entrada. Normalmente, un retardo puro es tolerable y no se considera como una distorsión de la señal. Asimismo, tampoco se considera que el cambio de escala de la amplitud sea una distorsión. Por tanto, los filtros ideales presentan una característica de fase en su banda de paso, que es

$$\Theta(\omega) = -\omega n_0 \tag{5.4.4}$$

La derivada de la fase con respecto a la frecuencia tiene unidades de retardo. Por tanto, podemos definir el retardo de la señal como una función de la frecuencia de la siguiente forma

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\Theta(\omega)}{d\omega} \tag{5.4.5}$$

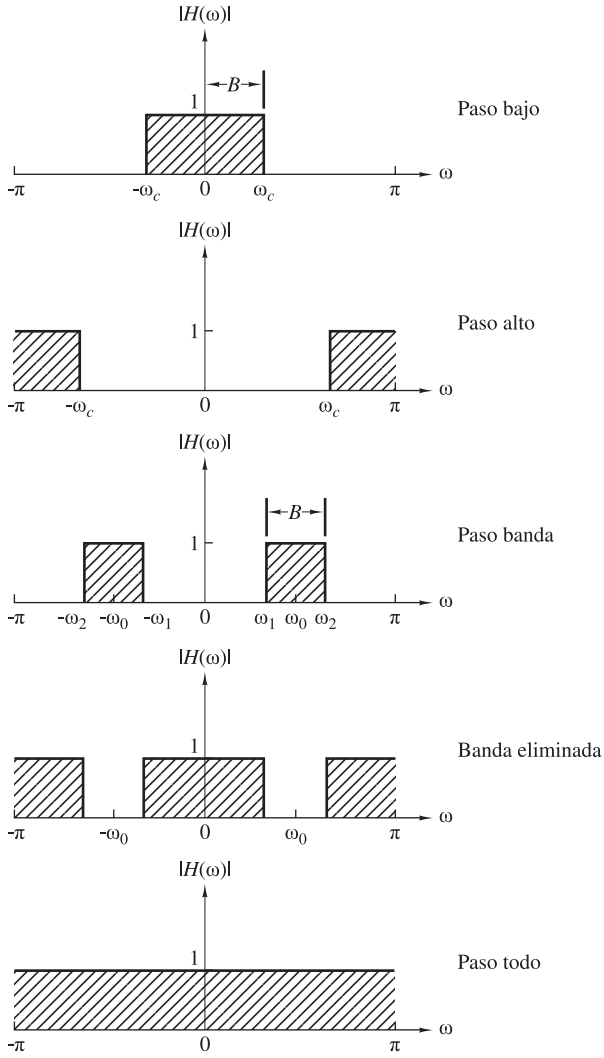


Figura 5.4.1. Módulo de las respuestas de algunos filtros discretos en el tiempo y selectivos en frecuencia.

Se suele decir que $\tau_g(\omega)$ es el *retardo de envolvente* o *retardo de grupo* del filtro. Interpretamos $\tau_g(\omega)$ como el retardo temporal que una componente de señal de frecuencia ω sufre al pasar de la entrada a la salida del sistema. Observe que cuando $\Theta(\omega)$ es lineal como en (5.4.4), $\tau_g(\omega) = n_0 =$ constante. En este caso, todas las componentes de frecuencia de la señal de entrada sufren el mismo retardo de tiempo.

En resumen, los filtros ideales tienen módulo constante y fase lineal en su banda de paso. En todos los casos, dichos filtros no se pueden implementar físicamente, pero sirven como idealización matemática de los filtros prácticos. Por ejemplo, el filtro paso bajo ideal tiene una respuesta al impulso

$$h_{lp}(n) = \frac{\operatorname{sen} \omega_c \pi n}{\pi n}, \qquad -\infty < n < \infty \tag{5.4.6}$$

Observe que este filtro no es causal ni absolutamente sumable y, por tanto, es inestable. En consecuencia, este filtro ideal no puede implementarse físicamente. No obstante, las características de su respuesta en frecuencia

pueden aproximarse enormemente mediante filtros prácticos implementables en la práctica, como se verá en el Capítulo 10.

A continuación vamos a abordar el diseño de algunos filtros digitales simples ubicando los polos y los ceros en el plano z. Ya hemos descrito cómo afecta la posición de los polos y los ceros a las características de la respuesta en frecuencia del sistema. En particular, en la Sección 5.2.2 hemos presentado un método gráfico para calcular la respuesta en frecuencia a partir del diagrama de polos y ceros. Este mismo método puede utilizarse para diseñar una serie de filtros digitales sencillos pero importantes con respuestas en frecuencia adecuadas.

El principio básico subyacente al método de colocación de los polos y los ceros es el de ubicar los polos cerca de los puntos de la circunferencia unidad correspondientes a las frecuencias que se desean acentuar y los ceros cerca de las frecuencias que se desean atenuar. Además, deben imponerse las siguientes restricciones:

1. Todos los polos tienen que colocarse dentro de la circunferencia unidad con el fin de que el filtro sea estable. Sin embargo, los ceros pueden colocarse en cualquier punto del plano z.
2. Todos los ceros y polos complejos tiene que aparecer como pares complejos conjugados con el fin de que los coeficientes del filtro sean reales.

Recordemos que para un patrón de polos y ceros determinado, la función del sistema $H(z)$ se puede expresar como

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = b_0 \frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - p_k z^{-1})} \tag{5.4.7}$$

donde b_0 es una ganancia constante seleccionada para normalizar la respuesta en frecuencia en una frecuencia especificada. Es decir, b_0 se elige de manera que

$$|H(\omega_0)| = 1 \tag{5.4.8}$$

donde ω_0 es una frecuencia de la banda de paso del filtro. Normalmente, N se selecciona para ser igual o mayor que M, por lo que el filtro presenta más polos no triviales que ceros.

En la siguiente sección vamos a aplicar el método de la colocación de los polos y ceros al diseño de algunos filtros simples paso bajo, paso alto y paso banda, circuitos resonadores digitales y filtros peine. El procedimiento de diseño se hace más simple si se emplea, de forma interactiva, una computadora digital con un terminal gráfico.

5.4.2 Filtros paso bajo, paso alto y paso banda

En el diseño de filtros digitales paso bajo, los polos deben colocarse en las proximidades de la circunferencia unidad en puntos correspondientes a frecuencias bajas (cerca de $\omega = 0$) y los ceros deben colocarse cerca o sobre la circunferencia unidad en puntos correspondientes a frecuencias altas (cerca de $\omega = \pi$). En el caso de los filtros paso alto, estas condiciones serán las inversas.

La Figura 5.4.2 ilustra la colocación de los polos y los ceros de tres filtros paso bajo y tres filtros paso alto. El módulo y la fase de las respuestas para el filtro de un solo polo con la función de sistema

$$H_1(z) = \frac{1-a}{1-az^{-1}} \tag{5.4.9}$$

se muestran en la Figura 5.4.3 para $a = 0.9$. La ganancia G se ha seleccionado como $1-a$, por lo que el filtro tiene ganancia unidad en $\omega = 0$. La ganancia de este filtro a frecuencias altas es relativamente pequeña.

La adición de un cero en $z = -1$ atenúa aún más la respuesta del filtro en las frecuencias altas. Esto lleva a un filtro con una función del sistema

$$H_2(z) = \frac{1-a}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-az^{-1}} \tag{5.4.10}$$

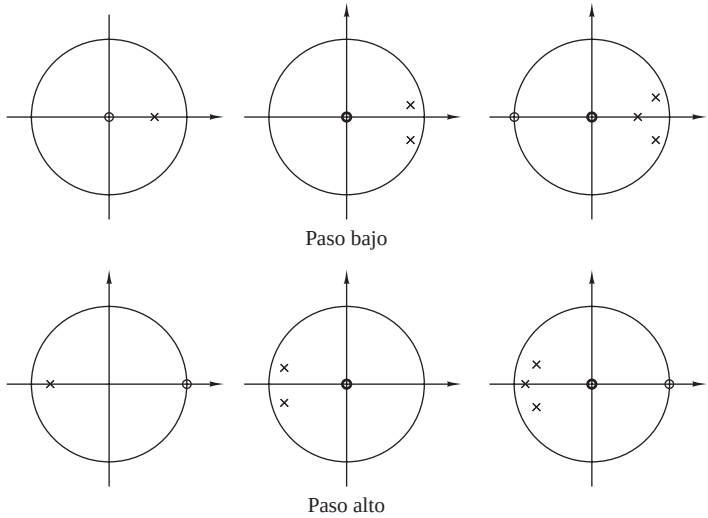


Figura 5.4.2. Patrones de polos y ceros de varios filtros paso bajo y paso alto.

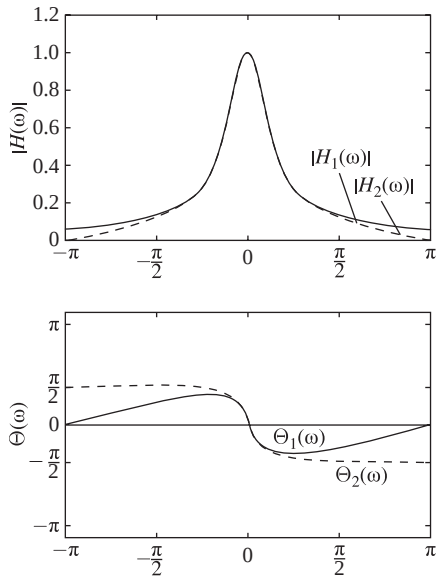


Figura 5.4.3. Módulo y fase de la respuesta de (1) un filtro de un solo polo y (2) de un filtro de un polo y un cero; $H_1(z) = (1-a)/(1-az^{-1})$, $H_2(z) = [(1-a)/2][(1+z^{-1})/(1-az^{-1})]$ y $a = 0.9$.

y la respuesta en frecuencia que también se muestra en la Figura 5.4.3. En este caso, el módulo de $H_2(\omega)$ tiende a cero en $\omega = \pi$.

Del mismo modo, podemos obtener filtros paso alto sencillos reflejando las posiciones de los polos y los ceros del filtro paso bajo alrededor del eje imaginario en el plano z. Así, obtenemos la función de sistema

$$H_3(z) = \frac{1-a}{2}\frac{1-z^{-1}}{1+az^{-1}} \tag{5.4.11}$$

que tiene la respuesta en frecuencia mostrada en la Figura 5.4.4 para $a = 0.9$.

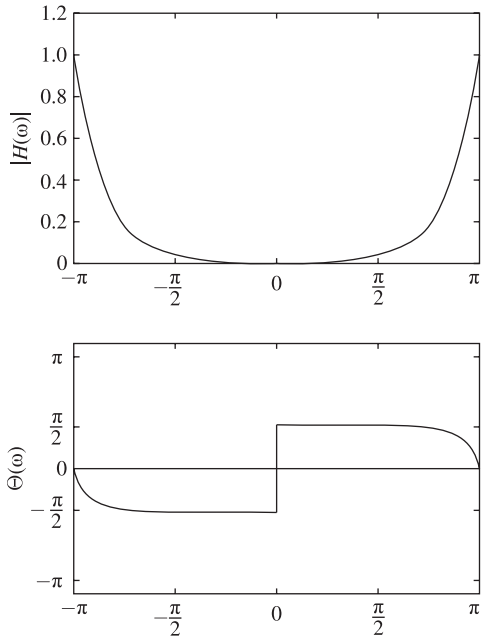


Figura 5.4.4. Módulo y fase de la respuesta de un filtro paso alto simple; $H(z) = [(1-a)/2][(1-z^{-1})/(1+az^{-1})]$ con $a = 0.9$.

EJEMPLO 5.4.1

Un filtro paso bajo de dos polos tiene la función de sistema

$$H(z) = \frac{b_0}{(1-pz^{-1})^2}$$

Determine los valores de b_0 y p tal que la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ satisfaga las condiciones

$$H(0) = 1 \quad \text{y} \quad \left|H\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|^2 = \frac{1}{2}$$

Solución En $\omega = 0$, tenemos

$$H(0) = \frac{b_0}{(1-p)^2} = 1$$

Por tanto,

$$b_0 = (1-p)^2$$

En $\omega = \pi/4$,

$$\begin{aligned} H\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{(1-p)^2}{(1-pe^{-j\pi/4})^2} \\ &= \frac{(1-p)^2}{(1-p\cos(\pi/4)+jp\,\text{sen}(\pi/4))^2} \\ &= \frac{(1-p)^2}{(1-p/\sqrt{2}+jp/\sqrt{2})^2} \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{(1-p)^4}{[(1-p/\sqrt{2})^2+p^2/2]^2}=\frac{1}{2}$$

o, lo que es equivalente,

$$\sqrt{2}(1-p)^2=1+p^2-\sqrt{2p}$$

El valor de $p=0.32$ satisface esta ecuación. Por tanto, la función del sistema para el filtro deseado es

$$H(z)=\frac{0.46}{(1-0.32z^{-1})^2}$$

Los mismos principios se pueden aplicar al diseño de filtros paso banda. Básicamente, el filtro paso banda debe contener uno o más pares de polos complejos conjugados próximos a la circunferencia unidad, en las vecindades de la banda de frecuencias que define la banda de paso del filtro. El siguiente ejemplo ilustra las ideas básicas.

EJEMPLO 5.4.2

Diseñe un filtro paso banda de dos polos que tenga el centro de la banda de paso en $\omega=\pi/2$, cuya respuesta en frecuencia en $\omega=0$ y $\omega=\pi$ sea cero, y cuyo módulo sea igual a $1/\sqrt{2}$ en $\omega=4\pi/9$.

Solución. Evidentemente, el filtro tiene que tener los polos en

$$p_{1,2}=re^{\pm j\pi/2}$$

y ceros en $z=1$ y $z=-1$. Por tanto, la función del sistema es

$$H(z)=G\frac{(z-1)(z+1)}{(z-jr)(z+jr)}=G\frac{z^2-1}{z^2+r^2}$$

El factor de ganancia se determina evaluando la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ del filtro en $\omega=\pi/2$. Así, tenemos

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right)=G\frac{2}{1-r^2}=1$$

$$G=\frac{1-r^2}{2}$$

El valor de r se determina evaluando $H(\omega)$ en $\omega=4\pi/9$. Tenemos entonces

$$\left|H\left(\frac{4\pi}{9}\right)\right|^2=\frac{(1-r^2)^2}{4}\frac{2-2\cos(8\pi/9)}{1+r^4+2r^2\cos(8\pi/9)}=\frac{1}{2}$$

o, lo que es equivalente,

$$1.94(1-r^2)^2=1-1.88r^2+r^4$$

El valor $r^2=0.7$ satisface esta ecuación. Por tanto, la función del sistema para el filtro deseado es

$$H(z)=0.15\frac{1-z^{-2}}{1+0.7z^{-2}}$$

Su respuesta en frecuencia se ilustra en la Figura 5.4.5.

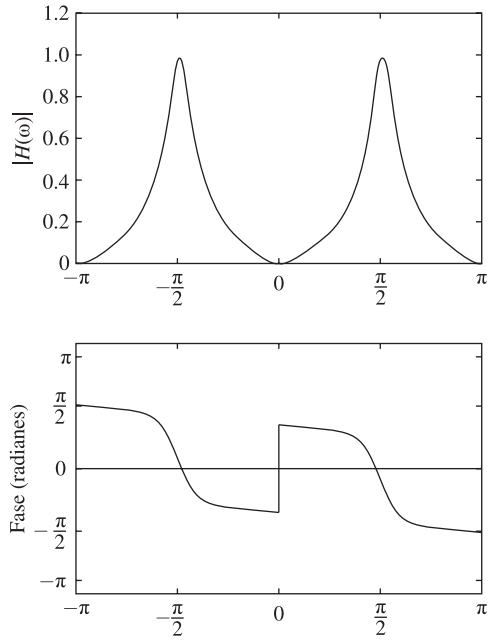


Figura 5.4.5. Módulo y fase del filtro paso banda simple del Ejemplo 5.4.2; $H(z) = 0.15[(1 - z^{-2})/(1 + 0.7z^{-2})]$.

Es preciso resaltar que el propósito principal de la metodología anterior para diseñar filtros digitales simples mediante la colocación de los polos y los ceros es mostrar la influencia que los polos y ceros tienen en la respuesta en frecuencia de los sistemas. La metodología no pretende ser el mejor método de diseño de filtros digitales con bandas de paso y bandas eliminadas bien especificadas. En el Capítulo 10 se abordan métodos sistemáticos para el diseño de filtros digitales complejos para aplicaciones prácticas.

Transformación de un filtro paso bajo simple en un filtro paso alto. Suponga que hemos diseñado un filtro paso bajo prototipo con una respuesta al impulso $h_{\text{lp}}(n)$. Utilizando la propiedad de traslación de frecuencia de la transformada de Fourier, es posible convertir el filtro prototipo en un filtro paso banda o en un filtro paso alto. Las transformaciones en frecuencia para convertir un filtro paso bajo prototipo en un filtro de otro tipo se describen en detalle en la Sección 10.3. En esta sección vamos a presentar una transformación en frecuencia simple para convertir un filtro paso bajo en un filtro paso alto, y viceversa.

Si $h_{\text{lp}}(n)$ expresa la respuesta al impulso de un filtro paso bajo con una respuesta en frecuencia $H_{\text{lp}}(\omega)$, podemos obtener un filtro paso alto trasladando $H_{\text{lp}}(\omega)$ π radianes (es decir, reemplazando ω por $\omega - \pi$). Por tanto,

$$H_{\text{hp}}(\omega) = H_{\text{lp}}(\omega - \pi) \tag{5.4.12}$$

donde $H_{\text{hp}}(\omega)$ es la respuesta en frecuencia del filtro paso alto. Puesto que una traslación en frecuencia de π radianes es equivalente a multiplicar la respuesta al impulso $h_{\text{lp}}(n)$ por $e^{j\pi n}$, la respuesta al impulso del filtro paso alto es

$$h_{\text{hp}}(n) = (e^{j\pi})^n h_{\text{lp}}(n) = (-1)^n h_{\text{lp}}(n) \tag{5.4.13}$$

Por tanto, la respuesta al impulso del filtro paso alto se obtiene simplemente a partir de la respuesta al impulso del filtro paso bajo cambiando los signos de las muestras impares de $h_{\text{lp}}(n)$. A la inversa,

$$h_{\text{lp}}(n) = (-1)^n h_{\text{hp}}(n) \tag{5.4.14}$$

Si el filtro paso bajo se describe mediante la ecuación en diferencias

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \tag{5.4.15}$$

su respuesta en frecuencia es

$$H_{\text{lp}}(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-j\omega k}} \tag{5.4.16}$$

Si ahora reemplazamos ω por $\omega - \pi$, en la Ecuación (5.4.16), entonces

$$H_{\text{hp}}(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M} (-1)^k b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} (-1)^k a_k e^{-j\omega k}} \tag{5.4.17}$$

que se corresponde con la ecuación en diferencias

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} (-1)^k a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} (-1)^k b_k x(n-k) \tag{5.4.18}$$

EJEMPLO 5.4.3

Convierta el filtro paso bajo descrito por la ecuación en diferencias

$$y(n) = 0.9y(n-1) + 0.1x(n)$$

en un filtro paso alto.

Solución. La ecuación en diferencias para el filtro paso alto según (5.4.18) es

$$y(n) = -0.9y(n-1) + 0.1x(n)$$

y su respuesta en frecuencia es

$$H_{\text{hp}}(\omega) = \frac{0.1}{1 + 0.9e^{-j\omega}}$$

El lector puede verificar que $H_{\text{hp}}(\omega)$ corresponde a un filtro paso alto.

5.4.3 Resonadores digitales

Un *resonador digital* es un filtro paso banda especial de dos polos con el par de polos complejos conjugados posicionados en las proximidades de la circunferencia unidad, como se muestra en la Figura 5.4.6(a). El módulo de la respuesta en frecuencia del filtro se muestra en la Figura 5.4.6(b). El término resonador hace referencia al hecho de que el módulo de la respuesta del filtro es grande (resuena) en las proximidades de la posición del polo. La posición angular del polo determina la frecuencia de resonancia del filtro. Los resonadores digitales resultan útiles en muchas aplicaciones, entre las que se incluyen el filtrado paso banda y la generación de señales de voz.

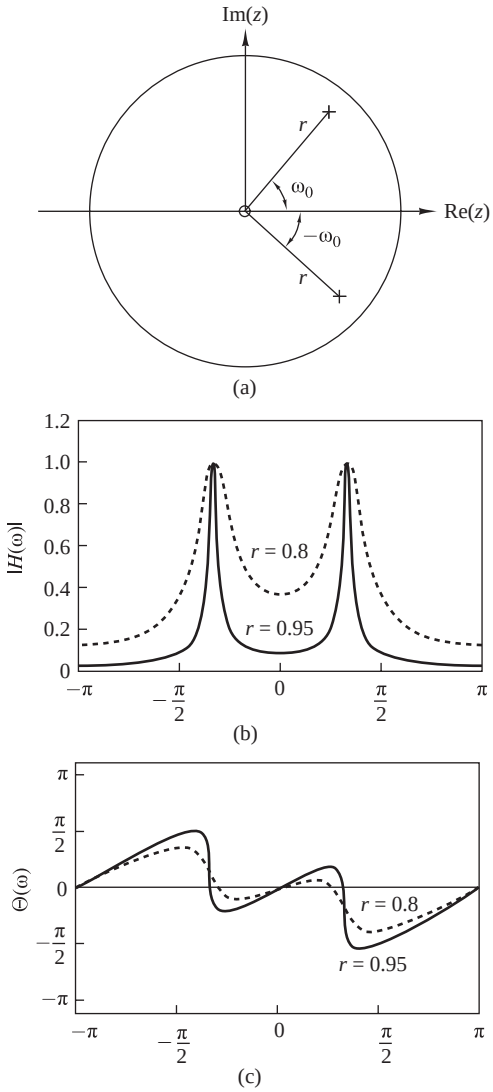


Figura 5.4.6. (a) Patrón de polos y ceros. (b) Módulo y fase de la respuesta de un resonador digital con (1) $r = 0.8$ y (2) $r = 0.95$.

En el diseño de un resonador digital con un pico de resonancia en o próximo a $\omega = \omega_0$, seleccionamos los polos complejos conjugados en

$$p_{1,2} = re^{\pm j\omega_0}, \qquad 0 < r < 1$$

Además, podemos seleccionar hasta dos ceros. Aunque esto supone muchas opciones posibles, hay dos casos que tienen un interés especial. Una de ellas consiste en colocar los ceros en el origen. La otra opción consiste en colocar un cero en $z = 1$ y un cero en $z = -1$. Esta opción elimina por completo la respuesta del filtro en las frecuencias $\omega = 0$ y $\omega = \pi$, y resulta útil en muchas aplicaciones prácticas.

La función del sistema del resonador digital con ceros en el origen es

$$H(z) = \frac{b_0}{(1 - re^{j\omega_0}z^{-1})(1 - re^{-j\omega_0}z^{-1})} \tag{5.4.19}$$

$$H(z) = \frac{b_0}{1-(2r\cos\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}} \tag{5.4.20}$$

Puesto que $|H(\omega)|$ tiene su pico en o en las proximidades de $\omega = \omega_0$, seleccionamos la ganancia b_0 de modo que $|H(\omega_0)| = 1$. A partir de (5.4.19), obtenemos

$$\begin{aligned} H(\omega_0) &= \frac{b_0}{(1-re^{j\omega_0}e^{-j\omega_0})(1-re^{-j\omega_0}e^{-j\omega_0})} \\ &= \frac{b_0}{(1-r)(1-re^{-j2\omega_0})} \end{aligned} \tag{5.4.21}$$

y, por tanto,

$$|H(\omega_0)| = \frac{b_0}{(1-r)\sqrt{1+r^2-2r\cos 2\omega_0}} = 1$$

Así, el factor de normalización deseado es

$$b_0 = (1-r)\sqrt{1+r^2-2r\cos 2\omega_0} \tag{5.4.22}$$

La respuesta en frecuencia del resonador definido por (5.4.19) puede expresarse como sigue

$$\begin{aligned} |H(\omega)| &= \frac{b_0}{U_1(\omega)U_2(\omega)} \\ \Theta(\omega) &= 2\omega - \Phi_1(\omega) - \Phi_2(\omega) \end{aligned} \tag{5.4.23}$$

donde $U_1(\omega)$ y $U_2(\omega)$ son los módulos de los vectores que van desde p_1 y p_2 al punto ω situado en la circunferencia unidad y $\Phi_1(\omega)$ y $\Phi_2(\omega)$ son los correspondientes ángulos de dichos vectores. Los módulos $U_1(\omega)$ y $U_2(\omega)$ se pueden expresar así

$$\begin{aligned} U_1(\omega) &= \sqrt{1+r^2-2r\cos(\omega_0-\omega)} \\ U_2(\omega) &= \sqrt{1+r^2-2r\cos(\omega_0+\omega)} \end{aligned} \tag{5.4.24}$$

Para cualquier valor de r, $U_1(\omega)$ toma su valor mínimo $(1-r)$ en $\omega = \omega_0$. El producto $U_1(\omega)U_2(\omega)$ alcanza un valor mínimo en la frecuencia

$$\omega_r = \cos^{-1}\left(\frac{1+r^2}{2r}\cos\omega_0\right) \tag{5.4.25}$$

que define de forma precisa la frecuencia de resonancia del filtro. Observe que cuando r es muy próximo a la unidad, $\omega_r \approx \omega_0$, que es la posición angular del polo. Fíjese también en que cuando r tiende a la unidad, el pico de resonancia se hace más abrupto porque $U_1(\omega)$ varía más rápidamente en tamaño relativo en las vecindades de ω_0. El ancho de banda a 3-dB $\Delta\omega$ del filtro proporciona una medida cuantitativa de lo abrupto que es el pico de resonancia del filtro. Para valores de r próximos a la unidad,

$$\Delta\omega \approx 2(1-r) \tag{5.4.26}$$

La Figura 5.4.6 ilustra el módulo y la fase de los resonadores digitales con $\omega_0 = \pi/3$, $r = 0.8$ y $\omega_0 = \pi/3$, $r = 0.95$. Observe que la fase de la respuesta adquiere su mayor tasa de variación cerca de la frecuencia de resonancia.

Si los ceros del resonador digital se colocan en $z = 1$ y $z = -1$, el resonador tiene la función de sistema

$$\begin{aligned} H(z) &= G\frac{(1-z^{-1})(1+z^{-1})}{(1-re^{j\omega_0}z^{-1})(1-re^{-j\omega_0}z^{-1})} \\ &= G\frac{1-z^{-2}}{1-(2r\cos\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}} \end{aligned} \tag{5.4.27}$$

y la respuesta en frecuencia es

$$H(\omega) = b_0\frac{1-e^{-j2\omega}}{[1-re^{j(\omega_0-\omega)}][1-re^{-j(\omega_0+\omega)}]} \tag{5.4.28}$$

Observe que los ceros en $z = \pm 1$ afectan tanto al módulo como a la fase de la respuesta del resonador. Por ejemplo, el módulo es

$$|H(\omega)| = b_0\frac{N(\omega)}{U_1(\omega)U_2(\omega)} \tag{5.4.29}$$

donde $N(\omega)$ se define como

$$N(\omega) = \sqrt{2(1-\cos 2\omega)}$$

Debido a la presencia del cero, la frecuencia de resonancia no es la dada por la Ecuación (5.4.25). También el ancho de banda del filtro se ve modificado. Aunque resulta bastante pesado calcular los valores exactos de estos dos parámetros, podemos calcular fácilmente la respuesta en frecuencia usando (5.4.28) y comparar el resultado con el caso anterior en que los ceros se encontraban en el origen.

La Figura 5.4.7 muestra el módulo y la fase para $\omega_0 = \pi/3$, $r = 0.8$ y $\omega_0 = \pi/3$, $r = 0.95$. Observe que este filtro tiene un ancho de banda más pequeño que el resonador con los ceros en el origen. Además, aparece un pequeño desplazamiento en la frecuencia de resonancia a causa de la presencia de los ceros.

5.4.4 Filtros de hendidura

Un filtro de hendidura es un filtro que contiene una o más hendiduras pronunciadas o, idealmente , nulos perfectos en su respuesta en frecuencia. La Figura 5.4.8 ilustra la respuesta en frecuencia de un filtro de hendidura con nulos en las frecuencias ω_0 y ω_1. Los filtros de hendidura resultan útiles en muchas aplicaciones en las que deben eliminarse componentes de frecuencia específicas. Por ejemplo, los sistemas de instrumentación y registro requieren que la frecuencia de la red eléctrica de 50 Hz y sus armónicos sean eliminados.

Para crear un nulo en la respuesta en frecuencia de un filtro en una frecuencia ω_0, simplemente introducimos un par de ceros complejos conjugados sobre la circunferencia unidad en un ángulo ω_0. Es decir,

$$z_{1,2} = e^{\pm j\omega_0}$$

Por tanto, la función del sistema para un filtro FIR de hendidura es

$$\begin{aligned} H(z) &= b_0(1-e^{j\omega_0}z^{-1})(1-e^{-j\omega_0}z^{-1}) \\ &= b_0(1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}) \end{aligned} \tag{5.4.30}$$

La Figura 5.4.9 muestra el módulo de la respuesta de un filtro de hendidura que tiene un nulo en $\omega = \pi/4$.

El problema con el filtro FIR de hendidura es que ésta tiene un ancho de banda relativamente grande, lo que significa que las restantes frecuencias que se encuentran alrededor del nulo deseado se verán severamente atenuadas. Para reducir el ancho de banda del nulo, podemos recurrir a un filtro FIR más grande y complejo

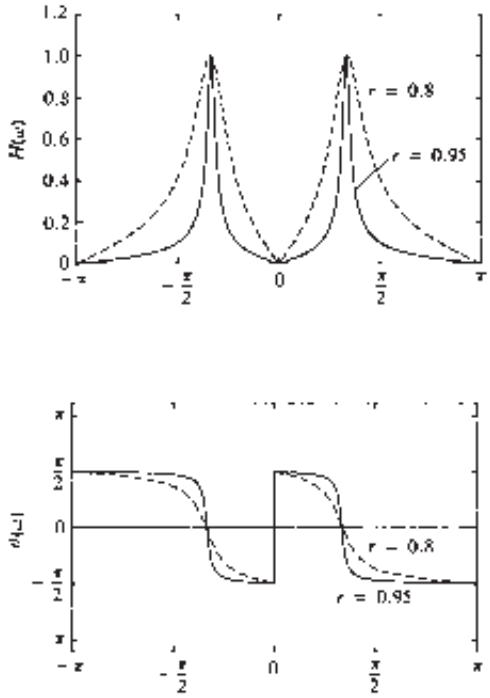


Figura 5.4.7. Módulo y fase de la respuesta del resonador digital con ceros en $\omega = 0$ y $\omega = \pi$ y (1) $r = 0.8$ y (2) $r = 0.95$.

siguiendo los criterios que se describen en el Capítulo 10. Alternativamente, podríamos, de manera *ad hoc*, intentar mejorar la respuesta en frecuencia introduciendo polos en la función del sistema.

Suponga que colocamos un par de polos complejos conjugados en

$$p_{1,2} = re^{\pm j\omega_0}$$

El efectos de los polos es el de introducir resonancia en las vecindades del nulo y reducir así el ancho de banda de la hendidura. La función del sistema para el filtro resultante es

$$H(z) = b_0 \frac{1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}} \tag{5.4.31}$$

El módulo $|H(\omega)|$ de la respuesta del filtro dada por (5.4.31) se ha representado gráficamente en la Figura 5.4.10 para $\omega_0 = \pi/4$, $r = 0.85$ y para $\omega_0 = \pi/4$, $r = 0.95$. Si comparamos estas gráficas con la respuesta en

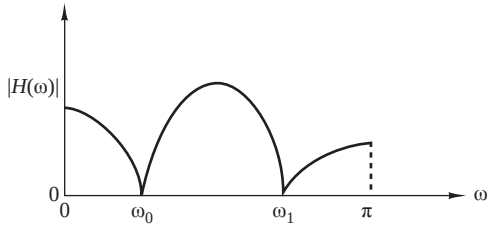


Figura 5.4.8. Respuesta en frecuencia de un filtro de hendidura.

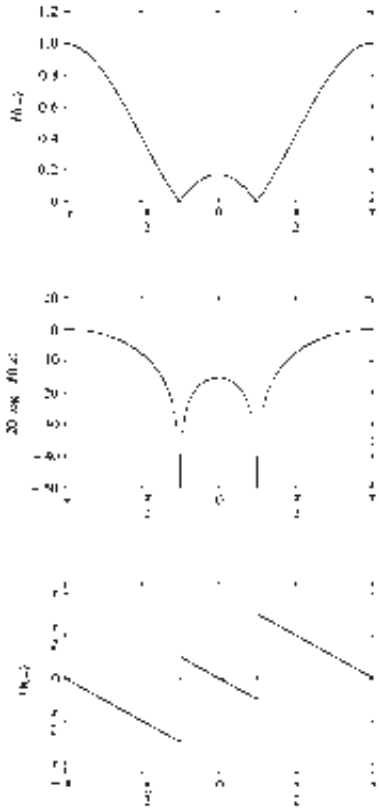


Figura 5.4.9. Respuesta en frecuencia de un filtro de hendidura con un valle en $\omega = \pi/4$ o $f = 1/8$; $H(z) = G[1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2}]$.

frecuencia del filtro FIR de la Figura 5.4.9, vemos que el efecto de los polos es el de reducir el ancho de banda de la hendidura.

Además de reducir el ancho de banda de la hendidura, la introducción de un polo en las vecindades del nulo puede dar lugar a un pequeño rizado en la banda de paso del filtro debido a la resonancia creada por el polo. El efecto del rizado se puede reducir, añadiendo polos y/o ceros adicionales en la función de sistema del filtro. El problema más importante de este método es que se trata, básicamente, de un método de prueba y error.

5.4.5 Filtros peine

En su forma más simple, un filtro peine puede interpretarse como un filtro de hendidura en el que los nulos se producen de forma periódica a lo largo de la banda de frecuencias, de aquí la analogía con un peine que tiene sus púas equiespaciadas. Los filtros peine tienen aplicación en un amplio rango de sistemas prácticos, como por ejemplo, en el rechazo de los armónicos de la red eléctrica, en la separación de las componentes solar y lunar de las medidas ionosféricas de la concentración de electrones y en la supresión del *clutter* de objetos fijos en radares indicadores de blanco móvil (MTI, *moving-target-indicator*).

Para ilustrar una forma simple de un filtro peine, considere un filtro de media móvil (FIR) descrito por la ecuación en diferencias

$$y(n) = \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} x(n-k) \tag{5.4.32}$$

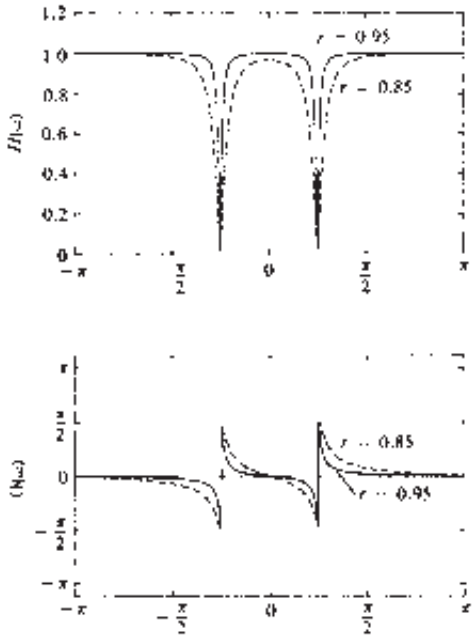


Figura 5.4.10. Respuesta en frecuencia de dos filtros de hendidura con polos en (1) $r = 0.85$ y (2) $r = 0.95$; $H(z) = b_0[(1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2})/(1 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2})]$.

La función del sistema de este filtro FIR es

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} z^{-k} \\ &= \frac{1}{M+1}\frac{[1 - z^{-(M+1)}]}{(1 - z^{-1})} \end{aligned} \tag{5.4.33}$$

y su respuesta en frecuencia es

$$H(\omega) = \frac{e^{-j\omega M/2}}{M+1}\frac{\operatorname{sen}\omega(\frac{M+1}{2})}{\operatorname{sen}(\omega/2)} \tag{5.4.34}$$

En (5.4.33) podemos ver que el filtro tiene ceros sobre la circunferencia unidad en

$$z = e^{j2\pi k/(M+1)}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, M \tag{5.4.35}$$

Observe que el polo en $z = 1$ es cancelado por el cero en $z = 1$, por lo que el filtro FIR no presenta polos fuera de la circunferencia $z = 0$.

La representación gráfica del módulo de (5.4.34) ilustra claramente la existencia de ceros igualmente espaciados en la frecuencia $\omega_k = 2\pi k/(M+1)$ para $k = 1, 2, \ldots, M$. La Figura 5.4.11 muestra $|H(\omega)|$ para $M = 10$.

En términos más generales, podemos crear un filtro peine utilizando un filtro FIR cuya función de sistema sea

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} h(k) z^{-k} \tag{5.4.36}$$

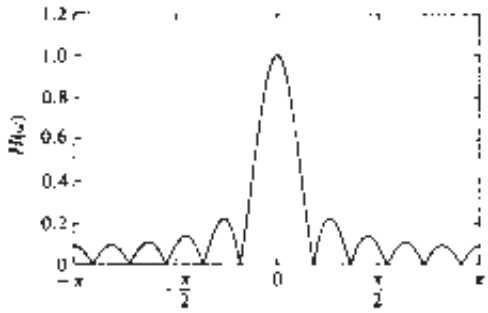


Figura 5.4.11. Módulo de la respuesta del filtro peine definido por (5.4.34) con $M = 10$.

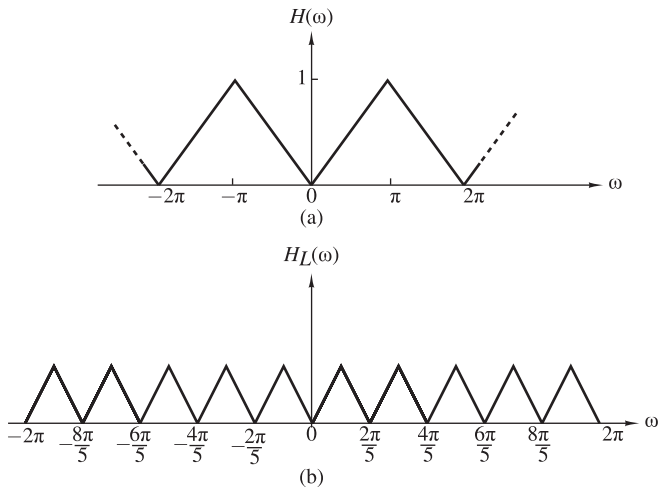


Figura 5.4.12. Filtro peine con una respuesta en frecuencia $H_L(\omega)$ obtenida a partir de $H(\omega)$.

y reemplazando z por z^L, donde L es un entero positivo. Así, el nuevo filtro FIR tiene la función de sistema

$$H_L(z) = \sum_{k=0}^{M} h(k) z^{-kL} \tag{5.4.37}$$

Si la respuesta en frecuencia del filtro FIR original es $H(\omega)$, la respuesta en frecuencia del filtro FIR dado por (5.4.37) es

$$H_L(\omega) = \sum_{k=0}^{M} h(k) e^{-jkL\omega} = H(L\omega) \tag{5.4.38}$$

Por tanto, la respuesta en frecuencia $H_L(\omega)$ es simplemente una repetición de orden L de $H(\omega)$ en el rango $0 \leq \omega \leq 2\pi$. La Figura 5.4.12 ilustra la relación entre $H_L(\omega)$ y $H(\omega)$ para $L = 5$.

Suponga ahora que el filtro FIR original con una función de sistema $H(z)$ tiene un nulo espectral (es decir, un cero), en una frecuencia ω_0 dada. Así, el filtro con la función de sistema $H_L(z)$ tiene nulos igualmente espaciados en $\omega_k = \omega_0 + 2\pi k/L$, $k = 0, 1, 2, \ldots, L-1$. La Figura 5.4.13 muestra un filtro peine con $M = 3$ y $L = 3$. Este filtro FIR puede interpretarse como un filtro FIR de longiutd 10, aunque sólo cuatro de los 10 coeficientes del filtro son distintos de cero.

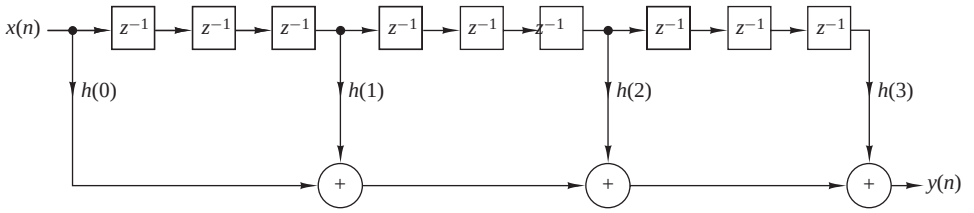


Figura 5.4.13. Realización de un filtro FIR peine con $M = 3$ y $L = 3$.

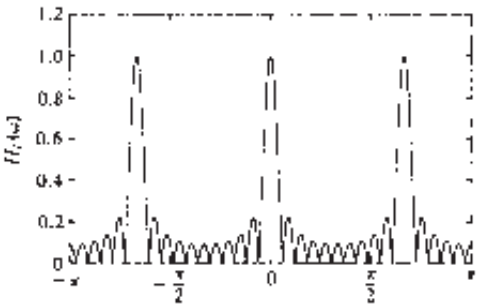


Figura 5.4.14. Módulo de la respuesta para el filtro peine definido por (5.4.40), con $L = 3$ y $M = 10$.

Volvamos ahora al filtro de media móvil con la función de sistema dada por (5.4.33). Suponga que reemplazamos z por z^L. Entonces el filtro peine resultante tendrá la función de sistema

$$H_L(z) = \frac{1}{M+1}\,\frac{1-z^{-L(M+1)}}{1-z^{-L}} \tag{5.4.39}$$

y una respuesta en frecuencia

$$H_L(\omega) = \frac{1}{M+1}\,\frac{\operatorname{sen}[\omega L(M+1)/2]}{\operatorname{sen}(\omega L/2)}\,e^{-j\omega LM/2} \tag{5.4.40}$$

Este filtro tiene ceros en la circunferencia unidad en

$$z_k = e^{j2\pi k/L(M+1)} \tag{5.4.41}$$

para todos los valores enteros de k excepto $k = 0, L, 2L, \ldots, ML$. La Figura 5.4.14 ilustra $|H_L(\omega)|$ para $L = 3$ y $M = 10$.

El filtro peine descrito por la Ecuación (5.4.39) tiene aplicación en la separación de las componentes espectrales solar y lunar en las medidas ionosféricas de concentraciones de electrones como se describe en el documento de Bernhardt *et al.* (1976). El período solar es $T_s = 24$ horas y produce una componente solar de un ciclo por día y sus armónicos. El período lunar es $T_L = 24.84$ horas y proporciona líneas espectrales en 0.96618 ciclos por día y sus armónicos. La Figura 5.4.15(a) muestra una gráfica de la densidad espectral de potencia de las medidas ionosféricas de las concentraciones de electrones no filtradas. Observe que las débiles componentes lunares quedan prácticamente ocultas por las fuertes componentes solares.

Los dos conjuntos de componentes espectrales pueden separarse utilizando filtros peine. Si deseamos obtener las componentes solares, podemos emplear un filtro peine con una banda de paso estrecha en múltiplos de un ciclo por día. Esto puede conseguirse seleccionando L, tal que $F_s/L = 1$ ciclo por día, donde F_s es la frecuencia de muestreo correspondiente. El resultado es un filtro que presenta picos en su respuesta en frecuencia en multiplos

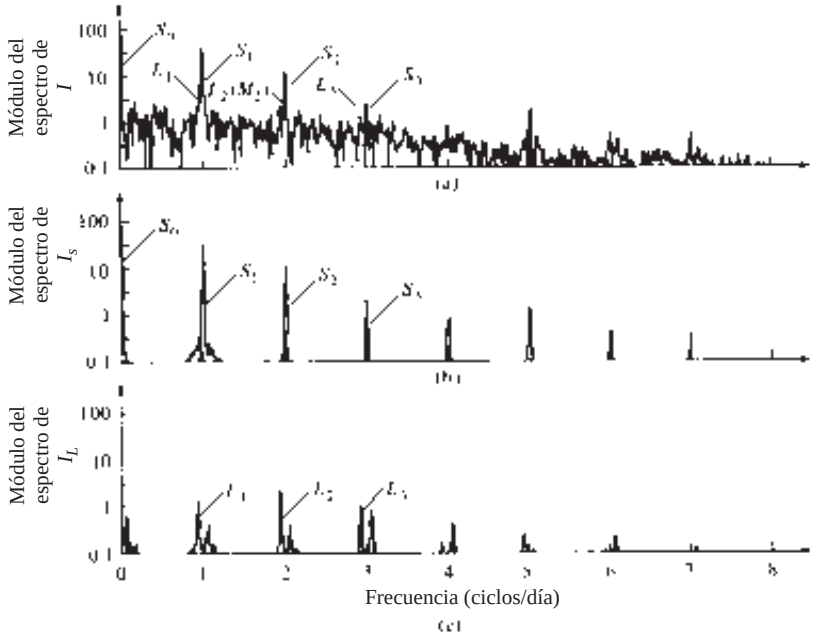


Figura 5.4.15. (a) Espectro de datos del contenido de electrones no filtrado. (b) Espectro de salida del filtro solar. (c) Espectro de salida del filtro lunar. [Extraído del documento de Bernhardt *et al.* (1976). Reimpreso con el permiso de American Geophysical Union].

de un ciclo por día. Seleccionando $M = 58$, el filtro tendrá nulos en múltiplos de $(F_s/L)/(M+1) = 1/59$ ciclos por día. Estos nulos son muy próximos a las componentes lunares y dan lugar a un buen rechazo. La Figura 5.4.15(b) ilustra la densidad espectral de potencia de la salida del filtro peine que aísla las componentes solares. Puede diseñarse de forma similar un filtro peine que rechace las componentes solares y deje pasar las componentes lunares. La Figura 5.4.15(c) ilustra la densidad espectral de potencia en la salida de un filtro así para las componentes lunares.

5.4.6 Filtros paso todo

Un filtro paso todo se define como un sistema cuyo módulo de su respuesta es constante para todas las frecuencias, es decir,

$$|H(\omega)| = 1, \qquad 0 \le \omega \le \pi \tag{5.4.42}$$

El ejemplo más sencillo de un filtro paso todo es un sistema de retardo puro con la función de sistema

$$H(z) = z^{-k}$$

Este sistema deja pasar todas las señales sin hacer ninguna modificación excepto un retardo de k muestras. Se trata de un sistema paso todo trivial que tiene una respuesta en fase lineal.

La siguiente función de sistema describe un filtro paso todo más interesante

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{a_N + a_{N-1}z^{-1} + \cdots + a_1 z^{-N+1} + z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-N+k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}, \qquad a_0 = 1 \end{aligned} \tag{5.4.43}$$

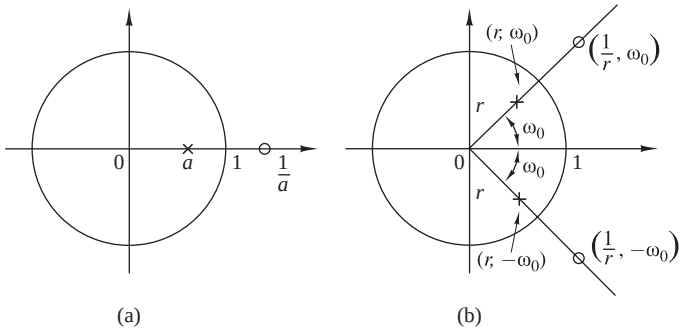


Figura 5.4.16. Patrones de polos y ceros de un filtro paso todo (a) de primer orden y (b) de segundo orden.

donde todos los coeficientes del filtro $\{a_k\}$ son reales. Si definimos el polinomio $A(z)$ como

$$A(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}, \qquad a_0 = 1$$

entonces (5.4.43) se puede escribir como sigue

$$H(z) = z^{-N} \frac{A(z^{-1})}{A(z)} \tag{5.4.44}$$

Dado que,

$$|H(\omega)|^2 = H(z)H(z^{-1})|_{z=e^{j\omega}} = 1$$

el sistema dado por (5.4.44) es un filtro paso todo. Además, si z_0 es un polo de $H(z)$, entonces $1/z_0$ es un cero de $H(z)$ (es decir, los polos y los ceros son recíprocos entre sí). La Figura 5.4.16 ilustra patrones típicos de polos y ceros de un filtro de un solo polo y un solo cero, y de un filtro de dos polos y dos ceros. En la Figura 5.4.17 se muestra una gráfica de la fase de estos filtros para $a = 0.6$ y $r = 0.9$, $\omega_0 = \pi/4$.

La forma más general de la función de sistema de un filtro paso todo con coeficientes reales, expresada en forma de factores definidos por los polos y ceros, es

$$H_{\text{ap}}(z) = \prod_{k=1}^{N_R} \frac{z^{-1} - \alpha_k}{1 - \alpha_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{N_c} \frac{(z^{-1} - \beta_k)(z^{-1} - \beta_k^*)}{(1 - \beta_k z^{-1})(1 - \beta_k^* z^{-1})} \tag{5.4.45}$$

donde existen N_R ceros y polos reales y N_c pares complejos conjugados de polos y ceros. Para sistemas causales y estables necesitamos que $-1 < \alpha_k < 1$ y $|\beta_k| < 1$.

Las expresiones para la fase de la respuesta y el retardo de grupo de los sistemas paso todo pueden obtenerse fácilmente utilizando el método descrito en la Sección 5.2.1. Para un sistema paso todo de un solo polo y un solo cero, tenemos

$$H_{\text{ap}}(\omega) = \frac{e^{j\omega} - re^{-j\theta}}{1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}}$$

Por tanto,

$$\Theta_{\text{ap}}(\omega) = -\omega - 2\tan^{-1} \frac{r\,\text{sen}(\omega - \theta)}{1 - r\cos(\omega - \theta)}$$

y

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\Theta_{\text{ap}}(\omega)}{d\omega} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\omega - \theta)} \tag{5.4.46}$$

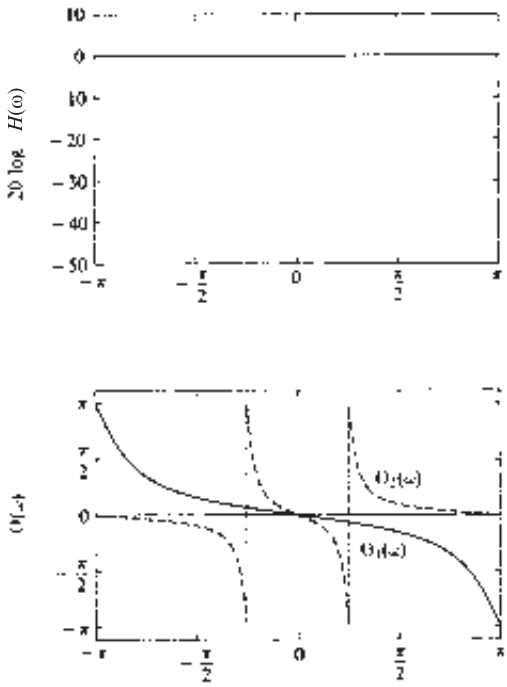


Figura 5.4.17. Respuesta en frecuencia de un filtro paso todo con las funciones de sistema (1) $H(z) = (0.6 + z^{-1})/(1 + 0.6z^{-1})$, (2) $H(z) = (r^2 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2})/\,(1 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2})$, $r = 0.9$, $\omega_0 = \pi/4$.

Observe que en un sistema causal y estable, $r < 1$ y, por tanto, $\tau_g(\omega) \geq 0$. Dado que el retardo de grupo de un sistema de polos y ceros de orden superior consta de una suma de términos positivos como en (5.4.46), el retardo de grupo siempre será positivo.

Los filtros paso todo tienen aplicación en los ecualizadores de fase. Cuando se montan en cascada con un sistema que tiene una respuesta en fase indeseada, se emplea un ecualizador de fase para compensar una característica de fase pobre del sistema y así obtener una respuesta de fase global lineal.

5.4.7 Osciladores sinusoidales digitales

Un *oscilador sinusoidal digital* puede interpretarse como una forma limitada de un resonador de dos polos para el que los polos complejos conjugados están sobre la circunferencia unidad. De nuestro estudio de los sistemas de segundo orden, recordemos que un sistema con una función de sistema

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \tag{5.4.47}$$

y parámetros

$$a_1 = -2r\cos\omega_0 \quad \text{y} \quad a_2 = r^2 \tag{5.4.48}$$

tiene polos complejos conjugados en $p = re^{\pm j\omega_0}$, y una respuesta al impulso unitario

$$h(n) = \frac{b_0 r^n}{\operatorname{sen}\omega_0} \operatorname{sen}(n+1)\omega_0 u(n) \tag{5.4.49}$$

Si los polos se colocan sobre la circunferencia unidad $(r = 1)$ y b_0 se hace igual a $A\operatorname{sen}\omega_0$, entonces

$$h(n) = A\operatorname{sen}(n+1)\omega_0 u(n) \tag{5.4.50}$$

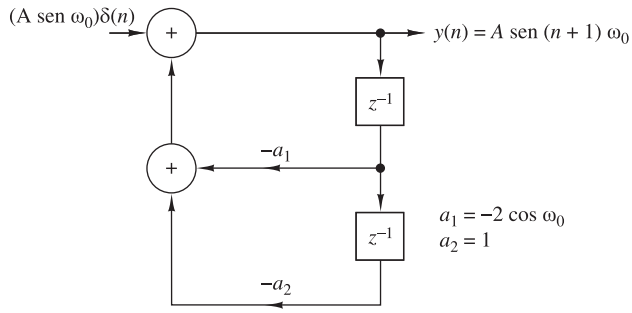


Figura 5.4.18. Generador digital de ondas sinusoidales.

Por tanto, la respuesta al impulso del sistema de segundo orden con polos complejos conjugados sobre la circunferencia unidad es una sinusoide y el sistema se denomina oscilador sinusoidal digital o *generador sinusoidal digital.*

Un generador sinusoidal digital es un componente básico de un sintentizador digital de frecuencias.

El diagrama de bloques de la función del sistema dado por (5.4.47) se muestra en la Figura 5.4.18. La ecuación en diferencias para este sistema es

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - y(n-2) + b_0\delta(n) \tag{5.4.51}$$

donde los parámetros son $a_1 = -2\cos\omega_0$ y $b_0 = A\operatorname{sen}\omega_0$, y las condiciones iniciales son $y(-1) = y(-2) = 0$. Iterando la ecuación en diferencias de (5.4.51), obtenemos

$$\begin{aligned}
y(0) &= A\operatorname{sen}\omega_0 \\
y(1) &= 2\cos\omega_0 y(0) = 2A\operatorname{sen}\omega_0\cos\omega_0 = A\operatorname{sen}2\omega_0 \\
y(2) &= 2\cos\omega_0 y(1) - y(0) \\
&= 2A\cos\omega_0\operatorname{sen}2\omega_0 - A\operatorname{sen}\omega_0 \\
&= A(4\cos^2\omega_0 - 1)\operatorname{sen}\omega_0 \\
&= 3A\operatorname{sen}\omega_0 - 4\operatorname{sen}^3\omega_0 = A\operatorname{sen}3\omega_0
\end{aligned}$$

y así sucesivamente. Observe que la aplicación del impulso en $n = 0$ sirve al propósito de iniciar las oscilaciones sinusoidales. Después, el sistema se auto-mantendrá porque el sistema no tiene amortiguación (es decir, $r = 1$).

Es interesante observar que la oscilación sinusoidal obtenida del sistema de (5.4.51) también puede obtenerse poniendo la entrada a cero y definiendo las condiciones iniciales como $y(-1) = 0$, $y(-2) = -A\operatorname{sen}\omega_0$. Así, la respuesta a la entrada nula del sistema de segundo orden descrito por la ecuación en diferencias homogénea

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - y(n-2) \tag{5.4.52}$$

con las condiciones iniciales $y(-1) = 0$ e $y(-2) = -A\operatorname{sen}\omega_0$, es exactamente la misma que la respuesta de (5.4.51) a la excitación de un impulso. De hecho, la ecuación en diferencias de (5.4.52) se puede obtener directamente a partir de la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{5.4.53}$$

donde, por definición, $\alpha = (n+1)\omega_0$, $\beta = (n-1)\omega_0$ e $y(n) = \operatorname{sen}(n+1)\omega_0$.

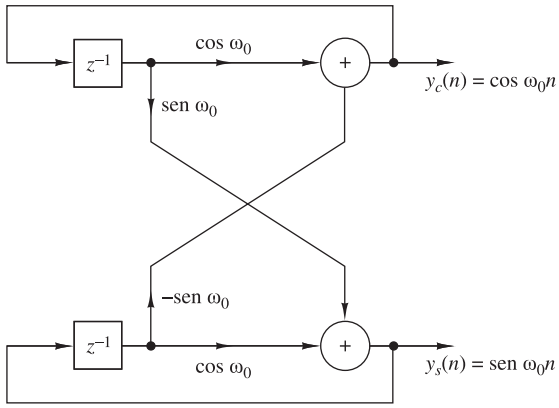


Figura 5.4.19. Realización del oscilador acoplado.

En algunas aplicaciones prácticas que implican la modulación en cuadratura de fase de dos portadoras sinusoidales, es necesario generar las sinusoides $A \operatorname{sen} \omega_0 n$ y $A \cos \omega_0 n$. Estas señales se pueden generar a partir de lo que se conoce como *oscilador acoplado*, el cual puede obtenerse a partir de las fórmulas trigonométricas

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

donde, por definición, $\alpha = n\omega_0$, $\beta = \omega_0$, y

$$y_c(n) = \cos n\omega_0 u(n) \tag{5.4.54}$$

$$y_s(n) = \operatorname{sen} n\omega_0 u(n) \tag{5.4.55}$$

Así obtenemos las dos ecuaciones en diferencias acopladas

$$y_c(n) = (\cos\omega_0)y_c(n-1) - (\operatorname{sen}\omega_0)y_s(n-1) \tag{5.4.56}$$

$$y_s(n) = (\operatorname{sen}\omega_0)y_c(n-1) + (\cos\omega_0)y_s(n-1) \tag{5.4.57}$$

que también se pueden escribir en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} y_c(n) \\ y_s(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega_0 & -\operatorname{sen}\omega_0 \\ \operatorname{sen}\omega_0 & \cos\omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_c(n-1) \\ y_s(n-1) \end{bmatrix} \tag{5.4.58}$$

La estructura para la realización del oscilador acoplado se ilustra en la Figura 5.4.19. Observe que se trata de un sistema de dos salidas que no están excitadas por ninguna entrada, pero que requieren las condiciones iniciales $y_c(-1) = A\cos\omega_0$ e $y_s(-1) = -A\operatorname{sen}\omega_0$ para iniciar sus oscilaciones auto-mantenidas.

Por último, es interesante destacar que (5.4.58) se corresponde con la rotación de un vector en un sistema de coordenadas bidimensional con las coordenadas $y_c(n)$ e $y_s(n)$. En consecuencia, el oscilador acoplado puede también implementarse utilizando el algoritmo de CORDIC [*véase* el libro de Kung *et al.* (1985)].

5.5 Sistemas inversos y deconvolución

Como ya hemos visto, un sistema lineal invariante en el tiempo toma como entrada una señal $x(n)$ y genera una señal de salida $y(n)$, que es la convolución de $x(n)$ con la respuesta al impulso unitario $h(n)$ del sistema.

En muchas aplicaciones prácticas, disponemos de una señal de salida de un sistema cuyas características son desconocidas y necesitamos determinar la señal de entrada. Por ejemplo, en la transmisión de información digital a alta velocidad a través de canales telefónicos, sabemos que el canal distorsiona la señal y produce interferencias entre los símbolos de los datos. Este tipo de interferencia puede generar errores cuando se quieren recuperar las datos. En estas situaciones, el problema consiste en diseñar un sistema de corrección que, al conectarse en cascada con el canal, genere una salida que, en cierto sentido, corrija la distorsión debida al canal y genere a continuación una réplica de la señal transmitida deseada. En las comunicaciones digitales, tales sistemas de corrección se conocen como *ecualizadores*. Sin embargo, en el contexto general de la teoría de sistemas lineales, estos sistemas de corrección se denominan *sistemas inversos*, porque el sistema de corrección tiene una respuesta en frecuencia que es, básicamente, la inversa de la respuesta en frecuencia del sistema que causa la distorsión. Además, puesto que el sistema que origina la distorsión produce una salida $y(n)$ que es la convolución de la entrada $x(n)$ con la respuesta al impulso $h(n)$, la operación del sistema inverso que toma $y(n)$ y genera $x(n)$ se denomina *deconvolución*.

Si las características del sistema que produce la distorsión son desconocidas, a menudo será necesario, siempre que sea posible, excitar el sistema con una señal conocida, observar la salida, compararla con la entrada y, de alguna manera, determinar las características del sistema. Por ejemplo, en el problema de las comunicaciones digitales que acabamos de describir, en el que la respuesta en frecuencia del canal es desconocida, la medida de la respuesta en frecuencia de éste puede realizarse transmitiendo un conjunto de sinusoides de la misma amplitud a diferentes frecuencias con un conjunto de fases especificado, dentro de la banda de frecuencias del canal. El canal atenuará y desplazará en fase cada una de las sinusoides. Comparando la señal recibida con la señal transmitida, el receptor obtiene una medida de la respuesta en frecuencia del canal, que se puede utilizar para diseñar el sistema inverso. El proceso de determinar las características del sistema inverso, $h(n)$ o $H(\omega)$, mediante un conjunto de medidas realizadas sobre el sistema se conoce como proceso de *identificación del sistema*.

El término "deconvolución" se utiliza a menudo en el procesamiento de señales sísmicas, y más generalmente, en geofísica para describir la operación de separar la señal de entrada de las características del sistema que deseamos medir. La finalidad de la operación de deconvolución es identificar las características del sistema, que en este caso, es la Tierra, y que también podemos interpretar como un problema de identificación de sistema. El "sistema inverso" en este caso tiene una respuesta en frecuencia que es la recíproca del espectro de la señal de entrada que se haya empleado para excitar el sistema.

5.5.1 Invertibilidad de los sistemas LTI

Se dice que un sistema es *invertible* si existe una correspondencia uno-a-uno entre sus señales de entrada y de salida. Esta definición implica que si conocemos la secuencia de salida $y(n)$, $-\infty < n < \infty$, de un sistema invertible $\mathscr{T}$, podemos determinar de forma unívoca su entrada $x(n)$, $-\infty < n < \infty$. El *sistema inverso* con entrada $y(n)$ y salida $x(n)$ se designa por $\mathscr{T}^{-1}$. Evidentemente, la conexión en cascada de un sistema y su inverso es equivalente al sistema identidad, ya que

$$w(n) = \mathscr{T}^{-1}[y(n)] = \mathscr{T}^{-1}\{\mathscr{T}[x(n)]\} = x(n) \tag{5.5.1}$$

como se ilustra en la Figura 5.5.1. Por ejemplo, el sistema definido por las relaciones de entrada–salida $y(n) = ax(n)$ e $y(n) = x(n-5)$ son invertibles, mientras que las relaciones $y(n) = x^2(n)$ e $y(n) = 0$ representan los sistemas no invertibles.

Como hemos indicado anteriormente, los sistemas inversos son importantes en muchas aplicaciones prácticas, entre las que se incluyen las comunicaciones digitales y geofísicas. Consideremos en primer lugar el problema de determinar el sistema inverso de un sistema dado. Vamos a centrarnos en los sistemas discretos e invariantes en el tiempo.

Ahora supongamos que el sistema lineal invariante en el tiempo $\mathscr{T}$ tiene una respuesta al impulso $h(n)$ y sea $h_I(n)$ la respuesta al impulso del sistema inverso $\mathscr{T}^{-1}$. Entonces la expresión (5.5.1) es equivalente a la ecuación de convolución

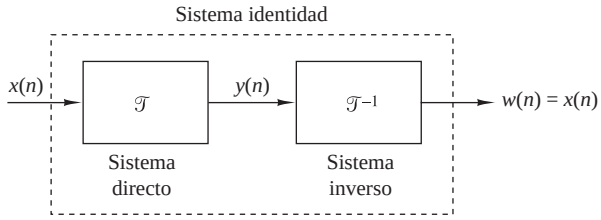


Figura 5.5.1. Sistema $\mathscr{T}$ conectado en cascada con su inverso $\mathscr{T}^{-1}$.

$$w(n) = h_I(n) * h(n) * x(n) = x(n) \tag{5.5.2}$$

Pero (5.5.2) implica que

$$h(n) * h_I(n) = \delta(n) \tag{5.5.3}$$

La ecuación de convolución dada por (5.5.3) se puede utilizar para obtener $h_I(n)$ para una respuesta $h(n)$ determinada. Sin embargo, la solución de (5.5.3) en el dominio de tiempo normalmente es complicada. Un método sencillo consiste en transformar (5.5.3) en el dominio z y resolver para obtener $\mathscr{T}^{-1}$. Por tanto, en el dominio de la transformada z, (5.5.3) se convierte en

$$H(z)H_I(z) = 1$$

y por tanto la función del sistema inverso es

$$H_I(z) = \frac{1}{H(z)} \tag{5.5.4}$$

Si $H(z)$ es una función de sistema racional

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \tag{5.5.5}$$

entonces

$$H_I(z) = \frac{A(z)}{B(z)} \tag{5.5.6}$$

Así, los ceros de $H(z)$ serán los polos del sistema inverso, y viceversa. Además, si $H(z)$ es un sistema FIR, entonces $H_I(z)$ es un sistema de sólo polos; y si $H(z)$ es un sistema de sólo polos, entonces $H_I(z)$ es un sistema FIR.

EJEMPLO 5.5.1

Determine el sistema inverso cuya respuesta al impulso es

$$h(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$$

Solución. La función de sistema correspondiente a $h(n)$ es

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{2}$$

El sistema es causal y estable. Dado que $H(z)$ es un sistema de sólo polos, su inverso es un sistema FIR y queda determinado por la función de sistema

$$H_I(z) = 1 - \frac{1}{2}z^{-1}$$

Por tanto, su respuesta al impulso es

$$h_I(n) = \delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-1)$$

EJEMPLO 5.5.2

Determine el inverso del sistema cuya respuesta al impulso es

$$h(n) = \delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-1)$$

Se trata de un sistema FIR y su función de sistema es

$$H(z) = 1 - \frac{1}{2}z^{-1}, \qquad \text{ROC: } |z| > 0$$

El sistema inverso tiene la función de sistema

$$H_I(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

Luego $H_I(z)$ tiene un cero en el origen y un polo en $z = \frac{1}{2}$. En este caso, existen dos posibles regiones de convergencia y, por tanto, dos posibles sistemas inversos, como se ilustra en la Figura 5.5.2. Si elegimos como ROC de $H_I(z)$ la zona definida por $|z| > \frac{1}{2}$, la transformada inversa es

$$h_I(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$$

que es la respuesta al impulso de un sistema causal y estable. Por el contrario, si suponemos que la ROC es $|z| < \frac{1}{2}$, el sistema inverso tiene una respuesta al impulso

$$h_I(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$$

En este caso, el sistema inverso es anticausal e inestable.

Observe que (5.5.3) no se puede resolver de forma unívoca utilizando (5.5.6) a menos que especifiquemos la región de convergencia para la función del sistema inverso.

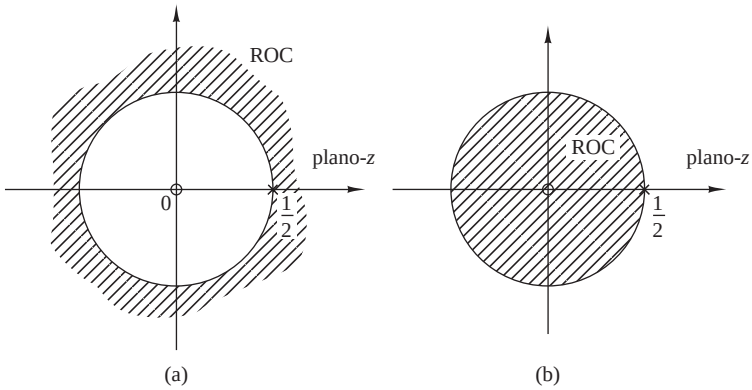


Figura 5.5.2. Dos posibles regiones de convergencia para $H(z) = z/(z-\frac{1}{2})$.

En algunas aplicaciones prácticas, la respuesta al impulso $h(n)$ no tiene una transformada z que se pueda expresar de forma cerrada. Alternativamente, podemos resolver (5.5.3) directamente utilizando una computadora digital. Dado que (5.5.3), en general, no tiene una solución única, suponemos que el sistema y su inverso son causales. Luego la expresión (5.5.3) se simplifica como sigue

$$\sum_{k=0}^{n} h(k)h_I(n-k) = \delta(n) \tag{5.5.7}$$

Suponiendo, $h_I(n) = 0$ para $n < 0$. Para $n = 0$ obtenemos

$$h_I(0) = 1/h(0) \tag{5.5.8}$$

Los valores de $h_I(n)$ para $n \geq 1$ pueden obtenerse recursivamente a partir de la ecuación

$$h_I(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{h(n)h_I(n-k)}{h(0)}, \qquad n \geq 1 \tag{5.5.9}$$

Esta relación recursiva puede programarse fácilmente en una computadora digital.

Hay dos problemas asociados con la Ecuación (5.5.9). En primer lugar, el método no funciona si $h(0) = 0$. Sin embargo, este problema puede remediarse fácilmente introduciendo el retardo apropiado en el lado derecho de la Ecuación (5.5.7), es decir, reemplazando $\delta(n)$ por $\delta(n-m)$, donde $m = 1$ si $h(0) = 0$ y $h(1) \neq 0$, etc. En segundo lugar, la recursión en (5.5.9) hace que aumenten los errores de redondeo cuando n aumenta, por lo que la precisión numérica de $h(n)$ se deteriora para valores de n grandes.

EJEMPLO 5.5.3

Determine el sistema inverso causal del sistema FIR cuya respuesta al impulso es

$$h(n) = \delta(n) - \alpha\delta(n-1)$$

Dado que $h(0) = 1$, $h(1) = -\alpha$ y $h(n) = 0$ para $n \geq \alpha$, tenemos

$$h_I(0) = 1/h(0) = 1$$

y

$$h_I(n) = \alpha h_I(n-1), \qquad n \geq 1$$

En consecuencia,

$$h_I(1) = \alpha, \quad h_I(2) = \alpha^2, \quad \ldots, \quad h_I(n) = \alpha^n$$

que se corresponde con un sistema IIR causal, como era de esperar.

5.5.2 Sistemas de fase mínima, fase máxima y fase mixta

La invertibilidad de un sistema lineal invariante en el tiempo está íntimamente relacionada con las características de la función espectral de fase del sistema. Para ilustrar esta cuestión, consideremos dos sistemas FIR, caracterizados por las funciones de sistema

$$H_1(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} = z^{-1}(z + \frac{1}{2}) \tag{5.5.10}$$

$$H_2(z) = \frac{1}{2} + z^{-1} = z^{-1}(\frac{1}{2}z + 1) \tag{5.5.11}$$

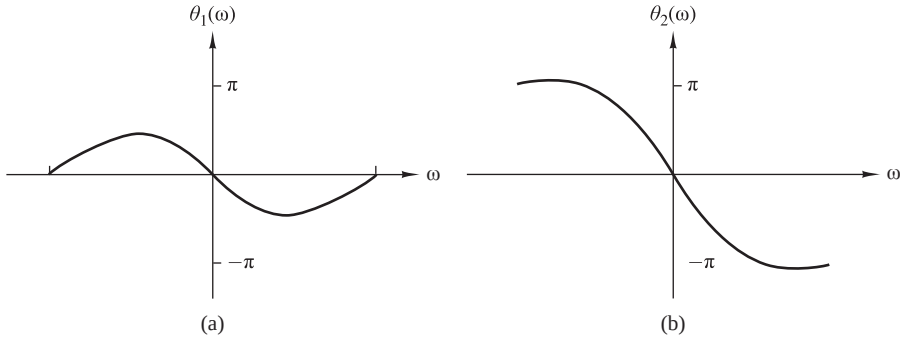


Figura 5.5.3. Características de fase de los sistemas dados por (5.5.10) y (5.5.11).

El sistema dado por (5.5.10) tiene un cero en $z = -\frac{1}{2}$ y una respuesta al impulso $h(0) = 1$, $h(1) = 1/2$. El sistema dado por (5.5.11) tiene un cero en $z = -2$ y una respuesta al impulso $h(0) = 1/2$, $h(1) = 1$, que es la función inversa del sistema de (5.5.10). Esto se debe a la relación recíproca entre los ceros de $H_1(z)$ y $H_2(z)$.

En el dominio de la frecuencia, los dos sistemas están caracterizados por sus respuestas en frecuencia, que se pueden expresar como

$$|H_1(\omega)| = |H_2(\omega)| = \sqrt{\frac{5}{4} + \cos\omega} \tag{5.5.12}$$

y

$$\Theta_1(\omega) = -\omega + \tan^{-1}\frac{\operatorname{sen}\omega}{\frac{1}{2} + \cos\omega} \tag{5.5.13}$$

$$\Theta_2(\omega) = -\omega + \tan^{-1}\frac{\operatorname{sen}\omega}{2 + \cos\omega} \tag{5.5.14}$$

Los módulos de los dos sistemas son idénticos porque los ceros de $H_1(z)$ y $H_2(z)$ son recíprocos.

Las gráficas de $\Theta_1(\omega)$ y $\Theta_2(\omega)$ se ilustran en la Figura 5.5.3. Observe que la fase $\Theta_1(\omega)$ del primer sistema comienza en el valor de fase de cero para la frecuencia $\omega = 0$ y termina también con el valor cero en la frecuencia $\omega = \pi$. Por tanto, la variación de la fase neta, $\Theta_1(\pi) - \Theta_1(0)$, es cero. Por el contrario, la fase del sistema que tiene el cero fuera de la circunferencia unidad presenta una variación neta de fase de $\Theta_2(\pi) - \Theta_2(0) = \pi$ radianes. Como consecuencia de estas características de fase diferentes, denominamos al primer sistema *sistema de fase mínima* y al segundo *sistema de fase máxima*.

Estas definiciones pueden extenderse fácilmente a un sistema FIR de longitud arbitraria. Específicamente, un sistema FIR de longitud $M+1$ tiene M ceros y su respuesta en frecuencia se puede expresar como

$$H(\omega) = b_0(1 - z_1 e^{-j\omega})(1 - z_2 e^{-j\omega})\cdots(1 - z_M e^{-j\omega}) \tag{5.5.15}$$

donde $\{z_i\}$ designa los ceros y b_0 es una constante arbitraria. Si todos los ceros se encuentran dentro de la circunferencia unidad, cada término del producto de (5.5.15), correspondientes a un cero real, proporcionará una variación neta de fase de cero entre $\omega = 0$ y $\omega = \pi$. También, cada par de factores complejos conjugados de $H(\omega)$ producirá una variación neta de fase de cero. Por tanto,

$$\sphericalangle H(\pi) - \sphericalangle H(0) = 0 \tag{5.5.16}$$

y el sistema será un sistema de fase mínima. Por el contrario, cuando todos los ceros están fuera de la circunferencia unidad, un cero real contribuirá con una variación neta de fase de π radianes cuando la frecuencia varía

entre $\omega = 0$ y $\omega = \pi$, y cada par de ceros complejos conjugados contribuirá con una variación neta de fase de 2π radianes en el mismo rango de ω. Por tanto,

$$\sphericalangle H(\pi) - \sphericalangle H(0) = M\pi \tag{5.5.17}$$

que es la máxima variación de fase posible en un sistema FIR con M ceros, por lo que se denomina sistema de fase máxima. De esto se deduce que

$$\sphericalangle H_{\max}(\pi) \geq \sphericalangle H_{\min}(\pi) \tag{5.5.18}$$

Si el sistema FIR con M ceros tiene algunos de ellos en el interior de la circunferencia unidad y los ceros restantes se encuentran en el exterior de la circunferencia, se dice que es un *sistema de fase mixta* o un *sistema de fase no mínima*.

Puesto que la derivada de la fase del sistema es una medida del retardo temporal que sufren las componentes de la señal al pasar a través del sistema, una característica de fase mínima implica una función de retardo mínima, mientras que una característica de fase máxima implica que el retardo también será máximo.

Supongamos ahora que tenemos un sistema FIR con coeficientes reales. En este caso, el módulo al cuadrado de su respuesta en frecuencia es

$$|H(\omega)|^2 = H(z)H(z^{-1})\big|_{z=e^{j\omega}} \tag{5.5.19}$$

Esta relación implica que si reemplazamos un cero z_k del sistema por su inverso $1/z_k$, el módulo del sistema no variará. Por tanto, si reflejamos un cero z_k del interior de la circunferencia unidad en un cero $1/z_k$ en el exterior de dicha circunferencia, comprobamos que el módulo de la respuesta en frecuencia es invariante a cualquier cambio.

A partir de esto es evidente que si $|H(\omega)|^2$ es el módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia de un sistema FIR que tiene M zeros, existen 2^M posibles configuraciones para los M ceros, de los que parte estarán en el interior de la circunferencia unidad y el resto en el exterior de la misma. Evidentemente, una configuración con todos los ceros en el interior de la circunferencia, se corresponde con el sistema de fase mínima. Una segunda configuración será aquella que tenga todos los ceros en el exterior de la circunferencia unidad, la cual se corresponde con el sistema de fase máxima. Las $2^M - 2$ configuraciones restantes se corresponden con sistemas de fase mixta. Sin embargo, no todas las $2^M - 2$ configuraciones de fase mixta necesariamente se corresponden con sistemas FIR de coeficientes reales. Específicamente, cualquier par de ceros complejos conjugados da lugar a sólo a dos posibles configuraciones, mientras que un par de ceros reales proporciona cuatro posibles configuraciones.

EJEMPLO 5.5.4

Determine los ceros para los siguientes sistemas FIR e indique para cada uno de ellos si es un sistema de fase mínima, de fase máxima o de fase mixta.

$$\begin{aligned}
H_1(z) &= 6 + z^{-1} - z^{-2} \\
H_2(z) &= 1 - z^{-1} - 6z^{-2} \\
H_3(z) &= 1 - \frac{5}{2}z^{-1} - \frac{3}{2}z^{-2} \\
H_4(z) &= 1 + \frac{5}{3}z^{-1} - \frac{2}{3}z^{-2}
\end{aligned}$$

Solución. Descomponiendo en factores las funciones de sistema obtenemos los ceros de los cuatro sistemas

$$\begin{aligned}
H_1(z) &\longrightarrow z_{1,2} = -\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \longrightarrow \text{ fase mínima} \\
H_2(z) &\longrightarrow z_{1,2} = -2, 3 \longrightarrow \text{ fase máxima} \\
H_3(z) &\longrightarrow z_{1,2} = -\frac{1}{2}, 3 \longrightarrow \text{ fase mixta}
\end{aligned}$$

$$H_4(z) \longrightarrow z_{1,2} = -2, \frac{1}{3} \longrightarrow \text{ fase mixta}$$

Puesto que los ceros de los cuatro sistemas son recíprocos entre sí, se concluye que el módulo de la respuesta en frecuencia de los cuatro sistemas son idénticos, pero las fases son distintas.

La propiedad de fase mínima de los sistemas FIR nos lleva a los sistemas IIR que tienen funciones de sistema racionales. Específicamente, un sistema IIR definido mediante la función

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \tag{5.5.20}$$

se denomina *sistema de fase mínima* si todos sus polos y ceros se encuentran en el interior de la circunferencia unidad. Para un sistema estable y causal [todas las raíces de $A(z)$ caen dentro de la circunferencia unidad], el sistema se denomina *sistema de fase máxima* si todos los ceros están fuera de la circunferencia unidad y *sistema de fase mixta* si algunos ceros, pero no todos, se encuentran en el exterior de la circunferencia unidad.

Esto nos lleva a una cuestión importante en la que debemos hacer hincapié: un sistema de polos y ceros *estable* de fase mínima tiene asociado un sistema inverso que también es de fase mínima. El sistema inverso se define mediante la función

$$H^{-1}(z) = \frac{A(z)}{B(z)} \tag{5.5.21}$$

Luego la propiedad de fase mínima de $H(z)$ asegura la estabilidad del sistema inverso $H^{-1}(z)$ y la estabilidad de $H(z)$ implica la propiedad de fase mínima de $H^{-1}(z)$. Los sistemas de fase mixta y de fase máxima dan lugar a sistemas inversos inestables.

Descomposición de sistemas de polos y ceros con fase no mínima. Cualquier sistema de polos y ceros con fase no mínima se puede expresar como

$$H(z) = H_{\text{min}}(z)H_{\text{ap}}(z) \tag{5.5.22}$$

donde $H_{\text{min}}(z)$ es un sistema de fase mínima y $H_{\text{ap}}(z)$ es un sistema paso todo. Vamos a demostrar la validez de esta afirmación para sistemas causales y estables con una función de sistema racional $H(z) = B(z)/A(z)$. En general, si $B(z)$ tiene una o más raíces fuera de la circunferencia unidad, descomponemos el factor $B(z)$ en el producto $B_1(z)B_2(z)$, donde $B_1(z)$ tiene todas las raíces dentro de la circunferencia unidad y $B_2(z)$ tiene todas las raíces fuera de la misma. Luego $B_2(z^{-1})$ tiene todas sus raíces dentro de la circunferencia unidad. Definimos el sistema de fase mínima como

$$H_{\text{min}}(z) = \frac{B_1(z)B_2(z^{-1})}{A(z)}$$

y el sistema paso todo como

$$H_{\text{ap}}(z) = \frac{B_2(z)}{B_2(z^{-1})}$$

Luego $H(z) = H_{\text{min}}(z)H_{\text{ap}}(z)$. Observe que $H_{\text{ap}}(z)$ es un sistema estable paso todo de fase máxima.

Retardo de grupo de un sistema de fase no mínima. Basándonos en la descomposición de un sistema de fase no mínima dado por (5.5.22), podemos expresar el retardo de grupo de $H(z)$ como

$$\tau_g(\omega) = \tau_g^{\text{min}}(\omega) + \tau_g^{\text{ap}}(\omega) \tag{5.5.23}$$

Como $\tau_g^{ap}(\omega) \geq 0$ para $0 \leq \omega \leq \pi$, se tiene que $\tau_g(\omega) \geq \tau_g^{\min}(\omega)$, $0 \leq \omega \leq \pi$. A partir de (5.5.23) podemos concluir que entre todos los sistemas de polos y ceros cuyas respuestas tienen el mismo módulo, el sistema de fase mínima tiene el retardo de grupo más pequeño.

Energía parcial del sistema de fase mínima. La *energía parcial* de un sistema causal con una respuesta al impulso $h(n)$ se define como

$$E(n) = \sum_{k=0}^{n} |h(k)|^2 \tag{5.5.24}$$

Se puede demostrar que entre todos los sistemas cuyas respuestas tienen el mismo módulo y la misma energía total $E(\infty)$, el sistema de fase mínima tiene la energía parcial mayor [es decir, $E_{\min}(n) \geq E(n)$, donde $E_{\min}(n)$ es la energía parcial del sistema de fase mínima].

5.5.3 Identificación del sistema y deconvolución

Suponga que excitamos un sistema lineal invariante en el tiempo desconocido con una secuencia de entrada $x(n)$ y observamos la secuencia de salida $y(n)$. Deseamos determinar a partir de la señal de salida la respuesta al impulso del sistema desconocido. Éste es un problema de *identificación del sistema*, que podemos resolver utilizando la *deconvolución*. Así, tenemos

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) * x(n) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \end{aligned} \tag{5.5.25}$$

Puede obtenerse una solución analítica del problema de la convolución utilizando la transformada z de (5.5.25). En el dominio de la transformada z tenemos

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

y por tanto

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \tag{5.5.26}$$

$X(z)$ e $Y(z)$ son las transformadas z de la señal de entrada disponible $x(n)$ y la señal de salida observada $y(n)$, respectivamente. Este método es apropiado sólo cuando existen expresiones cerradas para $X(z)$ e $Y(z)$.

EJEMPLO 5.5.5

Un sistema causal produce la secuencia de salida

$$y(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \frac{7}{10}, & n = 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

cuando se le excita con la señal de entrada

$$x(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ -\frac{7}{10}, & n = 1 \\ \frac{1}{10}, & n = 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine su respuesta al impulso y la ecuación de entrada–salida.

Solución. La función del sistema se determina fácilmente calculando las transformadas z de $x(n)$ e $y(n)$. Luego tenemos

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+\frac{7}{10}z^{-1}}{1-\frac{7}{10}z^{-1}+\frac{1}{10}z^{-2}} \\ &= \frac{1+\frac{7}{10}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{5}z^{-1})} \end{aligned}$$

Como el sistema es causal, su ROC es $|z| > \frac{1}{2}$. El sistema también es estable dado que sus polos se encuentran dentro de la circunferencia unidad.

La ecuación en diferencias de entrada–salida es

$$y(n) = \frac{7}{10}y(n-1) - \frac{1}{10}y(n-2) + x(n) + \frac{7}{10}x(n-1)$$

Su respuesta al impulso se determina realizando una expansión en fracciones parciales de $H(z)$ y calculando la transformada inversa del resultado. Este cálculo proporciona

$$h(n) = [4(\frac{1}{2})^n - 3(\frac{1}{5})^n]u(n)$$

Observe que la expresión (5.5.26) determina el sistema desconocido de forma unívoca si se sabe que el sistema es causal. Sin embargo, el ejemplo anterior es artificial, ya que la respuesta del sistema $\{y(n)\}$ muy probablemente será infinita en duración. En consecuencia, normalmente este método no resulta práctico.

Alternativamente, podemos trabajar directamente con la expresión en el dominio del tiempo dada por (5.5.25). Si el sistema es causal, tenemos

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} h(k)x(n-k), \qquad n \geq 0$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} h(0) &= \frac{y(0)}{x(0)} \\ h(n) &= \frac{y(n) - \sum_{k=0}^{n-1} h(k)x(n-k)}{x(0)}, \qquad n \geq 1 \end{aligned} \tag{5.5.27}$$

Esta solución recursiva requiere que $x(0) \neq 0$. Sin embargo, observe de nuevo que cuando $\{h(n)\}$ tiene duración infinita, este método tampoco es práctico a menos que trunquemos la solución recursiva en el mismo rango [es decir, trunquemos $\{h(n)\}$].

Otro método que permite identificar un sistema desconocido se basa en una técnica que emplea la correlación cruzada. Recuerde que la función de correlación cruzada de entrada–salida obtenida en la Sección 2.6.4 está dada por

$$r_{yx}(m) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)r_{xx}(m-k) = h(n) * r_{xx}(m) \tag{5.5.28}$$

donde $r_{yx}(m)$ es la correlación cruzada de la entrada $\{x(n)\}$ al sistema con la salida $\{y(n)\}$ del mismo, y $r_{xx}(m)$ es la autocorrelación de la señal de entrada. En el dominio de la frecuencia, la relación correspondiente es

$$S_{yx}(\omega) = H(\omega)Sxx(\omega) = H(\omega)|X(\omega)|^2$$

Por tanto,

$$H(\omega) = \frac{S_{yx}(\omega)}{S_{xx}(\omega)} = \frac{S_{yx}(\omega)}{|X(\omega)|^2} \tag{5.5.29}$$

Estas relaciones sugieren que la respuesta al impulso $\{h(n)\}$ o la respuesta en frecuencia de un sistema desconocido puede determinarse (medirse) a través de la correlación cruzada de la señal de entrada $\{x(n)\}$ con la salida $\{y(n)\}$, y luego resolver el problema de la deconvolución de (5.5.28) por medio de la ecuación recursiva dada en (5.5.27). Alternativamente, podríamos calcular simplemente la transformada de Fourier de (5.5.28) y determinar la respuesta en frecuencia dada por (5.5.29). Además, si seleccionamos la secuencia de entrada $\{x(n)\}$ tal que su secuencia de autocorrelación $\{r_{xx}(n)\}$, sea el impulso unitario, o lo que es equivalente, que su espectro sea plano (constante) en la banda de paso de $H(\omega)$, los valores de la respuesta al impulso $\{h(n)\}$ son iguales a los valores de la secuencia de correlación cruzada $\{r_{yx}(n)\}$.

En general, el método de la correlación cruzada descrita anteriormente es un método efectivo y práctico para identificar un sistema. En el Capítulo 13 se describe otro método práctico basado en la optimización por mínimos cuadrados.

5.5.4 Deconvolución homomórfica

El cepstro complejo, presentado en la Sección 4.2.7, es una herramienta útil para obtener la deconvolución en algunas aplicaciones como por ejemplo en el tratamiento de señales sísmicas. Para describir este método, suponemos que $\{y(n)\}$ es la señal de salida de un sistema lineal invariante en el tiempo que está excitado por la secuencia de entrada $\{x(n)\}$. Así,

$$Y(z) = X(z)H(z) \tag{5.5.30}$$

donde $H(z)$ es la función del sistema. El logaritmo de $Y(z)$ es

$$\begin{aligned} C_y(z) &= \ln Y(z) \\ &= \ln X(z) + \ln H(z) \\ &= C_x(z) + C_h(z) \end{aligned} \tag{5.5.31}$$

En consecuencia, el cepstro complejo de la secuencia de salida $\{y(n)\}$ se expresa como la suma de los cepstros de $\{x(n)\}$ y $\{h(n)\}$, es decir,

$$c_y(n) = c_x(n) + c_h(n) \tag{5.5.32}$$

Observe que la convolución de las dos secuencias en el dominio del tiempo se corresponde con la suma de los cepstros en el dominio cepstral. El sistema que realiza estas transformaciones se denomina *sistema homormórfico* y se ilustra en la Figura 5.5.4.

En algunas aplicaciones, como por ejemplo en el tratamiento de señales sísmicas y señales de voz, las características de las secuencias cepstrales $\{c_x(n)\}$ y $\{c_h(n)\}$ son los suficientemente diferentes como para poder separarlas en el dominio cepstral. Específicamente, suponemos que $\{c_h(n)\}$ tiene sus principales componentes (energía principal) en las vecindades de los valores más pequeños de n, mientras que $\{c_x(n)\}$ tiene concentradas sus componentes en los valores más grandes de n. Podemos decir que $\{c_h(n)\}$ es "paso bajo" y $\{c_x(n)\}$ es "paso alto". Podemos entonces separar $\{c_h(n)\}$ de $\{c_x(n)\}$ utilizando las apropiadas ventanas "paso bajo" y "paso alto", como se ilustra en la Figura 5.5.5. Luego

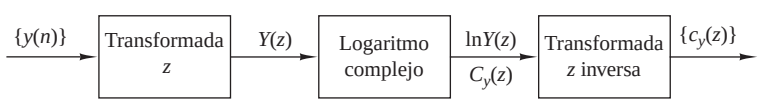


Figura 5.5.4. Sistema homomórfico para obtener el cepstro $\{c_y(n)\}$ de la seuencia $\{y(n)\}$.

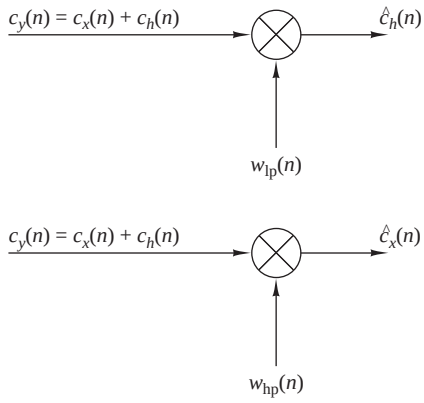


Figura 5.5.5. Separación de dos componentes cepstrales mediante ventanas “paso bajo” y “paso alto”.

$$\hat{c}_h(n) = c_y(n) w_{\text{lp}}(n) \tag{5.5.33}$$

y

$$\hat{c}_x(n) = c_y(n) w_{\text{hp}}(n) \tag{5.5.34}$$

donde

$$w_{\text{lp}}(n) = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{5.5.35}$$

$$w_{\text{hp}}(n) = \begin{cases} 0, & |n| \leq N_1 \\ 1, & |n| > N_1 \end{cases} \tag{5.5.36}$$

Una vez separadas las secuencias cepstro $\{\hat{c}_h(n)\}$ y $\{\hat{c}_x(n)\}$ mediante el uso de ventanas, las secuencias $\{\hat{x}(n)\}$ y $\{\hat{h}(n)\}$ se obtienen haciendo pasar $\{\hat{c}_h(n)\}$ y $\{\hat{c}_x(n)\}$ a través del sistema inverso homomórfico, como se muestra en la Figura 5.5.6.

En la práctica, podría emplearse una computadora digital para calcular el cepstro de la secuencia $\{y(n)\}$, aplicar las funciones de ventana e implementar el sistema inverso homomórfico mostrado en la Figura 5.5.6. En lugar de la transformada z y su inversa, emplearíamos una forma especial de la transformada de Fourier y su inversa. Esta forma especial, conocida como transformada discreta de Fourier, se presenta en el Capítulo 7.

5.6 Resumen y referencias

En este capítulo hemos abordado las características en el dominio de la frecuencia de los sistemas LTI. Hemos demostrado que un sistema LTI está caracterizado en el dominio de la frecuencia por su respuesta en frecuencia

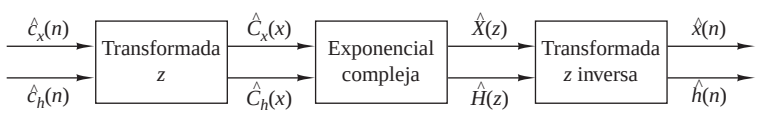


Figura 5.5.6. Sistema inverso homomórfico para recuperar las secuencias $\{x(n)\}$ y $\{h(n)\}$ a partir de los cepstros correspondientes.

$H(\omega)$, que es la transformada de Fourier de la respuesta al impulso del sistema. Hemos observado también que la respuesta en frecuencia determina el efecto del sistema sobre cualquier señal de entrada. En efecto, transformando la señal de entrada en el dominio de frecuencia, hemos visto que es sencillo determinar el efecto del sistema sobre la señal, así como determinar la salida del sistema. En el dominio de la frecuencia, un sistema LTI realiza la conformación espectral o filtrado espectral sobre la señal de entrada.

También hemos considerado en este capítulo el diseño de algunos filtros IIR desde el punto de vista de la colocación de los polos y los ceros. Por medio de este método, hemos podido diseñar resonadores digitales, filtros de hendidura, filtros peine, filtros paso todo y generadores digitales sinusoidales simples. El diseño de filtros IIR más complejos se aborda en el Capítulo 10, que también incluye varias referencias. Los generadores digitales sinusoidales pueden encontrarse en las aplicaciones de síntesis de frecuencia. En el texto editado por Gorski-Popiel (1975) puede encontrar un amplio tratamiento de las técnicas para la síntesis de frecuencia.

Por último, hemos caracterizado los sistemas LTI como sistemas de fase mínima, fase máxima o fase mixta, dependiendo de la posición de sus polos y ceros en el dominio de la frecuencia. Empleando estas características básicas de los sistemas LTI, hemos abordado problemas prácticos como el filtrado inverso, la deconvolución y la identificación del sistema. Para terminar, hemos descrito un método de deconvolución basado en el análisis espectral de la señal de salida de un sistema lineal.

Hay disponibles muchos libros técnicos que se ocupan del filtrado inverso, la deconvolución y la identificación de sistemas. En el contexto de los sistemas de comunicaciones, el filtrado inverso y la identificación del sistema en lo que se refiere a la ecualización del canal se tratan en el libro de Proakis (2001). Las técnicas de deconvolución se usan ampliamente en el procesamiento de señales sísmicas. Como referencia, recomendamos los documentos de Wood y Treitel (1975), Peacock y Treitel (1969), y Robinson y Treitel (1978, 1980). La deconvolución homomórfica y sus aplicaciones al procesamiento de señales de voz se aborda en el libro de Oppenheim y Schafer (1989).

Problemas

5.1 Se han observado las siguientes parejas de señales de entrada y de salida en varios sistemas en funcionamiento:

(a) $x(n) = (\frac{1}{2})^n \xrightarrow{\mathscr{T}_1} y(n) = (\frac{1}{8})^n$

(b) $x(n) = (\frac{1}{2})^n u(n) \xrightarrow{\mathscr{T}_2} y(n) = (\frac{1}{8})^n u(n)$

(c) $x(n) = e^{j\pi/5} \xrightarrow{\mathscr{T}_3} y(n) = 3e^{j\pi/5}$

(d) $x(n) = e^{j\pi/5} u(n) \xrightarrow{\mathscr{T}_4} y(n) = 3e^{j\pi/5 u(n)}$

(e) $x(n) = x(n+N_1) \xrightarrow{\mathscr{T}_5} y(n) = y(n+N_2), \qquad N_1 \neq N_2, \quad N_1, N_2$ primos

Determine su respuesta en frecuencia teniendo en cuenta que los sistemas anteriores son sistemas LTI.

5.2 **(a)** Determine y dibuje la transformada de Fourier $W_R(\omega)$ de la señal rectangular

$$w_R(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(b) Considere la señal triangular

$$w_T(n) = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq M/2 \\ M-n, & M/2 < 2 \leq M \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine y dibuje la transformada de Fourier $W_T(\omega)$ de $w_T(n)$ expresándola como la convolución de una secuencia rectangular consigo misma.

(c) Considere la secuencia

$$w_c(n) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{2\pi n}{M}\right) w_R(n)$$

Determine y dibuje $W_c(\omega)$ utilizando $W_R(\omega)$.

5.3 Considere un sistema LTI con la respuesta al impulso $h(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$.

(a) Determine y dibuje el módulo y la fase, $|H(\omega)|$ y $\angle H(\omega)$, respectivamente, de la respuesta.

(b) Determine y dibuje el módulo y la fase del espectro de las señales de entrada y salida para las siguientes entradas:

1. $x(n) = \cos\dfrac{3\pi n}{10}, -\infty < n < \infty$

2. $x(n) = \{\ldots, 1, 0, 0, \underset{\uparrow}{1}, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, \ldots\}$

5.4 Determine y dibuje el módulo y la fase de la respuesta de los siguientes sistemas:

(a) $y(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(n-1)]$

(b) $y(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(n-1)]$

(c) $y(n) = \frac{1}{2}[x(n+1) - x(n-1)]$

(d) $y(n) = \frac{1}{2}[x(n+1) + x(n-1)]$

(e) $y(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(n-2)]$

(f) $y(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(n-2)]$

(g) $y(n) = \frac{1}{3}[x(n) + x(n-1) + x(n-2)]$

(h) $y(n) = x(n) - x(n-8)$

(i) $y(n) = 2x(n-1) - x(n-2)$

(j) $y(n) = \frac{1}{4}[x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)]$

(k) $y(n) = \frac{1}{8}[x(n) + 3x(n-1) + 3x(n-2) + x(n-3)]$

(l) $y(n) = x(n-4)$

(m) $y(n) = x(n+4)$

(n) $y(n) = \frac{1}{4}[x(n) - 2x(n-1) + x(n-2)]$

5.5 Un filtro FIR queda descrito por la ecuación en diferencias $y(n) = x(n) + x(n-10)$

(a) Calcule y dibuje el módulo y la fase de su respuesta.

(b) Determine su respuesta a las entradas

1. $x(n) = \cos\dfrac{\pi}{10}n + 3\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}n + \dfrac{\pi}{10}\right), \qquad -\infty < n < \infty$

2. $x(n) = 10 + 5\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}n + \dfrac{\pi}{2}\right), \qquad -\infty < n < \infty$

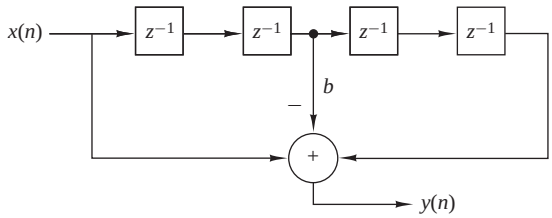


Figura P.5.6.

5.6 Determine las respuestas transitoria y en régimen permanente del filtro FIR mostrado en la Figura P.5.6 a la señal de entrada $x(n) = 10e^{j\pi n/2}u(n)$ y sean $b = 2$ e $y(-1) = y(-2) = y(-3) = y(-4) = 0$.

5.7 Considere el filtro FIR

$$y(n) = x(n) + x(n-4)$$

(a) Calcule y dibuje el módulo y la fase de su respuesta.

(b) Calcule su respuesta a la entrada

$$x(n) = \cos\frac{\pi}{2}n + \cos\frac{\pi}{4}n, \qquad -\infty < n < \infty$$

(c) Explique los resultados obtenidos en el apartado (b) en función del módulo y la fase de las respuestas obtenidas en el apartado (a).

5.8 Determine las respuestas transitoria y en régimen permanente del sistema

$$y(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(n-2)]$$

a la señal de entrada

$$x(n) = 5 + 3\cos\left(\frac{\pi}{2}n + 60^\circ\right), \qquad -\infty < n < \infty$$

5.9 Como hemos visto en el capítulo, es evidente que un sistema LTI no puede generar frecuencias en su salida que sean diferentes a las aplicadas en su entrada. Por tanto, si un sistema crea frecuencias "nuevas", tiene que ser no lineal y/o variante en el tiempo. Determine el contenido en frecuencia de las salidas de los siguientes sistemas a la señal de entrada

$$x(n) = A\cos\frac{\pi}{4}n$$

(a) $y(n) = x(2n)$

(b) $y(n) = x^2(n)$

(c) $y(n) = (\cos \pi n)x(n)$

5.10 Determine y dibuje el módulo y la fase de la respuesta de los sistemas mostrados en la Figura P.5.10(a) hasta (c).

5.11 Determine el módulo y la fase de la respuesta del canal multitrayecto

$$y(n) = x(n) + x(n-M)$$

¿En qué frecuencias se cumple que $H(\omega) = 0$?

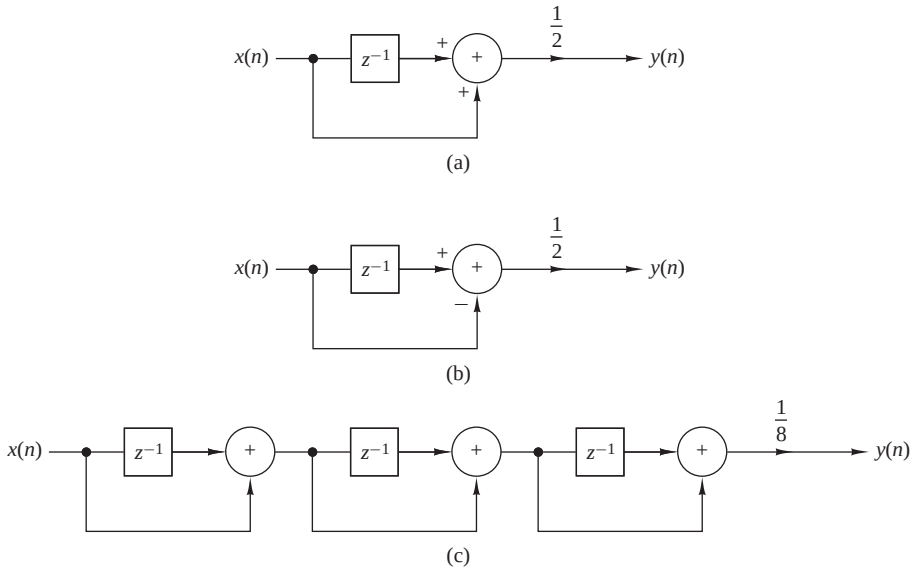


Figura P.5.10.

5.12 Considere el filtro

$$y(n) = 0.9y(n-1) + bx(n)$$

(a) Determine b de modo que $|H(0)| = 1$.

(b) Determine la frecuencia a la que $|H(\omega)| = 1/\sqrt{2}$.

(c) ¿Se trata de un filtro paso bajo, paso alto o paso banda?

(d) Repita los apartados (b) y (c) para el filtro $y(n) = -0.9y(n-1) + 0.1x(n)$.

5.13 *Distorsión armónica en generadores digitales sinusoidales.* Un generador ideal sinusoidal genera la señal

$$x(n) = \cos 2\pi f_0 n, \qquad -\infty < n < \infty$$

que es periódica de período fundamental N si $f_0 = k_0/N$ y k_0, N son números relativamente primos. El espectro de una sinusoide "pura" consta de dos líneas en $k = k_0$ y $k = N - k_0$ (nos limitamos al intervalo fundamental $0 \le k \le N-1$). En la práctica, las aproximaciones que permiten calcular las muestras de una sinusoide de frecuencia relativa f_0 proporcionan una determinada cantidad de potencias que caen en otras frecuencias. Esta potencia espúrea produce distorsión, que se denomina *distorsión armónica*. Normalmente, la distorsión armónica se mide en términos de la *distorsión armónica total* (THD), que se define como la relación

$$\text{THD} = \frac{\text{potencia armónica espúrea}}{\text{potencia total}}$$

(a) Demuestre que

$$\text{THD} = 1 - 2\frac{|c_{k_0}|^2}{P_x}$$

donde

$$c_{k_0} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j(2\pi/N)k_0 n}$$

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

(b) Utilizando la aproximación de Taylor

$$\cos\phi = 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + \cdots$$

calcule un período de $x(n)$ para $f_0 = 1/96$, 1/32, 1/256 aumentando el número de términos en la expansión de Taylor de 2 a 8.

(c) Calcule la distorsión armónica total (THD) y dibuje la densidad espectral de potencia para cada sinusoide del apartado (b), así como para las sinusoides obtenidas utilizando la función coseno de la computadora. Comente los resultados.

5.14 *Medida de la distorsión armónica total en sinusoides cuantizadas.* Sea $x(n)$ una señal periódica sinusoidal de frecuencia $f_0 = k/N$, es decir,

$$x(n) = \operatorname{sen} 2\pi f_0 n$$

(a) Escriba un programa software que cuantifique la señal $x(n)$ en b bits o, lo que es equivalente, en $L = 2^b$ niveles utilizando redondeo. La señal resultante se designa mediante $x_q(n)$.

(b) Para $f_0 = 1/50$ calcule la THD de las señales cuantificadas $x_q(n)$ obtenidas empleando $b = 4$, 6, 8 y 16 bits.

(c) Repita el apartado (b) para $f_0 = 1/100$.

(d) Comente los resultados obtenidos en los apartados (b) y (c).

5.15 Considere el sistema discreto en el tiempo

$$y(n) = ay(n-1) + (1-a)x(n), \qquad n \geq 0$$

donde $a = 0.9$ e $y(-1) = 0$.

(a) Calcule y dibuje la salida $y_i(n)$ del sistema a las señales de entrada

$$x_i(n) = \operatorname{sen} 2\pi f_i n, \qquad 0 \leq n \leq 100$$

donde $f_1 = \frac{1}{4}$, $f_2 = \frac{1}{5}$, $f_3 = \frac{1}{10}$, $f_4 = \frac{1}{20}$.

(b) Calcule y dibuje el módulo y la fase de la respuesta del sistema y emplee estos resultados para explicar la respuesta del sistema a la señales dadas en el apartado (a).

5.16 Considere un sistema LTI con la respuesta al impulso $h(n) = (\frac{1}{3})^{|n|}$.

(a) Determine y dibuje el módulo y la fase, $H(\omega)|$ y $\sphericalangle H(\omega)$, de la respuesta.

(b) Determine y dibuje el módulo y la fase del espectro de las señales de entrada y de salida para las siguientes señales de entrada:

1. $x(n) = \cos\dfrac{3\pi n}{8}, -\infty < n < \infty$

2. $x(n) = \{\ldots, -1, 1, -1, \underset{\uparrow}{1}, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots\}$

5.17 Considere el filtro digital mostrado en la Figura P.5.17.

(a) Determine la relación de entrada–salida y la respuesta al impulso $h(n)$.

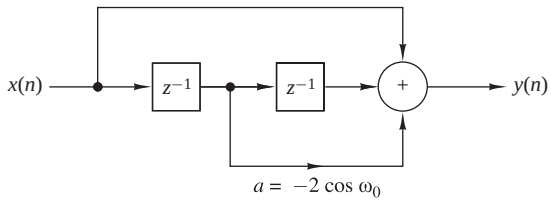


Figura P.5.17.

(b) Determine y dibuje el módulo $|H(\omega)|$ y la fase $\sphericalangle H(\omega)$ de la respuesta del filtro y halle qué frecuencias son bloqueadas por el filtro.

(c) Para $\omega_0 = \pi/2$, determine la salida $y(n)$ para la entrada

$$x(n) = 3\cos\left(\frac{\pi}{3}n + 30^\circ\right), \qquad -\infty < n < \infty$$

5.18 Considere el filtro FIR

$$y(n) = x(n) - x(n-4)$$

(a) Calcule y dibuje el módulo y la fase de la respuesta.

(b) Calcule la respuesta a la entrada

$$x(n) = \cos\frac{\pi}{2}n + \cos\frac{\pi}{4}n, \qquad -\infty < n < \infty$$

(c) Explique los resultados obtenidos en el apartado (b) en función de la respuesta dada en el apartado (a).

5.19 Determine la respuesta en régimen permanente del sistema

$$y(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(n-2)]$$

a la señal de entrada

$$x(n) = 5 + 3\cos\left(\frac{\pi}{2}n + 60^\circ\right) + 4\,\mathrm{sen}(\pi n + 45^\circ), \qquad -\infty < n < \infty$$

5.20 Como hemos mencionado en el Problema 5.9, un sistema LTI no puede generar en su salida frecuencias que sean diferentes de las aplicadas en su entrada. Por tanto, si un sistema crea frecuencias "nuevas", tiene que ser no lineal y/o variante en el tiempo. Indique si los siguientes sistemas son no lineales y/o variantes en el tiempo y determine el espectro de salida cuando el espectro de entrada es

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \pi/4 \\ 0, & \pi/4 \le |\omega| \le \pi \end{cases}$$

(a) $y(n) = x(2n)$

(b) $y(n) = x^2(n)$

(c) $y(n) = (\cos \pi n)x(n)$

5.21 Considere un sistema LTI con la respuesta al impulso

$$h(n) = \left[\left(\frac{1}{4}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right] u(n)$$

(a) Determine su función del sistema $H(z)$.

(b) ¿Es posible implementar este sistema utilizando un número finito de sumadores, multiplicadores y elementos de retardo unitarios? Si la respuesta es afirmativa, indique cómo.

(c) Realice un esquema de $|H(\omega)|$ utilizando el diagrama de polos y ceros.

(d) Determine la respuesta del sistema a la entrada

$$x(n) = (\frac{1}{4})^n u(n)$$

5.22 Un filtro FIR está descrito por la ecuación en diferencias

$$y(n) = x(n) - x(n-6)$$

(a) Calcule y dibuje el módulo y la fase de su respuesta.

(b) Determine su respuesta a las entradas

1. $x(n) = \cos\frac{\pi}{10}n + 3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{10}\right), \qquad -\infty < n < \infty$

2. $x(n) = 5 + 6\cos\left(\frac{2\pi}{5}n + \frac{\pi}{2}\right), \qquad -\infty < n < \infty$

5.23 La respuesta en frecuencia de un filtro paso banda ideal está dada por

$$H(\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| \leq \frac{\pi}{8} \\ 1, & \frac{\pi}{8} < |\omega| < \frac{3\pi}{8} \\ 0, & \frac{3\pi}{8} \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

(a) Determine su respuesta al impulso.

(b) Demuestre que esta respuesta al impulso se puede expresar como el producto de $\cos(n\pi/4)$ por la respuesta al impulso de un filtro paso bajo.

5.24 Considere el sistema descrito por la ecuación en diferencias

$$y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + x(n) + \frac{1}{2}x(n-1)$$

(a) Determine su respuesta al impulso.

(b) Determine la respuesta en frecuencia:

1. A partir de la respuesta al impulso.

2. A partir de la ecuación en diferencias.

(c) Determine su respuesta a la entrada

$$x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}\right), \qquad -\infty < n < \infty$$

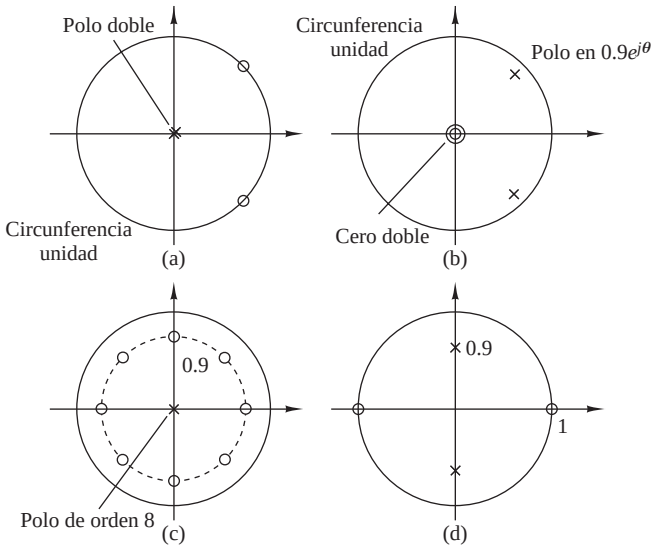


Figura P.5.25.

5.25 Dibuje de forma aproximada el módulo $|H(\omega)|$ de las transformadas de Fourier correspondientes a los patrones de polos y ceros de los sistemas dados en la Figura P.5.25.

5.26 Diseñe un filtro FIR que bloquee por completo la frecuencia $\omega_0 = \pi/4$ y luego calcule la salida si la entrada es

$$x(n) = \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}n\right)u(n)$$

para $n = 0, 1, 2, 3, 4$. ¿Se ajusta el filtro a sus expectativas? Explique su respuesta.

5.27 Un filtro digital se caracteriza por las siguientes propiedades:

1. Es un filtro paso alto y tiene un polo y un cero.
2. El polo se encuentra a una distancia de $r = 0.9$ del origen del plano z.
3. Las señales constantes no pasan a través del sistema.

(a) Dibuje el patrón de polos y ceros del filtro y determine su función del sistema $H(z)$.

(b) Calcule el módulo $|H(\omega)|$ y la fase $\sphericalangle H(\omega)$ de la respuesta del filtro.

(c) Normalice la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ de modo que $|H(\pi)| = 1$.

(d) Determine la relación de entrada–salida (ecuación en diferencias) del filtro en el dominio del tiempo.

(e) Calcule la salida del sistema si la entrada es

$$x(n) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}n + 45^\circ\right), \qquad -\infty < n < \infty$$

(Puede utilizar argumentos algebraicos o geométricos.)

5.28 Un filtro digital causal de primer orden se describe mediante la función de sistema

$$H(z) = b_0\,\frac{1 + bz^{-1}}{1 + az^{-1}}$$

(a) Dibuje las realizaciones de la forma directa I y la forma directa II de este filtro y determine las ecuaciones en diferencias correspondientes.

(b) Para $a = 0.5$ y $b = -0.6$, dibuje el patrón de polos–ceros. ¿Es estable el sistema? ¿Por qué?

(c) Para $a = -0.5$ y $b = 0.5$, determine b_0, de modo que el valor máximo de $|H(\omega)|$ sea igual a 1.

(d) Dibuje el módulo $|H(\omega)|$ y la fase $\sphericalangle H(\omega)$ de la respuesta del filtro obtenido en el apartado (c).

(e) En una aplicación específica se sabe que $a = 0.8$. ¿Amplifica el filtro resultante las altas o las bajas frecuencias de entrada? Seleccione el valor de b de modo que se mejoren las características de este filtro (es decir, obtenga un filtro paso bajo o paso alto mejor).

5.29 Deduzca la expresión para la frecuencia de resonancia de un filtro de dos polos en $p_1 = re^{j\theta}$ y $p_2 = p_1^*$, dada por (5.4.25).

5.30 Determine y dibuje el módulo y la fase de la respuesta del filtro de Hanning caracterizado por la ecuación en diferencias (media móvil)

$$y(n) = \frac{1}{4}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) + \frac{1}{4}x(n-2)$$

5.31 Un sistema LTI causal excitado por la entrada

$$x(n) = (\frac{1}{4})^n u(n) + u(-n-1)$$

produce una salida $y(n)$ cuya transformada z es

$$Y(z) = \frac{-\frac{3}{4}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1+z^{-1})}$$

(a) Determine la función del sistema $H(z)$ y su ROC.

(b) Determine la salida $y(n)$ del sistema. (*Consejo:* la cancelación de polos aumenta la ROC original.)

5.32 Determine los coeficientes de un filtro FIR de fase lineal

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2)$$

tal que:

(a) Rechace completamente una componente de frecuencia en $\omega_0 = 2\pi/3$.

(b) Su respuesta en frecuencia esté normalizada de modo que $H(0) = 1$.

(c) Calcule y dibuje el módulo y la fase de la respuesta del filtro para comprobar si satisface los requisitos.

5.33 Determine la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ de los siguientes filtros de media móvil.

(a) $y(n) = \dfrac{1}{2M+1}\displaystyle\sum_{k=-M}^{M} x(n-k)$

(b) $y(n) = \dfrac{1}{4M}x(n+M) + \dfrac{1}{2M}\displaystyle\sum_{k=-M+1}^{M-1} x(n-k) + \dfrac{1}{4M}x(n-M)$

¿Qué filtro proporciona el mejor suavizado? ¿Por qué?

5.34 Calcule el módulo y la fase de la respuesta de un filtro con la función de sistema

$$H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots + z^{-8}$$

Si la frecuencia de muestreo es $F_s = 1$ kHz, determine las frecuencias de las sinusoides analógicas que no pueden pasar a través del filtro.

5.35 Un sistema de segundo orden tiene un polo doble en $p_{1,2} = 0.5$ y dos ceros en

$$z_{1,2} = e^{\pm j3\pi/4}$$

Utilizando argumentos geométricos, seleccione la ganancia G del filtro de modo que $|H(0)| = 1$.

5.36 En este problema consideramos el efecto de un solo cero sobre la respuesta en frecuencia de un sistema. Sea $z = re^{j\theta}$ un cero que se encuentra dentro de la circunferencia unidad $(r < 1)$. Luego

$$\begin{aligned} H_z(\omega) &= 1 - re^{j\theta}e^{-j\omega} \\ &= 1 - r\cos(\omega - \theta) + jr\,\mathrm{sen}(\omega - \theta) \end{aligned}$$

(a) Demuestre que el módulo de la respuesta es

$$|H_z(\omega)| = [1 - 2r\cos(\omega - \theta) + r^2]^{1/2}$$

o, lo que es equivalente,

$$20\log_{10}|H_z(\omega)| = 10\log_{10}[1 - 2r\cos(\omega - \theta) + r^2]$$

(b) Demuestre que la fase de la respuesta está dada por

$$\Theta_z(\omega) = \tan^{-1}\frac{r\,\mathrm{sen}(\omega - \theta)}{1 - r\cos(\omega - \theta)}$$

(c) Demuestre que el retardo de grupo está dado por

$$\tau_g(\omega) = \frac{r^2 - r\cos(\omega - \theta)}{1 + r^2 - 2r\cos(\omega - \theta)}$$

(d) Dibuje el módulo $|H(\omega)|_{\mathrm{dB}}$, la fase $\Theta(\omega)$ y el retardo de grupo $\tau_g(\omega)$ para $r = 0.7$ y $\theta = 0$, $\pi/2$ y π.

5.37 En este problema consideramos el efecto de un solo polo sobre la respuesta en frecuencia de un sistema. Sea

$$H_p(\omega) = \frac{1}{1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}}, \qquad r < 1$$

Demuestre que

$$\begin{aligned} |H_p(\omega)|_{\mathrm{dB}} &= -|H_z(\omega)|_{\mathrm{dB}} \\ \sphericalangle H_p(\omega) &= -\sphericalangle H_z(\omega) \\ \tau_g^p(\omega) &= -\tau_g^z(\omega) \end{aligned}$$

donde $H_z(\omega)$ y $\tau_g^z(\omega)$ se definen en el Problema 5.36.

5.38 En este problema consideramos el efecto de pares de polos y ceros complejos conjugados sobre la respuesta en frecuencia de un sistema. Sea

$$H_z(\omega) = (1 - re^{j\theta}e^{-j\omega})(1 - re^{-j\theta}e^{-j\omega})$$

(a) Demuestre que el módulo de la respuesta en decibelios es

$$\begin{aligned}|H_z(\omega)|_{\text{dB}} = {} & 10\log_{10}[1 + r^2 - 2r\cos(\omega - \theta)] \\ & +10\log_{10}[1 + r^2 - 2r\cos(\omega + \theta)]\end{aligned}$$

(b) Demuestre que la fase de la respuesta está dada por

$$\Theta_z(\omega) = \tan^{-1}\frac{r\,\text{sen}(\omega - \theta)}{1 - r\cos(\omega - \theta)} + \tan^{-1}\frac{r\,\text{sen}(\omega + \theta)}{1 - r\cos(\omega + \theta)}$$

(c) Demuestre que el retardo de grupo se define como

$$\tau_g^z(\omega) = \frac{r^2 - r\cos(\omega - \theta)}{1 + r^2 - 2r\cos(\omega - \theta)} + \frac{r^2 - r\cos(\omega + \theta)}{1 + r^2 - 2r\cos(\omega + \theta)}$$

(d) Si $H_p(\omega) = 1/H_z(\omega)$, demuestre que

$$\begin{aligned}|H_p(\omega)|_{\text{dB}} &= -|H_z(\omega)|_{\text{dB}} \\ \Theta_p(\omega) &= -\Theta_z(\omega) \\ \tau_g^p(\omega) &= -\tau_g^z(\omega)\end{aligned}$$

(e) Dibuje $|H_p(\omega)|$, $\Theta_p(\omega)$ y $\tau_g^p(\omega)$ para $\tau = 0.9$ y $\theta = 0, \pi/2$.

5.39 Determine el ancho de banda a 3-dB de los filtros $(0 < a < 1)$

$$\begin{aligned}H_1(z) &= \frac{1 - a}{1 - az^{-1}} \\ H_2(z) &= \frac{1 - a}{2}\frac{1 + z^{-1}}{1 - az^{-1}}\end{aligned}$$

¿Cuál es el mejor filtro paso bajo?

5.40 Diseñe un oscilador digital con fase ajustable, es decir, un filtro digital que genere la señal

$$y(n) = \cos(\omega_0 n + \theta)u(n)$$

5.41 Este problema proporciona otra deducción de la estructura para el oscilador acoplado considerando el sistema

$$y(n) = ay(n - 1) + x(n)$$

para $a = e^{j\omega_0}$.

Sea $x(n)$ real. Entonces $y(n)$ es compleja. Por tanto,

$$y(n) = y_R(n) + jy_I(n)$$

(a) Determine las ecuaciones que describen un sistema con una entrada $x(n)$ y las dos salidas $y_R(n)$ e $y_I(n)$.

(b) Defina un diagrama de bloques

(c) Demuestre que si $x(n) = \delta(n)$, entonces

$$y_R(n) = (\cos \omega_0 n)u(n)$$
$$y_I(n) = (\operatorname{sen} \omega_0 n)u(n)$$

(d) Calcule $y_R(n), y_I(n), n = 0, 1, \ldots, 9$ para $\omega_0 = \pi/6$. Compárelas con los valores verdaderos del seno y el coseno.

5.42 Considere un filtro con la función del sistema

$$H(z) = b_0 \frac{(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1})}{(1 - re^{j\omega_0} z^{-1})(1 - re^{-j\omega_0} z^{-1})}$$

(a) Dibuje el patrón de polos y ceros.

(b) Utilizando argumentos geométricos, demuestre que para $r \simeq 1$, el sistema es un filtro de hendidura y proporcione un esquema del módulo de la respuesta si $\omega_0 = 60°$.

(c) Para $\omega_0 = 60°$, seleccione b_0 de modo que el valor máximo de $|H(\omega)|$ sea 1.

(d) Dibuje una realización de la forma directa II del sistema.

(e) Determine el ancho de banda a 3-dB aproximado del sistema.

5.43 Diseñe un filtro digital FIR que rechace una interferencia sinusoidal a 60-Hz muy intensa que contamina a una señal sinusoidal útil a 200-Hz. Determine la ganancia del filtro de modo que no varíe la amplitud de la señal útil. El filtro funciona a la frecuencia de muestreo $F_s = 500$ muestras/s. Calcule la salida del filtro si la entrada es una sinusoide a 60-Hz o una sinusoide de 200-Hz con amplitud unidad. ¿Cómo es el rendimiento del filtro en comparación con los requisitos?

5.44 Determine la ganancia b_0 para el resonador digital descrito por (5.4.28), de modo que $|H(\omega_0)| = 1$.

5.45 Demuestre que la ecuación en diferencias dada por (5.4.52) se puede obtener aplicando la identidad trigonométrica

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

donde $\alpha = (n+1)\omega_0$, $\beta = (n-1)\omega_0$ e $y(n) = \cos \omega_0 n$. Demuestre que la señal sinusoidal $y(n) = A \cos \omega_0 n$ se puede generar a partir de la expresión (5.4.52) usando las condiciones iniciales $y(-1) = A \cos \omega_0$ e $y(-2) = A \cos 2\omega_0$.

5.46 Utilice la identidad trigonométrica dada por (5.4.53) con $\alpha = n\omega_0$ y $\beta = (n-2)\omega_0$ para deducir la ecuación en diferencias que permite generar la señal sinusoidal $y(n) = A \operatorname{sen} n\omega_0$. Determine las correspondientes condiciones iniciales.

5.47 Utilizando los pares de transformadas z de la Tabla 3.3 números 8 y 9, determine las ecuaciones en diferencias para los osciladores digitales que tienen las siguientes respuestas al impulso: $h(n) = A \cos n\omega_0 u(n)$ y $h(n) = A \operatorname{sen} n\omega_0 u(n)$, respectivamente.

5.48 Determine la estructura del oscilador acoplado combinando la estructura para los osciladores digitales obtenida en el Problema 5.47.

5.49 Convierta el filtro paso alto con la función de sistema

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - az^{-1}}, \qquad a < 1$$

en un filtro de hendidura que rechace la frecuencia $\omega_0 = \pi/4$ y sus armónicos.

(a) Determine la ecuación en diferencias.

(b) Dibuje el patrón de polos y ceros.

(c) Dibuje el módulo de la respuesta para ambos filtros.

5.50 Seleccione L y M para un filtro lunar de modo que presente bandas de paso estrechas en $(k \pm \Delta F)$ ciclos/día, donde $k = 1, 2, 3, \ldots$ y $\Delta F = 0.067726$.

5.51 **(a)** Demuestre que los sistemas correspondientes a los patrones de polos y ceros de la Figura 5.4.16 son paso todo.

(b) ¿Qué cantidad de retardos y multiplicadores son necesarios para obtener una implementación eficiente de un sistema paso todo de segundo orden?

5.52 Se necesita un filtro digital de hendidura para eliminar un zumbido a 60-Hz no deseado asociado con la fuente de alimentación de una aplicación de registro ECG. La frecuencia de muestreo utilizada es $F_s = 500$ muestras/s. **(a)** Diseñe un filtro FIR de hendidura de segundo orden y **(b)** un filtro de hendidura con polos y ceros de segundo orden para este propósito. En ambos casos, seleccione la ganancia b_0 de modo que $|H(\omega)| = 1$ para $\omega = 0$.

5.53 Determine los coeficientes $\{h(n)\}$ de un filtro FIR de fase lineal paso alto de longitud $M = 4$ que tiene una respuesta al impulso antisimétrica $h(n) = -h(M-1-n)$ y una respuesta en frecuencia que satisface las condiciones

$$\left|H\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{1}{2}, \qquad \left|H\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right| = 1$$

5.54 En un intento de diseñar un filtro digital paso banda de cuatro polos cuyo módulo de la respuesta es

$$|H_d(\omega)| = \begin{cases} 1, & \dfrac{\pi}{6} \le \omega \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

seleccionamos los cuatro polos en

$$p_{1,2} = 0.8e^{\pm j^2\pi/9}$$
$$p_{3,4} = 0.8e^{\pm j^4\pi/9}$$

y cuatro ceros en

$$z_1 = 1, \qquad z_2 = -1, \qquad z_{3,4} = e^{\pm 3\pi/4}$$

(a) Determine el valor de la ganancia de modo que

$$\left|H\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right| = 1$$

(b) Determine la función del sistema $H(z)$.

(c) Determine el módulo de la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ para $0 \leq \omega \leq \pi$ y compárelo con la respuesta deseada $|H_d(\omega)|$.

5.55 Un sistema discreto en el tiempo con entrada $x(n)$ y salida $y(n)$ se describe en el dominio de la frecuencia mediante la relación

$$Y(\omega) = e^{-j2\pi\omega}X(\omega) + \frac{dX(\omega)}{d\omega}$$

(a) Calcule la respuesta del sistema para la entrada $x(n) = \delta(n)$.

(b) Compruebe si el sistema es LTI y estable.

5.56 Considere un filtro paso bajo ideal con la respuesta al impulso $h(n)$ y la respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

Determine la respuesta en frecuencia del filtro definido por

$$g(n) = \begin{cases} h\left(\dfrac{n}{2}\right), & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$$

5.57 Considere el sistema mostrado en la Figura P.5.57. Determine su respuesta al impulso y su respuesta en frecuencia si el sistema $H(\omega)$ es:

(a) Paso bajo con una frecuencia de corte ω_c.

(b) Paso alto con una frecuencia de corte ω_c.

5.58 Los inversores de frecuencia se han utilizado durante mucho tiempo para distorsionar señales de voz. En efecto, una señal de voz $x(n)$ se hace ininteligible si se invierte su espectro como se muestra en la Figura P.5.58.

(a) Determine cómo se puede llevar a cabo la inversión en frecuencia en el dominio del tiempo.

(b) Diseñe un distorsionador. (*Consejo:* las operaciones necesarias son muy simples y se pueden llevar a cabo muy simplemente en tiempo real.)

5.59 Un filtro paso bajo queda descrito mediante la ecuación en diferencias

$$y(n) = 0.9y(n-1) + 0.1x(n)$$

(a) Haciendo una traslación en frecuencia de $\pi/2$, transforme el filtro en un filtro paso banda.

(b) ¿Cuál es la respuesta al impulso del filtro paso banda?

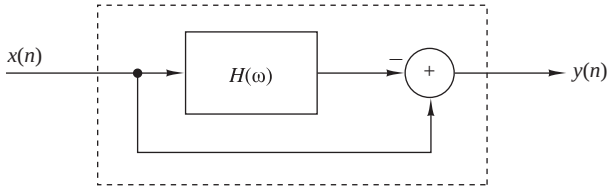


Figura P.5.57.

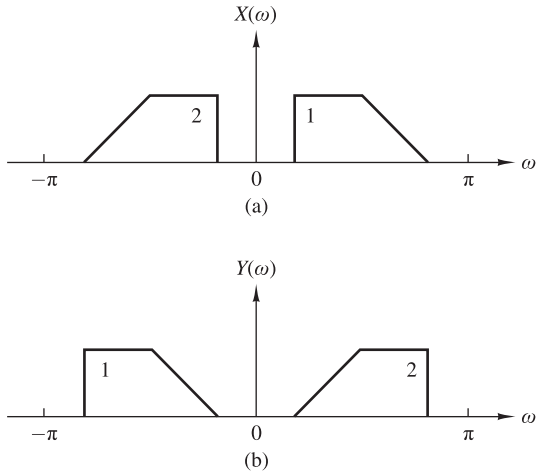


Figura P.5.58. (a) Espectro original. (b) Espectro invertido en frecuencia.

(c) ¿Cuál es el principal problema del método de traslación en frecuencia para transformar un filtro paso bajo prototipo en un filtro paso banda?

5.60 Considere un sistema con una respuesta al impulso real $h(n)$ y una respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\theta(\omega)}$$

La magnitud

$$D = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 h^2(n)$$

proporciona una medida de la "duración efectiva" de $h(n)$.

(a) Exprese D en función de $H(\omega)$.

(b) Demuestre que D se minimiza para $\theta(\omega) = 0$.

5.61 Considere el filtro paso bajo

$$y(n) = ay(n-1) + bx(n), \qquad 0 < a < 1$$

(a) Determine b de modo que $|H(0)| = 1$.

(b) Determine el ancho de banda a 3-dB ω_3 para el filtro normalizado del apartado (a).

(c) ¿Cómo afecta la elección del parámetro a a ω_3?

(d) Repita los apartados (a) hasta (c) para el filtro paso alto obtenido seleccionando $-1 < a < 0$.

5.62 Dibuje el módulo y la fase de la respuesta del canal multitrayecto

$$y(n) = x(n) + \alpha x(n-M), \qquad \alpha > 0$$

para $\alpha << 1$.

5.63 Determine las funciones del sistema y las posiciones de los polos y los ceros para los sistemas mostrados en las Figuras P.5.63(a) hasta (c), e indique si los sistemas son o no estables.

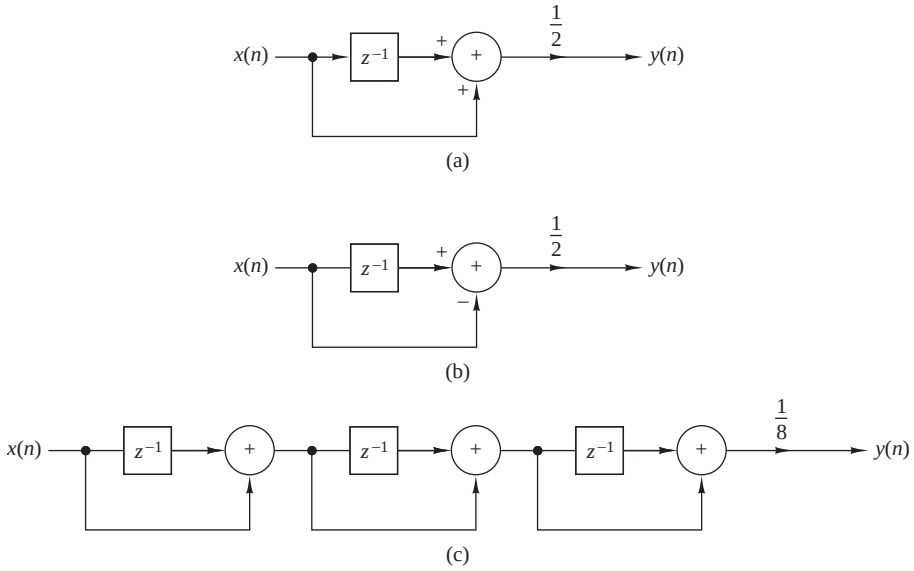


Figura P.5.63.

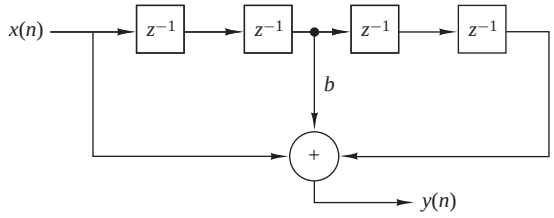


Figura P.5.64.

5.64 Determine y dibuje la respuesta al impulso y el módulo y la fase de la respuesta del filtro FIR mostrado en la Figura P.5.64 para $b = 1$ y $b = -1$.

5.65 Considere el sistema

$$y(n) = x(n) - 0.95x(n-6)$$

(a) Dibuje su patrón de polos y ceros.

(b) Dibuje el módulo de la respuesta utilizando el diagrama de polos y ceros.

(c) Determine la función del sistema de su sistema inverso causal.

(d) Dibuje el módulo de la respuesta del sistema inverso utilizando el diagrama de polos y ceros.

5.66 Determine la respuesta al impulso y la ecuación en diferencias para todos los sistemas posibles especificados por las siguientes funciones de sistema

(a) $H(z) = \dfrac{z^{-1}}{1 - z^{-1} - z^{-2}}$

(b) $H(z) = \dfrac{1}{1 - e^{-4a}z^{-4}}, \qquad 0 < a < 1$

5.67 Determine la respuesta al impulso de un sistema LTI causal que produce la respuesta

$$y(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, -1, 3, -1, 6\}$$

cuando se excita con la señal de entrada

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 1, 2\}$$

5.68 El sistema

$$y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + x(n)$$

se excita con la entrada

$$x(n) = (\frac{1}{4})^n u(n)$$

Determine las secuencias $r_{xx}(l)$, $r_{hh}(l)$, $r_{xy}(l)$ y $r_{yy}(l)$.

5.69 Determine si los siguientes sistemas FIR son sistemas de fase mínima.

(a) $h(n) = \{\underset{\uparrow}{10}, 9, -7, -8, 0, 5, 3\}$

(b) $h(n) = \{\underset{\uparrow}{5}, 4, -3, -4, 0, 2, 1\}$

5.70 ¿Es posible determinar los coeficientes del sistema de sólo polos

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

si se conoce su orden N y los valores $h(0), h(1), \ldots, h(L-1)$ de su respuesta al impulso? ¿Cómo? ¿Qué ocurre si no conocemos N?

5.71 Considere un sistema con la respuesta al impulso

$$h(n) = b_0\delta(n) + b_1\delta(n-D) + b_2\delta(n-2D)$$

(a) Explique por qué genera el sistema ecos espaciados D muestras.

(b) Determine el módulo y la fase de la respuesta del sistema.

(c) Demuestre que para $|b_0 + b_2| << |b_1|$, las posiciones máxima y mínima de $|H(\omega)|^2$ se encuentran en

$$\omega = \pm\frac{k}{D}\pi, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

(d) Dibuje $|H(\omega)|$ y $\sphericalangle H(\omega)$ para $b_0 = 0.1$, $b_1 = 1$ y $b_2 = 0.05$. Comente los resultados.

5.72 Considere el sistema de polos y ceros

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1 + bz^{-1}}{1 + az^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

(a) Determine $h(0)$, $h(1)$, $h(2)$ y $h(3)$ en función de a y b.

(b) Sea $r_{hh}(l)$ la autocorrelación de $h(n)$. Determine $r_{hh}(0)$, $r_{hh}(1)$, $r_{hh}(2)$ y $r_{hh}(3)$ en función de a y b.

5.73 Sea $x(n)$ una secuencia real de fase mínima. Modifique $x(n)$ para obtener una secuencia real de fase mínima $y(n)$ tal que $y(0) = x(0)$ e $y(n) = |x(n)|$.

5.74 Se sabe que la respuesta en frecuencia de un sistema LTI estable es real y par. ¿Es estable el sistema inverso?

5.75 Sea $h(n)$ un filtro real cuya fase de la respuesta es no lineal o lineal distinta de cero. Demuestre que las siguientes operaciones son equivalentes a filtrar la señal $x(n)$ con un filtro de fase cero.

(a) $g(n) = h(n) * x(n)$
$f(n) = h(n) * g(-n)$
$y(n) = f(-n)$

(b) $g(n) = h(n) * x(n)$
$f(n) = h(n) * x(-n)$
$y(n) = g(n) + f(-n)$

(*Consejo:* determine la respuesta en frecuencia del sistema compuesto $y(n) = H[x(n)]$.)

5.76 Compruebe la validez de las siguientes afirmaciones:

(a) La convolución de dos secuencias de fase mínima siempre es una secuencia de fase mínima.

(b) La suma de dos secuencias de fase mínima es siempre de fase mínima.

5.77 Determine el sistema de fase mínima cuyo módulo al cuadrado de la respuesta está dado por:

(a) $|H(\omega)|^2 = \dfrac{\frac{5}{4} - \cos\omega}{\frac{10}{9} - \frac{2}{3}\cos\omega}$

(b) $|H(\omega)|^2 = \dfrac{2(1-a^2)}{(1+a^2) - 2a\cos\omega}, \qquad |a| < 1$

5.78 Considere un sistema FIR con la siguiente función del sistema:

$$H(z) = (1 - 0.8e^{j\pi/2}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/2}z^{-1})(1 - 1.5e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 1.5e^{-j\pi/4}z^{-1})$$

(a) Determine todos los sistemas que tienen el mismo módulo. ¿Cuál es el sistema de fase mínima?

(b) Determine la respuesta al impulso de todos los sistemas del apartado (a).

(c) Dibuje la energía parcial

$$E(n) = \sum_{k=0}^{n} h^2(n)$$

para cada sistema y utilícela para identificar los sistemas de fase mínima y de fase máxima.

5.79 Se sabe que el sistema causal

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

es inestable.

Modificamos este sistema cambiando su respuesta al impulso $h(n)$ por

$$h'(n) = \lambda^n h(n)u(n)$$

(a) Demuestre que seleccionando apropiadamente λ podemos obtener un nuevo sistema estable.

(b) ¿Cuál es la ecuación en diferencias que describe al nuevo sistema?

5.80 Dada una señal $x(n)$, podemos crear ecos y reverberaciones retardando y aplicando un cambio de escala como sigue

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k x(n - kD)$$

donde D es un entero positivo y $g_k > g_k{-}_1 > 0$.

(a) Explique por qué se puede utilizar el filtro peine

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-D}}$$

como un reverberador (es decir, como un dispositivo que genera reverberaciones artificiales). (*Consejo:* determine y dibuje su respuesta al impulso.)

(b) En la práctica, se usa el filtro peine paso todo

$$H(z) = \frac{z^{-D} - a}{1 - az^{-D}}$$

para construir reverberadores digitales conectando en cascada de tres a cinco filtros de este tipo y seleccionando apropiadamente los parámetros a y D. Calcule y dibuje la respuesta al impulso de dos reverberadores así obtenidos conectando en cascada tres secciones con los parámetros siguientes

UNIDAD 1			UNIDAD 2		
Sección	D	a	Sección	D	a
1	50	0.7	1	50	0.7
2	40	0.665	2	17	0.77
3	32	0.63175	3	6	0.847

(c) La diferencia entre eco y reverberación es que en un eco puro se producen repeticiones claras de la señal, pero con las reverberaciones no. ¿Cómo se refleja esto en la respuesta al impulso del reverberador? ¿Qué unidad del apartado (b) es el mejor reverberador?

(d) Si los retardos D_1, D_2, D_3 de una determinada unidad son números primos, la respuesta al impulso de la unidad es más "densa". Explique por qué.

(e) Dibuje la fase de la respuesta de las unidades 1 y 2, y comente los resultados.

(f) Dibuje $h(n)$ para D_1, D_2 y D_3 no primos. ¿Qué puede comentar?

Puede encontrar más información sobre esta aplicación en un documento de J. A. Moorer, "Signal Processing Aspects of Computer Music: A Survey," *Proc. IEEE,* Vol. 65, No. 8, Agosto 1977, págs. 1108–1137.

5.81 Diseñe un filtro paso bajo de tercer orden con la frecuencia de corte en $\omega_c = \pi/9$ radianes/intervalo de muestreo aplicando el método de diseño de prueba y error. Comience con

(a) $z_1 = z_2 = z_3 = 0, p_1 = r, p_{2,3} = re^{\pm j\omega_c}, r = 0.8$

(b) $r = 0.9, z_1 = z_2 = z_3 = -1$

5.82 Una señal de voz con un ancho de banda $B = 10$ kHz se muestrea a $F_2 = 20$ kHz. Suponga que la señal se distorsiona mediante cuatro sinusoides de frecuencias

$$F_1 = 10{,}000\,\text{Hz}, \quad F_3 = 7778\,\text{Hz}$$
$$F_2 = 8889\,\text{Hz}, \quad F_4 = 6667\,\text{Hz}$$

(a) Diseñe un filtro FIR que elimine dichas componentes de frecuencia.

(b) Seleccione la ganancia del filtro de modo que $|H(0)| = 1$ y luego dibuje el módulo y la fase de la respuesta logarítmica del filtro.

(c) ¿Satisface el filtro los requisitos? ¿Recomendaría el uso de este filtro para aplicaciones prácticas?

5.83 Calcule y dibuje la respuesta en frecuencia de un resonador digital con $\omega = \pi/6$ y $r = 0.6, 0.9, 0.99$. En cada caso, calcule el ancho de banda y la frecuencia de resonancia a partir de la gráfica y compruebe si están de acuerdo dichas medidas con los resultados teóricos.

5.84 La función de sistema de un canal de comunicaciones está dada por

$$H(z) = (1 - 0.9e^{j0.4\pi}z^{-1})(1 - 0.9e^{-j0.4\pi}z^{-1})(1 - 1.5e^{j0.6\pi}z^{-1})(1 - 1.5e^{-j0.6\pi}z^{-1})$$

Determine la función del sistema $H_c(z)$ de un sistema de compensación causal y estable, de modo que la interconexión en cascada de los dos sistemas presente una respuesta de módulo plano. Dibuje los diagramas de polos y ceros, y el módulo y la fase de la respuesta de todos los sistemas implicados en el proceso de análisis. [*Consejo:* utilice la descomposición $H(z) = H_{\text{ap}}(z)H_{\min}(z)$.]

6

Muestreo y reconstrucción de señales

En el Capítulo 1 nos hemos ocupado del muestreo de señales continuas en el tiempo y hemos demostrado que si las señales son de banda limitada es posible reconstruir la señal original a partir de las muestras, siempre que la tasa de muestreo sea al menos dos veces la frecuencia más alta contenida en la señal. También hemos descrito brevemente las operaciones subsiguientes de cuantificación y codificación que son necesarias para convertir una señal analógica en una señal disgital adecuada para el tratamiento digital de la misma.

En este capitulo vamos a ocuparnos más en detalle del muestreo en el dominio del tiempo, de la conversión analógica–digital (A/D) (cuantificación y codificación) y de la conversión digital–analógica (D/A) (reconstrucción de la señal). Consideraremos también el muestreo de señales que están caracterizadas como señales paso banda. El último tema que vamos a tratar es el uso del sobremuestreo y la modulación sigma-delta en el diseño de alta precisión de convertidores A/D.

6.1 Muestreo y reconstrucción ideales de señales continuas en el tiempo

Para procesar una señal continua en el tiempo utilizando técnicas de tratamiento digital de señales, es necesario convertir la señal en una secuencia de números. Como se ha visto en la Sección 1.4, normalmente, esto se hace muestreando la señal analógica, por ejemplo $x_a(t)$, periódicamente cada T segundos para generar una señal discreta en el tiempo $x(n)$ dada por

$$x(n) = x_a(nT), \qquad -\infty < n < \infty \tag{6.1.1}$$

La relación (6.1.1) describe el proceso de muestreo en el dominio del tiempo. Como se ha visto en el Capítulo 1, la frecuencia de muestreo $F_s = 1/T$ debe elegirse lo suficientemente grande como para que el muestreo no cause ninguna pérdida de información espectral (sin *aliasing*). De hecho, si el espectro de la señal analógica

puede recuperarse a partir del espectro de la señal discreta en el tiempo, no existe pérdida de información. En consecuencia, vamos a estudiar el proceso de muestreo calculando la relación entre los espectros de las señales $x_a(t)$ y $x(n)$.

Si $x_a(t)$ es una señal aperiódica con energía finita, su espectro (tensión) queda determinado por la transformada de Fourier

$$X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi Ft}\, dt \tag{6.1.2}$$

y la señal $x_a(t)$ se puede recuperar a partir de su espectro mediante la transformada inversa de Fourier

$$x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi Ft}\, dF \tag{6.1.3}$$

Observe que es necesario emplear las componentes de frecuencia dentro del rango de frecuencias infinito $-\infty < F < \infty$ para recuperar la señal $x_a(t)$ si la señal $x_a(t)$ no es de banda limitada.

El espectro de una señal discreta en el tiempo $x(n)$, obtenida muestreando $x_a(t)$, está dado por la transformada de Fourier

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \tag{6.1.4}$$

o, lo que es equivalente,

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi fn} \tag{6.1.5}$$

La secuencia $x(n)$ se puede recuperar a partir de su espectro $X(\omega)$ o $X(f)$ mediante la transformada inversa

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{j2\pi fn}\, df \end{aligned} \tag{6.1.6}$$

Para determinar la relación entre los espectros de la señal discreta en el tiempo y la señal analógica, nos fijamos en que el muestreo periódico impone una relación entre las variables independientes t y n en las señales $x_a(t)$ y $x(n)$, respectivamente. Es decir,

$$t = nT = \frac{n}{F_s} \tag{6.1.7}$$

Esta relación en el dominio del tiempo implica la correspondiente relación entre las variables de frecuencia F y f en $X_a(F)$ y $X(f)$, respectivamente.

Así, sustituyendo (6.1.7) en (6.1.3) tenemos

$$x(n) \equiv x_a(nT) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi nF/F_s}\, dF \tag{6.1.8}$$

Si comparamos (6.1.6) con (6.1.8), concluimos que

$$\int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{j2\pi fn}\, df = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi nF/F_s}\, dF \tag{6.1.9}$$

A partir del desarrollo realizado en el Capítulo 1 sabemos que un muestreo periódico impone una relación entre las variables de frecuencia F y f de las correspondientes señales analógica y discreta en el tiempo, respectivamente. Es decir,

$$f = \frac{F}{F_s} \tag{6.1.10}$$

Con la ayuda de (6.1.10), podemos hacer un simple cambio de variable en (6.1.9) y obtener así el resultado

$$\frac{1}{F_s}\int_{-F_s/2}^{F_s/2} X(F)e^{j2\pi nF/F_s}\,dF = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F)e^{j2\pi nF/F_s}\,dF \tag{6.1.11}$$

Centremos ahora nuestra atención en la integral del lado derecho de la Ecuación (6.1.11). El rango de integración de esta integral se puede dividir en un número infinito de intervalos de anchura F_s. Luego la integral en el rango infinito se puede expresar como una suma de integrales, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_a(F)e^{j2\pi nF/F_s}\,dF = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{(k-1/2)F_s}^{(k+1/2)F_s} X_a(F)e^{j2\pi nF/F_s}\,dF \tag{6.1.12}$$

Observe que $X_a(F)$ en el intervalo de frecuencias de $(k-\frac{1}{2})F_s$ a $(k+\frac{1}{2})F_s$ es idéntica a $X_a(F-kF_s)$ en el intervalo de $-F_s/2$ a $F_s/2$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{(k-1/2)F_s}^{(k+1/2)F_s} X_a(F)e^{j2\pi nF/F_s}\,dF &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-F_s/2}^{F_s/2} X_a(F-kF_s)e^{j2\pi nF/F_s}\,dF \\ &= \int_{-F_s/2}^{F_s/2}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F-kF_s)\right]e^{j2\pi nF/F_s}\,dF \end{aligned} \tag{6.1.13}$$

donde hemos utilizado la periodicidad de la exponencial compleja,

$$e^{j2\pi n(F+kF_s)/F_s} = e^{j2\pi nF/F_s}$$

Comparando las expresiones (6.1.13), (6.1.12) y (6.1.11), concluimos que

$$X(F) = F_s\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F-kF_s) \tag{6.1.14}$$

o, lo que es equivalente,

$$X(f) = F_s\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a[(f-k)F_s] \tag{6.1.15}$$

Ésta es la relación buscada entre el espectro $X(F)$ o $X(f)$ de la señal discreta en el tiempo y el espectro $X_a(F)$ de la señal analógica. El lado derecho de la Ecuación (6.1.14) o (6.1.15) consta de una repetición periódica del espectro escalado $F_sX_a(F)$ con período F_s. Esta periodicidad es necesaria porque el espectro $X(f)$ de la señal discreta en el tiempo es periódica de período $f_p = 1$ o $F_p = F_s$.

Por ejemplo, supongamos que el espectro de una señal analógica de banda limitada es el mostrado en la Figura 6.1.1(a). El espectro es igual a cero para $|F| \geq B$. Si la frecuencia de muestreo F_s se elige para que sea mayor que $2B$, el espectro $X(F_s)$ de la señal discreta en el tiempo será como el mostrado en la Figura 6.1.1(b). Así, si la frecuencia de muestreo F_s se selecciona tal que $F_s \geq 2B$, donde $2B$ es la frecuencia de Nyquist, entonces

$$X(F) = F_sX_a(F), \qquad |F| \leq F_s/2 \tag{6.1.16}$$

En este caso, no existe *aliasing* y, por tanto, el espectro de la señal discreta en el tiempo es idéntico (salvo la variación debida al factor de escala F_s) al espectro de la señal analógica en el rango de la frecuencia fundamental $|F| \leq F_s/2$ o $|f| \leq \frac{1}{2}$.

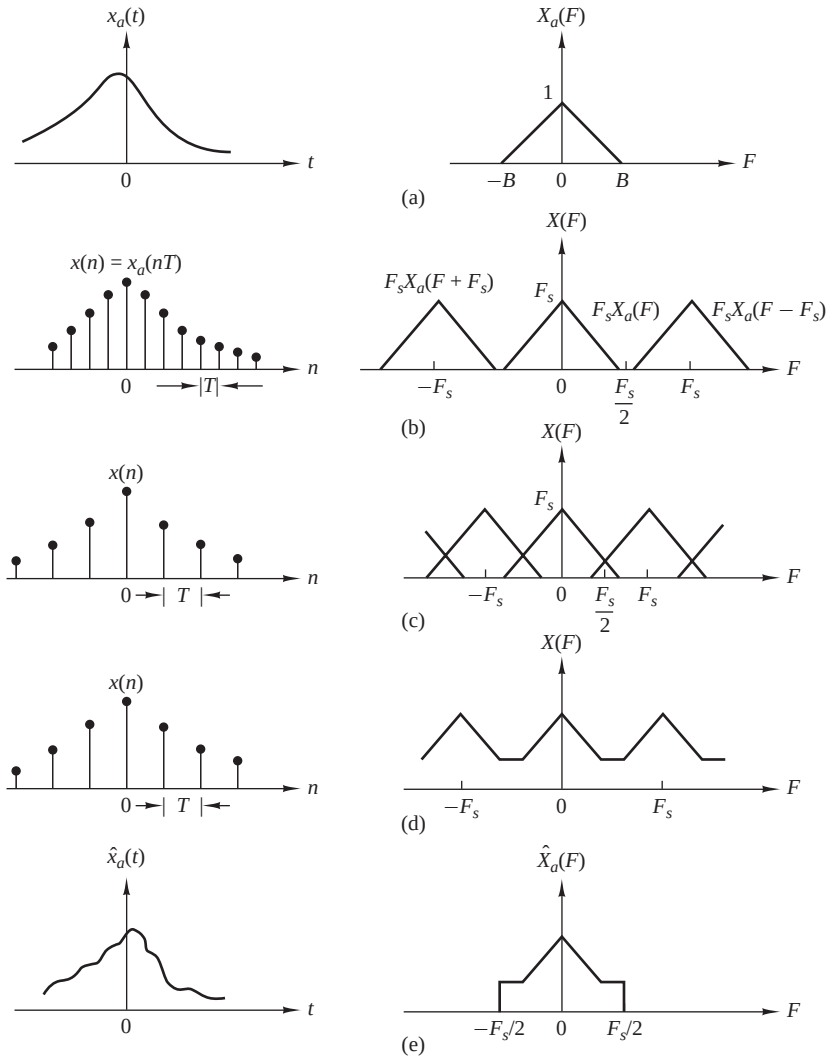


Figura 6.1.1. Muestreo de una señal analógica de banda limitada y *aliasing* de las componentes espectrales.

Por el contrario, si la frecuencia de muestreo F_s se selecciona de modo que $F_s < 2B$, la continuidad periódica de $X_a(F)$ da lugar a un solapamiento espectral, como se ilustra en las Figuras 6.1.1(c) y (d). Por tanto, el espectro $X(F)$ de la señal discreta en el tiempo contiene componentes de frecuencia suavizadas del espectro de la señal analógica $X_a(F)$. El resultado final es que el *aliasing* que se produce nos impide recuperar la señal original $x_a(t)$ a partir de las muestras.

Dada la señal discreta en el tiempo $x(n)$ con el espectro $X(F)$, que se ilustra en la Figura 6.1.1(b), sin *aliasing*, es posible reconstruir la señal analógica original a partir de las muestras $x(n)$. Debido a la ausencia de *aliasing*

$$X_a(F) = \begin{cases} \dfrac{1}{F_s}X(F), & |F| \le F_s/2 \\ 0, & |F| > F_s/2 \end{cases} \tag{6.1.17}$$

y teniendo en cuenta la transformada de Fourier dada por (6.1.5),

$$X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi Fn/F_s} \tag{6.1.18}$$

la transformada inversa de Fourier de $X_a(F)$ es

$$x_a(t) = \int_{-F_s/2}^{F_s/2} X_a(F) e^{j2\pi Ft}\, dF \tag{6.1.19}$$

Suponemos que $F_s \geq 2B$. Sustituyendo (6.1.17) en (6.1.19), tenemos

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \frac{1}{F_s} \int_{-F_s/2}^{F_s/2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi Fn/F_s} \right] e^{j2\pi Ft}\, dF \\ &= \frac{1}{F_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{-F_s/2}^{F_s/2} e^{j2\pi F(t-n/F_s)}\, dF \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \frac{\operatorname{sen}(\pi/T)(t-nT)}{(\pi/T)(t-nT)} \end{aligned} \tag{6.1.20}$$

donde $x(n) = x_a(nT)$ y siendo $T = 1/F_s$ el intervalo de muestreo. Ésta es la fórmula de reconstrucción dada por (1.4.24) en la exposición sobre el teorema de muestreo.

La fórmula de reconstrucción dada en (6.1.20) utiliza la función

$$g(t) = \frac{\operatorname{sen}(\pi/T)t}{(\pi/T)t} \tag{6.1.21}$$

apropiadamente desplazada un valor nT, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, y multiplicada o ponderada por las muestras correspondientes $x_a(nT)$ de la señal. Decimos que (6.1.20) es una fórmula de interpolación para la reconstrucción de $x_a(t)$ a partir de sus muestras, y $g(t)$, dada en (6.1.21), es la función de interpolación. Observe que en $t = kT$, la función de interpolación $g(t - nT)$ es cero excepto en $k = n$. En consecuencia, el valor de $x_a(t)$ en $t = kT$ es simplemente la muestra $x_a(kT)$. En los restantes instantes de tiempo las sumas ponderadas de las versiones desplazadas en el tiempo de la función de interpolación proporcionan $x_a(t)$ de forma exacta. Esta combinación se ilustra en la Figura 6.1.2.

La fórmula dada en (6.1.20) para reconstruir la señal analógica $x_a(t)$ a partir de sus muestras se conoce como *fórmula de interpolación ideal*, y consituye la base del *teorema de muestreo*, que podemos enunciar como sigue.

Teorema de muestreo. Una señal continua en el tiempo de banda limitada con una frecuencia alta (ancho de banda) de B hercios sólo puede recuperarse a partir de sus muestras siempre que la tasa de muestreo sea $F_s \geq 2B$ muestras por segundo.

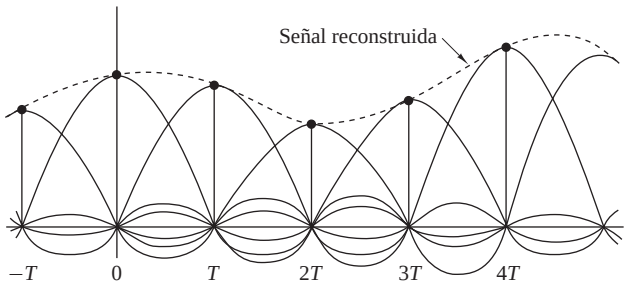


Figura 6.1.2. Reconstrucción de una señal continua en el tiempo utilizando interpolación ideal.

De acuerdo con el teorema de muestreo y la fórmula de reconstrucción dada por (6.1.20), la recuperación de $x_a(t)$ a partir de sus muestras $x(n)$ requiere un número infinito de muestras. Sin embargo, en la práctica, utilizaremos un número finito de muestras de la señal y trabajaremos con señales de duración finita. por tanto, sólo vamos a tratar la reconstrucción de una señal de duración finita a partir de una serie finita de muestras.

Cuando se produce el fenómeno de *aliasing* a causa de una tasa de muestreo muy lenta, el efecto puede describirse reflejando múltiplos del eje de frecuencias de la variable de frecuencia F para la señal analógica. La Figura 6.1.3(a) muestra el espectro $X_a(F)$ de una señal analógica. De acuerdo con (6.1.14), el muestreo de la señal con una frecuencia de muestreo F_s produce una repetición periódica de $X_a(F)$ de período F_s. Si $F_s < 2B$, las réplicas desplazadas de $X_a(F)$ se solapan. En la Figura 6.1.3(b) se ilustra el solapamiento que se produce dentro del rango de la frecuencia fundamental $-F_s/2 \leq F \leq F_s/2$. El espectro correspondiente de la señal discreta en el tiempo dentro del rango de la frecuencia fundamental se obtiene sumando todas las partes desplazadas dentro del rango $|f| \leq \frac{1}{2}$, para proporcionar el espectro mostrado en la Figura 6.1.3(c).

Una inspección cuidadosa de las Figuras 6.1.3(a) y (b) revela que el espectro de la Figura 6.1.3(c) puede obtenerse reflejando el espectro original como un acordeón con los pliegues en todos los múltiples impares de $F_s/2$. En consecuencia, la frecuencia $F_s/2$ se denomina *frecuencia de solapamiento*, como se ha dicho en el Capítulo 1. Está claro entonces que el muestreo periódico fuerza automáticamente el reflejo del eje de frecuencias de una señal analógica en múltiplos impares de $F_s/2$, y esto da como resultado la relación $F = fF_s$ entre las frecuencias de las señales continuas en el tiempo y discretas en el tiempo. A causa del solapamiento del eje de frecuencias, la relación $F = fF_s$ no es completamente lineal, sino lineal por tramos, con el fin de acomodar el efecto de *aliasing*. Esta relación se ilustra en la Figura 6.1.4.

Si la señal analógica es de banda limitada $B \leq F_s/2$, la relación entre f y F es lineal y uno a uno. En otras palabras, no existe *aliasing*. En la práctica, normalmente se realiza un prefiltrado con un filtro de *antialiasing*

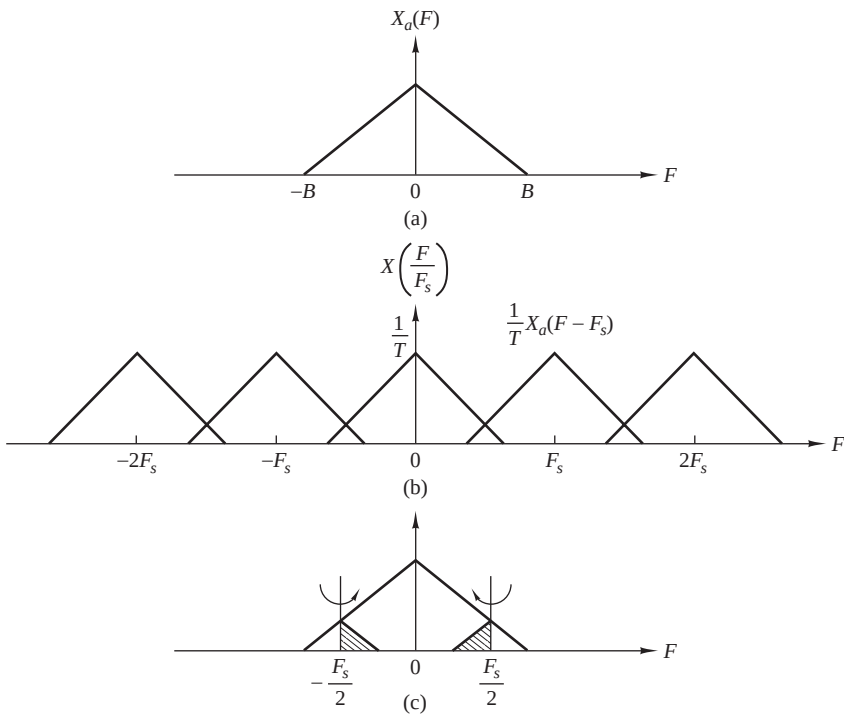


Figura 6.1.3. Ilustración del *aliasing* alrededor de la frecuencia de solapamiento.

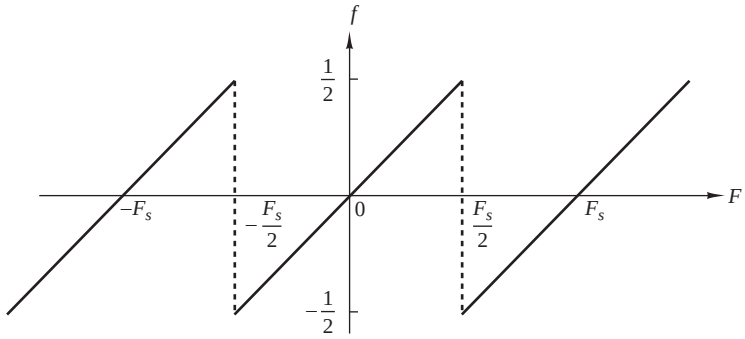


Figura 6.1.4. Relación entre las variables de frecuencia F y f.

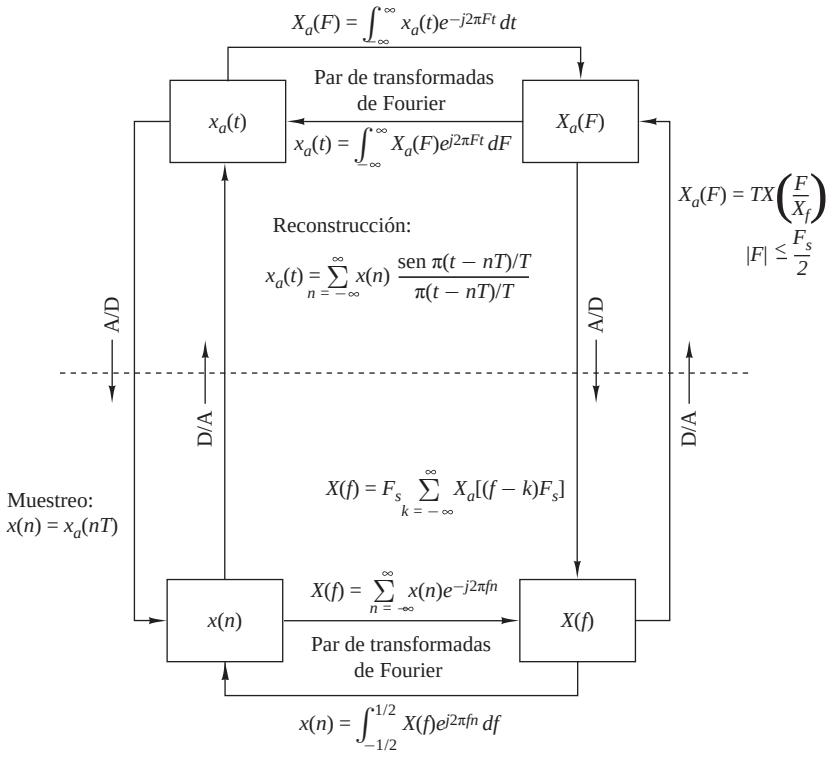


Figura 6.1.5. Relaciones en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia para señales muestreadas.

antes de la operación de muestreo. Esto asegura que las componentes de frecuencia de la señal anterior, $F \geq B$, se atenúen lo suficiente de manera que si existe *aliasing*, causen una distorsión despreciable en la señal deseada.

Las relaciones entre las funciones en el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia $x_a(t)$, $x(n)$, $X_a(F)$ y $X(f)$ se resumen en la Figura 6.1.5. La relación que permite recuperar las funciones continuas en el tiempo, $x_a(t)$ y $X_a(F)$, a partir de las magnitudes discretas en el tiempo $x(n)$ y $X(f)$, supone que la señal analógica es de banda limitada y que se muestrea a la frecuencia de Nyquist (o una frecuencia mayor).

Los siguientes ejemplos ilustran el problema del *aliasing* de las componentes de frecuencia.

EJEMPLO 6.1.1

Aliasing en señales sinusoidales. La señal continua en el tiempo

$$x_a(t) = \cos 2\pi F_0 t = \frac{1}{2}e^{j2\pi F_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi F_0 t}$$

tiene un espectro discreto con líneas espectrales en $F = \pm F_0$, como se muestra en la Figura 6.1.6(a). El proceso de muestrear esta señal a una frecuencia de muestreo F_s introduce réplicas del espectro en múltiplos de F_s, lo que se ilustra en la Figura 6.1.6(b) para $F_s/2 < F_0 < F_s$.

Para reconstruir la señal continua en el tiempo, tenemos que seleccionar frecuencias pertecientes al rango de frecuencias fundamental $|F| \leq F_s/2$. El espectro resultante puede verse en la Figura 6.1.6(c). La señal reconstruida es

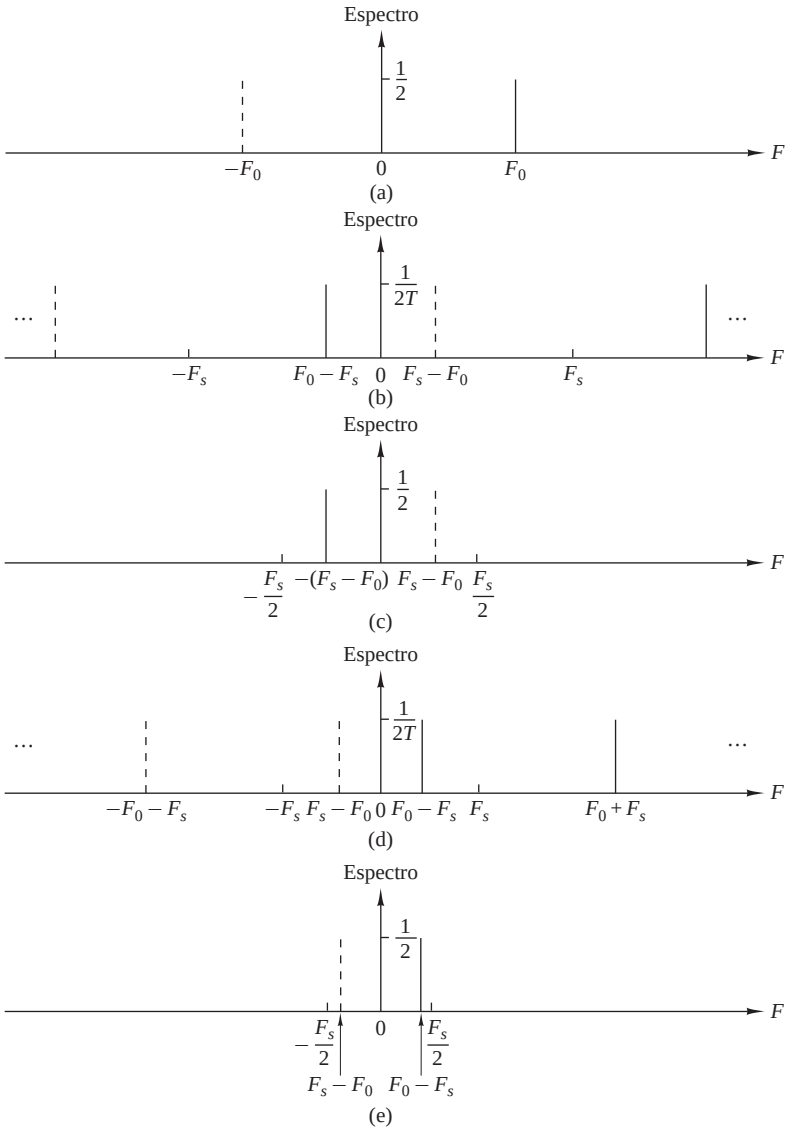


Figura 6.1.6. *Aliasing* en señales sinusoidales.

$$\hat{x}_a(t) = \cos 2\pi(F_s - F_0)t$$

Si ahora se selecciona F_s tal que $F_s < F_0 < 3F_s/2$, el espectro de la señal muestreada es el ilustrado en la Figura 6.1.6(d). La señal reconstruida, mostrada en la Figura 6.1.6(e), es

$$x_a(t) = \cos 2\pi(F_0 - F_s)t$$

En ambos casos, se produce *aliasing*, por lo que la frecuencia de la señal reconstruida es una versión suavizada de la frecuencia de la señal original.

EJEMPLO 6.1.2

Muestreo y reconstrucción de una señal de banda no limitada. Considere la siguiente señal exponencial bilateral continua en el tiempo:

$$x_a(t) = e^{-A|t|} \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X_a(F) = \frac{2A}{A^2 + (2\pi F)^2}, \quad A > 0$$

(a) Determine el espectro de la señal muestreada $x(n) = x_a(nT)$.

(b) Dibuje las señales $x_a(t)$ y $x(n) = x_a(nT)$ para $T = 1/3$ seg. y $T = 1$ seg., y sus espectros.

(c) Dibuje la señal continua en el tiempo $\hat{x}_a(t)$ después de reconstruirla empleando interpolación ideal de banda limitada.

Solución.

(a) Si muestreamos $x_a(nT)$ a una frecuencia de muestreo $F_s = 1/T$, tenemos

$$x(n) = x_a(nT) = e^{-AT|n|} = (e^{-AT})^{|n|}, \quad -\infty < n < \infty$$

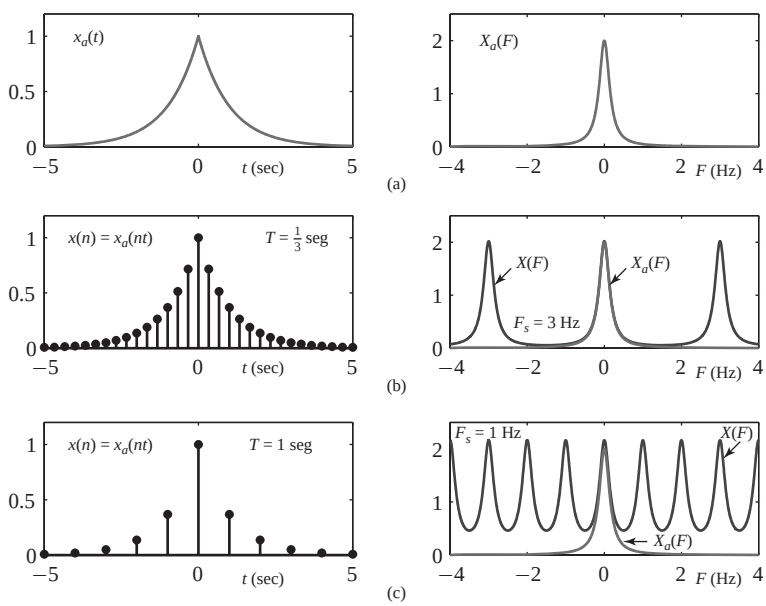


Figura 6.1.7. (a) Señal analógica $x_a(t)$ y su espectro $X_a(F)$. (b) $x(n) = x_a(nT)$ y su espectro para $F_s = 3$ Hz. (c) $x(n) = x_a(nT)$ y su espectro para $F_s = 1$ Hz.

El espectro de $x(n)$ puede hallarse fácilmente calculando directamente la transformada directa de Fourier en el tiempo. Luego

$$X(F) = \frac{1-a^2}{1-2a\cos 2\pi(F/F_s)+a^2}, \quad a = e^{-AT}$$

Evidentemente, dado que $\cos 2\pi(F/F_s)$ es periódica de período F_s, también lo es el espectro $X(F)$.

(b) Puesto que $X_a(F)$ no es de banda limitada, el *aliasing* no se puede evitar. La Figura 6.1.7(a) muestra la señal original $x_a(t)$ y su espectro $X_a(F)$ para $A = 1$. En las Figuras 6.1.7(b) y (6.1.7(c) se ilustran la señal muestreada $x(n)$ y su espectro $X(F)$ para $F_s = 3$ Hz y $F_s = 1$ Hz. La distorsión debida al *aliasing* es importante en el dominio de la frecuencia cuando $F_s = 1$ Hz y apenas perceptible cuando $F_s = 3$ Hz.

(c) El espectro $\hat{X}_a(F)$ de la señal reconstruida $\hat{x}_a(t)$ está dado por

$$\hat{X}_a(F) = \begin{cases} TX(F), & |F| \le F_s/2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Los valores de $\hat{x}_a(t)$ pueden evaluarse con el fin de representarlos gráficamente mediante la fórmula de interpolación ideal para señales de banda limitada (6.1.20), para todos los valores significativos de $x(n)$ y $\text{sen}(\pi t/T)/(\pi t/T)$. La Figura 6.1.8 ilustra la señal reconstruida y su espectro para $F_s = 3$ Hz y $F_s = 1$ Hz. Es interesante observar en cada caso que $\hat{x}_a(nT) = x_a(nt)$, pero $\hat{x}_a(nt) \neq x_a(nT)$ para $t \neq nT$. Los resultados del efecto de *aliasing* son evidentes en el espectro de $\hat{x}_a(t)$ para $F_s = 1$ Hz, donde podemos observar que el solapamiento del espectro en $F = \pm 0.5$ Hz incrementa el contenido en frecuencias de $\hat{X}_a(F)$.

6.2 Tratamiento discreto en el tiempo de señales continuas en el tiempo

Muchas aplicaciones prácticas requieren procesamiento discreto en el tiempo de señales continuas en el tiempo. La Figura 6.2.1 muestra la configuración de un sistema general utilizado para conseguir este objetivo. Para diseñar el procesamiento que se va a llevar a cabo, en primer lugar tenemos que seleccionar el ancho de banda de la señal que va a ser procesada, dado que el ancho de banda de la señal determina la frecuencia mínima de muestreo. Por ejemplo, una señal de voz, que va a transmitirse digitalmente puede contener componentes de frecuencia por encima de 3000 Hz, pero con propósitos de inteligibilidad de la voz y para poder identificar al orador, basta con conservar las frecuencias por debajo de 3000 Hz. Por tanto, resultaría ineficaz desde el punto de vista del procesamiento conservar frecuencias más altas y sería desperdiciar ancho de banda del canal transmitiendo los bits adicionales necesarios para representar dichas frecuencias más altas de la señal de voz. Una vez que se ha seleccionado la banda de frecuencias necesaria, podemos especificar la frecuencia de muestreo y las características del dispositivo de prefiltrado, que también se conoce como filtro de *antialiasing*.

El prefiltrado se realiza con un filtro analógico que tiene un doble propósito. El primero consiste en asegurar que el ancho de banda de la señal que se va a muestrear está limitado al rango de frecuencias deseado. Por tanto, cualquier componente de la señal con una frecuencia superior a $F_s/2$ será atenuada lo necesario como para que la cantidad de distorsión de la señal debida al *aliasing* sea despreciable. Por ejemplo, la señal de voz que se va a transmitir digitalmente a través del canal telefónico será filtrada mediante un filtro paso bajo con una banda de paso que llegue hasta 3000 Hz, una banda de transición de aproximadamente 400 a 500 Hz, y una banda eliminada por encima de 3400 a 3500 Hz. La señal de voz puede muestrearse a 8000 Hz y por tanto la frecuencia de solapamiento será de 4000 Hz. Así, el *aliasing* será despreciable. La otra razón para emplear un filtro previo es limitar el espectro del ruido aditivo y otras interferencias que a menudo distorsionan la señal deseada. Normalmente, el ruido aditivo es de banda ancha y excede el ancho de banda de la señal deseada.

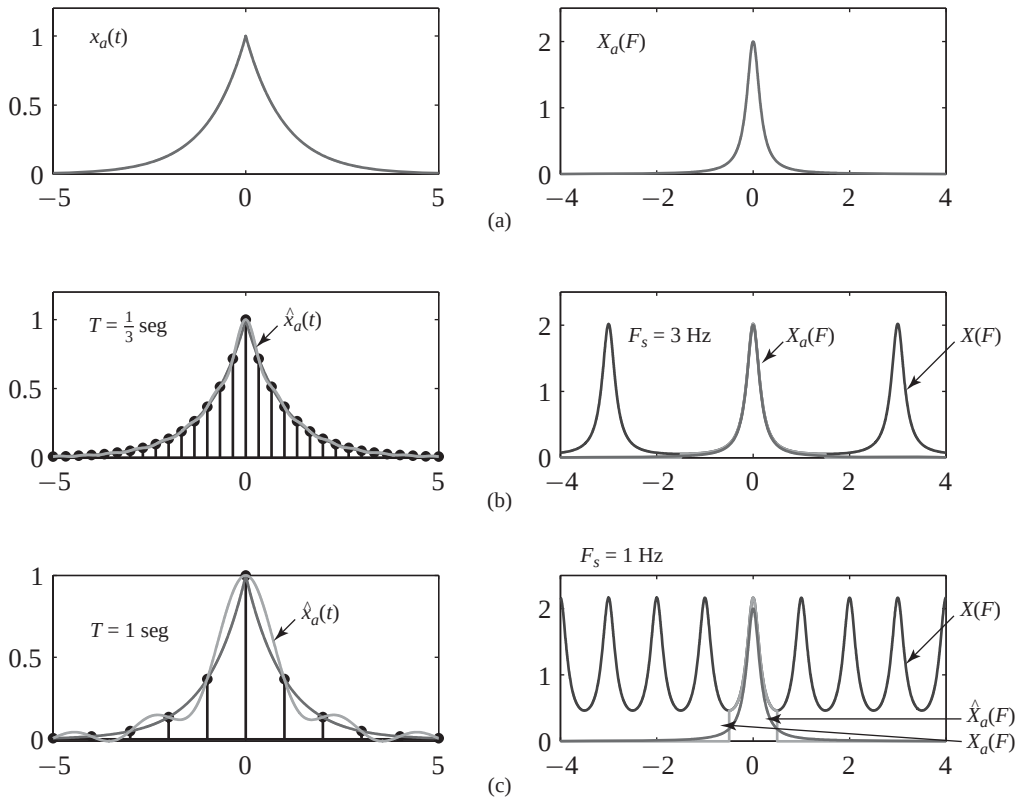


Figura 6.1.8. (a) Señal analógica $x_a(t)$ y su espectro $X_a(F)$. (b) Señal reconstruida $\hat{x}_a(t)$ y su espectro para $F_s = 3$ Hz. (c) Señal reconstruida $\hat{x}_a(t)$ y su espectro para $F_s = 1$ Hz

Mediante el prefiltrado conseguimos reducir la potencia de ruido aditivo de modo que caiga dentro del ancho de la señal deseada y rechazamos así el ruido que existe fuera de la banda.

Una vez que hemos especificado los requisitos del prefiltro y hemos seleccionado la frecuencia de muestreo, podemos continuar con el diseño de las operaciones de tratamiento digital de señales que deben realizarse sobre la señal discreta en el tiempo. La elección de la frecuencia de muestreo $F_s = 1/T$, donde T es el intervalo de muestreo, no sólo determina la frecuencia más alta $(F_s/2)$ que se va a conservar de la señal analógica, sino que también sirve como factor de escala que influye en las especificaciones de diseño de los filtros digitales y de otros sistemas discretos en el tiempo a través de los que se procesa la señal.

Los convertidores ideales A/D y D/A proporcionan la interfaz entre los dominios discreto y continuo en el tiempo. El sistema completo es equivalente a un sistema continuo en el tiempo, que puede o no ser lineal e

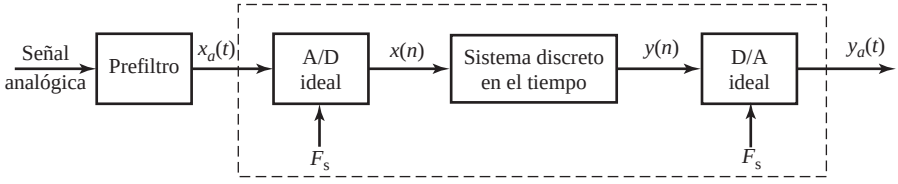


Figura 6.2.1. Sistema para el tratamiento discreto en el tiempo de señales continuas en el tiempo.

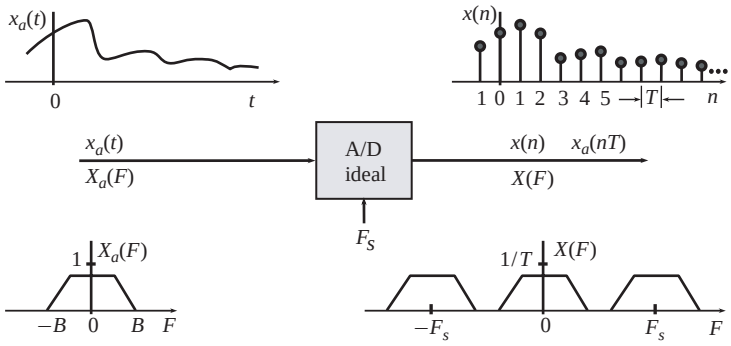


Figura 6.2.2. Características de un convertidor A/D ideal en los dominios del tiempo y de la frecuencia.

invariante en el tiempo (incluso aunque el sistema discreto en el tiempo sea lineal e invariante en el tiempo) ya que los convertidores ideales A/D y D/A realizan operaciones que varían en el tiempo.

La Figura 6.2.2 resume las características de entrada–salida de un convertidor A/D ideal en los dominios del tiempo y de la frecuencia. Recordemos que si $x_a(t)$ es la señal de entrada y $x(n)$ es la señal de salida, tenemos

$$x(n) = x_a(t)|_{t=nT} = x_a(nT) \quad \text{(Dominio del tiempo)} \tag{6.2.1}$$

$$X(F) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s) \quad \text{(Dominio de la frecuencia)} \tag{6.2.2}$$

Básicamente, el convertidor A/D ideal es un sistema lineal variante en el tiempo que (a) aplica un factor de escala $F_s = 1/T$ al espectro analógico y (b) crea una repetición periódica del espectro escalado con un período F_s.

La característica de entrada–salida del convertidor D/A ideal se muestra en la Figura 6.2.3. En el dominio del tiempo, las señales de entrada y de salida están relacionadas por

$$y_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) g_a(t - nT), \qquad \text{(dominio del tiempo)} \tag{6.2.3}$$

donde

$$g_a(t) = \frac{\operatorname{sen}(\pi t/T)}{\pi t/T} \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} G_a(F) = \begin{cases} T, & |F| \le F_s/2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{6.2.4}$$

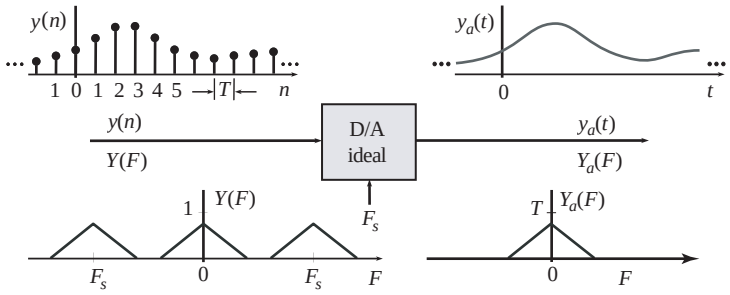


Figura 6.2.3. Características de un convertidor D/A ideal en los dominios del tiempo y de la frecuencia.

es la función de interpolación del convertidor D/A ideal. Debemos destacar que (6.2.3) parece, aunque *no* lo es, una operación de convolución porque el convertidor D/A es un sistema lineal variante en el tiempo con una entrada discreta en el tiempo y una salida continua en el tiempo. Para obtener la descripción en el dominio de la frecuencia, calculamos la transformada de Fourier de la señal de salida

$$\begin{aligned} Y_a(F) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) \int_{-\infty}^{\infty} g_a(t-nT) e^{-j2\pi Ft}\, dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) G_a(F) e^{-j2\pi FnT} \end{aligned}$$

Después de sacar fuera del sumatorio $G_a(F)$, obtenemos

$$Y_a(F) = G_a(F)Y(F) \qquad \text{(dominio de la frecuencia)} \tag{6.2.5}$$

donde $Y(F)$ es la transformada discreta de Fourier en el tiempo de $y(n)$. Observe que el convertidor D/A ideal (a) aplica un factor escala $T = 1/F_s$ al espectro de entrada y (b) elimina las componentes para las frecuencias $|F| > F_s/2$. Básicamente, el convertidor D/A ideal actúa como una ventana de frecuencia que "elimina" la periodicidad espectral discreta en el tiempo para generar una señal aperiódica continua en el tiempo. Insistimos una vez más en que el convertidor D/A ideal *no* es un filtro paso bajo ideal continuo en el tiempo, porque la expresión (6.2.3) no es una integral de convolución continua en el tiempo.

Supongamos ahora que tenemos un sistema LTI continuo en el tiempo definido por

$$\tilde{y}_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_a(\tau) x_a(t-\tau)\, dt \tag{6.2.6}$$

$$\tilde{Y}_a(F) = H_a(F) X_a(F) \tag{6.2.7}$$

y deseamos determinar si existe un sistema discreto en el tiempo $H(F)$, tal que el sistema completo de la Figura 6.2.1 sea equivalente al sistema continuo en el tiempo $H_a(F)$. Si $x_a(t)$ no es una señal de banda limitada o es de banda limitada pero $F_s < 2B$, será imposible hallar un sistema así debido a la presencia de *aliasing*. Sin embargo, si $x_a(t)$ es una señal de banda limitada y $F_s > 2B$, tenemos $X(F) = X_a(F)/T$ para $|F| \le F_s/2$. Por tanto, la salida del sistema de la Figura 6.2.1 está dada por

$$Y_a(F) = H(F)X(F)G_a(F) = \begin{cases} H(F)X_a(F), & |F| \le F_s/2 \\ 0, & |F| > F_s/2 \end{cases} \tag{6.2.8}$$

Para asegurar que $y_a(t) = \hat{y}_a(t)$, deberemos elegir el sistema discreto en el tiempo de modo que

$$H(F) = \begin{cases} H_a(F), & |F| \le F_s/2 \\ 0, & |F| > F_s/2 \end{cases} \tag{6.2.9}$$

Observe que, en este caso especial, la conexión en cascada del convertidor A/D (sistema lineal variante en el tiempo), un sistema LTI y el convertidor D/A (sistema lineal variante en el tiempo) es equivalente a un sistema LTI continuo en el tiempo. Este resultado es importante porque proporciona las bases teóricas para el filtrado discreto en el tiempo de señales continuas en el tiempo. Estos conceptos se ilustran en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 6.2.1

Simulación de un integrador analógico. Considere el circuito integrador analógico mostrado en la Figura 6.2.4(a). Su relación de entrada–salida está dada por

$$RC\frac{dy_a(t)}{dt} + y_a(t) = x_a(t)$$

Tomando la transformada de Fourier en ambos lados de la expresión, podemos demostrar que la respuesta en frecuencia del integrador es

$$H_a(F) = \frac{Y_a(F)}{X_a(F)} = \frac{1}{1 + jF/F_c}, \quad F_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

Evaluando la transformada inversa de Fourier obtenemos la respuesta al impulso

$$h_a(t) = Ae^{-At}u(t), \quad A = \frac{1}{RC}$$

Evidentemente, la respuesta al impulso $h_a(t)$ es una señal de banda no limitada. Definimos ahora un sistema discreto en el tiempo muestreando la respuesta al impulso discreta en el tiempo como sigue:

$$h(n) = h_a(nT) = A(e^{-AT})^n u(n)$$

Decimos que el sistema discreto en el tiempo se obtiene a partir del sistema continuo en el tiempo por medio de una transformación de *invarianza de impulso* (*véase* la Sección 10.3.2). La función del sistema y la ecuación en diferencias del sistema discreto en el tiempo son

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} A(e^{-AT})^n z^{-n} = \frac{1}{1 - e^{-AT}z^{-1}} \\ y(n) &= e^{-AT}y(n-1) + Ax(n) \end{aligned}$$

El sistema es causal y tiene un polo $p = e^{-AT}$. Puesto que $A > 0$, $|p| < 1$ y el sistema siempre es estable. La respuesta en frecuencia del sistema se obtiene calculando $H(z)$ para $z = e^{j2\pi F/F_s}$. La Figura 6.2.4(b) muestra los módulos de la respuesta en frecuencia del integrador analógico y del simulador discreto en el tiempo para F_s =50, 100, 200 y 1000 Hz. Observe que los efectos del *aliasing*, causados por el muestreo de $h_a(t)$ se hacen despreciables sólo para las frecuencias de muestreo mayores que 1 kHz. La implementación discreta en el tiempo es precisa para señales de entrada con anchos de banda mucho más pequeños que la frecuencia de muestreo.

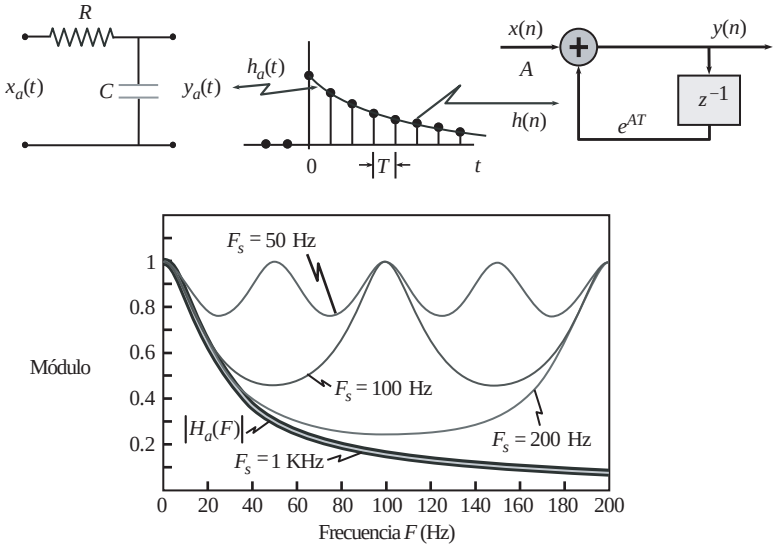


Figura 6.2.4. Implementación discreta en el tiempo de un integrador analógico utilizando el muestreo de la respuesta al impulso. La aproximación es satisfactoria cuando el ancho de banda de la señal de entrada es mucho menor que la frecuencia de muestreo.

EJEMPLO 6.2.2

Diferenciador ideal de banda limitada. El diferenciador ideal continuo en el tiempo se define como sigue

$$y_a(t) = \frac{dx_a(t)}{dt} \tag{6.2.10}$$

y tiene la respuesta en frecuencia

$$H_a(F) = \frac{Y_a(F)}{X_a(F)} = j2\pi F \tag{6.2.11}$$

Para procesar señales de banda limitada, basta con emplear el diferenciador ideal de banda limitada definido por

$$H_a(F) = \begin{cases} j2\pi F, & |F| \le F_c \\ 0, & |F| > F_c \end{cases} \tag{6.2.12}$$

Si elegimos $F_s = 2F_c$, podemos definir el diferenciador ideal discreto en el tiempo mediante

$$H(F) = H_a(F) = j2\pi F, \quad |F| \le F_s/2 \tag{6.2.13}$$

Puesto que, por definición, $H(F) = \sum_k H_a(F - kF_s)$, tenemos $h(n) = h_a(nT)$. En función de $\omega = 2\pi F/F_s$, $H(\omega)$ es periódica de período 2π. Por tanto, la respuesta al impulso discreta en el tiempo está dada por

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\omega)e^{j\omega n}d\omega = \frac{\pi n\cos\pi n - \operatorname{sen}\pi n}{\pi n^2 T} \tag{6.2.14}$$

o, de forma más compacta

$$h(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \dfrac{\cos\pi n}{nT}, & n \ne 0 \end{cases} \tag{6.2.15}$$

El módulo y la fase de las respuestas de los diferenciadores ideales continuo y discreto en el tiempo se muestran en la Figura 6.2.5.

EJEMPLO 6.2.3

Retardo fraccionario. Un sistema de retardo continuo en el tiempo se define mediante

$$y_a(t) = x_a(t - t_d) \tag{6.2.16}$$

para cualquier $t_d > 0$. Aunque el concepto es simple, su implementación práctica es bastante compleja. Si $x_a(t)$ es una señal de banda limitada y se muestrea a la frecuencia de Nyquist, obtenemos

$$y(n) = y_a(nT) = x_a(nT - t_d) = x_a[(n-\Delta)T] = x(n-\Delta) \tag{6.2.17}$$

donde $\Delta = t_d/T$. Si Δ es un entero, retardar la secuencia $x(n)$ es un proceso simple. Para valores no enteros de Δ, el valor retardado de $x(n)$ estará en algún lugar entre dos muestras. Sin embargo, este valor no estará disponible y la única forma de generar un valor apropiado es mediante la interpolación ideal de banda limitada. Una forma de atajar este problema es considerando la respuesta en frecuencia

$$H_{\text{id}}(\omega) = e^{-j\omega\Delta} \tag{6.2.18}$$

del sistema de retardo dado por (6.2.17) y su respuesta al impulso

$$h_{\text{id}}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\omega)e^{j\omega n}d\omega = \frac{\operatorname{sen}\pi(n-\Delta)}{\pi(n-\Delta)} \tag{6.2.19}$$

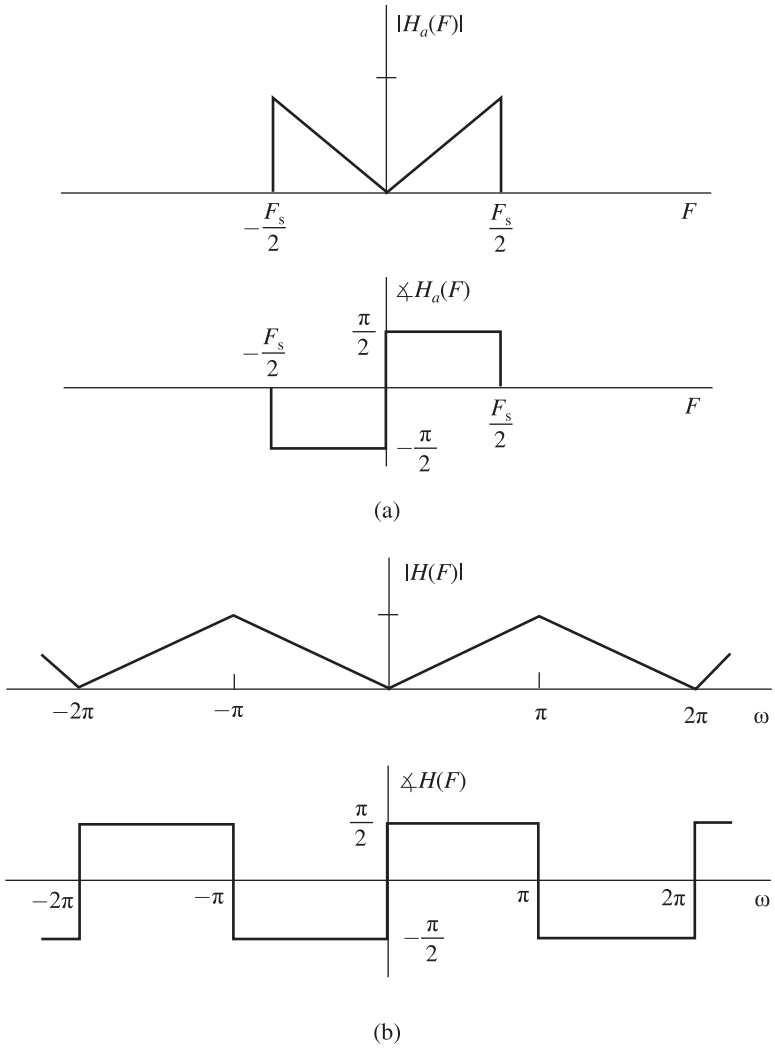


Figura 6.2.5. Respuestas en frecuencia del diferenciador ideal continuo en el tiempo de banda limitada (a) y su contrapartida discreta en el tiempo (b).

Cuando el retardo Δ toma valores enteros, $h_{\text{id}}(n)$ se reduce a $\delta(n-\Delta)$, porque la función seno se muestrea en los pasos por cero. Cuando Δ no es un entero, $h_{\text{id}}(n)$ se alarga hasta infinito porque los instantes de muestreo caen entre los pasos por cero. Lamentablemente, la respuesta al impulso ideal para sistemas de retardo fraccionario no es causal y tiene duración infinita. Por tanto, la respuesta en frecuencia (6.2.18) tiene que aproximarse con un filtro FIR o IIR. Puede encontrar información más detallada sobre los filtros de retardo fraccionario en Laakso *et al.* (1996). La implementación de retardos fraccionarios utilizando técnicas de conversión de muestreo se aborda en la Sección 11.8.

6.3 Convertidores analógico-digital y digital-analógico

En la sección anterior hemos supuesto que los convertidores A/D y D/A para el tratamiento de señales continuas en el tiempo son ideales. La única suposición implícita que hemos hecho sobre la equivalencia del tratamiento

de señales continuas y discretas en el tiempo es que el error de cuantificación en la conversión analógico-digital y los errores de redondeo en el tratamiento de señales digitales son despreciables. Estas cuestiones van a verse en detalle en esta sección. Sin embargo, debemos destacar que las operaciones de procesamiento de señales analógicas no se pueden llevar a cabo de forma precisa, dado que los componentes electrónicos de los sistemas analógicos presentan tolerancias e introducen ruido durante su operación. En general, un diseñador de sistemas digitales puede controlar mejor las tolerancias en un sistema de tratamiento digital de señales que un diseñador de sistemas analógicos que diseñe un sistema analógico equivalente.

La Sección 6.1 se centra en la conversión de señales continuas en el tiempo en señales discretas en el tiempo utilizando un muestreador ideal e interpolación ideal. En esta sección, vamos a ocuparnos de los dispositivos que realizan estas conversiones del dominio analógico al digital.

6.3.1 Convertidores analógico-digitales

Recordemos que el proceso de convertir una señal continua en el tiempo (analógica) en una señal digital que pueda ser procesada por un sistema digital requiere que cuantifiquemos los valores muestreados en una serie finita de niveles y representemos cada nivel mediante una serie de bits.

La Figura 6.3.1(a) presenta un diagrama de bloques formado por los elementos básicos de un convertidor A/D. En esta sección vamos a considerar los requisitos de funcionamiento de estos elementos. Aunque vamos a centrarnos principalmente en las características del sistema ideal, también mencionaremos algunas imperfecciones importantes de los dispositivos prácticos e indicaremos cómo afectan al funcionamiento del convertidor. Vamos a concentrarnos en aquellos aspectos que son más relevantes en el tratamiento de señales. Los aspectos prácticos de los convertidores A/D y la circuitería relacionada pueden encontrarse en las especificaciones y hojas de características de los fabricantes.

En la práctica, el muestreo de una señal analógica se realiza mediante un circuito de muestreo y retención (S/H, *sample-and-hold*). La señal muestreada se cuantifica a continuación y se convierte a formato digital. Normalmente, el circuito de muestreo y retención se encuentra integrado en los convertidores A/D. El circuito

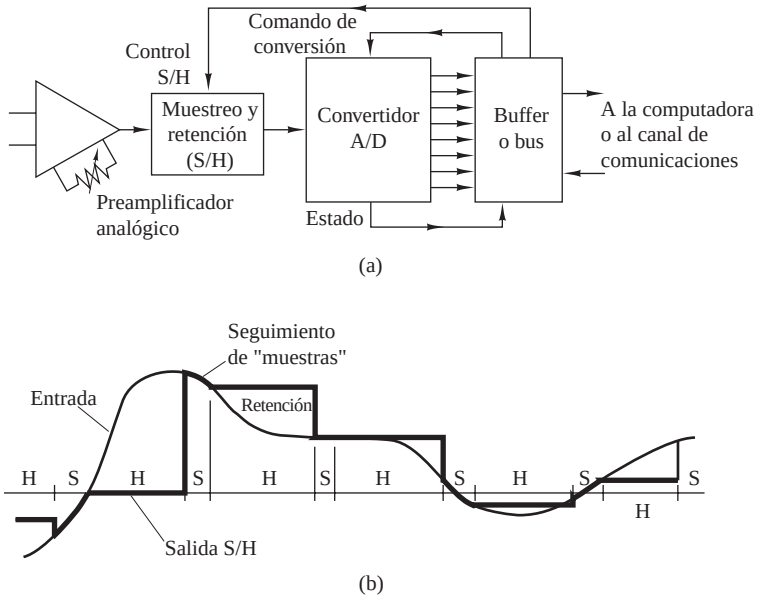


Figura 6.3.1. (a) Diagrama de bloques de elementos básicos de un convertidor A/D. (b) Respuesta en el dominio del tiempo de un circuito de muestreo y retención S/H ideal.

S/H es un circuito analógico controlado digitalmente, que sigue a la señal de entrada analógica durante el modo de muestreo, y luego mantiene fijo, durante el modo de retención, el valor instantáneo de la señal hasta el instante en que el sistema cambia del modo de muestreo al de retención. La Figura 6.3.1(b) muestra la respuesta en el dominio del tiempo de un circuito S/H ideal (es decir, un circuito S/H que responde de forma instantánea y precisa).

El objetivo del circuito de muestreo y retención es muestrear continuamente la señal de entrada y luego mantener dicho valor constante hasta que el convertidor A/D lo toma para obtener su representación digital. El uso de este circuito S/H permite al convertidor A/D funcionar más lentamente si se compara con el tiempo que realmente emplea para adquirir la muestra. En ausencia de un circuito S/H, la señal de entrada no varía más de la mitad del paso de cuantificación durante la conversión, lo que puede constituir una restricción no práctica. En consecuencia, el circuito S/H es fundamental en la conversión digital de alta resolución (12 bits por muestra o superior) de señales que tienen anchos de banda grandes (es decir, que varían muy rápidamente).

Un circuito S/H ideal no introduce distorsión en el proceso de conversión y puede modelarse de forma precisa como un muestreador ideal. Sin embargo, en los dispositivos prácticos, las degradaciones relacionadas con el tiempo, como errores en la periodicidad del proceso de muestreo ("*jitter*"), variaciones no lineales en la duración de la apertura de muestreo y variaciones en la tensión mantenida durante la conversión ("*droop*") pueden producirse.

El convertidor A/D inicia la conversión después de recibir la orden de conversión. El tiempo requerido para completar la conversión tiene que ser menor que la duración del modo de retención del S/H. Además, el período de retención T tiene que ser mayor que la duración del modo de muestreo y el modo de retención.

En las secciones siguientes vamos a suponer que el circuito S/H introduce errores despreciables y vamos a centrarnos en la conversión digital de las muestras analógicas.

6.3.2 Cuantificación y codificación

La tarea principal del convertidor A/D consiste en convertir una rango continuo de amplitudes de entrada en un conjunto discreto de palabras en código digital. Esta conversión implica los procesos de *cuantificación* y *codificación*. La cuantificación es un proceso no lineal y no invertible que asigna una amplitud determinada $x(n) \equiv x(nT)$ en el instante $t = nT$ a una amplitud x_k, tomada de un conjunto finito de valores. El procedimiento se ilustra en la Figura 6.3.2(a), donde el rango de amplitud de la señal se divide en L intervalos

$$I_k = \{x_k < x(n) \leq x_{k+1}\}, \qquad k = 1, 2, \ldots, L \tag{6.3.1}$$

por los $L+1$ *niveles de decisión* x_1, $x_2, \ldots, x_{L+1}$. Las posibles salidas del cuantificador (es decir, los niveles de cuantificación) se designan como $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_L$. El funcionamiento del cuantificador se define mediante la relación

$$x_q(n) \equiv Q[x(n)] = \hat{x}_k, \qquad \text{if } x(n) \in I_k \tag{6.3.2}$$

En la mayoría de las operaciones de tratamiento digital de señales, la correspondencia indicada en (6.3.2) es independiente de n (es decir, la cuantificación no tiene memoria y simplemente se designa como $x_q = Q[x]$). Además, en el tratamiento de señales se suelen emplear *cuantificadores uniformes* o *lineales* definidos por

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} - \hat{x}_k &= \Delta, \quad k = 1, 2, \ldots, L-1 \\ x_{k+1} - x_k &= \Delta, \quad \text{para } x_k, x_{k+1} \text{finitos} \end{aligned} \tag{6.3.3}$$

donde Δ es el *tamaño del escalón del cuantificacdor*. La cuantificación uniforme normalmente es un requisito si la señal digital resultante va a ser procesada por un sistema digital. Sin embargo, en las aplicaciones de transmisión y almacenamiento de señales de voz, por ejemplo, frecuentemente se emplean cuantificadores variantes en el tiempo.

Si se asigna el valor cero a un nivel de cuantificación, el cuantificador es de *redondeo*. Si se asigna cero a un nivel de decisión, se dice que el cuantificador es de *truncamiento*. La Figura 6.3.2(b) ilustra un cuantificador

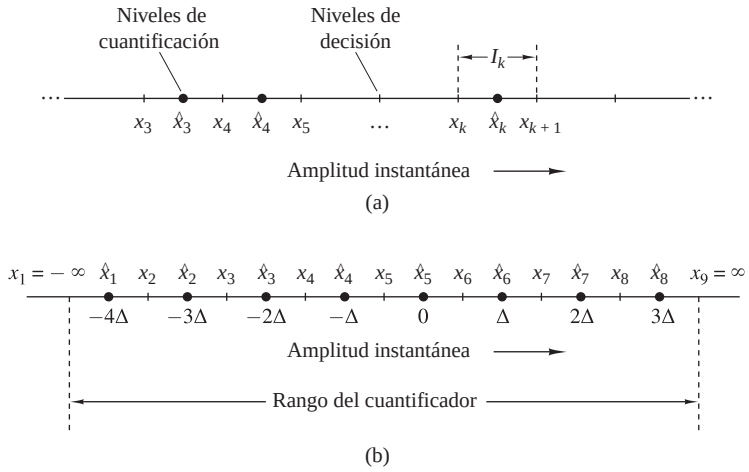


Figura 6.3.2. Proceso de cuantificación y un ejemplo de un cuantificador con redondeo.

de redondeo con $L = 8$ niveles. En teoría, los niveles de decisión extremos se toman en $x_1 = -\infty$ y $x_{L+1} = \infty$, con el fin de cubrir el *rango dinámico* completo de la señal de entrada. Sin embargo, en los convertidores A/D prácticos sólo podemos manejar un rango finito. Por tanto, definimos el *rango R* del cuantificador suponiendo que $I_1 = I_L = \Delta$. Por ejemplo, el rango del cuantificador mostrado en la Figura 6.3.2(b) es igual a 8Δ. En la práctica, se utiliza el término *rango de escala completa* (FSR, *Full Scale Range*) para describir el rango de un convertidor A/D para señales bipolares (es decir, señales que tienen amplitudes positivas y negativas). El término *escala completa* (FS, *Full Scale*) se emplea para señales unipolares.

Es fácil ver que el error de cuantificación $e_q(n)$ siempre se encuentra en el rango de $-\Delta/2$ hasta $\Delta/2$:

$$-\frac{\Delta}{2} < e_q(n) \leq \frac{\Delta}{2} \tag{6.3.4}$$

En otras palabras, el error de cuantificación instantáneo no puede exceder la mitad del escalón de cuantificación. Si el rango dinámico de la señal, definida como $x_{\max} - x_{\min}$, es mayor que el rango del cuantificador, las muestras que exceden el rango del cuantificador se recortan, dando como resultado un error de cuantificación grande (mayor que $\Delta/2$).

El funcionamiento del cuantificador se describe mejor mediante la función característica de cuantificación, ilustrada en la Figura 6.3.3 para un cuantificador de redondeo con ocho niveles de cuantificación. Esta característica es preferible en la práctica sobre el truncamiento, porque proporciona una salida que no es sensible a las variaciones infinitesimales de la señal de entrada alrededor de cero. Observe que las amplitudes de entrada de un cuantificador de redondeo se redondean a los niveles de cuantificación más próximos.

El proceso de *codificación* en un convertidor A/D asigna un número binario unívoco a cada nivel de cuantificación. Si tenemos L niveles, necesitamos al menos L números binarios diferentes. Con una longitud de palabra de $b+1$ bits podemos representar 2^{b+1} números binarios distintos. Por tanto, tenemos $2^{b+1} \geq L$ o, lo que es equivalente, $b+1 \geq \log_2 L$. Por tanto, el tamaño del escalón o la *resolución* del convertidor A/D viene dada por

$$\Delta = \frac{R}{2^{b+1}} \tag{6.3.5}$$

donde R es el rango del cuantificador.

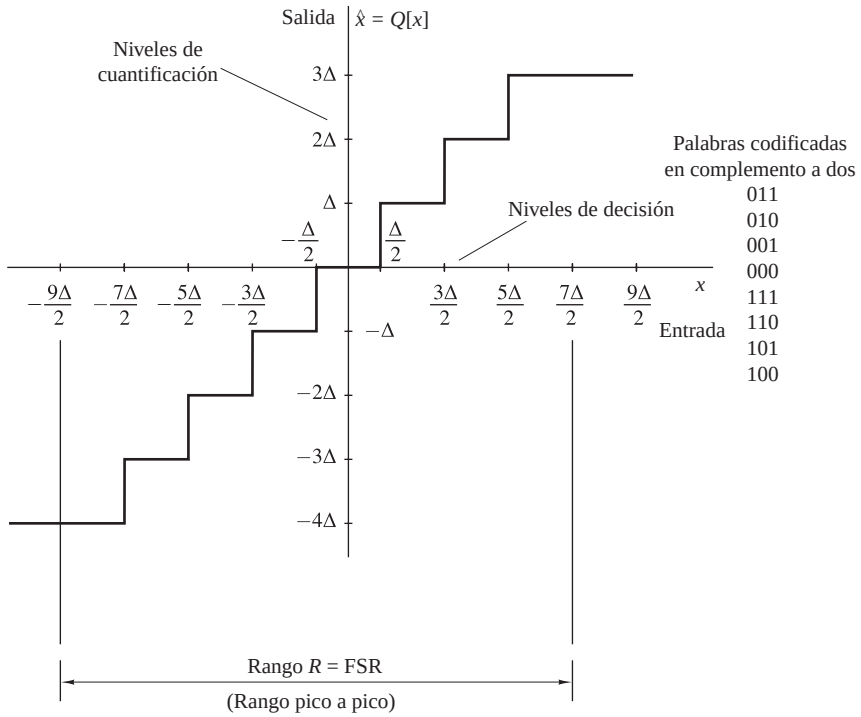


Figura 6.3.3. Ejemplo de un cuantificador de redondeo.

Existen diversos esquemas de codificación binarios, teniendo cada uno de ellos sus ventajas e inconvenientes. La Tabla 6.1 ilustra algunos de estos esquemas para codificación binaria con tres bits. Estos esquemas de representación numéricos se describen en más detalle en la Sección 9.4.

La representación en complemento a dos se utiliza en la mayoría de los procesadores de señales digitales. Por tanto, es conveniente emplear el mismo sistema para representar señales digitales porque podremos trabajar con ellas directamente sin tener que aplicar ninguna otra conversión de formato adicional. En general, una fracción binaria de $(b+1)$ bits de la forma $\beta_0\beta_1\beta_2\cdots\beta_b$ tiene el valor

$$-\beta_0 \cdot 2^0 + \beta_1 \cdot 2^{-1} + \beta_2 \cdot 2^{-2} + \cdots + \beta_b \cdot 2^{-b}$$

si utilizamos la representación en complemento a dos. Observe que β_0 es el bit más significativo (MSB, *most significant bit*) y β_b es el bit menos significativo (LSB, *least significant bit*). Aunque el código binario empleado para representar los niveles de cuantificación es importante para el diseño del convertidor A/D y los subsiguientes cálculos numéricos, no tiene ningún efecto en el funcionamiento del proceso de cuantificación. Por tanto, de aquí en adelante no vamos a precocuparnos por el proceso de codificación al analizar el funcionamiento de los convertidores A/D.

La única degradación que introduce un convertidor ideal es el error de cuantificación, el cual puede reducirse aumentando el número de bits. Este error, que domina el rendimiento de los convertidores A/D prácticos se analiza en la siguiente sección.

Los convertidores A/D prácticos difieren de los ideales de varias formas. Es habitual encontrar diversas degradaciones en la práctica. Específicamente, los convertidores A/D prácticos pueden presentar un error de *offset* (la primera transición puede no ocurrir exactamente en $+\frac{1}{2}$LSB), un error debido al *factor de escala* (o ganancia), la diferencia entre los valores que se producen en la primera y la última transición no es igual a

Número	Fracción decimal: Referencia positiva	Fracción decimal: Referencia negativa	Signo + Módulo	Complemento a dos	Offset binario	Complemento a uno
$+7$	$+\frac{7}{8}$	$-\frac{7}{8}$	0 1 1 1	0 1 1 1	1 1 1 1	0 1 1 1
$+6$	$+\frac{6}{8}$	$-\frac{6}{8}$	0 1 1 0	0 1 1 0	1 1 1 0	0 1 1 0
$+5$	$+\frac{5}{8}$	$-\frac{5}{8}$	0 1 0 1	0 1 0 1	1 1 0 1	0 1 0 1
$+4$	$+\frac{4}{8}$	$-\frac{4}{8}$	0 1 0 0	0 1 0 0	1 1 0 0	0 1 0 0
$+3$	$+\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{8}$	0 0 1 1	0 0 1 1	1 0 1 1	0 0 1 1
$+2$	$+\frac{2}{8}$	$-\frac{2}{8}$	0 0 1 0	0 0 1 0	1 0 1 0	0 0 1 0
$+1$	$+\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0 0 0 1	0 0 0 1	1 0 0 1	0 0 0 1
0	$0+$	$0-$	0 0 0 0	0 0 0 0	1 0 0 0	0 0 0 0
0	$0-$	$0+$	1 0 0 0	(0 0 0 0)	(1 0 0 0)	1 1 1 1
-1	$-\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{8}$	1 0 0 1	1 1 1 1	0 1 1 1	1 1 1 0
-2	$-\frac{2}{8}$	$+\frac{2}{8}$	1 0 1 0	1 1 1 0	0 1 1 0	1 1 0 1
-3	$-\frac{3}{8}$	$+\frac{3}{8}$	1 0 1 1	1 1 0 1	0 1 0 1	1 1 0 0
-4	$-\frac{4}{8}$	$+\frac{4}{8}$	1 1 0 0	1 1 0 0	0 1 0 0	1 0 1 1
-5	$-\frac{5}{8}$	$+\frac{5}{8}$	1 1 0 1	1 0 1 1	0 0 1 1	1 0 1 0
-6	$-\frac{6}{8}$	$+\frac{6}{8}$	1 1 1 0	1 0 1 0	0 0 1 0	1 0 0 1
-7	$-\frac{7}{8}$	$+\frac{7}{8}$	1 1 1 1	1 0 0 1	0 0 0 1	1 0 0 0
-8	$-\frac{8}{8}$	$+\frac{8}{8}$		(1 0 0 0)	(0 0 0 0)	

Tabla 6.1. Códigos bipolares utilizados comúnmente.

FS $-$ 2LSB), y un error de *linealidad* (las diferencias entre los valores de transición no son todas iguales o varían de manera uniforme). Si el error de *linealidad diferencial* es lo suficientemente grande, es posible que una o más palabras de código se pierdan. Los datos de rendimiento de los convertidores A/D comercialmente disponibles se especifican en las hojas de características de los fabricantes.

6.3.3 Análisis de los errores de cuantificación

Para determinar los efectos de la cuantificación sobre el funcionamiento de un convertidor A/D, adoptamos un método estadístico. La dependencia del error de cuantificación de las características de la señal de entrada y la naturaleza no lineal del cuantificador hace el análisis determinista muy complejo, excepto en casos muy simples.

En el método estadístico, suponemos que el error de cuantificación es aleatorio. Modelamos este error como ruido que se ha añadido a la señal original (no cuantificada). Si la señal de entrada analógica está dentro del rango del cuantificador, el error de cuantificación $e_q(n)$ está limitado en módulo [es decir, $|e_q(n)| < \Delta/2$], y el error resultante se denomina *ruido granular*. Cuando la entrada cae fuera del rango del cuantificador (recorte), $e_q(n)$ no está limitado y da lugar al *ruido de sobrecarga*. Este tipo de ruido puede dar lugar a una severa distorsión de la señal. El único remedio consiste en aplicar un factor de escala a la señal de entrada de modo que su rango dinámico caiga dentro del rango del cuantificador. El siguiente análisis se basa en la suposición de que no existe ruido de sobrecarga.

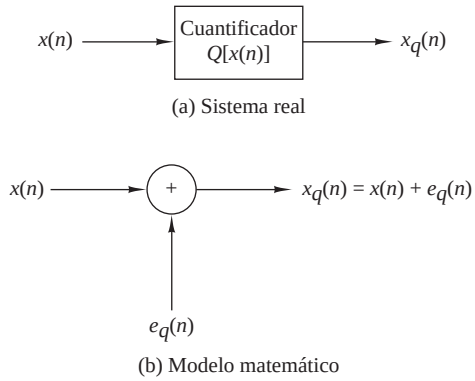


Figura 6.3.4. Modelo matemático del ruido de cuantificación.

El modelo matemático para el error de cuantficación $e_q(n)$ se muestra en la Figura 6.3.4. Para realizar el análisis, hacemos las siguientes suposiciones acerca de las propiedades estadísticas de $e_q(n)$:

1. El error $e_q(n)$ está distribuido uniformemente en el rango $-\Delta/2 < e_q(n) < \Delta/2$.
2. El error $\{e_q(n)\}$ es un ruido blanco estacionario. En otras palabras, el error $e_q(n)$ y el error $e_q(m)$ para $m \neq n$ no están correlados.
3. El error $\{e_q(n)\}$ no está correlado con la señal $x(n)$.
4. La señal $x(n)$ tiene media cero y es estacionaria.

En general, estas suposiciones no se cumplen. Sin embargo, se cumplen cuando el tamaño del escalón de cuantificación es pequeño y la señal $x(n)$ atraviesa varios niveles de cuantificación entre dos muestras sucesivas.

Bajo estas suposiciones, el efecto del ruido aditivo $e_q(n)$ en la señal deseada puede cuantificarse evaluando la relación señal-ruido de cuantificación (SQNR, *signal-to-quantization-noise*), que se puede expresar en una escala logarítmica (en decibelios, dB) como

$$\text{SQNR} = 10 \log_{10} \frac{P_x}{P_n} \tag{6.3.6}$$

donde $P_x = \sigma_x^2 = E[x^2(n)]$ es la potencia de la señal y $P_n = \sigma_e^2 = E[e_q^2(n)]$ es la potencia del ruido de cuantificación.

Si el error de cuantificación está distribuido uniformemente en el rango $(-\Delta/2, \Delta/2)$, como se muestra en la Figura 6.3.5, el valor medio del error es cero y la varianza (la potencia del ruido de cuantificación) es

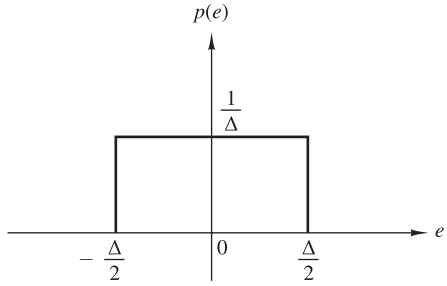


Figura 6.3.5. Función de densidad de probabilidad del error de cuantificación.

$$P_n = \sigma_e^2 = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 p(e)\, de = \frac{1}{\Delta}\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2\, de = \frac{\Delta^2}{12} \tag{6.3.7}$$

Combinando (6.3.5) con (6.3.7) y sustituyendo el resultado en (6.3.6), la expresión para la relación SQNR se convierte en

$$\begin{aligned} SQNR &= 10\log\frac{P_x}{P_n} = 20\log\frac{\sigma_x}{\sigma_e} \\ &= 6.02b + 16.81 - 20\log\frac{R}{\sigma_x}\ \text{dB} \end{aligned} \tag{6.3.8}$$

El último término de (6.3.8) depende del rango R del convertidor A/D y los valores estadísticos de la señal de entrada. Por ejemplo, si suponemos que $x(n)$ es una distribución gaussiana y el rango del cuantificador se extiende desde $-3\sigma_x$ hasta $3\sigma_x$ (es decir, $R = 6\sigma_x$), entonces menos de 3 de cada 1000 amplitudes de la señal de entrada darán lugar a una sobrecarga sobre la media. Para $R = 6\sigma_x$, (6.3.8) es

$$\text{SQNR} = 6.02b + 1.25\ \text{dB} \tag{6.3.9}$$

La fórmula dada en (6.3.8) se utiliza frecuentemente para especificar la precisión necesaria en un convertidor A/D. Quiere decir simplemente que cada bit adicional utilizado en el cuantificador aumenta la relación señal-ruido de cuantificación en 6 dB (es interesante destacar que se ha obtenido el mismo resultado en la Sección 1.4 para una señal sinusoidal utilizando un método determinista). Sin embargo, debemos tener presentes las condiciones bajo las que hemos obtenido este resultado.

Debido a las limitaciones en la fabricación de convertidores A/D, su rendimiento queda por debajo del valor teórico proprocionado por la Ecuación (6.3.8). Como resultado, el número efectivo de bits puede ser menor que el número de bits del convertidor A/D. Por ejemplo, un convertidor de 16 bits puede tener sólo 14 bits efectivos de precisión.

6.3.4 Convertidores digitales-analógicos

En la práctica, la conversión D/A normalmente se realiza combinando un convertidor D/A con un circuito de muestreo y retención (S/H, *sample-and-hold*) seguido de un filtro paso bajo (de suavizado), como se muestra en la Figura 6.3.6. El convertidor D/A acepta como entrada señales eléctricas que se corresponden con una palabra binaria y genera una tensión o corriente de salida que es proporcional al valor de la palabra binaria. Idealmente, su característica de entrada–salida es como la mostrada en la Figura 6.3.7 para una señal bipolar de 3-bits. La línea que conecta los puntos es una línea recta que pasa por el origen. En los convertidores D/A prácticos, la línea que conecta los puntos puede desviarse de la ideal. Algunas de las desviaciones típicas de la ideal son errores de *offset*, errores de ganancia y no linealidades de la característica de entrada–salida.

Un importante parámetro de un convertidor D/A es su *tiempo de asentamiento*, que se define como el tiempo necesario para que la salida del convertidor D/A alcance y se mantenga dentro de una determinada fracción (normalmente, $\pm\frac{1}{2}$LSB) del valor final, después de haber aplicado la palabra codificada de entrada. A menudo, la aplicación de este código de entrada produce un impulso abrupto transitorio, conocido como "*glitch*". Esto ocurre en particular cuando dos palabras de código consecutivas del convertidor A/D difieren en varios bits.

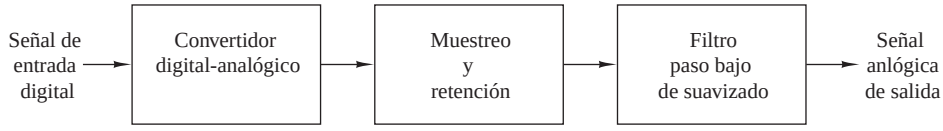


Figura 6.3.6. Operaciones básicas en la conversión de una señal digital en una señal analógica.

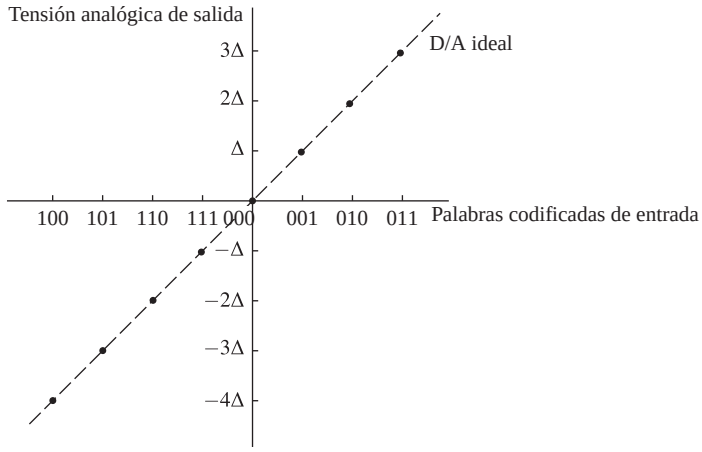


Figura 6.3.7. Característica del convertidor D/A ideal.

La forma habitual de remediar este problema consiste en utilizar un circuito de muestreo y retención (S/H) diseñado para servir de "*deglitcher*". Puesto que la tarea fundamental del circuito S/H es mantener la salida del convertidor D/A constante en el valor de salida anterior hasta que la nueva muestra que se encuentra en la salida del convertidor D/A alcanza el régimen permanente, momento en que se muestrea y retiene el nuevo valor en el siguiente intervalo de muestreo. Por tanto, el circuito S/H aproxima la señal analógica mediante una serie de impulsos rectangulares cuyas alturas son iguales al valor correspondiente del impulso. La Figura 6.3.8 ilustra la respuesta de un circuito S/H a una señal sinusoidal discreta en el tiempo. Como se puede ver, la aproximación es básicamente una función en escalera que toma la muestra de señal del convertidor D/A y la mantiene durante T segundos. Cuando llega la siguiente muestra, salta al valor siguiente y lo mantiene durante T segundos, y así sucesivamente.

La función de interpolación del sistema S/H es un impulso cuadrado definido por

$$g_{\mathrm{SH}}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{6.3.10}$$

La característica en el dominio de la frecuencia se ha obtenido evaluando su transformada de Fourier

$$G_{\mathrm{SH}}(F) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{\mathrm{SH}}(t) e^{-j2\pi Ft}\, dt = T \frac{\operatorname{sen} \pi FT}{\pi FT} e^{-2\pi F(T/2)} \tag{6.3.11}$$

El módulo de $G_{\mathrm{SH}}(F)$ se muestra en la Figura 6.3.9, en la que hemos superpuesto el módulo de la respuesta del interpolador ideal de banda limitada con propósitos de comparación. Puede verse que el circuito de muestreo

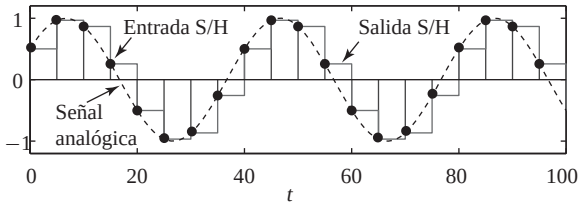


Figura 6.3.8. Respuesta de un interpolador S/H a una señal sinusoidal discreta en el tiempo.

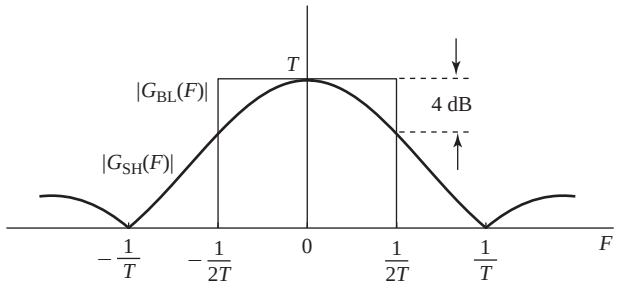


Figura 6.3.9. Respuestas en frecuencia del circuito de muestreo y retención y del interpolador ideal de banda limitada.

y retención no posee una frecuencia de corte abrupta. Esto se debe a un mayor grado de transiciones abruptas en su función de interpolación $g_{\mathrm{SH}}(t)$. Por tanto, el circuito S/H deja hasta su salida pasar componentes de frecuencia que presentan *aliasing* no deseadas (frecuencias por encima de $F_s/2$). Este efecto a veces se denomina *post-aliasing*. Para solucionar este problema, se suele filtrar la salida del circuito S/H utilizando un filtro paso bajo, que atenúa fuertemente las frecuencias mayores que $F_s/2$. En efecto, el filtro paso bajo que sigue al circuito de muestreo y retención suaviza su salida eliminando las discontinuidades abruptas. En ocasiones, la respuesta en frecuencia del filtro paso bajo se define como

$$H_a(F) = \begin{cases} \dfrac{\pi F T}{\operatorname{sen} \pi F T} e^{2\pi F (T/2)}, & |F| \leq F_s/2 \\ 0, & |F| > F_s/2 \end{cases} \tag{6.3.12}$$

para compensar la distorsión de $\operatorname{sen} x/x$ del circuito S/H (efecto de apertura). La compensación de la atenuación debida al efecto de apertura, que alcanza un máximo de $2/\pi$ o 4 dB en $F = F_s/2$, normalmente se desprecia. Sin embargo, puede introducirse utilizando un filtro digital antes de aplicar la señal al convertidor D/A. El retardo de media muestra que introduce el circuito S/H no se puede compensar, porque no podemos diseñar filtros analógicos que añadan un adelanto temporal.

6.4 Muestreo y reconstrucción de señales paso banda continuas en el tiempo

Una señal paso banda continua en el tiempo con un ancho de banda B y una frecuencia central F_c tiene su contenido en frecuencia en las dos bandas de frecuencias definidas por $0 < F_L < |F| < F_H$, donde $F_c = (F_L + F_H)/2$ (*véase* la Figura 6.4.1(a)). Una sencilla aplicación del teorema de muestreo sugiere una frecuencia de muestreo $F_s \geq 2F_H$; sin embargo, como hemos visto en esta sección, existen técnicas de muestreo que permiten emplear frecuencias de muestreo coherentes con el ancho de banda B, en lugar de con la frecuencia más alta, F_H, del espectro de la señal. El muestreo de señales paso banda tiene un gran interés en áreas, que incluyen los sistemas digitales de comunicaciones, de radar y sonar.

6.4.1 Muestreo uniforme o de primer orden

El muestreo uniforme o de primer orden es el muestreo periódico típico presentado en la Sección 6.1. Muestrear la señal paso banda mostrada en la Figura 6.4.1(a) a la frecuencia $F_s = 1/T$ produce una secuencia $x(n) = x_a(nT)$ cuyo espectro es

$$X(F) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s) \tag{6.4.1}$$

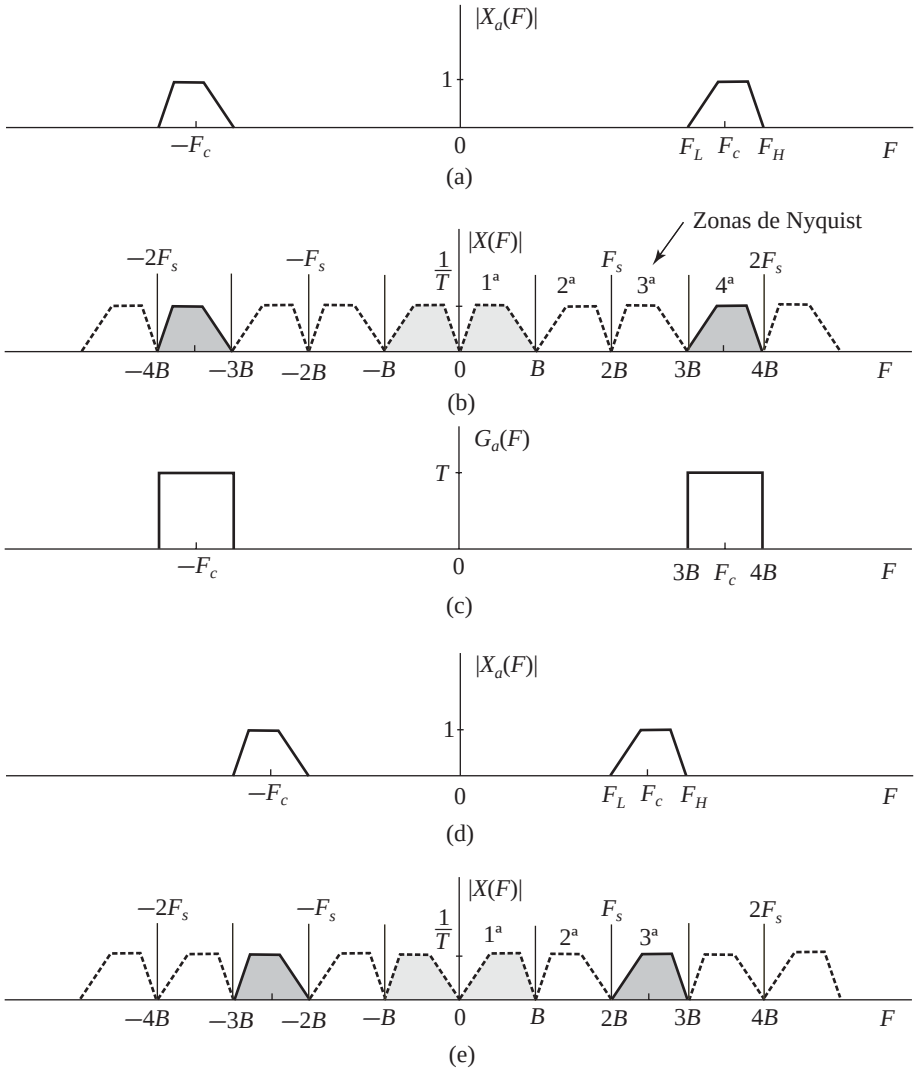


Figura 6.4.1. Ilustración del muestreo de una señal paso banda en el caso de posicionamiento de la banda en un entero.

El posicionamiento de las réplicas desplazadas $X(F - kF_s)$ se controla mediante un único parámetro, la frecuencia de muestreo F_s. Dado que, en general, las señales paso banda disponen de dos bandas espectrales, es más complicado controlar, con este único parámetro F_s, sus posiciones para evitar el *aliasing*.

Posicionamiento de la banda en un entero. Inicialmente restringimos la frecuencia más alta de la banda para que sea un múltiplo entero del ancho de banda, es decir, $F_H = mB$ (*posicionamiento de la banda en un entero*). El valor $m = F_H/B$, que en general es fraccionario, se conoce como *posición de la banda*. Las Figuras 6.4.1(a) y 6.4.1(d) muestran dos señales paso banda con posicionamiento de banda par $(m = 4)$ e impar $(m = 3)$. A partir de la Figura 6.4.1(b) es fácil deducir que, para señales paso banda posicionadas sobre un entero, la elección de $F_s = 2B$ da como resultado una secuencia con un espectro sin *aliasing*. En la Figura 6.4.1(c), podemos ver que la señal paso banda original puede reconstruirse utilizando la fórmula de reconstrucción:

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) g_a(t - nT) \tag{6.4.2}$$

donde

$$g_a(t) = \frac{\operatorname{sen} \pi Bt}{\pi Bt} \cos 2\pi F_c t \tag{6.4.3}$$

es la transformada inversa de Fourier de la función paso banda mostrada en la Figura 6.4.1(c). Observe que $g_a(t)$ es igual a la función de interpolación ideal para señales paso bajo [*véase* (6.1.21)], moduladas mediante una portadora de frecuencia F_c.

Merece la pena fijarse en que, seleccionando apropiadamente la frecuencia central F_c de $G_a(F)$, podemos reconstruir una señal paso banda continua en el tiempo con bandas centradas en $F_c = \pm(kB + B/2)$, $k = 0, 1, \ldots$. Para $k = 0$, obtenemos la señal banda base equivalente, éste es un proceso conocido como *conversión descendente*. Una inspección de la Figura 6.4.1 demuestra que el espectro banda base para $m = 3$ tiene la misma estructura espectral que el espectro original; sin embargo, el espectro banda base para $m = 4$ ha sido "invertido". En general, cuando la posición de la banda se encuentra sobre un valor entero *par*, las imágenes espectrales banda base son versiones invertidas de las originales. Es importante distinguir entre estos dos casos en aplicaciones de comunicaciones.

Posicionamiento arbitrario de la banda. Consideremos ahora una señal paso banda con las bandas espectrales situadas arbitrariamente, como se muestra en la Figura 6.4.2. Para evitar el *aliasing*, la frecuencia de muestreo tiene que ser tal que las réplicas $(k-1)$ y k desplazadas de la banda espectral "negativa" no se solapen con la banda espectral "positiva". A partir de la Figura 6.4.2(b) vemos que esto es posible si existe un entero k y una frecuencia de muestreo F_s que satisfagan las siguientes condiciones:

$$2F_H \leq kF_s \tag{6.4.4}$$

$$(k-1)F_s \leq 2F_L \tag{6.4.5}$$

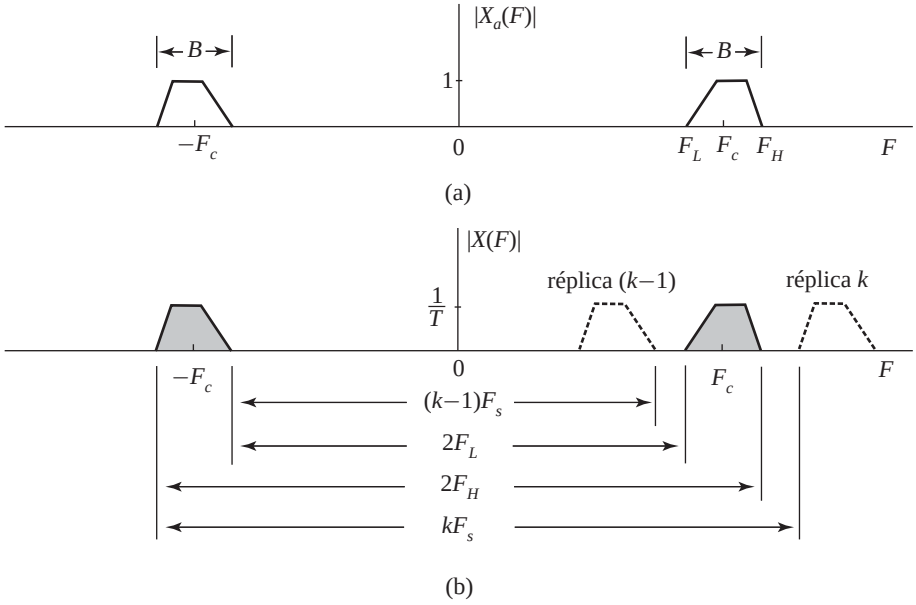


Figura 6.4.2. Ilustración del muestreo de una señal paso banda con posicionamiento de banda arbitrario.

que es un sistema de dos desigualdades con dos incógnitas, k y F_s. A partir de (6.4.4) y (6.4.5) podemos ver fácilmente que F_s debe estar en el rango

$$\frac{2F_H}{k} \leq F_s \leq \frac{2F_L}{k-1} \tag{6.4.6}$$

Para determinar el entero k, reescribimos (6.4.4) y (6.4.5) del siguiente modo:

$$\frac{1}{F_s} \leq \frac{k}{2F_H} \tag{6.4.7}$$

$$(k-1)F_s \leq 2F_H - 2B \tag{6.4.8}$$

Multiplicando (6.4.7) y (6.4.8) miembro a miembro y despejando k en la desigualdad resultante, obtenemos

$$k_{\max} \leq \frac{F_H}{B} \tag{6.4.9}$$

El valor máximo del entero k es el número de bandas que podemos encajar en el rango de 0 a F_H, es decir,

$$k_{\max} = \left\lfloor \frac{F_H}{B} \right\rfloor \tag{6.4.10}$$

donde $\lfloor b \rfloor$ designa la parte entera de b. La frecuencia de muestreo mínima necesaria para evitar el *aliasing* es $F_{s\max} = 2F_H/k_{\max}$. Por tanto, el rango de frecuencias de muestreo uniforme aceptable queda determinado por

$$\frac{2F_H}{k} \leq F_s \leq \frac{2F_L}{k-1} \tag{6.4.11}$$

donde k es un número entero dado por

$$1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{F_H}{B} \right\rfloor \tag{6.4.12}$$

Siempre que no exista *aliasing*, la reconstrucción se realiza utilizando (6.4.2) y (6.4.3), que son válidas tanto para el posicionamiento de la banda arbitrario como en un entero.

Elección de una frecuencia de muestreo. Para valorar las implicaciones de las condiciones (6.4.11) y (6.4.12) se han descrito gráficamente en la Figura 6.4.3, como sugiere Vaughan *et al.* (1991). La gráfica indica que la frecuencia de muestreo, normalizada por B, es una función de la posición de la banda, F_H/B. Podemos ver esto más fácilmene si escribimos (6.4.11) del siguiente modo:

$$\frac{2}{k}\frac{F_H}{B} \leq \frac{F_s}{B} \leq \frac{2}{k-1}\left(\frac{F_H}{B} - 1\right) \tag{6.4.13}$$

Las áreas sombreadas representan frecuencias de muestreo que son resultado del *aliasing*. El rango permitido de frecuencias de muestreo es el definido por las cuñas blancas. Para $k = 1$, tenemos $2F_H \leq F_s \leq \infty$, que es el teorema de muestreo para señales paso bajo. Cada cuña de la gráfica se corresponde con un valor diferente de k.

Para determinar las frecuencias de muestreo permitidas, para valores de F_H y B dados, dibujamos una línea vertical en el punto determinado por F_H/B. Los segmentos de la línea que caen dentro de las áreas permitidas representan tasas de muestreo permisibles. Observemos que la frecuencia mínima de muestreo teórica $F_s = 2B$, correspondiente al posicionamiento de banda en un entero, se produce en los extremos de las cuñas. Por tanto, cualquier pequeña variación de la frecuencia de muestreo o de la frecuencia de la portadora de la señal desplazará a la frecuencia de muestreo al interior de una zona prohibida. Una solución práctica consiste en muestrear a una tasa de muestreo más alta, lo que es equivalente a aumentar el tamaño de la banda de señal con una banda de

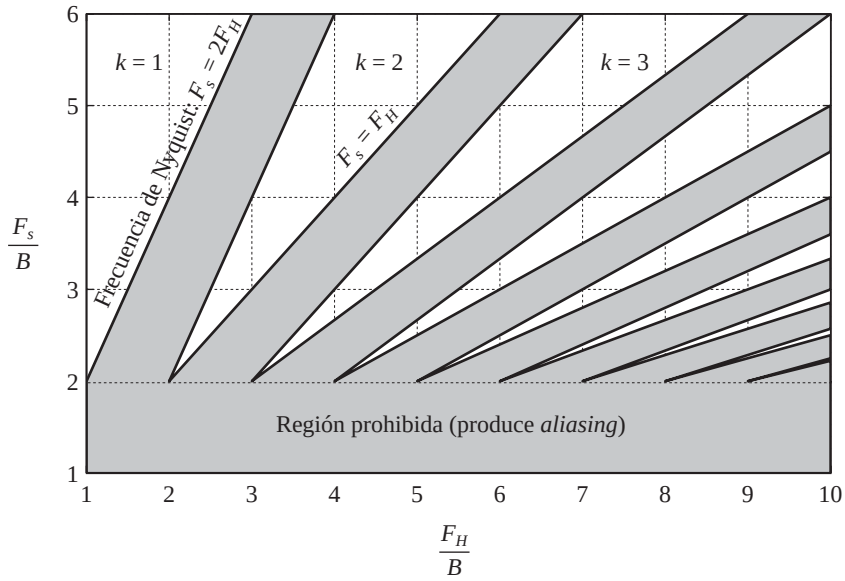


Figura 6.4.3. Regiones de la frecuencia de muestreo permitidas (en blanco) y prohibidas (sombreadas) para señales paso banda. La frecuencia de muestreo mínima $F_s = 2B$, que se corresponde con las esquinas de las cuñas libres de *aliasing*, sólo es posible para bandas colocadas sobre un entero.

guarda $\Delta B = \Delta B_L + \Delta B_H$. Las posiciones de la banda incrementadas y el ancho de banda quedan determinados por

$$F'_L = F_L - \Delta B_L \tag{6.4.14}$$

$$F'_H = F_H + \Delta B_H \tag{6.4.15}$$

$$B' = B + \Delta B \tag{6.4.16}$$

La cuña de orden inferior y el correspondiente rango de frecuencias de muestreo permitidas están dados por

$$\frac{2F'_H}{k'} \leq F_s \leq \frac{2F'_L}{k'-1} \quad \text{donde} \quad k' = \left\lfloor \frac{F'_H}{B'} \right\rfloor \tag{6.4.17}$$

La cuña k' con las bandas de guarda y las tolerancias de la frecuencia de muestreo se ilustran en la Figura 6.4.4. El rango permitido de frecuencias de muestreo se divide en valores por encima y por debajo de los puntos prácticos de operación como sigue

$$\Delta F_s = \frac{2F'_L}{k'-1} - \frac{2F'_H}{k'} = \Delta F_{\mathrm{sL}} + \Delta F_{\mathrm{sH}} \tag{6.4.18}$$

A partir de los triángulos ortogonales sombreados de la Figura 6.4.4, obtenemos

$$\Delta B_L = \frac{k'-1}{2} \Delta F_{\mathrm{sH}} \tag{6.4.19}$$

$$\Delta B_H = \frac{k'}{2} \Delta F_{\mathrm{sL}} \tag{6.4.20}$$

que indican que las bandas de guarda simétricas llevan a una tolerancia asimétrica de la frecuencia de muestreo.

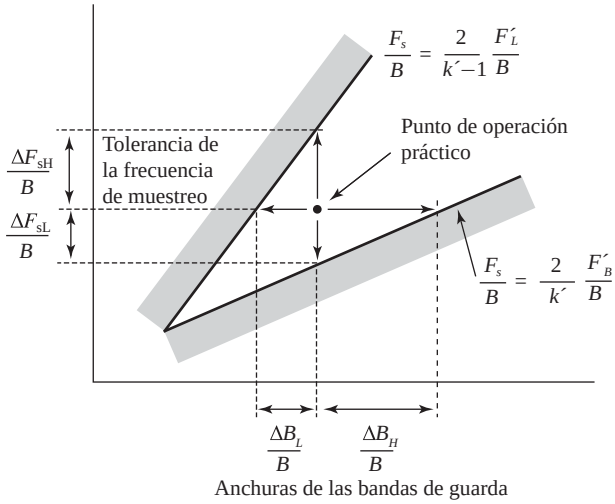


Figura 6.4.4. Ilustración, para la cuña k, de la relación entre el tamaño de las bandas de guarda y las desviaciones de la frecuencia de muestreo permitida de su valor nominal.

Si seleccionamos el punto de operación práctico en el punto central vertical de la cuña, la frecuencia de muestreo es

$$F_s = \frac{1}{2}\left(\frac{2F'_H}{k'} + \frac{2F'_L}{k'-1}\right) \tag{6.4.21}$$

Luego, por construcción, $\Delta F_{sL} = \Delta F_{sH} = \Delta F_s/2$, y las bandas de guarda quedan definidas por

$$\Delta B_L = \frac{k'-1}{4}\Delta F_s \tag{6.4.22}$$

$$\Delta B_H = \frac{k'}{4}\Delta F_s \tag{6.4.23}$$

A continuación proporcionamos un ejemplo que ilustra el uso de este método.

EJEMPLO 6.4.1

Suponga que tenemos una señal paso banda con $B = 25$ kHz y $F_L = 10{,}702.5$ kHz. A partir de (6.4.10), vemos que el índice máxima de cuña es

$$k_{\max} = \lfloor F_H/B \rfloor = 429$$

lo que proporciona la frecuencia de muestreo mínima teórica

$$F_s = \frac{2F_H}{k_{\max}} = 50.0117 \text{ kHz}$$

Para evitar el potencial *aliasing* debido a las imperfecciones del hardware, deseamos utilizar dos bandas de guarda de anchura $\Delta B_L = 2.5$ kHz y $\Delta B_H = 2.5$ kHz en cada lado de la banda de la señal. El ancho de banda efectivo de la señal será entonces $B' = B + \Delta B_L + \Delta B_H = 30$ kHz. Además, $F'_L = F_L - \Delta B_L = 10{,}700$ kHz y $F'_H = F_H + \Delta B_H = 10{,}730$ kHz. A partir de (6.4.17), el índice máximo de cuña es

$$k'_{\max} = \lfloor F'_H/B' \rfloor = 357$$

Sustituyendo $k_{\text{máx}}$ en la desigualdad dada por (6.4.17) se obtiene el rango de frecuencias de muestreo aceptable

$$60.1120 \text{ kHz} \le F_s \le 60.1124 \text{ kHz}$$

Un análisis detallado de cómo elegir en la práctica la frecuencia de muestreo para señales paso banda se proporciona en los textos de Vaughan *et al.* (1991) y Qi *et al.* (1996).

6.4.2 Muestreo intercalado o no uniforme de segundo orden

Suponga que muestreamos una señal continua en el tiempo $x_a(t)$ a una frecuencia de muestreo $F_i = 1/T_i$ en los instantes de tiempo $t = nT_i + \Delta_i$, donde Δ_i es un desplazamiento de tiempo fijo. Utilizando la secuencia

$$x_i(nT_i) = x_a(nT_i + \Delta_i), \quad -\infty < n < \infty \tag{6.4.24}$$

y una función de reconstrucción $g_a^{(i)}(t)$ generamos una señal continua en el tiempo

$$y_a^{(i)}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_i(nT_i) g_a^{(i)}(t - nT_i - \Delta_i) \tag{6.4.25}$$

La transformada de Fourier de $y_a^{(i)}(t)$ está dada por

$$Y_a^{(i)}(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_i(nT_i) G_a^{(i)}(F) e^{-j2\pi F(nT_t + \Delta_i)} \tag{6.4.26}$$

$$= G_a^{(i)}(F) X_i(F) e^{-j2\pi F \Delta_i} \tag{6.4.27}$$

donde $X_i(F)$ es la transformada de Fourier de $x_i(nT_i)$. A partir del teorema de muestreo definido por (6.1.14), la transformada de Fourier de $x_i(nT_i)$ se puede expresar en función de la transformada $X_a(F)e^{j2\pi F \Delta_i}$ de $x_a(t + \Delta_i)$ como

$$X_i(F) = \frac{1}{T_i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(F - \frac{k}{T_i}\right) e^{j2\pi(F - \frac{k}{T_i})\Delta_i} \tag{6.4.28}$$

Sustituyendo (6.4.28) en (6.4.27) obtenemos

$$Y_a^{(i)}(F) = G_a^{(i)}(F) \frac{1}{T_i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(F - \frac{k}{T_i}\right) e^{-j2\pi \frac{k}{T_i} \Delta_i} \tag{6.4.29}$$

Si repetimos el proceso de muestreo (6.4.24) para $i = 1, 2, \ldots, p$, obtenemos p secuencias muestreadas uniformemente intercaladas $x_i(nT_i)$, $-\infty < n < \infty$. La suma de las p señales reconstruidas está dada por

$$y_a(t) = \sum_{i=1}^{p} y_a^{(i)}(t) \tag{6.4.30}$$

Utilizando (6.4.29) y (6.4.30), la transformada de Fourier de $y_a(t)$ se puede expresar como

$$Y_a(F) = \sum_{i=1}^{p} G_a^{(i)}(F) V^{(i)}(F) \tag{6.4.31}$$

donde

$$V^{(i)}(F) = \frac{1}{T_i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(F - \frac{k}{T_i}\right) e^{-j2\pi \frac{k}{T_i} \Delta_i} \tag{6.4.32}$$

Vamos a centrarnos en el muestreo de segundo orden más comúnmente utilizado, definido por

$$p = 2, \Delta_1 = 0, \Delta_2 = \Delta, T_1 = T_2 = \frac{1}{B} = T \tag{6.4.33}$$

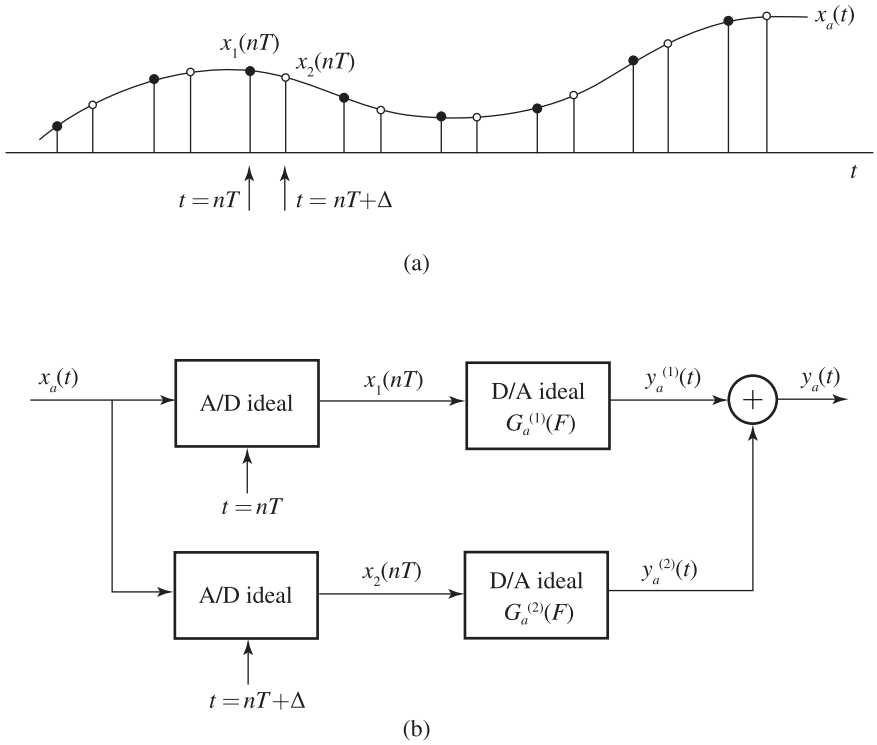


Figura 6.4.5. Ilustración del muestreo de segundo orden de una señal paso banda. (a) Secuencias muestreadas intercaladas. (b) Muestreo de segundo orden y sistema de reconstrucción.

En este caso, las relaciones (6.4.31) y (6.4.32) proporcionan (*véase* la Figura 6.4.5),

$$Y_a(F) = BG_a^{(1)}(F) \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F-kB) + BG_a^{(2)}(F) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma^k X_a(F-kB) \tag{6.4.34}$$

donde

$$\gamma = e^{-j2\pi B\Delta} \tag{6.4.35}$$

Para comprender la naturaleza de (6.4.34), en primer lugar separamos el espectro $X_a(F)$ en una banda "positiva" y una banda "negativa" como sigue:

$$X_a^+(F) = \begin{cases} X_a(F), & F \geq 0 \\ 0, & F < 0 \end{cases}, \quad X_a^-(F) = \begin{cases} X_a(F), & F \leq 0 \\ 0, & F > 0 \end{cases} \tag{6.4.36}$$

A continuación, dibujamos las réplicas repetidas de $X_a(F-kB)$ y $\gamma^k X_a(F-kB)$ como cuatro componentes separadas, como se ilustra en la Figura 6.4.6. Observe que puesto que cada componente individual tiene un ancho de banda B y una frecuencia de muestreo $F_s = 1/B$, sus copias repetidas llenan el eje de frecuencias completo sin solaparse, es decir, sin *aliasing*. Sin embargo, cuando las combinamos, las bandas negativas causan *aliasing* en las bandas positivas, y viceversa.

Deseamos determinar las funciones de interpolación $G_a^{(1)}(F)$, $G_a^{(2)}(F)$ y el desplazamiento temporal Δ, de modo que $Y_a(F) = X_a(F)$. A partir de la Figura 6.4.6 vemos que el primer requisito es

$$G_a^{(1)}(F) = G_a^{(2)}(F) = 0, \text{ para } |F| < F_L \text{ y } |F| > F_L + B \tag{6.4.37}$$

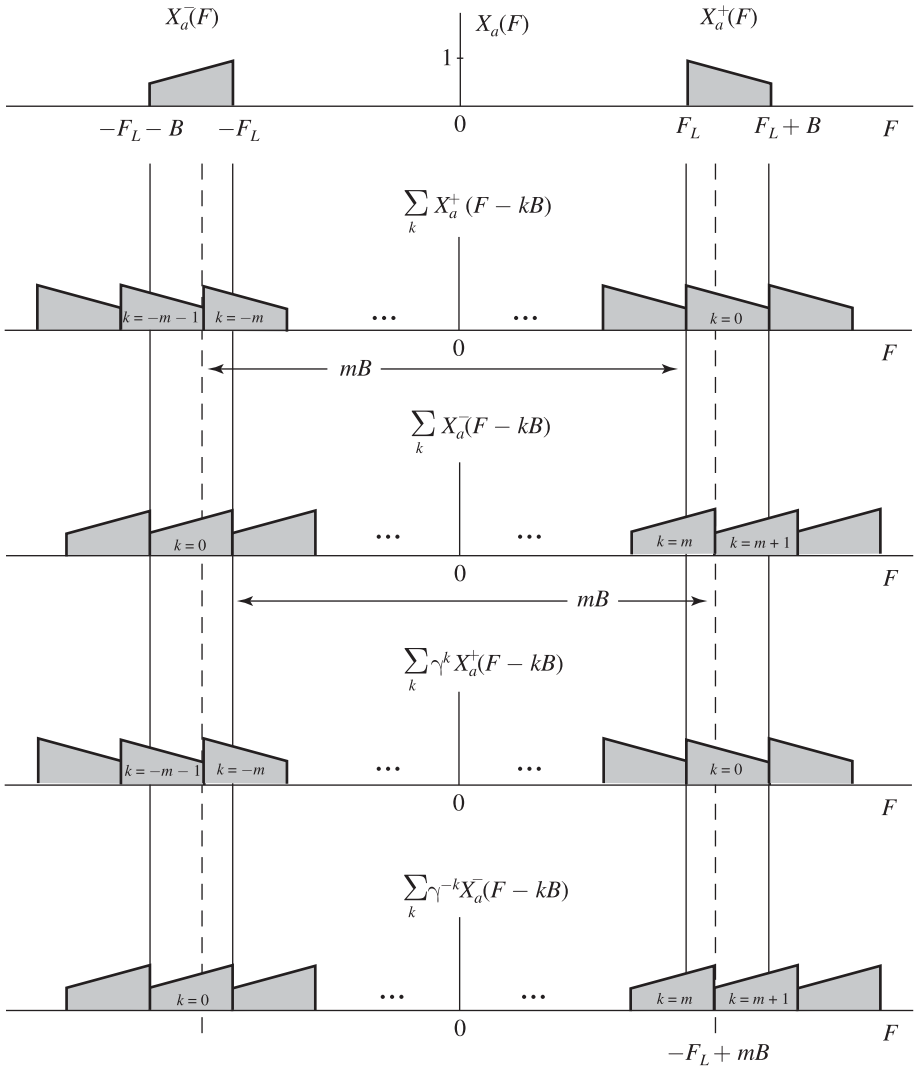


Figura 6.4.6. Ilustración del *aliasing* en el muestreo de segundo orden de una señal paso banda.

Para determinar $G_a^{(1)}(F)$ y $G_a^{(2)}(F)$ para $F_L \leq |F| \leq F_L + B$, vemos a partir de la Figura 6.4.6 que sólo las componentes con $k = \pm m$ y $k = \pm(m+1)$, donde

$$m = \left\lceil \frac{2F_L}{B} \right\rceil \tag{6.4.38}$$

es el mínimo entero mayor o igual que $2F_L/B$, que produce solapamiento con el espectro original.

En la región $F_L \leq F \leq -F_L + mB$, la Ecuación (6.4.34) se convierte en

$$\begin{aligned} Y_a^+(F) = {} & \left[BG_a^{(1)}(F) + BG_a^{(2)}(F)\right] X_a^+(F) \ \text{(componente de señal)} \\ & + \left[BG_a^{(1)}(F) + B\gamma^m G_a^{(2)}(F)\right] X_a^+(F - mB) \ \text{(componente de } \textit{aliasing}\text{)} \end{aligned}$$

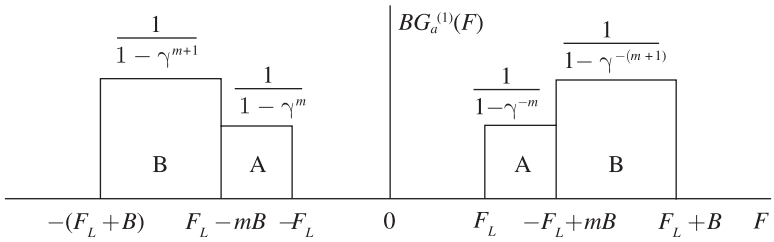


Figura 6.4.7. Caracterización en el dominio de la frecuencia de la función de interpolación paso banda para un proceso de muestreo de segundo orden.

Las condiciones que aseguran la reconstrucción perfecta $Y_a^+(F) = X_a^+(F)$ son

$$BG_a^{(1)}(F) + BG_a^{(2)}(F) = 1 \tag{6.4.39}$$

$$BG_a^{(1)}(F) + B\gamma^m G_a^{(2)}(F) = 0 \tag{6.4.40}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos las soluciones

$$G_a^{(1)}(F) = \frac{1}{B}\frac{1}{1-\gamma^{-m}}, \quad G_a^{(2)}(F) = \frac{1}{B}\frac{1}{1-\gamma^{m}} \tag{6.4.41}$$

que existe sólo para Δ tal que $\gamma^{\pm m} = e^{\mp j2\pi mB\Delta} \neq 1$.

En la región $-F_L + mB \leq F \leq F_L + B$, la Ecuación (6.4.34) se convierte en

$$\begin{aligned} Y_a^+(F) = &\left[BG_a^{(1)}(F) + BG_a^{(2)}(F)\right] X_a^+(F) \\ &+ \left[BG_a^{(1)}(F) + B\gamma^{m+1} G_a^{(2)}(F)\right] X_a^+(F-(m+1)B) \end{aligned}$$

Las condiciones que aseguran la reconstrucción perfecta $Y_a^+(F) = X_a^+(F)$ están dadas por

$$BG_a^{(1)}(F) + BG_a^{(2)}(F) = 1 \tag{6.4.42}$$

$$BG_a^{(1)}(F) + B\gamma^{m+1} G_a^{(2)}(F) = 0 \tag{6.4.43}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos las soluciones

$$G_a^{(1)}(F) = \frac{1}{B}\frac{1}{1-\gamma^{-(m+1)}}, \quad G_a^{(2)}(F) = \frac{1}{B}\frac{1}{1-\gamma^{m+1}} \tag{6.4.44}$$

que existen para todo Δ tal que $\gamma^{\pm(m+1)} = e^{\mp j2\pi(m+1)B\Delta} \neq 1$.

Las funciones de reconstrucción en el rango de frecuencias $-(F_L+B) \leq F \leq -F_L$ puede obtenerse de forma similar. Las fórmulas están dadas por (6.4.41) y (6.4.44) reemplazando m por $-m$ y $m+1$ por $-(m+1)$. La función $G_a^{(1)}(F)$ tiene la respuesta paso banda mostrada en la Figura 6.4.7. Una gráfica similar para $G_a^{(2)}(F)$ revela que

$$G_a^{(2)}(F) = G_a^{(1)}(-F) \tag{6.4.45}$$

lo que implica que $g_a^{(2)}(t) = g_a^{(1)}(-t)$. Por tanto, con el fin de simplificar, adoptamos la notación $g_a(t) = g_a^{(1)}(t)$ y escribimos la fórmula de reconstrucción (6.4.30) del siguiente modo:

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{B}\right) g_a\left(t - \frac{n}{B}\right) + x_a\left(\frac{n}{B} + \Delta\right) g_a\left(-t + \frac{n}{B} + \Delta\right) \tag{6.4.46}$$

Tomando la transformada inversa de Fourier de la función mostrada en la Figura 6.4.7, podemos demostrar que la función de interpolación está dada por (*véase* el Problema 6.7)

$$g_a(t) = a(t) + b(t) \tag{6.4.47}$$

$$a(t) = \frac{\cos[2\pi(mB - F_L)t - \pi mB\Delta] - \cos(2\pi F_L t - \pi mB\Delta)}{2\pi Bt \operatorname{sen}(\pi mB\Delta)} \tag{6.4.48}$$

$$b(t) = \frac{\cos[2\pi(F_L + B)t - \pi(m+1)B\Delta] - \cos[2\pi(mB - F_L)t - \pi(m+1)B\Delta]}{2\pi Bt \operatorname{sen}[\pi(m+1)B\Delta]} \tag{6.4.49}$$

Podemos ver que $g_a(0) = 1$, $g_a(n/B) = 0$ para $n \neq 0$, y $g_a(n/B \pm \Delta) = 0$ para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, como es de esperar para cualquier función de interpolación.

Hemos demostrado que una señal paso banda $x_a(t)$ con frecuencias en el rango $F_L \leq |F| \leq F_L + B$ puede reconstruirse perfectamente a partir de dos secuencias muestreadas uniformemente e intercaladas $x_a(n/B)$ y $x_a(n/B + \Delta)$, $-\infty < n < \infty$, aplicando la fórmula de interpolación (6.4.46) con una frecuencia media $F_s = 2B$ muestras/segundo sin ninguna restricción sobre la posición de la banda. El desplazamiento temporal Δ no puede tomar valores que puedan hacer que la función de interpolación tome valores infinitos. Este teorema de muestreo de segundo orden fue establecido por Kohlenberg (1953). El caso general del muestreo de orden p ($p > 2$) ha sido tratado por Coulson (1995).

Se pueden realizar algunas simplificaciones útiles cuando $m = 2F_L/B$, es decir, para el caso de posicionamiento de la banda en un entero (Linden 1959, Vaughan *et al.* 1991). En este caso, la región A se anula, lo que implica que $a(t) = 0$. Por tanto, tenemos $g_a(t) = b(t)$. Existen dos casos de interés especial.

Para señales paso bajo, $F_L = 0$ y $m = 0$, por lo que la función de interpolación es

$$g_{\mathrm{LP}}(t) = \frac{\cos(2\pi Bt - \pi B\Delta) - \cos(\pi B\Delta)}{2\pi Bt \operatorname{sen}(\pi B\Delta)} \tag{6.4.50}$$

La restricción adicional $\Delta = 1/2B$, que da lugar a una frecuencia de muestreo uniforme, proporciona una función de interpolación seno bien conocida $g_{\mathrm{LP}}(t) = \operatorname{sen}(2\pi Bt)/2\pi Bt$.

Para señales paso banda con $F_L = mB/2$ podemos elegir el desplazamiento temporal Δ tal que $\gamma^{\pm(m+1)} = -1$. Este requisito se satisface si

$$\Delta = \frac{2k+1}{2B(m+1)} = \frac{1}{4F_c} + \frac{k}{2F_c}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{6.4.51}$$

donde $F_c = F_L + B/2 = B(m+1)/2$ es la frecuencia central de la banda. En este caso, la función de interpolación se especifica mediante $G_Q(F) = 1/2$ en el rango $mB/2 \leq |F| \leq (m+1)B/2$ y $G_Q(F) = 0$ en cualquier otro caso. Tomando la transformada inversa de Fourier, obtenemos

$$g_Q(t) = \frac{\operatorname{sen} \pi Bt}{\pi Bt} \cos 2\pi F_c t \tag{6.4.52}$$

que es un caso especial de (6.4.47)–(6.4.49). Este caso especial se conoce como muestreo en cuadratura directo, porque las componentes en fase y en cuadratura se obtienen explícitamente a partir de la señal paso banda (*véase* la Sección 6.4.3).

Por último, observe que es posible muestrear una señal paso banda y luego reconstruir la señal discreta en el tiempo en una posición de la banda distinta de la original. Esta reubicación espectral o desplazamiento en frecuencia de la señal paso banda se hace normalmente utilizando el muestreo en cuadratura directo [Coulson *et al.* (1994)]. La importancia de este método se encuentra en que se puede implementar utilizando técnicas de tratamiento digital de señales.

6.4.3 Representaciones de señales paso banda

La causa principal de complicaciones en el muestreo de una señal paso banda real $x_a(t)$ es la presencia de las dos bandas espectrales separadas en las regiones de frecuencia $-(F_L+B) \leq F \leq -F_L$ y $F_L \leq F \leq F_L+B$. Puesto que $x_a(t)$ es real, las frecuencias negativas y positivas de su espectro están relacionadas por

$$X_a(-F) = X_a^*(F) \tag{6.4.53}$$

Por tanto, la señal se puede especificar completamente mediante una mitad del espectro. A continuación, vamos a desarrollar esta idea para presentar las representaciones simplificadas de las señales paso banda. Comenzamos con la identidad

$$\cos 2\pi F_c t = \frac{1}{2}e^{j2\pi F_c t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi F_c t} \tag{6.4.54}$$

que representa la señal real $\cos 2\pi F_c t$ mediante dos líneas espectrales de módulo 1/2, una en $F = F_c$ y la otra en $F = -F_c$. Tenemos ahora la identidad

$$\cos 2\pi F_c t = 2\Re\left\{\frac{1}{2}e^{j2\pi F_c t}\right\} \tag{6.4.55}$$

que representa la señal real como la parte real de una señal compleja. En términos del espectro, ahora especificamos la señal real $\cos 2\pi F_c t$ mediante la parte positiva de su espectro, es decir, la línea espectral en $F = F_c$. La amplitud de las frecuencias positivas se duplica para compensar la omisión de las frecuencias negativas.

La extensión a señales con espectro continuo es directa. De hecho, la integral de la transformada inversa de Fourier de $x_a(t)$ se puede dividir en dos partes como

$$x_a(t) = \int_0^\infty X_a(F)e^{j2\pi Ft}dF + \int_{-\infty}^0 X_a(F)e^{j2\pi Ft}\, dF \tag{6.4.56}$$

Haciendo un cambio de variable en la segunda integral de F a $-F$ y aplicando (6.4.53) tenemos

$$x_a(t) = \int_0^\infty X_a(F)e^{j2\pi Ft}\, dF + \int_0^\infty X_a^*(F)e^{-j2\pi Ft}\, dF \tag{6.4.57}$$

La última ecuación puede escribirse también como sigue

$$x_a(t) = \Re\left\{\int_0^\infty 2X_a(F)e^{j2\pi Ft}\, dF\right\} = \Re\{\psi_a(t)\} \tag{6.4.58}$$

donde la señal compleja

$$\psi_a(t) = \int_0^\infty 2X_a(F)e^{j2\pi Ft}\, dF \tag{6.4.59}$$

se conoce como *señal analítica* o *pre-envolvente* de $x_a(t)$. El espectro de la señal analítica puede expresarse en función de la función escalón unidad $V_a(F)$ como sigue:

$$\Psi_a(F) = 2X_a(F)V_a(F) = \begin{cases} 2X_a(F), & F > 0 \\ 0, & F < 0 \end{cases} \tag{6.4.60}$$

Cuando $X_a(0) \neq 0$, definimos $\Psi_a(0) = X_a(0)$. Para expresar la señal analítica $\psi_a(t)$ en función de $x_a(t)$, recordemos que la transformada inversa de Fourier de $V_a(F)$ está dada por

$$v_a(t) = \frac{1}{2}\delta(t) + \frac{j}{2\pi t} \tag{6.4.61}$$

A partir de (6.4.60), (6.4.61) y el teorema de la convolución, obtenemos

$$\psi_a(t) = 2x_a(t) * v_a(t) = x_a(t) + j\frac{1}{\pi t} * x_a(t) \tag{6.4.62}$$

La señal obtenida a partir de la convolución de la respuesta al impulso

$$h_Q(t) = \frac{1}{\pi t} \tag{6.4.63}$$

y la señal de entrada $x_a(t)$ está dada por

$$\hat{x}_a(t) = \frac{1}{\pi t} * x_a(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_a(\tau)}{t-\tau}\, d\tau \tag{6.4.64}$$

y se conoce como *transformada de Hilbert* de $x_a(t)$, y se designa por $\hat{x}_a(t)$. Debemos destacar que la transformada de Hilbert es una convolución y no cambia el dominio, por lo que tanto su entrada $x_a(t)$ como su salida $\hat{x}_a(t)$ son funciones del tiempo.

El filtro definido por (6.4.63) tiene la respuesta en frecuencia dada por

$$H_Q(F) = \int_{-\infty}^{\infty} h_Q(t)e^{-j2\pi Ft}\, dt = \begin{cases} -j, & F > 0 \\ j, & F < 0 \end{cases} \tag{6.4.65}$$

o, en función del módulo y la fase

$$|H_Q(F)| = 1, \quad \sphericalangle H_Q(F) = \begin{cases} -\pi/2, & F > 0 \\ \pi/2, & F < 0 \end{cases} \tag{6.4.66}$$

El transformador de Hilbert $H_Q(F)$ es un filtro paso todo en cuadratura que simplemente desplaza la fase de las componentes de frecuencia positiva $-\pi/2$ y la fase de las componentes negativas $\pi/2$. A partir de (6.4.63), vemos que $h_Q(t)$ es no causal, lo que significa que el transformador de Hilbert no se puede realizar físicamente.

Podemos expresar la señal analítica mediante la transformada de Hilbert como

$$\psi_a(t) = x_a(t) + j\hat{x}_a(t) \tag{6.4.67}$$

Vemos que la transformada de Hilbert de $x_a(t)$ proporciona la parte imaginaria de la representación de la señal analítica.

La señal analítica $\psi_a(t)$ de $x_a(t)$ es una señal paso banda en la región $F_L \le F \le F_L + B$. Por tanto, puede ser desplazada a la región de banda base $-B/2 \le F \le B/2$ utilizando la propiedad de modulación de la transformada de Fourier

$$x_{\mathrm{LP}}(t) = e^{-j2\pi F_c t}\psi_a(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X_{\mathrm{LP}}(F) = \Psi_a(F + F_c) \tag{6.4.68}$$

La señal paso bajo compleja $x_{\mathrm{LP}}(t)$ se conoce como *envolvente compleja* de $x_a(t)$.

La envolvente compleja se puede expresar en coordenadas rectangulares como

$$x_{\mathrm{LP}}(t) = x_I(t) + jx_Q(t) \tag{6.4.69}$$

donde $x_I(t)$ y $x_Q(t)$ son señales paso bajo reales en la misma región de frecuencias que $x_{\mathrm{LP}}(t)$. Aplicando (6.4.58), (6.4.68) y (6.4.69), podemos deducir fácilmente la *representación en cuadratura* de las señales paso banda

$$x_a(t) = x_I(t)\cos 2\pi F_c t - x_Q(t)\operatorname{sen} 2\pi F_c t \tag{6.4.70}$$

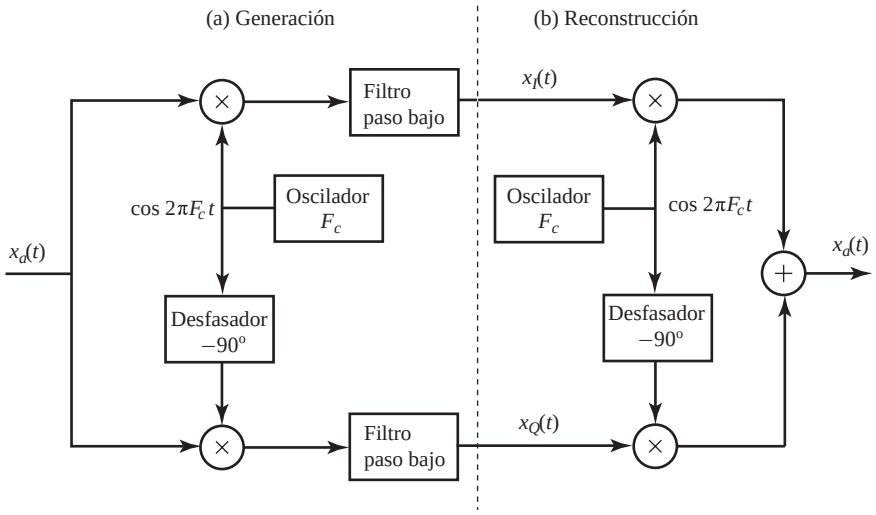


Figura 6.4.8. (a) Esquema para generar las componentes en fase y en cuadratura de una señal paso banda. (b) Esquema para reconstruir una señal paso banda a partir de sus componentes en fase y en cuadratura.

Hacemos referencia a $x_I(t)$ como la *componente en fase* de la señal paso banda y a $x_Q(t)$ como la *componente en cuadratura*, porque las portadoras $\cos 2\pi F_c t$ y $\operatorname{sen} 2\pi F_c t$ están en cuadratura de fase una respecto de la otra. Las componentes en fase y en cuadratura se pueden obtener a partir de la señal $x_a(t)$ utilizando la demodulación en cuadratura mostrada en la Figura 6.4.8(a). La señal paso banda puede reconstruirse utilizando el esquema de la Figura 6.4.8(b).

Alternativamente, podemos expresar la envolvente compleja en coordenadas polares como

$$x_{\mathrm{LP}}(t) = A(t)e^{j\phi(t)} \tag{6.4.71}$$

donde $A(t)$ y $\phi(t)$ son señales paso bajo reales. De acuerdo con esta representación polar, la señal paso banda $x_a(t)$ se puede escribir como

$$x_a(t) = A(t)\cos[2\pi F_c t + \phi(t)] \tag{6.4.72}$$

donde $A(t)$ es la *envolvente* y $\phi(t)$ es la *fase* de la señal paso banda. La Ecuación (6.4.72) representa una señal paso banda utilizando una combinación de modulación en amplitud y ángulo. Podemos ver fácilmente que $x_I(t)$ y $x_Q(t)$ están relacionadas con $A(t)$ y $\phi(t)$ del siguiente modo:

$$x_I(t) = A(t)\cos 2\pi F_c t, \qquad x_Q(t) = A(t)\operatorname{sen} 2\pi F_c t \tag{6.4.73}$$

$$A(t) = \sqrt{x_I^2(t) + x_Q^2(t)}, \qquad \phi(t) = \tan^{-1}\left[\frac{x_Q(t)}{x_I(t)}\right] \tag{6.4.74}$$

La fase $\phi(t)$ queda definida de forma unívoca en función de $x_I(t)$ y $x_Q(t)$, módulo 2π.

6.4.4 Muestreo empleando las representaciones de la señal paso banda

La envolvente compleja dada por (6.4.68) y la representación en cuadratura dada por (6.4.70) permiten el muestreo de una señal paso banda a una frecuencia $F_s = 2B$, independientemente de la posición de la banda.

Puesto que la señal analítica $\psi_a(t)$ presenta una única banda en $F_L \le F \le F_L + B$, se puede muestrear a una velocidad de B muestras complejas por segundo o, $2B$ muestras reales por segundo sin que se produzca *aliasing* (*véase* la segundo gráfica de la Figura 6.4.6). De acuerdo con la expresión (6.4.67), estas muestras se pueden

obtener muestreando $x_a(t)$ y su tranformada de Hilbert $\hat{x}_a(t)$ a una frecuencia de B muestras por segundo. La reconstrucción requiere una función de interpolación paso banda compleja definida por

$$g_a(t) = \frac{\operatorname{sen} \pi Bt}{\pi Bt} e^{j2\pi F_c t} \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} G_a(F) = \begin{cases} 1, & F_L \leq F \leq F_L + B \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{6.4.75}$$

donde $F_c = F_L + B/2$. El principal problema con este método es el diseño, en la práctica, de transformadores de Hilbert analógicos.

Del mismo modo, dado que las componentes en fase $x_I(t)$ y en cuadratura $x_Q(t)$ de la señal paso banda $x_a(t)$ son señales paso bajo con una única banda de ancho $B/2$, pueden representarse unívocamente mediante las secuencias $x_I(nT)$ y $x_Q(nT)$, donde $T = 1/B$. Esto da como resultado una frecuencia de muestreo total de $F_s = 2B$ muestras reales por segundo. La señal paso banda original puede reconstruirse, reconstruyendo primero las componentes en fase y en cuadratura mediante interpolación ideal y recombinándolas después aplicando la fórmula (6.4.70).

Las componentes en fase y en cuadratura se pueden obtener muestreando directamente la señal $x_a(t)$, utilizando muestreo de segundo orden con una elección apropiada de Δ. Esto nos lleva a una simplificación importante, porque podemos evitar el complejo proceso de demodulación requerido para generar las señales en fase y en cuadratura. Extraer directamente $x_I(t)$ de $x_a(t)$, es decir,

$$x_a(t_n) = x_I(t_n) \tag{6.4.76}$$

requiere muestrear en los instantes de tiempo

$$2\pi F_c t_n = \pi n, \text{ o } t_n = \frac{n}{2F_c}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{6.4.77}$$

De forma similar, para obtener $x_Q(t)$, muestrearemos en los instantes de tiempo

$$2\pi F_c t_n = \frac{\pi}{2}(2n+1), \text{ or } t_n = \frac{2n+1}{4F_c}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{6.4.78}$$

lo que proporciona

$$x_a(t_n) = -x_Q(t_n) \tag{6.4.79}$$

que es equivalente al caso especial de muestreo de segundo orden definido por (6.4.51). Se describen algunas variaciones de este método en Grace y Pitt (1969), Rice y Wu (1982), Waters y Jarret (1982), y Jackson y Matthewson (1986).

Por último, sepa que el método de cuadratura para muestrear señales paso banda ha sido ampliamente empleado en sistemas de radar y de comunicaciones para generar las secuencias en fase y en cuadratura para su posterior tratamiento. Sin embargo, con el desarrollo de convertidores A/D y procesadores digitales de señal más rápidos, resulta más económico y sencillo muestrear directamente la señal paso banda, como se ha descrito en la Sección 6.4.1, y obtener después $x_I(n)$ y $x_Q(n)$ utilizando el método discreto en el tiempo desarrollado en la Sección 6.5.

6.5 Muestreo de señales discretas en el tiempo

En esta sección utilizamos las técnicas desarrolladas para el muestreo y representación de señales continuas en el tiempo para abordar el muestreo y la reconstrucción de señales paso bajo y paso banda discretas en el tiempo. Este enfoque consiste en reconstruir conceptualmente la señal continua en el tiempo subyacente y, a continuación, volver a muestrear a la frecuencia de muestreo deseada. Sin embargo, las implementaciones finales implican únicamente operaciones discretas en el tiempo. En el Capítulo 11 se aborda el área más general de conversión de la frecuencia de muestreo.

6.5.1 Muestreo e interpolación de señales discretas en el tiempo

Supongamos que una secuencia $x(n)$ se muestrea periódicamente, conservando cada una de las muestras D de $x(n)$ y eliminando las $(D-1)$ muestras intermedias. Esta operación, que se conoce como diezmado o submuestreo, proporciona una nueva secuencia definida por

$$x_d(n) = x(nD), \quad -\infty < n < \infty \tag{6.5.1}$$

Sin perder generalidad, suponemos que $x(n)$ se ha obtenido muestreando una señal $x_a(t)$ con un espectro $X_a(F) = 0$, $|F| > B$ a una tasa de muestreo $F_s = 1/T \geq 2B$, es decir, $x(n) = x_a(nT)$. Por tanto, el espectro $X(F)$ de $x(n)$ está dado por

$$X(F) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s) \tag{6.5.2}$$

A continuación, muestreamos $x_a(t)$ en los instantes de tiempo $t = nDT$, es decir, a una tasa de muestreo F_s/D. El espectro de la secuencia $x_d(n) = x_a(nDT)$ está dado por

$$X_d(F) = \frac{1}{DT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(F - k\frac{F_s}{D}\right) \tag{6.5.3}$$

Este proceso se ilustra en la Figura 6.5.1 para $D = 2$ y $D = 4$. Podemos ver fácilmente a partir de la Figura 6.5.1(c) que el espectro $X_d(F)$ se puede expresar en función del espectro periódico $X(F)$ como

$$X_d(F) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X\left(F - k\frac{F_s}{D}\right) \tag{6.5.4}$$

Para evitar el *aliasing*, la frecuencia de muestreo debe satisfacer la condición $F_s/D \geq 2B$. Si la frecuencia de muestreo F_s es fija, podemos evitar el *aliasing* reduciendo el ancho de banda de $x(n)$ a $(F_s/2)/D$. En función de las variables de frecuencia normalizadas, podemos impedir el *aliasing* si la frecuencia más alta $f_{\text{máx}}$ o $\omega_{\text{máx}}$ de $x(n)$ satisface las condiciones

$$f_{\text{máx}} \leq \frac{1}{2D} = \frac{f_s}{2} \quad \text{o} \quad \omega_{\text{máx}} \leq \frac{\pi}{D} = \frac{\omega_s}{2} \tag{6.5.5}$$

Cuando se efectúa un muestreo continuo en el tiempo, el espectro $X_a(F)$ se repite un número infinito de veces para crear un espectro periódico que cubra el rango infinito de frecuencias. Cuando se efectúa un muestreo discreto en el tiempo, el espectro periódico $X(F)$ se repite D veces para cubrir un período del dominio de la frecuencia.

Para reconstruir la secuencia original $x(n)$ a partir de la secuencia muestreada $x_d(n)$, empleamos en primer lugar la fórmula de interpolación ideal

$$x_a(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_d(m) \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{DT}(t - mDT)}{\frac{\pi}{DT}(t - mDT)} \tag{6.5.6}$$

que reconstruye $x_a(t)$ suponiendo que $F_s/D \geq 2B$. Dado que $x(n) = x_a(nT)$, sustituyendo en (6.5.6) tenemos

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_d(m) \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{D}(n - mD)}{\frac{\pi}{D}(n - mD)} \tag{6.5.7}$$

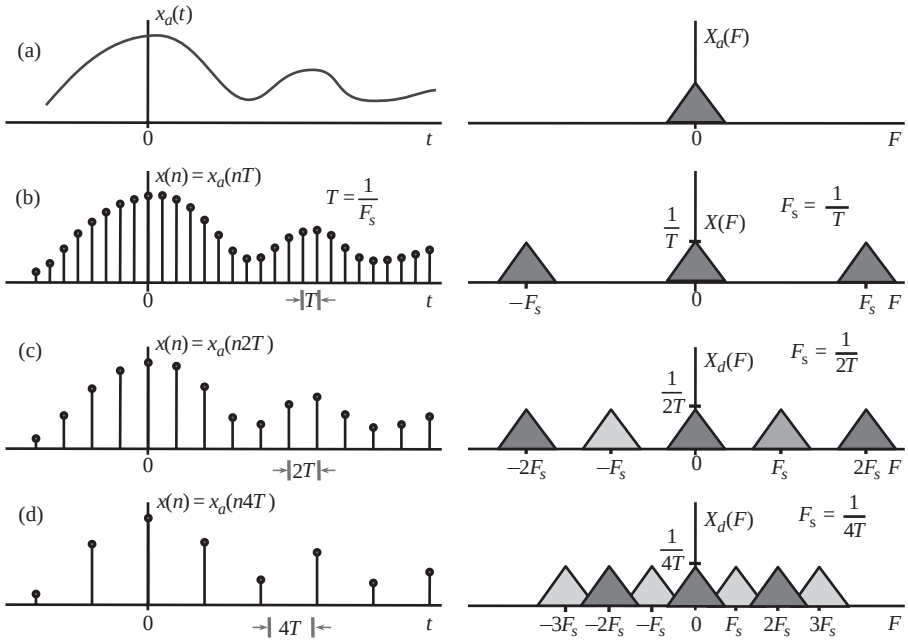


Figura 6.5.1. Ilustración del muestreo de una señal discreta en el tiempo en el dominio de la frecuencia.

Éste no es un interpolador práctico, ya que la función $\text{sen}(x)/x$ es infinita. En la práctica, utilizamos un sumatorio finito desde $m = -L$ hasta $m = L$. La calidad de esta aproximación mejora cuando se incrementa L. La transformada de Fourier de la secuencia de interpolación de banda limitada ideal dada por (6.5.7) es

$$g_{\text{BL}}(n) = D\frac{\text{sen}(\pi/D)n}{\pi n} \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} G_{\text{BL}}(\omega) = \begin{cases} D, & |\omega| \leq \pi/D \\ 0, & \pi/D < |\omega| \leq \pi \end{cases} \tag{6.5.8}$$

Por tanto, el interpolador ideal discreto en el timpo tiene una característica en frecuencia ideal paso bajo.

Para comprender el proceso de interpolación discreto en el tiempo, vamos a analizar el proceso ampliamente utilizado de la interpolación lineal. Para simplificar, emplearemos la notación $T_d = DT$ para el período de muestreo de $x_d(m) = x_a(mT_d)$. El valor de $x_a(t)$ en el instante de tiempo entre mT_d y $(m+1)T_d$ se obtiene tirando una línea vertical desde t hasta el segmento de línea que conecta las muestras $x_d(mT_d)$ y $x_d(mT_d + T_d)$, como se muestra en la Figura 6.5.2. El valor interpolado queda determinado por

$$x_{\text{lin}}(t) = x(m-1) + \frac{x(m) - x(m-1)}{T_d}[t - (m-1)T_d], (m-1)T_d \leq t \leq mT_d \tag{6.5.9}$$

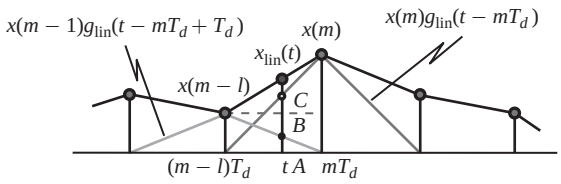


Figura 6.5.2. Ilustración de la interpolación lineal continua en el tiempo.

expresión que se puede reordenar como sigue:

$$x_{\text{lin}}(t) = \left[1 - \frac{t-(m-1)T_d}{T_d}\right] x(m-1) + \left[1 - \frac{mT_d - t)}{T_d}\right] x(m) \tag{6.5.10}$$

Para expresar (6.5.10) en la forma de la fórmula de reconstrucción general

$$x_{\text{lin}}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) g_{\text{lin}}(t - mT_d) \tag{6.5.11}$$

tenga en cuenta que siempre tenemos $t-(m-1)T_d = |t-(m-1)T_d|$ y $mT_d - t = |t - mT_d|$ porque $(m-1)T_d \leq t \leq mT_d$. Por tanto, podemos escribir (6.5.10) en la forma dada en (6.5.11) si definimos

$$g_{\text{lin}}(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{T_d}, & |t| \leq T_d \\ 0, & |t| > T_d \end{cases} \tag{6.5.12}$$

Las fórmulas de interpolación discretas en el tiempo se obtienen reemplazando t por nT en las expresiones (6.5.11) y (6.5.12). Puesto que $T_d = DT$, obtenemos

$$x_{\text{lin}}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) g_{\text{lin}}(n - mD) \tag{6.5.13}$$

donde

$$g_{\text{lin}}(n) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|n|}{D}, & |n| \leq D \\ 0, & |n| > D \end{cases} \tag{6.5.14}$$

Como en cualquier función de interpolación, $g_{\text{lin}}(0) = 1$ y $g_{\text{lin}}(n) = 0$ para $n = \pm D, \pm 2D, \ldots$. El rendimiento del interpolador lineal se puede valorar comparando su transformada de Fourier

$$G_{\text{lin}}(\omega) = \frac{1}{D}\left[\frac{\text{sen}(\omega D/2)}{\text{sen}(\omega/2)}\right]^2 \tag{6.5.15}$$

con la del interpolador ideal (6.5.8). Esto se ilustra en la Figura 6.5.3, que demuestra que el interpolador ideal tiene un mejor rendimiento sólo cuando el espectro de la señal interpolada es despreciable para $|\omega| > \pi/D$, es decir, cuando la señal continua en el tiempo original ha sido sobremuestreada.

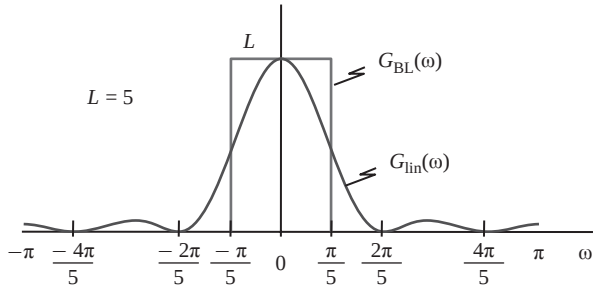


Figura 6.5.3. Respuesta en frecuencia de los interpoladores ideal y lineal.

Las Ecuaciones (6.5.11) y (6.5.13) parecen definir una operación de convolución; sin embargo, *no* es así. Esto se ilustra en la Figura 6.5.4, la cual muestra el cálculo de las muestras interpoladas $x(nT)$ y $x((n+1)T)$ para $D = 5$. Observe que sólo se emplea en cada caso un subconjunto de los coeficientes del interpolador lineal. Básicamente, descomponemos $g_{\text{lin}}(n)$ en D componentes y utilizamos uno cada vez de forma periódica para calcular los valores interpolados. Ésta es la idea que hay esencialmente detrás de las estructuras de los filtros polifásicos que se tratan en el Capítulo 11. Sin embargo, si creamos una nueva secuencia $\tilde{x}(n)$ insertando $(D-1)$ muestras de valor cero entre las sucesivas muestras de $x_d(m)$, podemos calcular $x(n)$ utilizando la convolución

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(k) g_{\text{lin}}(n-k) \tag{6.5.16}$$

a costa de cálculos innecesarios que implican valores iguales a cero. Podemos obtener una implementación más eficaz utilizando la Ecuación (6.5.13).

El muestreo e interpolación de una señal discreta en el tiempo se corresponde esencialmente con un cambio de su tasa de muestreo por un factor entero. El objeto de la conversión de la tasa de muestreo, que es extremadamente importante en las aplicaciones prácticas, se trata en detalle en el Capítulo 11.

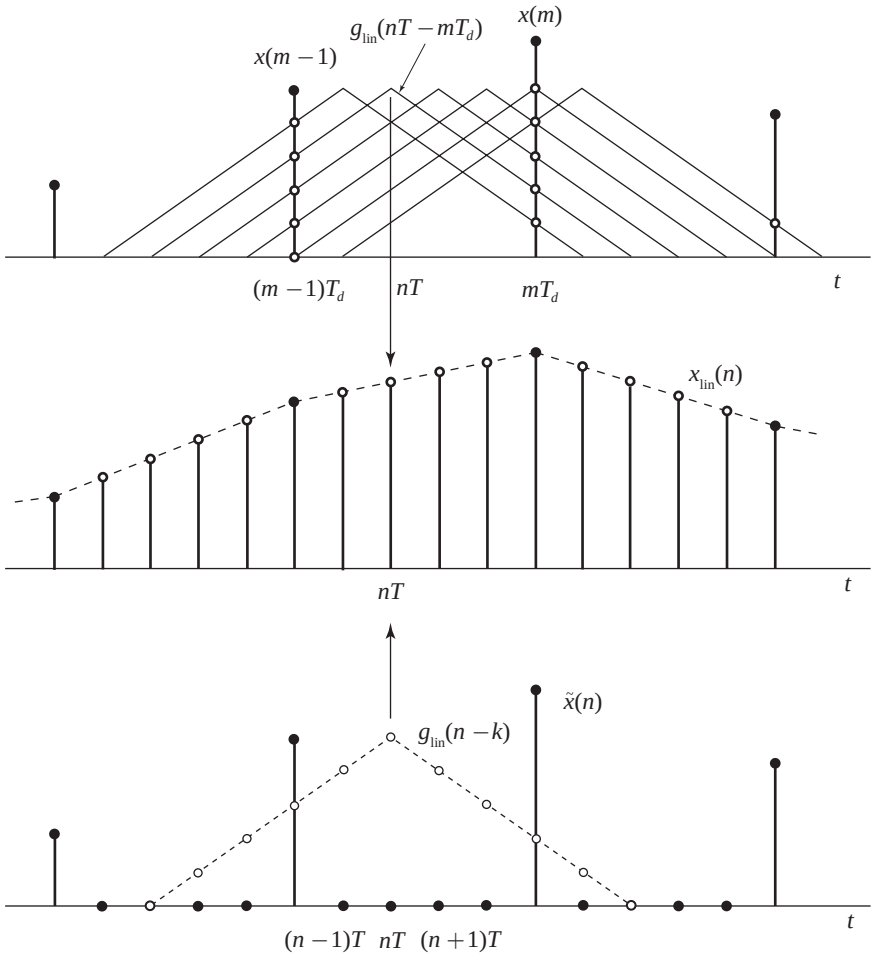


Figura 6.5.4. Ilustración de la interpolación lineal como un proceso de filtrado lineal.

6.5.2 Representación y muestreo de señales paso banda discretas en el tiempo

Las representaciones paso banda de señales continuas en el tiempo vistas en la Sección 6.4.3, pueden adaptarse para las señales discretas en el tiempo con algunas modificaciones simples que tienen en cuenta la naturaleza periódica de los espectros discretos en el tiempo. Puede que no podamos exigir que la transformada discreta de Fourier en el tiempo sea cero para $\omega < 0$ sin violar su periodicidad, así definimos la señal analítica $\psi(n)$ de una señal paso banda $x(n)$ como

$$\Psi(\omega) = \begin{cases} 2X(\omega), & 0 \leq \omega < \pi \\ 0, & -\pi \leq \omega < 0 \end{cases} \tag{6.5.17}$$

donde $X(\omega)$ y $\Psi(\omega)$ son las transformadas de Fourier de $x(n)$ y $\psi(n)$, respectivamente.

El transformador ideal de Hilbert discreto en el tiempo definido por

$$H(\omega) = \begin{cases} -j, & 0 < \omega < \pi \\ j, & -\pi < \omega < 0 \end{cases} \tag{6.5.18}$$

aplica un desplazamiento de fase de 90-grados al igual que en el caso de señales continuas en el tiempo. Luego podemos demostrar fácilmente que

$$\Psi(\omega) = X(\omega) + j\hat{X}(\omega) \tag{6.5.19}$$

donde

$$\hat{X}(\omega) = H(\omega)X(\omega) \tag{6.5.20}$$

Para calcular la señal analítica en el dominio del tiempo, necesitamos la respuesta al impulso del transformador de Hilbert. Ésta se obtiene como sigue

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} je^{j\omega n}d\omega - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} je^{j\omega n}d\omega \tag{6.5.21}$$

lo que da

$$h(n) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\operatorname{sen}^2(\pi n/2)}{n}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & n = \text{ par} \\ \dfrac{2}{\pi n}, & n = \text{ impar} \end{cases} \tag{6.5.22}$$

La secuencia $h(n)$ es distinta de cero para $n < 0$ y no es absolutamente sumable; por tanto, el transformador ideal de Hilbert no es causal y es inestable. La respuesta al impulso y la respuesta en frecuencia del transformador ideal de Hilbert se ilustran en la Figura 6.5.5.

Como en el caso de continuidad en el tiempo, la transformada de Hilbert $\hat{x}(n)$ de una secuencia $x(n)$ proporciona la parte imaginaria de la señal analítica, es decir,

$$\psi(n) = x(n) + j\hat{x}(n) \tag{6.5.23}$$

Las representaciones envolvente compleja, en cuadratura y envolvente/fase se obtienen mediante las correspondientes fórmulas para señales continuas en el tiempo reemplazando t por nT en las ecuaciones relevantes.

Dada una señal paso banda $x(n)$, $0 < \omega_L \leq |\omega| \leq \omega_L + w$ con un ancho de banda normalizado $w = 2\pi B/F_s$, podemos deducir las representaciones equivalentes paso bajo en cuadratura o en fase, o envolvente compleja que pueden muestrearse a una frecuencia $f_s = 1/D$ compatible con el ancho de banda w. Si $\omega_L = (k-1)\pi/D$ y $w = \pi/D$, la secuencia $x(n)$ puede muestrearse directamente sin que aparezca el *aliasing*, como se describe en la Sección 11.7.

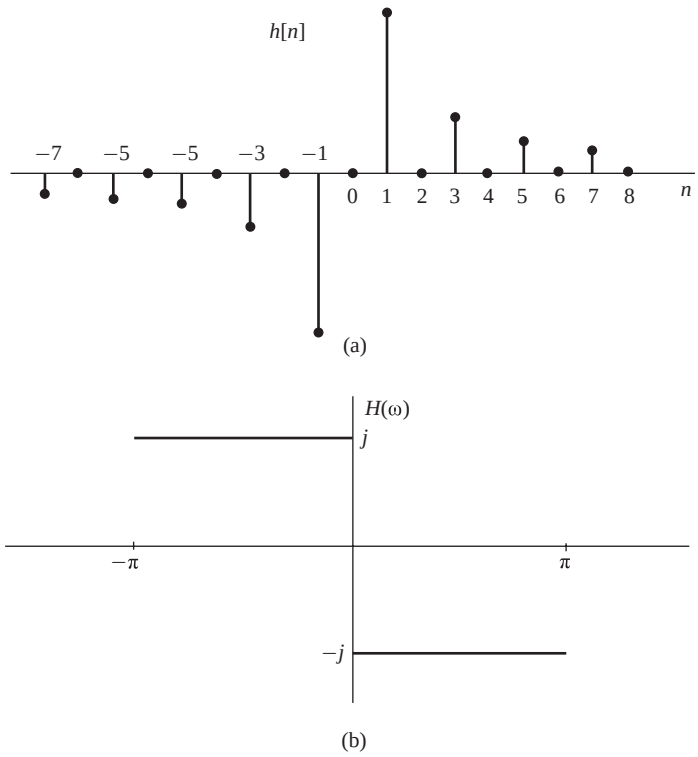


Figura 6.5.5. (a) Respuesta al impulso y (b) respuesta en frecuencia del transformador de Hilbert discreto en el tiempo.

En muchas aplicaciones de sistemas de comunicaciones y de radar es necesario procesar una señal paso banda $x_a(t)$, $F_L \leq |F| \leq F_L + B$ en forma de señal paso bajo. Las ténicas convencionales emplean dos canales analógicos en cuadratura y dos convertidores A/D que siguen a los dos filtros paso bajo, como se muestra en la Figura 6.4.8. Una técnica más actual consiste en muestrear uniformemente la señal analógica y obtener luego la representación en cuadratura empleando la demodulación digital en cuadratura, es decir, una implementación discreta en el tiempo de la primera parte de la Figura 6.4.8. Se puede emplear un método similar para generar digitalmente señales de una sola banda para aplicaciones de comunicaciones (Frerking 1994).

6.6 Convertidores A/D y D/A con sobremuestreo

En esta sección vamos a tratar los convertidores A/D y D/A con sobremuestreo.

6.6.1 Convertidores A/D con sobremuestreo

La idea básica de los convertidores A/D con sobremuestreo consiste en aumentar la tasa de muestreo de la señal hasta el punto en que se pueda emplear un cuantificador de baja resolución. El sobremuestreo permite reducir el rango dinámico de valores de la señal entre muestras sucesivas y reducir a continuación los requisitos de resolución del cuantificador. Como hemos visto en la sección anterior, la varianza del error de cuantificación en la conversión A/D es $\sigma_e^2 = \Delta^2/12$, donde $\Delta = R/2^{b+1}$. Dado que el rango dinámico de la señal, que es proporcional a su desviación estándar σ_x, debe adaptarse al rango R del cuantificador, se deduce que Δ es proporcional a σ_x. Luego para un número dado de bits, la potencia del ruido de cuantificación es proporcional a la varianza de la señal que se va a cuantificar. En consecuencia, para una relación SQNR fija dada, una reducción de la varianza de la señal que se va cuantificar nos permite reducir el número de bits en el cuantificador.

La idea fundamental de reducir el rango dinámico nos lleva a considerar la *cuantificación diferencial*. Para ilustrar este punto, vamos a evaluar la varianza de la diferencia entre dos muestras sucesivas de la señal. Así, tenemos

$$d(n) = x(n) - x(n-1) \tag{6.6.1}$$

La varianza de $d(n)$ es

$$\begin{aligned}\sigma_d^2 &= E[d^2(n)] = E\{[x(n) - x(n-1)]^2\} \\ &= E[x^2(n)] - 2E[x(n)x(n-1)] + E[x^2(n-1)] \\ &= 2\sigma_x^2[1 - \gamma_{xx}(1)]\end{aligned} \tag{6.6.2}$$

donde $\gamma_{xx}(1)$ es el valor de la autocorrelación $\gamma_{xx}(m)$ de $x(n)$ evaluada en $m = 1$. Si $\gamma_{xx}(1) > 0.5$, observe que $\sigma_d^2 < \sigma_x^2$. Bajo esta condición, es mejor cuantificar la diferencia $d(n)$ y recuperar $x(n)$ a partir de los valores cuantificados $\{d_q(n)\}$. Para obtener una alta correlación entre sucesivas muestras de la señal, requerimos que la tasa de muestreo sea significamente mayor que la frecuencia de Nyquist.

Un método incluso mejor consiste en cuantificar la diferencia

$$d(n) = x(n) - ax(n-1) \tag{6.6.3}$$

donde a es un parámetro seleccionado para minimizar la varianza de $d(n)$. Esto nos lleva al resultado (*véase* el Problema 6.16) de que la elección óptima del valor de a es

$$a = \frac{\gamma_{xx}(1)}{\gamma_{xx}(0)} = \frac{\gamma_{xx}(1)}{\sigma_x^2}$$

y

$$\sigma_d^2 = \sigma_x^2[1 - a^2] \tag{6.6.4}$$

En este caso, $\sigma_d^2 < \sigma_x^2$, ya que $0 \le a \le 1$. La magnitud $ax(n-1)$ se conoce como predictor de primer orden de $x(n)$.

La Figura 6.6.1 muestra un cuantificador de señales *predictivo diferencial*. Este sistema se utiliza para la codificación de señales de voz y su transmisión a través de canales telefónicos y se conoce como modulación diferencial por impulsos codificados (DPCM, *differential pulse code modulation*). El objetivo del predictor es proporcionar una estimación $\hat{x}(n)$ de $x(n)$ a partir de una combinación lineal de valores pasados de $x(n)$, de manera que se reduzca el rango dinámico de la señal diferencia $d(n) = x(n) - \hat{x}(n)$. Luego un predictor de orden p tiene la forma

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=1}^{p} a_k x(n-k) \tag{6.6.5}$$

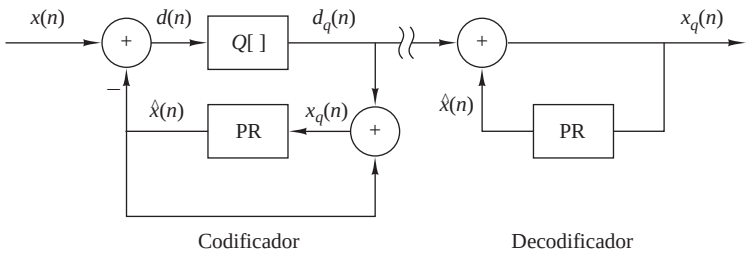


Figura 6.6.1. Codificador y decodificador de un cuantificador de señales predictivo diferencial.

Es preciso emplear el bucle de realimentación en el cuantificador, como se muestra en la Figura 6.6.1, para evitar la acumulación de errores de cuantificación en el decodificador. En esta configuración, el error $e(n) = d(n) - d_q(n)$ es

$$e(n) = d(n) - d_q(n) = x(n) - \hat{x}(n) - d_q(n) = x(n) - x_q(n)$$

Por tanto, el error en la señal cuantificada reconstruida $x_q(n)$ es igual al error de cuantificación para la muestra $d(n)$. El decodificador para la demodulación DPCM que reconstruye la señal a partir de los valores cuantificados se muestra también en la Figura 6.6.1.

La forma más simple de cuantificación predictiva diferencial es la *modulación delta* (DM, *delta modulation*). Con este tipo de modulación, el cuantificador es un cuantificador simple de 1 bit (dos niveles) y el predictor es de primer orden, como se muestra en la Figura 6.6.2(a). Básicamente, la modulación delta proporciona una aproximación en escalera de la señal de entrada. En cada instante de muestreo, se determina el signo de la diferencia entre la muestra de entrada $x(n)$ y su aproximación en escalera más reciente $\hat{x}(n) = ax_q(n-1)$ y a continuación la señal en escalera se actualiza con un escalón Δ en la dirección de la diferencia.

En la Figura 6.6.2(a), observamos que

$$x_q(n) = ax_q(n-1) + d_q(n) \tag{6.6.6}$$

que es el sistema discreto en el tiempo equivalente de un integrador analógico. Si $a = 1$, tenemos un acumulador ideal (integrador), mientras que la elección de $a < 1$ da lugar a un "integrador con fugas". La Figura 6.6.2(c) muestra un modelo analógico que ilustra el principio básico para la implementación práctica de un sistema de modulación delta. El filtro paso bajo analógico es necesario para rechazar las componentes que estén fuera de la banda de frecuencias comprendidas entre B y $F_s/2$, ya que $F_s >> B$ debido al sobremuestreo.

Las áreas sombreadas en la Figura 6.6.2(b) ilustran dos tipos de error de cuantificación en la modulación delta: distorsión debida a la pendiente de sobrecarga y ruido granular. Ya que la pendiente máxima Δ/T en $x(n)$ está limitada por el tamaño del escalón, la distorsión de la pendiente de sobrecarga puede evitarse si $\max |dx(t)/dt| \leq \Delta/T$. El ruido granular se produce cuando la modulación delta sigue a una señal de entrada relativamente plana (que varía lentamente). Observe que aumentando Δ se reduce la distorsión por sobrecarga pero aumenta el ruido granular, y viceversa.

Una forma de reducir estos dos tipos de distorsión consiste en emplear un integrador antes del modulador delta, como se muestra en la Figura 6.6.3(a). Esto tiene dos efectos. En primer lugar, destaca las frecuencias bajas de $x(t)$ y aumenta la correlación de la señal en la entrada del DM. En segundo lugar, simplifica el decodificador DM porque el diferenciador (sistema inverso) requerido en el decodificador se cancela mediante el integrador DM. Por tanto, el decodificador es simplemente un filtro paso bajo, como se muestra en la Figura 6.6.3(a). Además, los dos integradores del codificador se pueden reemplazar por un único integrador colocado antes del comparador, como se ve en la Figura 6.6.3(b). Este sistema se conoce como *modulación sigma-delta* (SDM, *sigma-delta modulation*).

La modulación sigma-delta es un candidato ideal para la conversión A/D. Un convertidor así aprovecha las ventajas de la alta tasa de muestreo y extiende el ruido de cuantificación por la banda hasta $F_s/2$. Puesto que $F_s >> B$, el ruido en la banda libre de señal $B \leq F \leq F_s/2$ puede eliminarse mediante el adecuado filtrado digital. Para ilustrar este principio, consideremos el modelo discreto en el tiempo de SDM, mostrado en la Figura 6.6.4, en la que hemos supuesto que el comparador (cuantificador de 1-bit) está modelado mediante una fuente de ruido blanco aditivo cuya varianza es $\sigma_e^2 = \Delta^2/12$. El integrador está modelado mediante el sistema discreto en el tiempo cuya función de sistema es

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} \tag{6.6.7}$$

La transformada z de la secuencia $\{d_q(n)\}$ es

$$D_q(z) = \frac{H(z)}{1 + H(z)} X(z) + \frac{1}{1 + H(z)} E(z) = H_s(z)X(z) + H_n(z)E(z) \tag{6.6.8}$$

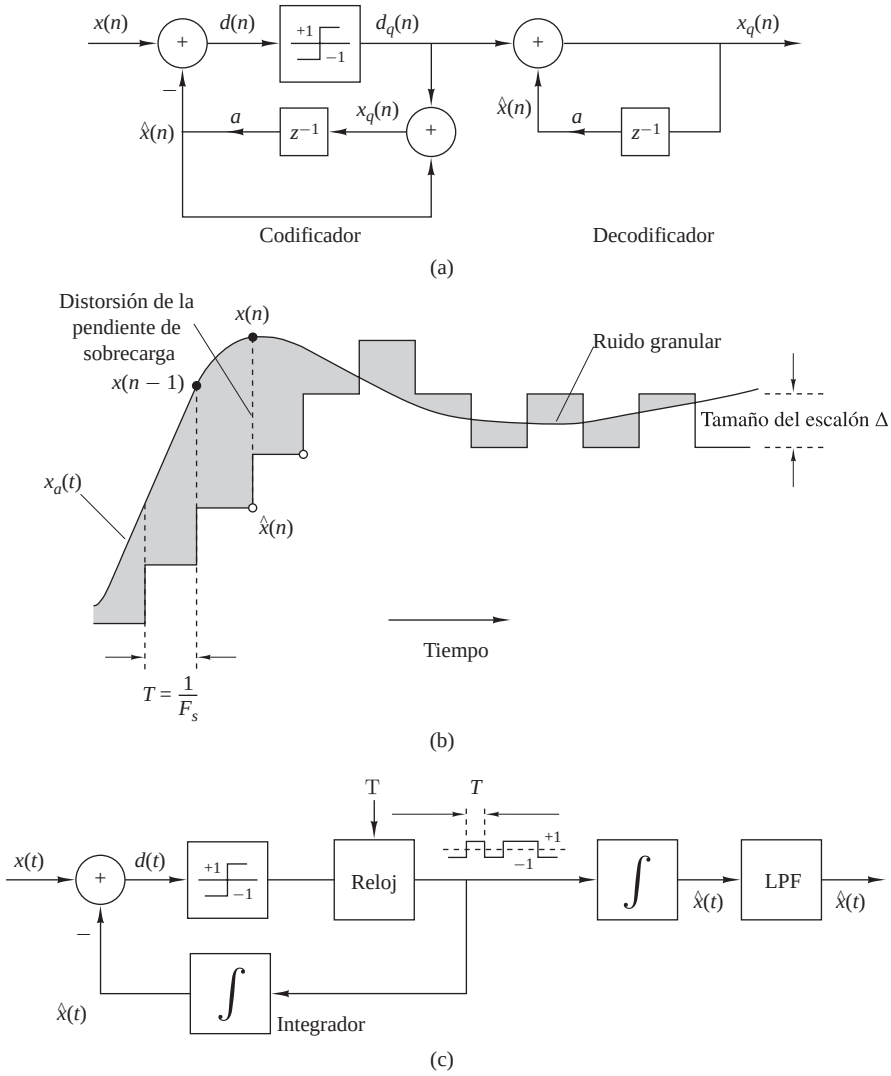


Figura 6.6.2. Modulación delta y dos tipos de errores de cuantificación.

donde $H_s(z)$ y $H_n(z)$ son las funciones del sistema de la señal y del ruido, respectivamente. Un buen sistema SDM tiene una repuesta en frecuencia plana $H_s(\omega)$ en la banda de frecuencias de la señal $0 \leq F \leq B$. Por el contrario, $H_n(z)$ debería presentar una alta atenuación en la banda de frecuencias $0 \leq F \leq B$ y una baja atenuación en la banda $B \leq F \leq F_s/2$.

Para el sistema SDM de primer orden con el integrador especificado por (6.6.7), tenemos

$$H_s(z) = z^{-1}, \qquad H_n(z) = 1 - z^{-1} \tag{6.6.9}$$

Luego $H_s(z)$ no distorsiona la señal. El rendimiento del sistema SDM está determinado por tanto por la función de sistema del ruido $H_n(z)$, cuyo módulo de la respuesta en frecuencia es

$$|H_n(F)| = 2\left|\operatorname{sen}\frac{\pi F}{F_s}\right| \tag{6.6.10}$$

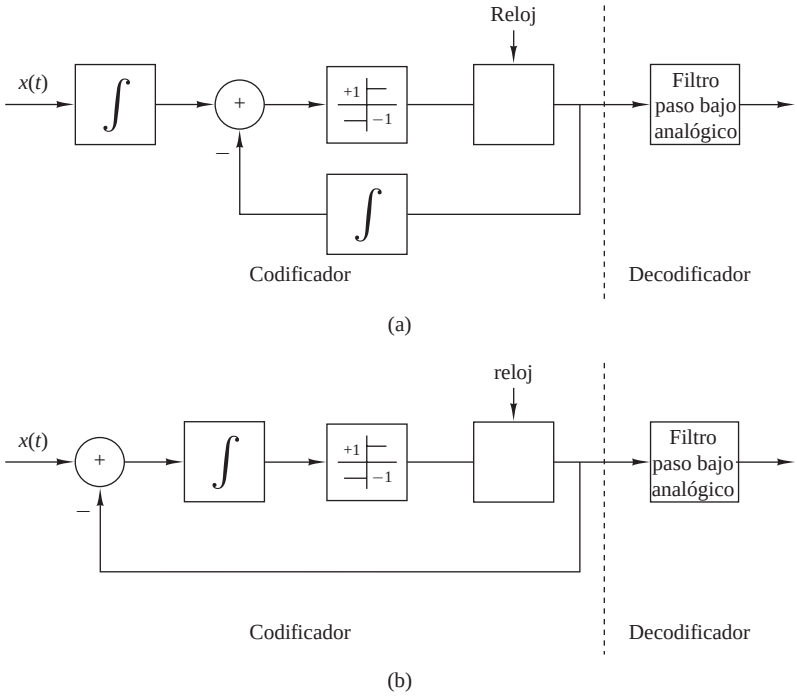


Figura 6.6.3. Sistema de modulación sigma-delta.

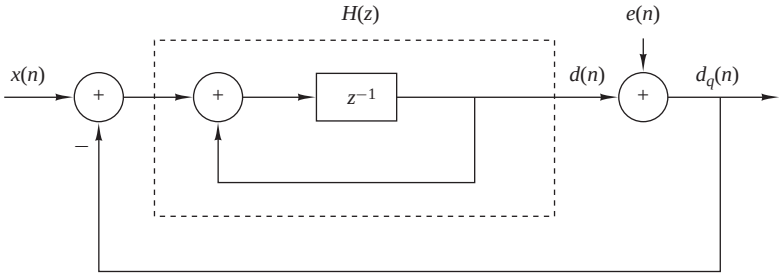


Figura 6.6.4. Modelo discreto en el tiempo de la modulación sigma-delta.

como se muestra en la Figura 6.6.5. La varianza del ruido de cuantificación dentro de la banda está dada por

$$\sigma_n^2 = \int_{-B}^{B} |H_n(F)|^2 S_e(F)\, dF \tag{6.6.11}$$

donde $S_e(F) = \sigma_e^2/F_s$ es la densidad espectral de potencia del ruido de cuantificación. A partir de esta relación podemos observar que duplicando F_s (aumentando la tasa de muestreo en un factor de 2) y manteniendo fijo B, se reduce la potencia del ruido de cuantificación en 3 dB. Este resultado es cierto para cualquier cuantificador. Sin embargo, es posible una reducción adicional seleccionando adecuadamente el filtro $H(z)$.

Para el sistema SDM de primer orden, se puede demostrar que (*véase* el Problema 6.19) para $F_s >> 2B$, la potencia del ruido de cuantificación dentro de la banda es

$$\sigma_n^2 \approx \frac{1}{3}\pi^2 \sigma_e^2 \left(\frac{2B}{F_s}\right)^3 \tag{6.6.12}$$

Observe que duplicando la frecuencia de muestreo se reduce la potencia de ruido en 9 dB, de los que 3 dB se deben a la reducción en $S_e(F)$ y los 6 dB restantes se deben a la característica del filtro $H_n(F)$. Se puede conseguir una reducción adicional de 6-dB utilizando un integrador doble (*véase* el Problema 6.20).

En resumen, la potencia de ruido σ_n^2 puede reducirse aumentando la tasa de muestreo para extender la potencia del ruido de cuantificación a lo largo de una amplia banda de frecuencias $(-F_s/2, F_s/2)$, y conformando a continuación la densidad espectral de potencia por medio de un filtro apropiado. Luego, el sistema SDM proporciona una señal cuantificada de 1 bit a una frecuencia de muestreo de $F_s = 2IB$, donde el factor de sobremuestreo (interpolación) I determina la relación SNR del cuantificador SDM.

A continuación, vamos a explicar cómo convertir esta señal en una señal cuantificada de b bits a la frecuencia de Nyquist. En primer lugar, recordemos que el decodificador SDM es un filtro paso bajo analógico con una frecuencia de corte B. La salida de este filtro es una aproximación a la señal de entrada $x(t)$. Dada la señal de 1 bit $d_q(n)$ a la frecuencia de muestreo F_s, podemos obtener una señal $x_q(n)$ en una frecuencia de muestreo inferior, por ejemplo la frecuencia de Nyquist de $2B$ o incluso mayor, remuestreando la salida del filtro paso bajo a una tasa de $2B$. Para evitar el *aliasing*, primero filtramos el ruido fuera de la banda $(B, F_s/2)$ procesando la señal de banda ancha. La señal se pasa entonces a través del filtro paso bajo y se vuelve a muestrear (submuestreo) a la frecuencia más baja. El proceso de submuestreo se denomina *diezmado* y se trata en detalle en el Capítulo 11.

Por ejemplo, si el factor de interpolación es $I = 256$, la salida del convertidor A/D se puede obtener promediando bloques sucesivos de 128 bits que no se solapen. Este promedio resultará en una señal digital con un rango valores desde cero hasta $256\,(b \approx 8$ bits) a la frecuencia de Nyquist. El proceso de promediado proporciona el filtrado de suavizado requerido.

La Figura 6.6.6 ilustra los elementos básicos de un convertidor A/D con sobremuestreo. Normalmente, este tipo de convertidor para aplicaciones de señales de voz (3 kHz) se fabrica como circuito integrado. Típicamente, operan a una frecuencia de muestreo de 2 MHz, realizan el submuestreo a 8 kHz y tienen una precisión de 16 bits.

6.6.2 Convertidores D/A con sobremuestreo

Los elementos de un convertidor D/A con sobremuestreo se muestran en la Figura 6.6.7. Como hemos mencionado, se divide en una parte digital seguida de una sección analógica. La sección digital consta de un interpolador cuya función es incrementar la frecuencia de muestreo en un factor I, que va seguido de un SDM. El interpolador simplemente aumenta la frecuencia de muestreo digital insertando $I-1$ ceros entre muestras sucesivas de baja frecuencia. La señal resultante es procesada entonces por un filtro digital con una frecuencia de corte $F_c = B/F_s$ para rechazar las imágenes (réplicas) del espectro de la señal de entrada. Esta señal de frecuencia más alta se aplica al SDM, para crear un muestra de 1 bit con forma de ruido. Cada muestra de 1 bit se aplica al convertidor D/A de 1 bit, que proporciona la interfaz analógica a los filtros de *antialiasing* y suavizado. Los filtros analógicos de salida tienen una banda de paso de $0 \le F \le B$ hercios y sirven para suavizar la señal y eliminar el ruido

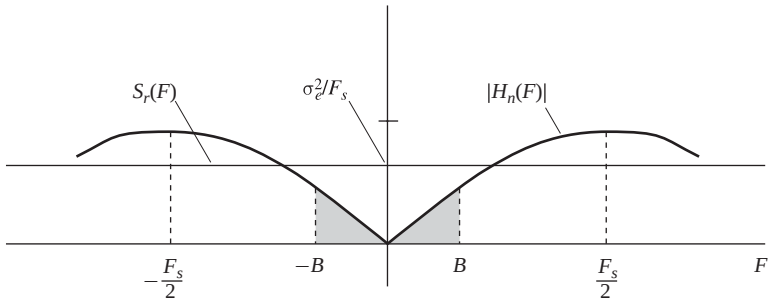


Figura 6.6.5. Respuesta en frecuencia (módulo) de la función de sistema del ruido.

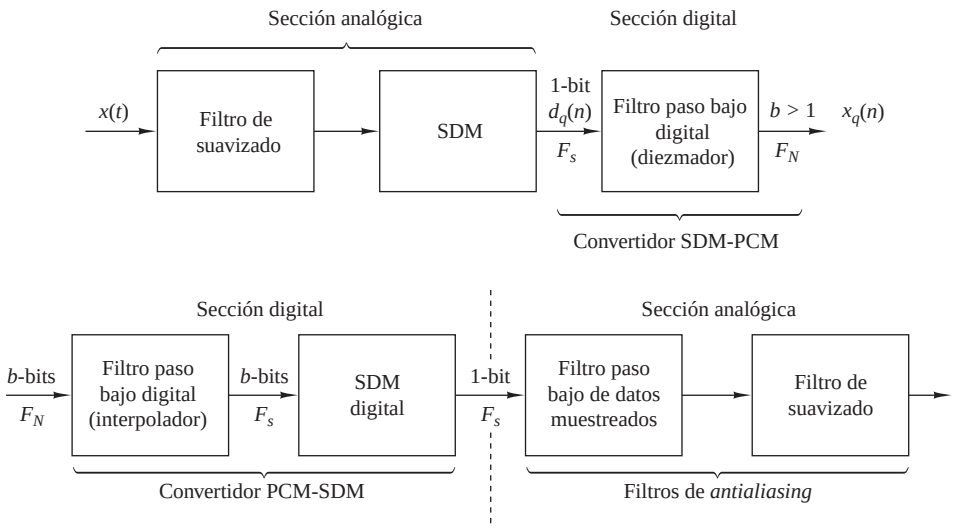


Figura 6.6.6. Elementos básicos de un convertidor A/D con sobremuestreo.

de cuantificación de la banda de frecuencias $B \leq F \leq F_s/2$. En efecto, el convertidor D/A con sobremuestreo utiliza la modulación sigma-delta (SDM) con las funciones de las secciones analógica y digital invertidas si las comparamos con las del convertidor A/D.

En la práctica, los convertidores D/A (y A/D) con sobremuestreo presentan muchas ventajas sobre los convertidores más convencionales. En primer lugar, la alta tasa de muestreo y el subsiguiente filtrado digital minimizan o eliminan la necesidad de filtros de *antialiasing* analógicos complejos y caros. Además, cualquier ruido analógico introducido durante la fase de conversión es filtrado. Tampoco existe la necesidad de emplear circuitos de muestreo y retención (S/H). Los convertidores A/D y D/A con modulador SDM y sobremuestreo son muy robustos en lo que se refiere a las variaciones de los parámetros del circuito analógico, son inherentemente lineales y son baratos.

Con esto terminamos con el tema de la reconstrucción de señales basada en técnicas de interpolación simples. Las técnicas que hemos descrito pueden incorporarse fácilmente al diseño de convertidores D/A prácticos para la reconstrucción de señales analógicas a partir de señales digitales. Abordaremos de nuevo la interpolación en el Capítulo 11 dentro del contexto de modificación de la tasa de muestreo en un sistema de tratamiento digital de señales.

6.7 Resumen y referencias

El tema principal de este capítulo ha sido el muestreo y la reconstrucción de señales. En particular, nos hemos ocupado del muestreo de señales continuas en el tiempo y de la correspondiente operación de conversión A/D.

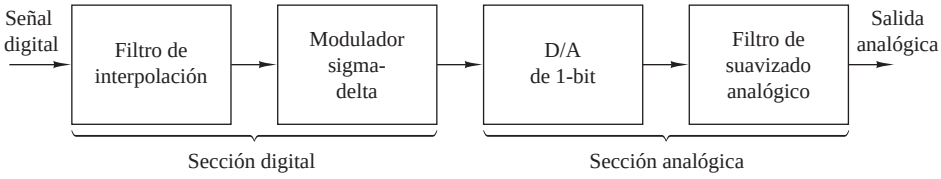


Figura 6.6.7. Elementos de un convertidor D/A con sobremuestreo.

Se trata de operaciones necesarias en el tratamiento digital de señales analógicas, bien realizadas mediante una computadora de propósito general o en un procesador digital de señales diseñado a medida. La cuestión relacionada con la conversión D/A también se ha tratado. Además de las técnicas de conversión convencionales A/D y D/A, hemos descrito también otro tipo de conversión A/D y D/A, basada en el principio de sobremuestreo y en un tipo de codificación de señales denominado modulación sigma–delta. La tecnología de conversión sigma-delta es especialmente adecuada para señales de audio debido a su relativamente pequeño ancho de banda (menor que 20 kHz) y, en algunas aplicaciones, a los requisitos de alta fidelidad.

El teorema de muestreo fue presentado por Nyquist (1928) y, posteriormente, fue popularizado por Shannon (1949). Las técnicas de conversión D/A y A/D se tratan en un libro de Sheingold (1986). Las conversiones A/D y D/A con sobremuestreo se han tratado en la literatura técnica, específicamente, citamos el trabajo de Candy (1986), Candy *et al.* (1981) y Gray (1990).

Problemas

6.1 Dada una señal continua en el tiempo $x_a(t)$ con $X_a(F) = 0$ para $|F| > B$, determine la frecuencia de muestreo mínima F_s para una señal $y_a(t)$ definida por **(a)** $dx_a(t)/dt$ **(b)** $x_a^2(t)$ **(c)** $x_a(2t)$ **(d)** $x_a(t)\cos 6\pi Bt$ y **(e)** $x_a(t)\cos 7\pi Bt$

6.2 La secuencia muestreada $x_a(nT)$ se reconstruye utilizando un D/A ideal con una función de interpolación $g_a(t) = A$ para $|F| < F_c$ y cero en cualquier otro caso, para generar una señal continua en el tiempo $\hat{x}_a(t)$.

(a) Si el espectro de la señal original $x_a(t)$ satisface $X_a(F) = 0$ para $|F| > B$, halle el valor máximo de T, y los valores de F_c y A tal que $\hat{x}_a(t) = x_a(t)$.

(b) Si $X_1(F) = 0$ para $|F| > B$, $X_2(F) = 0$ para $|F| > 2B$ y $x_a(t) = x_1(t)x_2(t)$, halle el valor máximo de T, y los valores de F_c y A tal que $\hat{x}_a(t) = x_a(t)$.

(c) Repita el apartado (b) para $x_a(t) = x_1(t)x_2(t/2)$.

6.3 Una señal periódica continua en el tiempo con coeficientes de Fourier $c_k = (1/2)^{|k|}$ y período $T_p = 0.1$ segundos pasa a través de un filtro paso bajo ideal que tiene una frecuencia de corte $F_c = 102.5$ Hz. La señal resultante $y_a(t)$ se muestrea periódicamente con $T = 0.005$ segundos. Determine el espectro de la señal $y(n) = y_a(nT)$.

6.4 Repita el Ejemplo 6.1.2 para la señal $x_a(t) = te^{-t}u_a(t)$.

6.5 Considere el sistema de la Figura 6.2.1. Si $X_a(F) = 0$ para $|F| > F_s/2$, determine la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ del sistema discreto en el tiempo tal que $y_a(t) = \int_{-\infty}^{t} x_a(\tau)d\tau$.

6.6 Considere una señal $x_a(t)$ con espectro $X_a(F) \neq 0$ para $0 < F_1 \leq |F| \leq F_2 < \infty$ y $X_a(F) = 0$ en otro caso.

(a) Determine la frecuencia de muestreo mínima requerida para muestrear $x_a(t)$ sin *aliasing*.

(b) Halle la fórmula necesaria para reconstruir $x_a(t)$ a partir de las muestras $x_a(nT)$, $-\infty < n < \infty$.

6.7 Demuestre la fórmula de interpolación de muestreo no uniforme de segundo orden descrita por las Ecuaciones (6.4.47)–(6.4.49).

6.8 Un interpolador discreto en el tiempo con circuito de muestreo y retención, con un factor I, repite la última muestra de entrada $(I-1)$ veces.

(a) Determine la función de interpolación $g_{\mathrm{SH}}(n)$.

(b) Determine la transformada Fourier $G_{\mathrm{SH}}(\omega)$ de $g_{\mathrm{SH}}(n)$.

(c) Dibuje el módulo y la fase de la respuesta del interpolador ideal, el interpolador lineal y el interpolador con muestreo y retención para $I = 5$.

6.9 *Muestreo en el dominio del tiempo.* Considere la señal continua en el tiempo

$$x_a(t) = \begin{cases} e^{-j2\pi F_0 t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

(a) Calcule analíticamente el espectro $X_a(F)$ de $x_a(t)$.

(b) Calcule analíticamente el espectro de la señal $x(n) = x_a(nT)$, $T = 1/F_s$.

(c) Dibuje el módulo del espectro $|X_a(F)|$ para $F_0 = 10$ Hz.

(d) Dibuje el módulo del espectro $|X(F)|$ para $F_s = 10$, 20, 40 y 100 Hz.

(e) Explique los resultados obtenidos en el apartado (d) en términos del efecto del *aliasing*.

6.10 Considere el muestreo de la señal paso banda cuyo espectro se muestra en la Figura P.6.10. Determine la tasa de muestreo mínima F_s para evitar el *aliasing*.

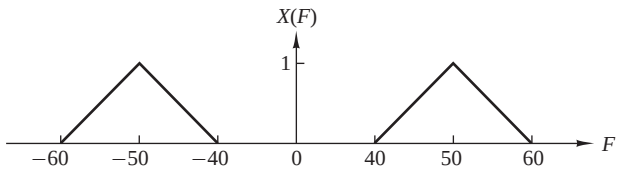


Figura P.6.10.

6.11 Considere el muestreo de la señal paso banda cuyo espectro se muestra en la Figura P.6.11. Determine la frecuencia de muestreo mínima F_s para evitar el *aliasing*.

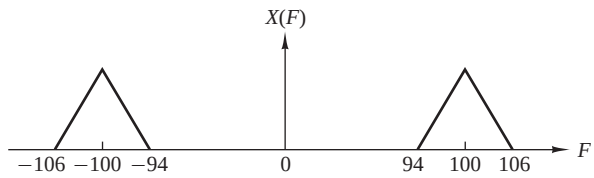


Figura P.6.11.

6.12 Considere los dos sistemas mostrados en la Figura P.6.12.

(a) Dibuje los espectros de las distintas señales si $x_a(t)$ tiene la transformada de Fourier indicada en la Figura P.6.12(b) y $F_s = 2B$. ¿Cómo están relacionadas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ con $x_a(t)$?

(b) Determine $y_1(t)$ e $y_2(t)$ si $x_a(t) = \cos 2\pi F_0 t$, $F_0 = 20$ Hz y $F_s = 50$ Hz o $F_s = 30$ Hz.

6.13 Una señal continua en el tiempo $x_a(t)$ con ancho de banda B y su eco $x_a(t-\tau)$ llegan simultáneamente a un receptor de TV. La señal analógica recibida

$$s_a(t) = x_a(t) + \alpha x_a(t-\tau), \qquad |\alpha| < 1$$

se procesa con el sistema mostrado en la Figura P.6.13. ¿Es posible especificar F_s y $H(z)$ de modo que $y_a(t) = x_a(t)$ [es decir, elimine el eco $x_a(t-\tau)$ de la señal recibida]?

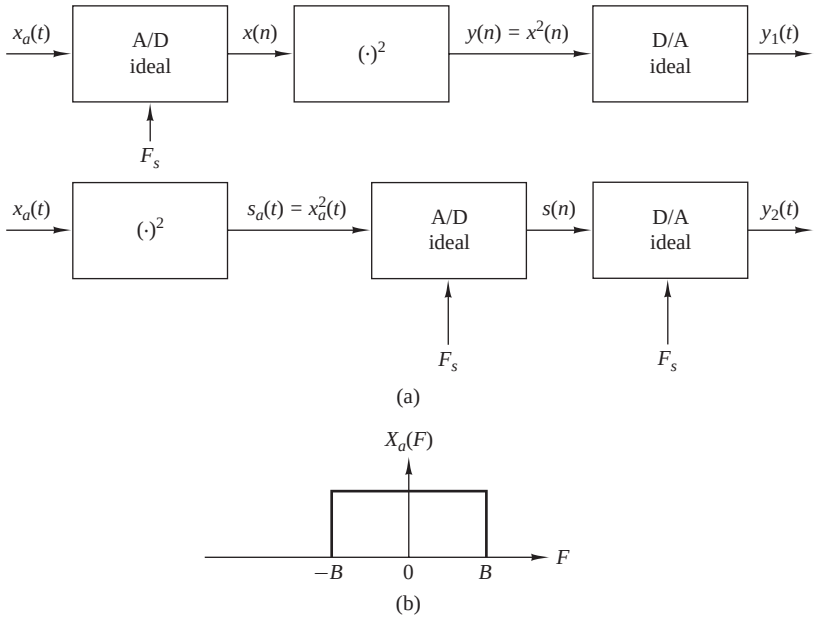


Figura P.6.12.

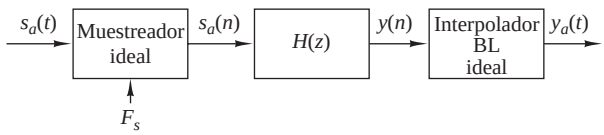


Figura P.6.13.

6.14 Una señal continua en el tiempo de banda limitada $x_a(t)$ se muestrea a una frecuencia de muestreo $F_s \geq 2B$. Determine la energía E_d de la señal discreta en el tiempo $x(n)$ resultante en función de la energía de la señal analógica, E_a, y el período de muestreo $T = 1/F_s$.

6.15 En un interpolador lineal se conectan los puntos de muestreo sucesivos mediante segmentos de línea recta. Así, la señal interpolada resultante $\hat{x}(t)$ puede expresarse como

$$\hat{x}(t) = x(nT - T) + \frac{x(nT) - x(nT - T)}{T}(t - nT), \quad nT \leq t \leq (n+1)T$$

Observe que en $t = nT$, $\hat{x}(nT) = x(nT - T)$ y en $t = nT + T$, $\hat{x}(nT + T) = x(nT)$. Por tanto, $x(t)$ presenta un retardo inherente de T segundos en la interpolación de la señal real $x(t)$. La Figura P.6.15 ilustra esta técnica de interpolación lineal.

(a) Visto como un filtro lineal, demuestre que la interpolación lineal con un retardo de T segundos tiene una respuesta al impulso

$$h(t) = \begin{cases} t/T, & 0 \leq t < T \\ 2 - t/T, & T \leq t < 2T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Deduzca la correspondiente respuesta en frecuencia $H(F)$.

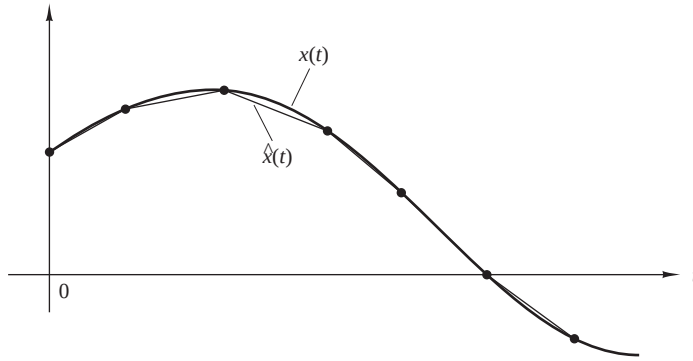


Figura P.6.15.

(b) Dibuje $|H(F)|$ y compare esta respuesta en frecuencia con la del filtro de reconstrucción ideal para una señal paso bajo de banda limitada.

6.16 Sea $x(n)$ un proceso estacionario de media cero con una varianza σ_x^2 y autocorrelación $\gamma_x(l)$.

(a) Demuestre que la varianza σ_d^2 del error de predicción de primer orden

$$d(n) = x(n) - ax(n-1)$$

está dado por

$$\sigma_d^2 = \sigma_x^2[1 + a^2 - 2a\rho_x(1)]$$

donde $\rho_x(1) = \gamma_x(1)/\gamma_x(0)$ es la autocorrelación normalizada.

(b) Demuestre que σ_d^2 alcanza su valor mínimo

$$\sigma_d^2 = \sigma_x^2[1 - \rho_x^2(1)]$$

para $a = \gamma_x(1)/\gamma_x(0) = \rho_x(1)$.

(c) ¿Bajo qué condiciones se cumple que $\sigma_d^2 < \sigma_x^2$?

(d) Repita los apartados (a) hasta (c) para el error de predicción de segundo orden

$$d(n) = x(n) - a_1x(n-1) - a_2x(n-2)$$

6.17 Considere un codificador DM con la entrada $x(n) = A\cos(2\pi nF/F_s)$. ¿Cuál es la condición para evitar la distorsión debida a la pendiente de sobrecarga? Ilustre esta condición gráficamente.

6.18 Sea $x_a(t)$ una señal de banda limitada con ancho de banda fijo B y varianza σ_x^2.

(a) Demuestre que la relación señal-ruido de cuantificación SQNR $= 10\log_{10}(\sigma_x^2/\sigma_e^2)$, aumenta 3 dB cada vez que duplicamos la frecuencia de muestreo F_s. Suponga que el modelo de ruido de cuantificación visto en la Sección 6.3.3 es válido.

(b) Si deseamos aumentar la relación SQNR de un cuantificador duplicando su frecuencia de muestreo, ¿cuál es la forma más eficiente de hacerlo? ¿Deberíamos elegir un convertidor A/D lineal de múltiples bits o uno con sobremuestreo?

6.19 Considere el modelo SDM de primer orden mostrado en la Figura 6.6.4.

(a) Demuestre que la potencia de ruido de cuantificación en la banda $(-B, B)$ está dada por

$$\sigma_n^2 = \frac{2\sigma_e^2}{\pi}\left[\frac{2\pi B}{Fs} - \operatorname{sen}\left(2\pi\frac{B}{F_s}\right)\right]$$

(b) Utilizando dos términos de la expansión en serie de Taylor de la función seno y suponiendo que $F_s >> B$, demuestre que

$$\sigma_n^2 \approx \frac{1}{3}\pi 2\sigma_e^2\left(\frac{2B}{F_s}\right)^3$$

6.20 Considere el modelo SDM de segundo orden mostrado en la Figura P.6.20.

(a) Determine las funciones de sistema de la señal y del ruido $H_s(z)$ y $H_n(z)$, respectivamente.

(b) Dibuje el módulo de la respuesta de la función de sistema del ruido y compárela con la del sistema SDM de primer orden. ¿Puede explicar la diferencia de 6 dB de estas curvas?

(c) Demuestre que la potencia del ruido de cuantificación dentro de la banda σ_n^2 está dada aproximadamente por

$$\sigma_n^2 \approx \frac{\pi\sigma_e^2}{5}\left(\frac{2B}{F_s}\right)^5$$

lo que implica un incremento de 15 dB cada vez que se duplica la frecuencia de muestreo.

6.21 La Figura P.6.21 ilustra la idea básica de un generador de señales sinusoidales basado en una tabla de búsqueda. Las muestras de un período de la señal

$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right), \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

se almacenan en memoria. Una señal digital sinusoidal se genera recorriendo la tabla paso a paso y volviendo al principio de la misma cuando el ángulo excede 2π. Esto puede hacerse utilizando direccionamiento módulo-N (es decir, utilizando un buffer "circular"). Las muestras de $x(n)$ se aplican al convertidor D/A ideal cada T segundos.

(a) Demuestre que variando F_s podemos ajustar la frecuencia F_0 de la sinusoide analógica resultante.

(b) Suponga ahora que $F_s = 1/T$ es fija. ¿Cuántas sinusoides analógicas diferentes pueden generarse utilizando la tabla de búsqueda dada? Explique su respuessta.

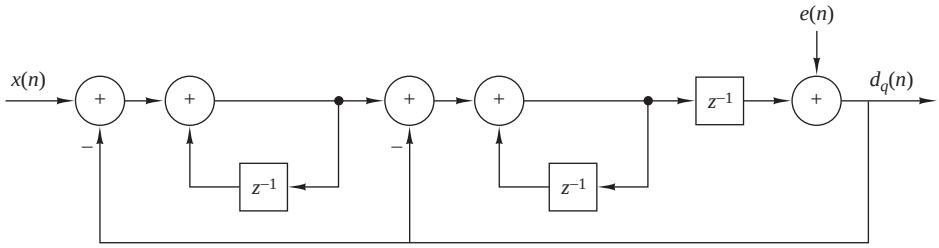


Figura P.6.20.

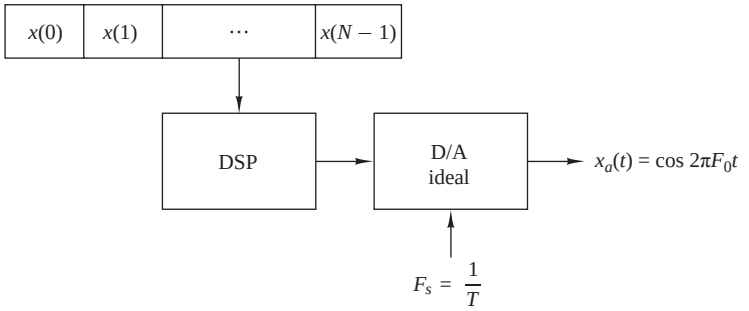


Figura P.6.21.

6.22 Suponga que representamos un filtro paso banda analógico mediante la respuesta en frecuencia

$$H(F) = C(F - F_c) + C^*(-F - F_c)$$

donde $C(f)$ es la respuesta en frecuencia de un filtro paso bajo equivalente, como se muestra en la Figura P.6.22.

(a) Demuestre que la respuesta al impulso $c(t)$ del filtro paso bajo equivalente está relacionada con la respuesta al impulso $h(t)$ del filtro paso banda como sigue:

$$h(t) = 2\Re[c(t)e^{j2\pi F_c t}]$$

(b) Suponga que el sistema paso banda con la respuesta en frecuencia $H(F)$ se excita con una señal paso banda de la forma

$$x(t) = \Re[u(t)e^{j2\pi F_c t}]$$

donde $u(t)$ es la señal paso bajo equivalente. Demuestre que la salida del filtro se puede expresar como

$$y(t) = \Re[v(t)e^{j2\pi F_c t}]$$

donde

$$v(t) = \int^{\omega} c(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

(*Consejo:* trabaje en el dominio de la frecuencia para demostrar este resultado).

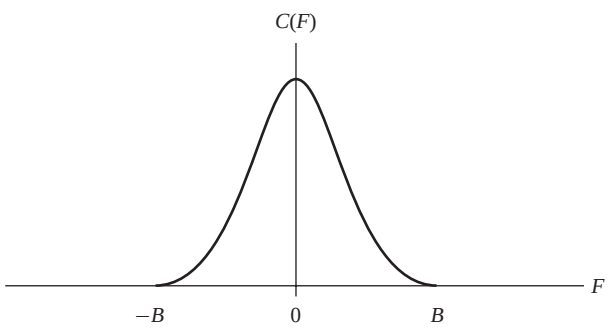


Figura P.6.22.

6.23 Considere el generador de señales sinusoidales de la Figura P.6.23, donde tanto los datos sinusoidales almacenados

$$x(n) = \cos\left(\frac{2A}{N}n\right), \qquad 0 \le n \le N-1$$

como la frecuencia de muestreo $F_s = 1/T$ son fijos. Un ingeniero que desea generar una sinusoide de período $2N$ sugiere que utilicemos interpolación (lineal) de orden cero o de primer orden para duplicar el número de muestras por período en la sinusoide original, como se ilustra en la Figura P.6.23(a).

(a) Determine la señal $y(n)$ generada utilizando interpolación de orden cero e interpolación lineal y luego calcule la distorsión armónica total (THD) en cada caso para $N = 32, 64, 128$.

(b) Repita el apartado (a) suponiendo que todos los valores de muestras se cuantifican con 8 bits.

(c) Demuestre que las secuencias interpoladas $y(n)$ pueden obtenerse con el sistema mostrado en la Figura P.6.23(b). El primer módulo inserta una muestra de valor cero entre muestras sucesivas de $x(n)$. Determine el sistema $H(z)$ y dibuje el módulo de su respuesta para los casos de interpolación de orden cero e interpolación lineal. ¿Puede explicar la diferencia en rendimiento en términos de las respuestas en frecuencia?

(d) Determine y dibuje los espectros de las sinusoides resultantes en cada caso analíticamente [utilizando los resultados del apartado (c)] y evaluando la DFT de las señales resultantes.

(e) Dibuje los espectros de $x_i(n)$ e $y(n)$, si $x(n)$ tiene el espectro mostrado en la Figura P.6.23(c) tanto para interpolación de orden cero como interpolación lineal. ¿Puede sugerir una elección mejor para $H(z)$?

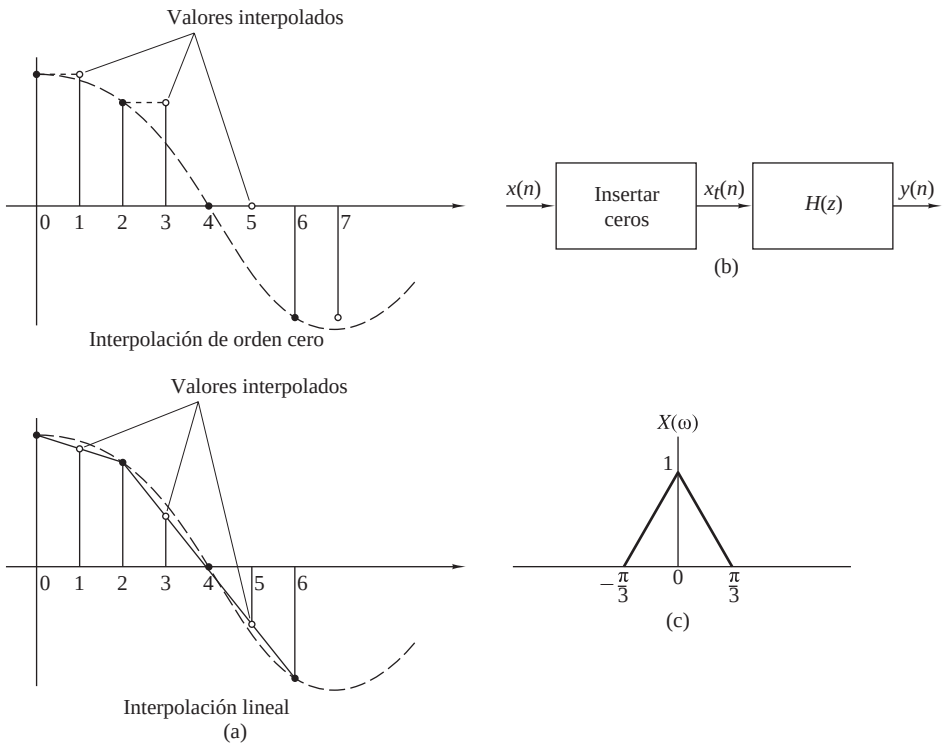


Figura P.6.23.

6.24 Sea $x_a(t)$ una señal limitada en el tiempo; es decir, $x_a(t) = 0$ para $|t| > \tau$, cuya transformada de Fourier es $X_a(F)$. La función $X_a(F)$ se muestra con el intervalo de muestreo $\delta F = 1/T_s$.

(a) Demuestre que la función

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t - nT_s)$$

se puede expresar como una serie de Fourier con coeficientes

$$c_k = \frac{1}{T_s} X_a(k\delta F)$$

(b) Demuestre que $X_a(F)$ puede recuperarse a partir de las muestras $X_a(k\delta F)$, $-\infty < k < \infty$ si $T_s \geq 2\tau$.

(c) Demuestre que si $T_s < 2\tau$, existe "*aliasing* en el dominio del tiempo" que impide la reconstrucción exacta de $X_a(F)$.

(d) Demuestre que si $T_s \geq 2\tau$, la reconstrucción perfecta de $X_a(F)$ a partir de las muestras $X(k\delta F)$ es posible utilizando la fórmula de interpolación

$$X_a(F) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(k\delta F) \frac{\operatorname{sen}[(\pi/\delta F)(F - k\delta F)]}{(\pi/\delta F)(F - k\delta F)}$$

7

Transformada discreta de Fourier: propiedades y aplicaciones

El análisis en frecuencia de señales discretas en el tiempo suele realizarse donde es más adecuado, en un procesador digital de señales, que puede ser una computadora digital de propósito general o sobre un hardware digital especialmente diseñado. Para realizar el análisis en frecuencia de una señal discreta en el tiempo $\{x(n)\}$, convertimos la secuencia en el dominio del tiempo en una representación equivalente en el dominio de la frecuencia. Sabemos que tal representación está dada por la transformada de Fourier $X(\omega)$ de la secuencia $\{x(n)\}$. Sin embargo, $X(\omega)$ es una función continua de la frecuencia y, por tanto, no es una representación adecuada computacionalmente de la secuencia $\{x(n)\}$.

En este capítulo consideramos la representación de una secuencia $\{x(n)\}$ mediante muestras de su espectro $X(\omega)$. Una representación en el dominio de la frecuencia como ésta nos lleva a la transformada discreta de Fourier (DFT, *discrete Fourier transform*), la cual es una potente herramienta de cálculo para llevar a cabo el análisis en frecuencia de señales discretas en el tiempo.

7.1 Muestreo en el dominio de la frecuencia: la transformada discreta de Fourier

Antes de comenzar con la DFT, consideremos el muestreo de la transformada de Fourier de una secuencia aperiódica discreta en el tiempo. Así, establecemos las relaciones entre la transformada de Fourier muestreada y la DFT.

7.1.1 Muestreo en el dominio de la frecuencia y reconstrucción de señales discretas en el tiempo

Recordemos que las señales aperiódicas de energía finita tienen espectros continuos. Consideremos una señal aperiódica discreta en el tiempo $x(n)$ cuya transformada de Fourier es

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \tag{7.1.1}$$

Suponga que muestreamos $X(\omega)$ periódicamente en frecuencias espaciadas $\delta\omega$ radianes entre muestras sucesivas. Como $X(\omega)$ es periódica de período 2π, sólo son necesarias las muestras que se encuentran dentro del rango de frecuencias fundamental. Por comodidad, tomamos N muestras equidistantes en el intervalo $0 \leq \omega < 2\pi$ con un espaciado $\delta\omega = 2\pi/N$, como se muestra en la Figura 7.1.1. Consideremos en primer lugar la selección de N, el número de muestras en el dominio de la frecuencia.

Si evaluamos (7.1.1) en $\omega = 2\pi k/N$, obtenemos

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi kn/N}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{7.1.2}$$

El sumatorio de (7.1.2) puede subdividirse en un número infinito de sumas, donde cada suma consta de N términos. Por tanto,

$$\begin{aligned} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) &= \cdots + \sum_{n=-N}^{-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} + \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} \\ &\quad + \sum_{n=N}^{2N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} + \cdots \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=lN}^{lN+N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} \end{aligned}$$

Si cambiamos el índice del sumatorio interno de n a $n - lN$ e intercambiamos el orden de los sumatorios, obtenemos el resultado

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN)\right] e^{-j2\pi kn/N} \tag{7.1.3}$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$.

La señal

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN) \tag{7.1.4}$$

obtenida por la repetición periódica de $x(n)$ cada N muestras, es claramente periódica de período fundamental N. En consecuencia, puede expandirse en serie de Fourier como

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{7.1.5}$$

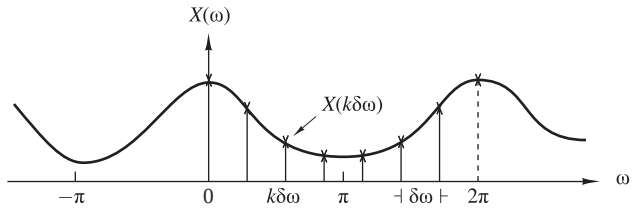


Figura 7.1.1. Muestreo en el dominio de la frecuencia de la transformada de Fourier.

con coeficientes de Fourier

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)e^{-j2\pi kn/N}, \qquad k = 0,1,\ldots,N-1 \tag{7.1.6}$$

Comparando (7.1.3) con (7.1.6), concluimos que

$$c_k = \frac{1}{N}X\left(\frac{2\pi}{N}k\right), \qquad k = 0,1,\ldots,N-1 \tag{7.1.7}$$

Por tanto,

$$x_p(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)e^{j2\pi kn/N}, \qquad n = 0,1,\ldots,N-1 \tag{7.1.8}$$

La relación dada en (7.1.8) proporciona la reconstrucción de la señal periódica $x_p(n)$ a partir de las muestras del espectro $X(\omega)$. Sin embargo, no implica que podamos recuperar $X(\omega)$ o $x(n)$ a partir de las muestras. Para conseguir esto, tenemos que considerar la relación entre $x_p(n)$ y $x(n)$.

Dado que $x_p(n)$ es la extensión periódica de $x(n)$, como se expresa en (7.1.4), es evidente que $x(n)$ puede recuperarse a partir de $x_p(n)$ si no existe *aliasing* en el dominio del tiempo; es decir, si $x(n)$ está limitada en el tiempo por un período menor que N de $x_p(n)$. Esta situación se ilustra en la Figura 7.1.2, donde sin perder generalidad, consideramos una secuencia de duración finita $x(n)$, que es distinta de cero en el intervalo $0 \le n \le L-1$. Observe que cuando $N \ge L$,

$$x(n) = x_p(n), \qquad 0 \le n \le N-1$$

de modo que $x(n)$ se puede recuperar a partir de $x_p(n)$ sin ambiguedades. Por el contrario, si $N < L$, no es posible recuperar $x(n)$ a partir de su extensión periódica debido al *aliasing en el dominio del tiempo.* Por tanto, concluimos que el espectro de una señal discreta en el tiempo aperiódica con duración finita L puede recuperarse

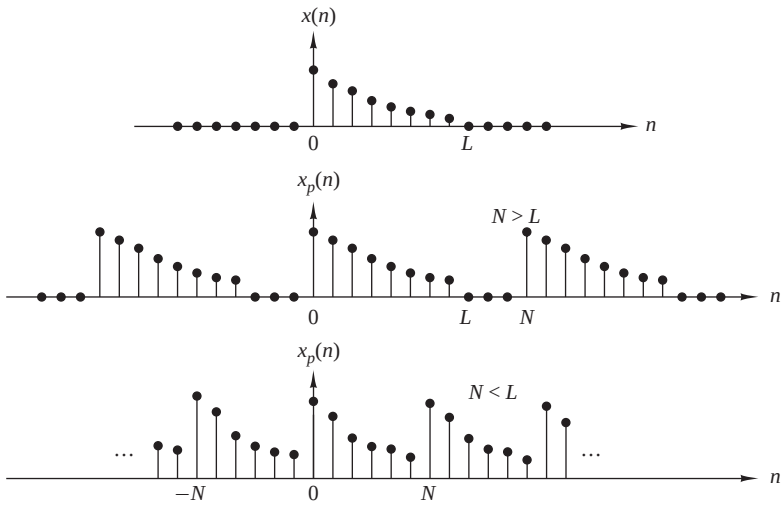


Figura 7.1.2. Secuencia aperiódica $x(n)$ de longitud L y su extensión periódica para $N \ge L$ (sin *aliasing*) y $N < L$ (*aliasing*).

de forma exacta a partir de sus muestras en las frecuencias $\omega_k = 2\pi k/N$, si $N \geq L$. El procedimiento consiste en calcular $x_p(n)$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$ de acuerdo con (7.1.8); luego

$$x(n) = \begin{cases} x_p(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{7.1.9}$$

y, por último, $X(\omega)$ se puede calcular aplicando (7.1.1).

Como en el caso de las señales continuas en el tiempo, es posible expresar el espectro $X(\omega)$ directamente en función de sus muestras $X(2\pi k/N)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Para obtener esta fórmula de interpolación para $X(\omega)$, suponemos que $N \geq L$ y utilizamos (7.1.8). Dado que $x(n) = x_p(n)$ para $0 \leq n \leq N-1$,

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{j2\pi kn/N}, \qquad 0 \leq n \leq N-1 \tag{7.1.10}$$

Si empleamos (7.1.1) y sustituimos para $x(n)$, obtenemos

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{j2\pi kn/N}\right] e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\omega-2\pi k/N)n}\right] \end{aligned} \tag{7.1.11}$$

El sumatorio interno entre corchetes de (7.1.11) representa la función de interpolación básica desplazada en la frecuencia $2\pi k/N$. Si definimos

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1}{N}\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(\omega N/2)}{N\operatorname{sen}(\omega/2)} e^{-j\omega(N-1)/2} \end{aligned} \tag{7.1.12}$$

entonces (7.1.11) se puede expresar como

$$X(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) P\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right), \qquad N \geq L \tag{7.1.13}$$

La función de interpolación $P(\omega)$ no es la familiar $(\operatorname{sen}\theta)/\theta$, sino que en su lugar es una contrapartida periódica de ella, y se debe a la naturaleza periódica de $X(\omega)$. El desplazamiento de fase en (7.1.12) refleja el hecho de que la señal $x(n)$ es una secuencia causal de duración finita y longitud N. La función $\operatorname{sen}(\omega N/2)/(N\operatorname{sen}(\omega/2))$ se ha representado en la Figura 7.1.3 para $N = 5$. Observe que la función $P(\omega)$ tiene la propiedad

$$P\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, \ldots, N-1 \end{cases} \tag{7.1.14}$$

En consecuencia, la fórmula de interpolación dada en (7.1.13) proporciona de forma exacta los valores de las muestras $X(2\pi k/N)$ para $\omega = 2\pi k/N$. En las restantes frecuencias, la fórmula proporciona una combinación lineal ponderada apropiadamente de las muestras espectrales originales.

El siguiente ejemplo ilustra el muestreo en el dominio de la frecuencia de una señal discreta en el tiempo y el *aliasing* en el dominio del tiempo que genera.

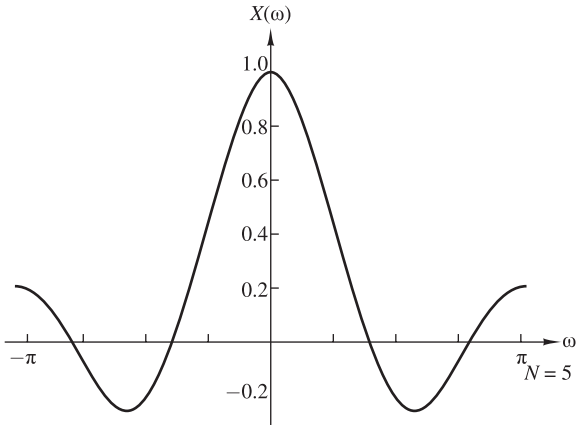


Figura 7.1.3. Representación de la función $[\text{sen}(\omega N/2)]/[N\,\text{sen}(\omega/2)]$.

EJEMPLO 7.1.1

Considere la señal

$$x(n) = a^n u(n), \qquad 0 < a < 1$$

El espectro de esta señal se muestrea a las frecuencias $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Determine los espectros reconstruidos para $a = 0.8$ cuando $N = 5$ y $N = 50$.

Solución. La transformada de Fourier de la secuencia $x(n)$ es

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

Suponga que muestreamos $X(\omega)$ en N frecuencias equidistantes $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Así, obtenemos las muestras espectrales

$$X(\omega k) \equiv X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \frac{1}{1 - ae^{-j2\pi k/N}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

La secuencia periódica $x_p(n)$, correspondiente a las muestras de frecuencia $X(2\pi k/N)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, pueden obtenerse a partir de (7.1.4) o (7.1.8). Por tanto,

$$\begin{aligned} x_p(n) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - lN) = \sum_{l=-\infty}^{0} a^{n-lN} \\ &= a^n \sum_{l=0}^{\infty} a^{lN} = \frac{a^n}{1 - a^N}, \qquad 0 \le n \le N-1 \end{aligned}$$

donde el factor $1/(1 - a^N)$ representa el efecto del *aliasing*. Puesto que $0 < a < 1$, el error de *aliasing* tiende a cero cuando $N \to \infty$.

Para $a = 0.8$, la secuencia $x(n)$ y su espectro $X(\omega)$ se muestran en las Figuras 7.1.4(a) y 7.1.4(b), respectivamente. Las secuencias con *aliasing* $x_p(n)$ para $N = 5$ y $N = 50$ y las correspondientes muestras espectrales se muestran en las Figuras 7.1.4(c) y 7.1.4(d), respectivamente. Observe que los efectos del *aliasing* son despreciables para $N = 50$.

Si definimos la secuencia de duración finita con *aliasing* $x(n)$ como

$$\hat{x}(n) = \begin{cases} x_p(n), & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

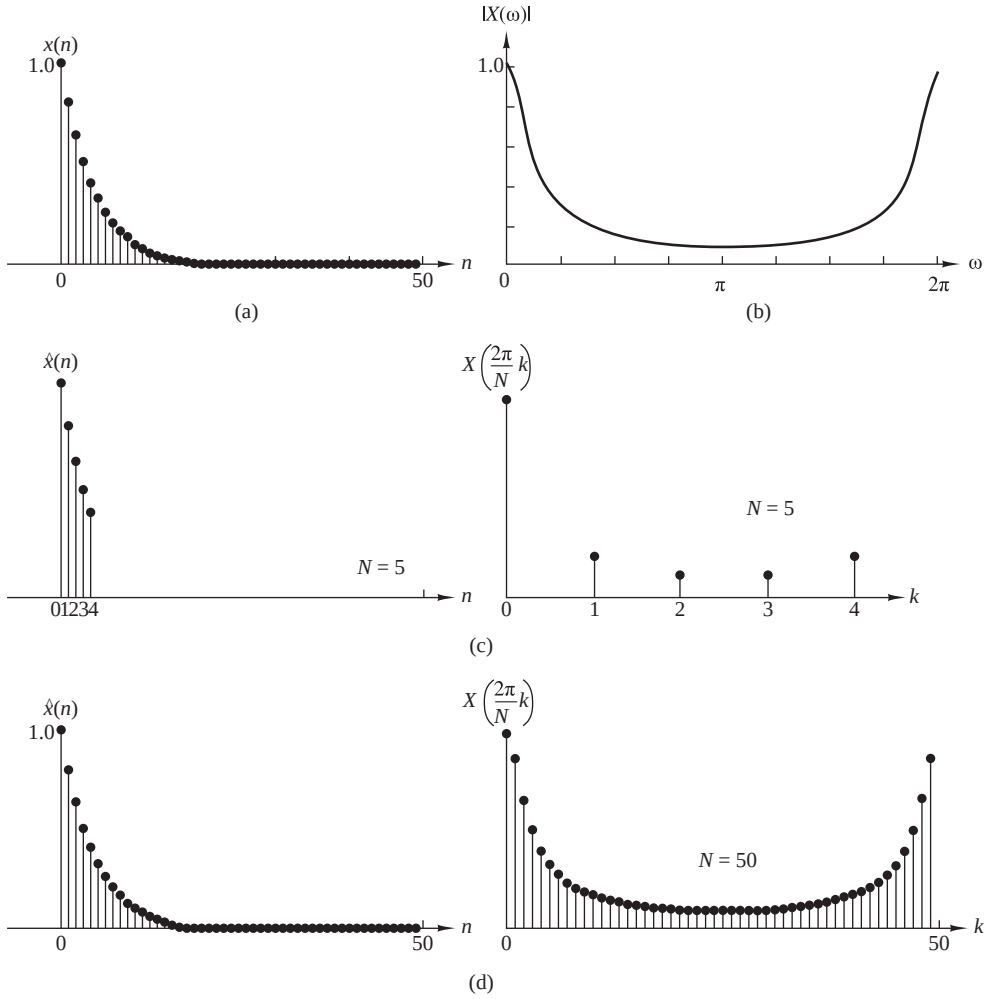


Figura 7.1.4. (a) Diagrama de la secuencia $x(n) = (0.8)^n u(n)$. (b) Transformada de Fourier (sólo el módulo). (c) Efecto del *aliasing* con $N = 5$. (d) Efecto reducido del *aliasing* con $N = 50$.

entonces su transformada de Fourier es

$$\begin{aligned}\hat{X}(\omega) &= \sum_{n=0}^{N-1} \hat{x}(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)e^{-j\omega N} \\ &= \frac{1}{1-a^N} \cdot \frac{1-a^N e^{-j\omega n}}{1-ae^{-j\omega}}\end{aligned}$$

Observe que aunque $\hat{X}(\omega) \neq X(\omega)$, los valores de las muestras en $\omega_k = 2\pi k/N$ son idénticos. Es decir,

$$\hat{X}\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \frac{1}{1-a^N} \cdot \frac{1-a^N}{1-ae^{-j2\pi kN}} = X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$$

7.1.2 Transformada discreta de Fourier (DFT)

El desarrollo en la sección anterior está relacionado con el muestreo en el dominio de la frecuencia de una secuencia aperiódica de energía finita $x(n)$. En general, las muestras en frecuencia igualmente espaciadas $X(2\pi k/N)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, no representan de forma unívoca la secuencia original $x(n)$, cuando $x(n)$ tiene duración infinita. En su lugar, las muestras en frecuencia $X(2\pi k/N)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, corresponden a una secuencia periódica $x_p(n)$ de período N, donde $x_p(n)$ es una versión con *aliasing* de $x(n)$, como se indica mediante la relación dada en (7.1.4), es decir,

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - lN) \tag{7.1.15}$$

Cuando la secuencia $x(n)$ tiene una duración finita de longitud $L \leq N$, entonces $x_p(n)$ es simplemente una repetición periódica de $x(n)$, donde $x_p(n)$ sobre un solo período está dada por

$$x_p(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & L \leq n \leq N-1 \end{cases} \tag{7.1.16}$$

En consecuencia, las muestras en frecuencia $X(2\pi k/N)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, representan de forma unívoca la secuencia de duración finita $x(n)$. Puesto que $x(n) \equiv x_p(n)$ en un solo período (rellenado por $N-L$ ceros), la secuencia de duración finita original $x(n)$ puede obtenerse a partir de las muestras en frecuencia $\{X(2\pi k/N\}$ por medio de la fórmula (7.1.8).

Es importante destacar que el *relleno con ceros* no proporciona ninguna información adicional acerca del espectro $X(\omega)$ de la señal $\{x(n)\}$. Las L muestras equidistantes de $X(\omega)$ son suficientes para reconstruir $X(\omega)$ utilizando la fórmula de reconstrucción (7.1.13). Sin embargo, rellenar la secuencia $\{x(n)\}$ con $N-L$ ceros y calcular una DFT de N puntos proporciona una "mejor representación" de la transformada de Fourier $X(\omega)$.

En resumen, una secuencia de duración finita $x(n)$ de longitud L [es decir, $x(n) = 0$ para $n < 0$ y $n \geq L$] tiene una transformada de Fourier

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n) e^{-j\omega n}, \qquad 0 \leq \omega \leq 2\pi \tag{7.1.17}$$

donde los índices superior e inferior del sumatorio reflejan el hecho de que $x(n) = 0$ fuera del rango $0 \leq n \leq L-1$. Si muestreamos $X(\omega)$ en frecuencias igualmente espaciadas $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, donde $N \geq L$, las muestras resultantes son

$$\begin{aligned} X(k) &\equiv X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} \\ X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \end{aligned} \tag{7.1.18}$$

donde, por conveniencia, el índice superior del sumatorio se ha incrementado de $L-1$ a $N-1$, ya que $x(n) = 0$ para $n \geq L$.

La relación dada por (7.1.18) es una fórmula que permite transformar una secuencia $\{x(n)\}$ de longitud $L \leq N$ en una secuencia de muestras en frecuencia $\{X(k)\}$ de longitud N. Puesto que las muestras de frecuencia se obtienen evaluando la transformada de Fourier $X(\omega)$ en un cojunto de N frecuencias discretas (igualmente espaciadas), la relación dada en (7.1.18) se denomina *transformada discreta de Fourier* (DFT) de $x(n)$. A su vez, la relación dada en (7.1.10), que nos permite recuperar la secuencia $x(n)$ a partir de las muestras de frecuencia

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N}, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{7.1.19}$$

se denomina *DFT inversa* (IDFT). Evidentemente, cuando $x(n)$ tiene una longitud $L < N$, la IDFT de N puntos da $x(n) = 0$ para $L \leq n \leq N-1$. Resumiendo, las fórmulas para la DFT y la IDFT son:

$$\text{DFT: } X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \tag{7.1.20}$$

$$\text{IDFT: } x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi kn/N}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \tag{7.1.21}$$

EJEMPLO 7.1.2

Una secuencia de duración finita de longitud L está dada por

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine la DFT de N puntos de esta secuencia para $N \geq L$.

Solución. La transformada de Fourier de esta secuencia es

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{n=0}^{L-1} x(n)e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{L-1} e^{-j\omega n} = \frac{1-e^{-j\omega L}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{\operatorname{sen}(\omega L/2)}{\operatorname{sen}(\omega/2)} e^{-j\omega(L-1)/2} \end{aligned}$$

El módulo y la fase de $X(\omega)$ se ilustran en la Figura 7.1.5 para $L = 10$. La DFT de N puntos de $x(n)$ es simplemente $X(\omega)$ evaluada en el conjunto de N frecuencias igualmente espaciadas $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Por tanto,

$$\begin{aligned} X(k) &= \frac{1-e^{-j2\pi kL/N}}{1-e^{-j2\pi k/N}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \\ &= \frac{\operatorname{sen}(\pi kL/N)}{\operatorname{sen}(\pi k/N)} e^{-j\pi k(L-1)/N} \end{aligned}$$

Si N se selecciona tal que $N = L$, entonces la DFT es

$$X(k) = \begin{cases} L, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, \ldots, L-1 \end{cases}$$

Luego existe sólo un valor distinto de cero en la DFT. Esto es evidente si observamos $X(\omega)$, ya que $X(\omega) = 0$ en las frecuencias $\omega_k = 2\pi k/L$, $k \neq 0$. El lector puede verificar que $x(n)$ se puede recuperar a partir de $X(k)$ calculando la IDFT de L puntos.

Aunque la DFT de L puntos es suficiente para representar de forma unívoca la secuencia $x(n)$ en el dominio de la frecuencia, es evidente que no proporciona suficiente detalle como para obtener una buena representación de la característica espectral de $x(n)$. Si deseamos disponer de una imagen mejor, tendremos que evaluar (interpolar) $X(\omega)$ en frecuencias con un menor espaciado entre sí, por ejemplo, en $\omega_k = 2\pi k/N$, donde $N > L$. En efecto, podemos ver estos cálculos como una expansión del tamaño de la secuencia de L puntos a N puntos, añadiendo $N-L$ ceros a la secuencia $x(n)$, es decir, rellenando con ceros. Así, la DFT de N puntos proporciona una interpolación más ajustada que la DFT de L puntos.

La Figura 7.1.6 proporciona una gráfica de la DFT de N puntos, en la que se puede ver su módulo y su fase para $L = 10$, $N = 50$ y $N = 100$. Ahora la característica espectral de la secuencia resulta mucho más clara, lo que es evidente si comparamos estos espectros con el espectro continuo $X(\omega)$.

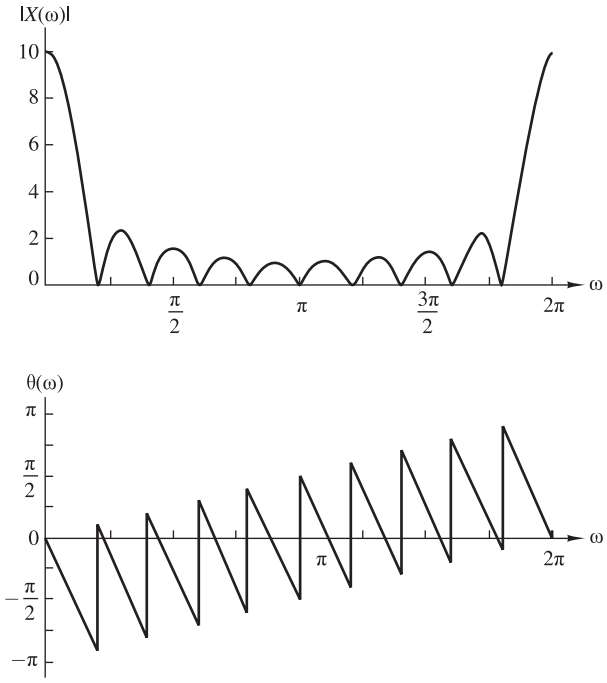


Figura 7.1.5. Módulo y fase de la transformada de Fourier para la señal del Ejemplo 7.1.2.

7.1.3 La DFT como una transformación lineal

Las fórmulas para la DFT y la IDFT dadas por (7.1.18) y (7.1.19) se pueden expresar como

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{7.1.22}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{7.1.23}$$

donde, por definición,

$$W_N = e^{-j2\pi/N} \tag{7.1.24}$$

que es la raíz $N-$ésima de valor unidad.

Observe que el cálculo de cada punto de la DFT se puede llevar a cabo realizando N multiplicaciones complejas y $(N-1)$ sumas complejas. Luego los valores de la DFT de N puntos pueden calcularse realizando un total de N^2 multiplicaciones complejas y $N(N-1)$ sumas complejas.

Es interesante ver la DFT y la IDFT como transformaciones lineales de las secuencias $\{x(n)\}$ y $\{X(k)\}$, respectivamente. Definamos un vector de N puntos $\mathbf{x}_N$ de la secuencia $x(n)$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, un vector de N puntos $\mathbf{X}_N$ de muestras en frecuencia y una matriz $N \times N$ $\mathbf{W}_N$ como sigue

$$\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_N = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \tag{7.1.25}$$

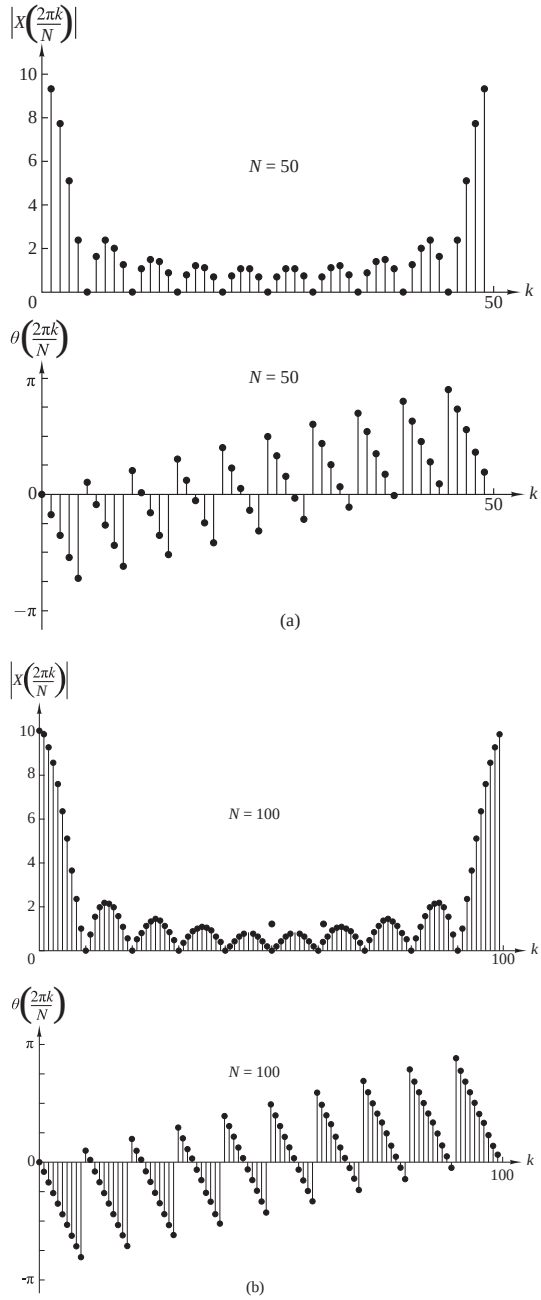


Figura 7.1.6. Módulo y fase de la DFT de N puntos del Ejemplo 7.1.2. (a) $L = 10, N = 50$. (b) $L = 10, N = 100$.

Con estas definiciones, la DFT de N puntos se puede expresar en forma matricial como

$$\mathbf{X}_N = \mathbf{W}_N \mathbf{x}_N \tag{7.1.26}$$

donde $\mathbf{W}_N$ es la matriz de la transformación lineal. Observe que $\mathbf{W}_N$ es una matriz simétrica. Si suponemos que existe la inversa de $\mathbf{W}_N$, entonces (7.1.26) se puede invertir premultiplicando ambos lados de la ecuación por $\mathbf{W}_N^{-1}$. Así obtenemos

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{W}_N^{-1}\mathbf{X}_N \tag{7.1.27}$$

Pero ésta es sólo una expresión para la IDFT.

De hecho, la IDFT dada por (7.1.23) se puede expresar en forma matricial como

$$\mathbf{x}_N = \frac{1}{N}\mathbf{W}_N^{*}\mathbf{X}_N \tag{7.1.28}$$

donde $\mathbf{W}_N^{*}$ designa el conjugado complejo de la matriz $\mathbf{W}_N$. Comparando (7.1.27) con (7.1.28) concluimos que

$$\mathbf{W}_N^{-1} = \frac{1}{N}\mathbf{W}_N^{*} \tag{7.1.29}$$

lo que a su vez implica que

$$\mathbf{W}_N\mathbf{W}_N^{*} = N\mathbf{I}_N \tag{7.1.30}$$

donde $\mathbf{I}_N$ es una matriz identidad $N \times N$. Por tanto, la matriz $\mathbf{W}_N$ de la transformación es una matriz ortogonal (unitaria). Además, existe su inversa y está dada por $\mathbf{W}_N^{*}/N$. Por supuesto, la existencia de la inversa de $\mathbf{W}_N$ se ha establcido anteriormente a partir de la deducción de la IDFT.

EJEMPLO 7.1.3

Calcule la DFT de la secuencia de cuatro puntos

$$x(n) = (0 \quad 1 \quad 2 \quad 3)$$

Solución. El primer paso consiste en determinar la matriz $\mathbf{W}_4$. Aplicando la propiedad de periodicidad de $\mathbf{W}_4$ y la propiedad de simetría

$$W_N^{k+N/2} = -W_N^k$$

la matriz $\mathbf{W}_4$ se puede expresar como sigue

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_4 &= \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & W_4^0 & W_4^2 \\ 1 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathbf{X}_4 = \mathbf{W}_4\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ -2+2j \\ -2 \\ -2-2j \end{bmatrix}$$

La IDFT de $\mathbf{X}_4$ puede determinarse conjugando los elementos de $\mathbf{W}_4$ para obtener $\mathbf{W}_4^{*}$ y aplicando a continuación la fórmula (7.1.28).

La DFT y la IDFT son herramientas de cálculo que desarrollan un importante papel en muchas aplicaciones de tratamiento digital de la señal, como por ejemplo en el análisis en frecuencia (análisis de espectros) de señales, en la estimación del espectro de potencia y en el filtrado lineal. La importancia de la DFT y la IDFT en tales aplicaciones prácticas se debe a la existencia de algoritmos de cálculo eficientes, conocidos colectivamente como algoritmos de la transformada rápida de Fourier (FFT, *fast Fourier transform*), que permiten calcular dichas transformadas DFT e IDFT. Estos algoritmos se describen en el Capítulo 8.

7.1.4 Relación de la DFT con otras transformadas

Ya hemos mencionada que la DFT es una importante herramienta de cálculo para el análisis en frecuencia de señales utilizando procesadores digitales de señal. Teniendo en cuenta las otras herramientas y transformadas para el análisis en frecuencia que hemos desarrollado, es importante establecer las relaciones de la DFT con estas otras transformadas.

Relación con los coeficientes de la serie de Fourier de una secuencia periódica. Una secuencia periódica $\{x_p(n)\}$ de período fundamental N se puede representar en una serie de Fourier de la forma

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi nk/N}, \qquad -\infty < n < \infty \tag{7.1.31}$$

donde los coeficientes de la serie de Fourier están dados por la expresión

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j2\pi nk/N}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{7.1.32}$$

Si comparamos (7.1.31) y (7.1.32) con (7.1.18) y (7.1.19), observamos que la fórmula para los coeficientes de la serie de Fourier tiene la forma de una DFT. De hecho, si definimos una secuencia $x(n) = x_p(n)$, $0 \le n \le N-1$, la DFT de esta señal es simplemente

$$X(k) = Nc_k \tag{7.1.33}$$

Además, (7.1.31) tiene la forma de una IDFT. Así, la DFT de N puntos proporciona el espectro de líneas exacto de una secuencia periódica de período fundamental N.

Relación con la transformada de Fourier de una secuencia aperiódica. Ya hemos demostrado que si $x(n)$ es una secuencia aperiódica de energía finita con la transformada de Fourier $X(\omega)$, la cual se muestrea a N frecuencias igualmente espaciadas $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, las componentes espectrales

$$X(k) = X(\omega)|_{\omega=2\pi k/N} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi nk/N}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{7.1.34}$$

son los coeficientes de la DFT de la secuencia periódica de período N, dada por

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - lN) \tag{7.1.35}$$

Así, $x_p(n)$ queda determinada por el *aliasing* $\{x(n)\}$ en el intervalo $0 \le n \le N-1$. La secuencia de duración finita

$$\hat{x}(n) = \begin{cases} x_p(n), & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{7.1.36}$$

no se parece a la secuencia original $\{x(n)\}$, a menos que $x(n)$ sea de duración finita y longitud $L \le N$, en cuyo caso

$$x(n) = \hat{x}(n), \qquad 0 \le n \le N-1 \tag{7.1.37}$$

Sólo en este caso la IDFT de $\{X(k)\}$ proprocionará la secuencia original $\{x(n)\}$.

Relación con la transformada z. Consideremos una secuencia $x(n)$ con la transformada z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \tag{7.1.38}$$

y una región de convergencia que incluye la circunferencia unidad. Si $X(z)$ se muestrea en N puntos igualmente espaciados sobre la circunferencia unidad $z_k = e^{j2\pi k/N}$, 0, 1, 2, $\ldots, N-1$, obtenemos

$$\begin{aligned} X(k) &\equiv X(z)|_{z=e^{j2\pi nk/N}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi nk/N} \end{aligned} \tag{7.1.39}$$

La expresión dada en (7.1.38) es idéntica a la transformada de Fourier $X(\omega)$ evaluada en las N frecuencias igualmente espaciadas $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, que es el tema tratado en la Sección 7.1.1.

Si la secuencia $x(n)$ tiene duración finita de longitud N o menor, la secuencia puede recuperarse a partir de su DFT de N puntos. Por tanto, su transformada z queda determinada de forma unívoca por su DFT de N puntos. En consecuencia, $X(z)$ se puede expresar como una función de la DFT $\{X(k)\}$ como sigue:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} \\ X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N} \right] z^{-n} \\ X(z) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{j2\pi k/N} z^{-1} \right)^n \\ X(z) &= \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1 - e^{j2\pi k/N} z^{-1}} \end{aligned} \tag{7.1.40}$$

Si se evalúa sobre la circunferencia unidad, (7.1.40) proporciona la transformada de Fourier de la secuencia de duración finita en función de su DFT, en la forma

$$X(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1 - e^{-j(\omega - 2\pi k/N)}} \tag{7.1.41}$$

Esta expresión para la transformada de Fourier es una fórmula de interpolación polinómica (Lagrange) para $X(\omega)$ expresada en función de los valores $\{X(k)\}$ del polinomio en un conjunto de frecuencias discretas igualmente espaciadas $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Realizando algunas manipulaciones algebraicas, podemos reducir la expresión (7.1.41) a la fórmula de interpolación dada anteriormente en (7.1.13).

Relación con los coeficientes de la serie de Fourier de una señal continua en el tiempo. Supongamos que $x_a(t)$ es una señal periódica continua en el tiempo de período fundamental $T_p = 1/F_0$. La señal puede expresarse como la serie de Fourier

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k t F_0} \tag{7.1.42}$$

donde $\{c_k\}$ son los coeficientes de Fourier. Si muestreamos $x_a(t)$ a una tasa uniforme $F_s = N/T_p = 1/T$, obtenemos la secuencia discreta en el tiempo

$$\begin{aligned} x(n) \equiv x_a(nT) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 nT} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi kn/N} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{k-lN} \right] e^{j2\pi kn/N} \end{aligned} \tag{7.1.43}$$

Evidentemente, la expresión (7.1.43) tiene la forma de una IDFT, donde

$$X(k) = N \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{k-lN} \equiv N\tilde{c}_k \tag{7.1.44}$$

y

$$\tilde{c}_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{k-lN} \tag{7.1.45}$$

Así, la secuencia $\{\tilde{c}_k\}$ es una versión con *aliasing* de la secuencia $\{c_k\}$.

7.2 Propiedades de la DFT

En la Sección 7.1.2 hemos presentado la DFT como un conjunto de N muestras $\{X(k)\}$ de la transformada de Fourier $X(\omega)$ para una secuencia de duración finita $\{x(n)\}$ de longitud $L \leq N$. El muestreo de $X(\omega)$ se hace en N frecuencias igualmente espaciadas $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$. Hemos demostrado que las N muestras $\{X(k)\}$ representan de forma unívoca la secuencia $\{x(n)\}$ en el dominio de la frecuencia. Recuerde que la DFT y la DFT inversa (IDFT) para la secuencia de N puntos $\{x(n)\}$ se definen como

$$\text{DFT: } X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{7.2.1}$$

$$\text{IDFT: } x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{7.2.2}$$

donde W_N se define como

$$W_N = e^{-j2\pi/N} \tag{7.2.3}$$

En esta sección presentamos las propiedades más importantes de la DFT. Teniendo en cuenta las relaciones establecidas en la Sección 7.1.4 entre la DFT y la serie de Fourier, y las transformadas de Fourier y las transformadas z de las señales discretas en el tiempo, es de esperar que las propiedades de la DFT sean parecidas a las propiedades de estas otras transformadas y series. Sin embargo, existen algunas diferencias importantes, siendo una de ellas la propiedad de la convolución circular que se deduce en la sección siguiente. Un buen conocimiento de estas propiedades resulta extremadamente útil en la aplicación de la DFT a los problemas prácticos.

La notación que usamos a continuación designa la pareja de transformadas DFT de N puntos $x(n)$ y $X(k)$

$$x(n) \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X(k)$$

7.2.1 Propiedades de periodicidad, linealidad y simetría

Periodicidad. Si $x(n)$ y $X(k)$ son una pareja de transformada DFT de N puntos, entonces

$$x(n+N) = x(n) \qquad \text{para todo } n \tag{7.2.4}$$

$$X(k+N) = X(k) \qquad \text{para todo } k \tag{7.2.5}$$

Estas periodicidades de $x(n)$ y $X(k)$ se obtienen de forma inmediata de las fórmulas (7.2.1) y (7.2.2) para la DFT y la IDFT, respectivamente.

Anteriormente hemos explicado la propiedad de periodicidad de la secuencia $x(n)$ para una DFT dada. Sin embargo, anteriormente no hemos visto la DFT $X(k)$ como una secuencia periódica. En algunas aplicaciones hacer esto resulta ventajoso.

Linealidad. Si

$$x_1(n) \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X_1(k)$$

y

$$x_2(n) \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X_2(k)$$

entonces para cualesquiera constantes reales o complejas a_1 y a_2,

$$a_1x_1(n) + a_2x_2(n) \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} a_1X_1(k) + a_2X_2(k) \tag{7.2.6}$$

Esta propiedad se deduce fácilmente a partir de la definición de la DFT dada en (7.2.1).

Simetría circular de una secuencia. Como hemos visto, la DFT de N puntos de una secuencia de duración finita $x(n)$ de longitud $L \leq N$ es equivalente a la DFT de N puntos de una secuencia periódica $x_p(n)$ de período N, la cual se obtiene expandiendo periódicamente $x(n)$, es decir,

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - lN) \tag{7.2.7}$$

Suponga ahora que desplazamos k unidades hacia la derecha la secuencia periódica $x_p(n)$. Así obtenemos otra secuencia periódica

$$x'_p(n) = x_p(n-k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-k-lN) \tag{7.2.8}$$

La secuencia de duración finita

$$x'(n) = \begin{cases} x'_p(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{7.2.9}$$

está relacionada con la secuencia original $x(n)$ por un desplazamiento circular. Esta relación se ilustra en la Figura 7.2.1 para $N = 4$.

En general, el desplazamiento circular de la secuencia se puede representar como el índice de módulo N. Así, podemos escribir

$$\begin{aligned} x'(n) &= x(n-k, \text{módulo } N) \\ &\equiv x((n-k))_N \end{aligned} \tag{7.2.10}$$

Por ejemplo, si $k = 2$ y $N = 4$, tenemos

$$x'(n) = x((n-2))_4$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} x'(0) &= x((-2))_4 = x(2) \\ x'(1) &= x((-1))_4 = x(3) \\ x'(2) &= x((0))_4 = x(0) \\ x'(3) &= x((1))_4 = x(1) \end{aligned}$$

Por tanto, $x'(n)$ es simplemente $x(n)$ desplazada circularmente dos unidades de tiempo, donde se ha seleccionado arbitrariamente la dirección antihoraria como la dirección positiva. Por tanto, concluimos que un desplazamiento

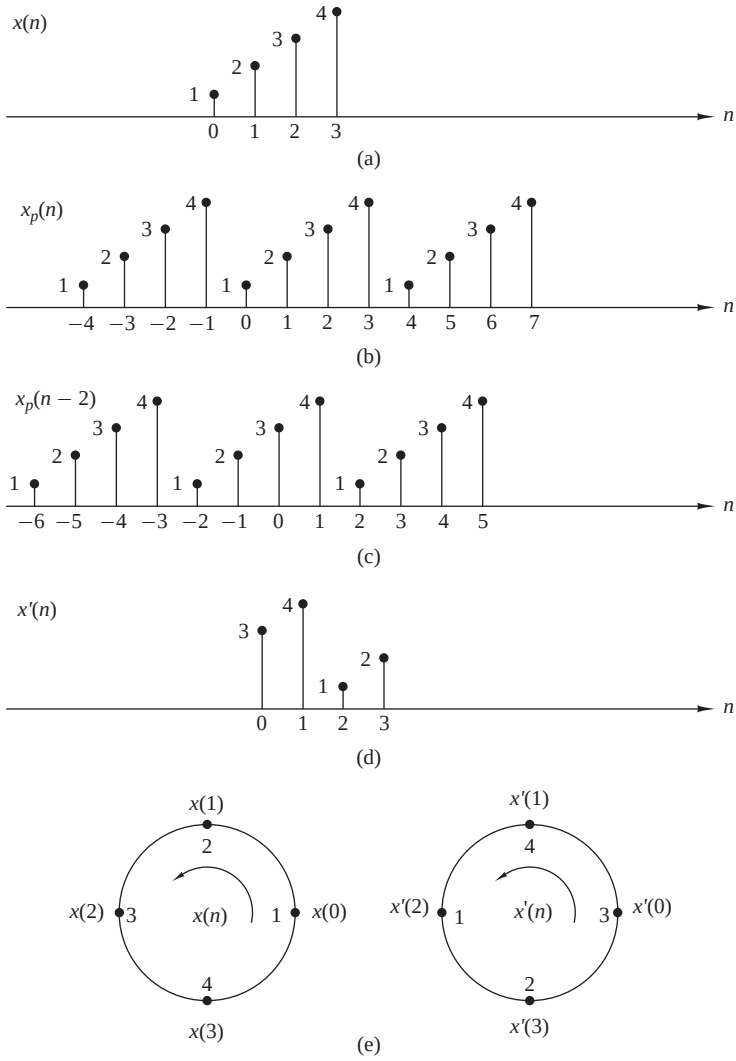


Figura 7.2.1. Desplazamiento circular de una secuencia.

circular de una secuencia de N puntos es equivalente a un desplazamiento lineal de su extensión periódica, y viceversa.

La periodicidad inherente que resulta de la disposición de la secuencia de N puntos sobre la circunferencia impone una definción diferente de la simetría par e impar y la inversión temporal de una secuencia.

Una secuencia de N puntos se dice que es circularmente *par* si es simétrica respecto del punto cero de la circunferencia. Esto implica que

$$x(N-n) = x(n), \qquad 1 \le n \le N-1 \tag{7.2.11}$$

Se dice que una secuencia de N puntos es circularmente *impar* si es antisimétrica con respecto al punto cero de la circunferencia. Esto implica que

$$x(N-n) = -x(n), \qquad 1 \le n \le N-1 \tag{7.2.12}$$

La inversión temporal de una secuencia de N puntos se consigue invirtiendo sus muestras respecto del punto cero de la circunferencia. Luego la secuencia $x((-n))_N$ queda determinada por

$$x((-n))_N = x(N-n), \qquad 0 \le n \le N-1 \tag{7.2.13}$$

Esta inversión temporal es equivalente a representar $x(n)$ en el sentido horario sobre una circunferencia.

Una definición equivalente para las secuencias par e impar de la secuencia periódica asociada $x_p(n)$ es la siguiente

$$\begin{aligned} \text{par:} \quad & x_p(n) = x_p(-n) = x_p(N-n) \\ \text{impar:} \quad & x_p(n) = -x_p(-n) = -x_p(N-n) \end{aligned} \tag{7.2.14}$$

Si la secuencia periódica es compleja, tenemos

$$\begin{aligned} \text{par conjugada:} \quad & x_p(n) = x_p^*(N-n) \\ \text{impar conjugada:} \quad & x_p(n) = -x_p^*(N-n) \end{aligned} \tag{7.2.15}$$

Estas relaciones sugieren la descomposición de la secuencia $x_p(n)$ como sigue

$$x_p(n) = x_{pe}(n) + x_{po}(n) \tag{7.2.16}$$

donde

$$\begin{aligned} x_{pe}(n) &= \frac{1}{2}[x_p(n) + x_p^*(N-n)] \\ x_{po}(n) &= \frac{1}{2}[x_p(n) - x_p^*(N-n)] \end{aligned} \tag{7.2.17}$$

Propiedades de simetría de la DFT. Las propiedades de simetría para la DFT pueden obtenerse aplicando la metodología empleada anteriormente para la transformada de Fourier. Supongamos que la secuencia de N puntos $x(n)$ y su DFT son complejas. Entonces las secuencias se pueden expresar como

$$x(n) = x_R(n) + jx_I(n), \qquad 0 \le n \le N-1 \tag{7.2.18}$$

$$X(k) = X_R(k) + jX_I(k), \qquad 0 \le k \le N-1 \tag{7.2.19}$$

Sustituyendo (7.2.18) en la expresión para la DFT dada por (7.2.1), obtenemos

$$X_R(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[x_R(n) \cos \frac{2\pi kn}{N} + x_I(n) \operatorname{sen} \frac{2\pi kn}{N} \right] \tag{7.2.20}$$

$$X_I(k) = -\sum_{n=0}^{N-1} \left[x_R(n) \operatorname{sen} \frac{2\pi kn}{N} - x_I(n) \cos \frac{2\pi kn}{N} \right] \tag{7.2.21}$$

Del mismo modo, sustituyendo (7.2.19) en la expresión de la IDFT dada por (7.2.2), obtenemos

$$x_R(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[X_R(k) \cos \frac{2\pi kn}{N} - X_I(k) \operatorname{sen} \frac{2\pi kn}{N} \right] \tag{7.2.22}$$

$$x_I(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[X_R(k) \operatorname{sen} \frac{2\pi kn}{N} + X_I(k) \cos \frac{2\pi kn}{N} \right] \tag{7.2.23}$$

Secuencias reales. Si la secuencia $x(n)$ es real, se deduce directamente a partir de (7.2.1) que

$$X(N-k) = X^*(k) = X(-k) \tag{7.2.24}$$

En consecuencia, $|X(N-k)| = |X(k)|$ y $\angle X(N-k) = -\angle X(k)$. Además, $x_I(n) = 0$ y, por tanto, $x(n)$ se puede determinar a partir de (7.2.22), que es otra forma de la IDFT.

Secuencias reales pares. Si $x(n)$ es real y par, es decir,

$$x(n) = x(N-n), \qquad 0 \le n \le N-1$$

entonces (7.2.21) proporciona $X_I(k) = 0$. Por tanto, la DFT se reduce a

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos \frac{2\pi kn}{N}, \qquad 0 \le k \le N-1 \tag{7.2.25}$$

que es real y par. Además, como $X_I(k) = 0$, la IDFT se reduce a

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cos \frac{2\pi kn}{N}, \qquad 0 \le n \le N-1 \tag{7.2.26}$$

Secuencias reales impares. Si $x(n)$ es real e impar, es decir,

$$x(n) = -x(N-n), \qquad 0 \le n \le N-1$$

entonces (7.2.20) proporciona $X_R(k) = 0$. Por tanto,

$$X(k) = -j \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \operatorname{sen} \frac{2\pi kn}{N}, \qquad 0 \le k \le N-1 \tag{7.2.27}$$

que es impar e imaginaria pura. Como $X_R(k) = 0$, la IDFT se reduce a

$$x(n) = j\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \operatorname{sen} \frac{2\pi kn}{N}, \qquad 0 \le n \le N-1 \tag{7.2.28}$$

Secuencias imaginarias puras. En este caso, $x(n) = jx_I(n)$. Por tanto, (7.2.20) y (7.2.21) se reducen a

$$X_R(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_I(n) \operatorname{sen} \frac{2\pi kn}{N} \tag{7.2.29}$$

$$X_I(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_I(n) \cos \frac{2\pi kn}{N} \tag{7.2.30}$$

Observe que $X_R(k)$ es impar y $X_I(k)$ es par.

Si $x_I(n)$ es impar, entonces $X_I(k) = 0$ y, por tanto, $X(k)$ es real pura. Por el contrario, si $x_I(n)$ es par, entonces $X_R(k) = 0$ y, por tanto, $X(k)$ es imaginaria pura.

Las propiedades de simetría enumeradas anteriormente se resumen a continuación:

$$\begin{array}{l} x(n) = x_R^e(n) + x_R^o(n) + jx_I^e(n) + jx_I^o(n) \\ \qquad\qquad\updownarrow \\ X(k) = X_R^e(k) + X_R^o(k) + jX_I^e(k) + jX_I^o(k) \end{array} \tag{7.2.31}$$

Todas las propiedades de simetría de la DFT se pueden deducir fácilmente a partir de la Ecuación (7.2.31). Por ejemplo, la DFT de la secuencia

$$x_{pe}(n) = \frac{1}{2}[x_p(n) + x_p^*(N-n)]$$

es

$$X_R(k) = X_R^e(k) + X_R^o(k)$$

Las propiedades de simetría de la DFT se resumen en la Tabla 7.1. En algunos de los problemas incluidos al final de capítulo se aplican estas propiedades al cálculo eficiente de la DFT de varias secuencias especiales.

7.2.2 Multiplicación de dos DFT y convolución circular

Suponga que tenemos dos secuencias de duración finita de longitud N, $x_1(n)$ y $x_2(n)$. Sus respectivas DFT de N puntos son

Secuencia de N puntos $x(n)$, $0 \le n \le N-1$	DFT de N puntos
$x(n)$	$X(k)$
$x^*(n)$	$X^*(N-k)$
$x^*(N-n)$	$X^*(k)$
$x_R(n)$	$X_{ce}(k) = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)]$
$jX_I(n)$	$X_{co}(k) = \frac{1}{2}[X(k) - X^*(N-k)]$
$x_{ce}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)]$	$X_R(k)$
$x_{co}(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)]$	$jX_I(k)$
Señales reales	
Cualquier señal real	$X(k) = X^*(N-k)$
$x(n)$	$X_R(k) = X_R(N-k)$
	$X_I(k) = -X_I(N-k)$
	$\lvert X(k)\rvert = \lvert X(N-k)\rvert$
	$\angle X(k) = -\angle X(N-k)$
$x_{ce}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(N-n)]$	$X_R(k)$
$x_{co}(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(N-n)]$	$jX_I(k)$

Tabla 7.1. Propiedades de simetría de la DFT.

$$X_1(k) = \textstyle\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)e^{-j2\pi nk/N}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{7.2.32}$$

$$X_2(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n)e^{-j2\pi nk/N}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{7.2.33}$$

Si multiplicamos las dos DFT, el resultado es otra DFT, por ejemplo, $X_3(k)$ de una secuencia $x_3(n)$ de longitud N. Determinemos la relación entre $x_3(n)$ y las secuencias $x_1(n)$ y $x_2(n)$.

Tenemos

$$X_3(k) = X_1(k)X_2(k), \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{7.2.34}$$

La IDFT de $\{X_3(k)\}$ es

$$\begin{aligned} x_3(m) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_3(k)e^{j2\pi km/N} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_1(k)X_2(k)e^{j2\pi km/N} \end{aligned} \tag{7.2.35}$$

Suponga que sustituimos $X_1(k)$ y $X_2(k)$ en (7.2.35) utilizando las DFT dadas por (7.2.32) y (7.2.33). Así, obtenemos

$$\begin{aligned} x_3(m) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)e^{-j2\pi kn/N}\right]\left[\sum_{l=0}^{N-1} x_2(l)e^{-j2\pi kl/N}\right]e^{j2\pi km/N} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)\sum_{l=0}^{N-1} x_2(l)\left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi k(m-n-l)/N}\right] \end{aligned} \tag{7.2.36}$$

El sumatorio interno entre corchetes de (7.2.36) tiene la forma

$$\sum_{k=0}^{N-1} a^k = \begin{cases} N, & a = 1 \\ \dfrac{1-a^N}{1-a}, & a \neq 1 \end{cases} \tag{7.2.37}$$

donde a se define como

$$a = e^{j2\pi(m-n-l)/N}$$

Observe que $a = 1$ cuando $m - n - l$ es un múltiplo de N. Por otro lado, $a^N = 1$ para cualquier valor de $a \neq 0$. Por tanto, la Ecuación (7.2.37) se reduce a

$$\sum_{k=0}^{N-1} a^k = \begin{cases} N, & l = m - n + pN = ((m-n))_N, \quad p \text{ entero} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{7.2.38}$$

Si sustituimos el resultado de (7.2.38) en (7.2.36), obtenemos la expresión deseada para $x_3(m)$ en la forma

$$x_3(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2((m-n))_N, \qquad m = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{7.2.39}$$

La expresión de (7.2.39) tiene la forma de una convolución. Sin embargo, no es la convolución lineal ordinaria que hemos presentado en el Capítulo 2, que relaciona la secuencia de salida $y(n)$ de un sistema lineal con la secuencia de entrada $x(n)$ y la respuesta al impulso $h(n)$. La convolución indicada por la expresión (7.2.39) implica el índice $((m-n))_N$ y se denomina *convolución circular.* Por tanto, podemos concluir que la multiplicación de dos DFT de dos secuencias es equivalente a la convolución circular de las dos secuencias en el dominio del tiempo.

El siguiente ejemplo ilustra las operaciones implicadas en la convolución circular.

EJEMPLO 7.2.1

Calcule la convolución circular de las dos secuencias siguientes:

$$\begin{aligned} x_1(n) &= \{\underset{\uparrow}{2},1,2,1\} \\ x_2(n) &= \{\underset{\uparrow}{1},2,3,4\} \end{aligned}$$

Solución. Cada secuencia consta de cuatro puntos distintos de cero. Con el fin de ilustrar las operaciones implicadas en la convolución circular, es aconsejable representar gráficamente cada secuencia como puntos sobre una circunferencia. Por ello, las secuencias $x_1(n)$ y $x_2(n)$ se han dibujado en la Figura 7.2.2(a). Observe que las secuencias se han representado sobre la circunferencia en sentido antihorario, lo que establece la dirección de referencia para girar una secuencia respecto de la otra.

Ahora, $x_3(m)$ se obtiene calculando la convolución circular de $x_1(n)$ y $x_2(n)$ como se especifica en la Ecuación (7.2.39). Comenzando por $m = 0$, tenemos

$$x_3(0) = \sum_{n=0}^{3} x_1(n)x_2((-n))N$$

La secuencia $x_2((-n))_4$ es simplemente la secuencia $x_2(n)$ reflejada y dibujada sobre una circunferencia, como se muestra en la Figura 7.2.2(b). En otras palabras, la secuencia reflejada es simplemente $x_2(n)$ representada en sentido horario.

La secuencia producto se obtiene multiplicando $x_1(n)$ por $x_2((-n))_4$, punto por punto. Esta secuencia se muestra en la Figura 7.2.2(b). Por último, sumamos los valores de la secuencia producto para obtener

$$x_3(0) = 14$$

Para $m = 1$, tenemos

$$x_3(1) = \sum_{n=0}^{3} x_1(n)x_2((1-n))_4$$

Es fácil verificar que $x_2((1-n))_4$ es simplemente la secuencia $x_2((-n))_4$ girada en sentido antihorario una unidad de tiempo sobre la circunferencia unidad, como se muestra en la Figura 7.2.2(c). Esta secuencia girada se multiplica por $x_1(n)$ proporcionando la secuencia producto, que también se muestra en la Figura 7.2.2(c). Por último, sumamos los valores de la secuencia producto para obtener $x_3(1)$. Así,

$$x_3(1) = 16$$

Para $m = 2$, tenemos

$$x_3(2) = \sum_{n=0}^{3} x_1(n)x_2((2-n))_4$$

Ahora $x_2((2-n))_4$ es la secuencia reflejada de la Figura 7.2.2(b) girada dos unidades de tiempo en sentido antihorario. La secuencia resultante se ilustra en la Figura 7.2.2(d) junto con la secuencia producto $x_1(n)x_2((2-n))_4$. Sumando los cuatro términos de la secuencia producto, obtenemos

$$x_3(2) = 14$$

Para $m = 3$, tenemos

$$x_3(3) = \sum_{n=0}^{3} x_1(n)x_2((3-n))_4$$

La secuencia reflejada $x_2((-n))_4$ ahora se gira tres unidades de tiempo para proporcionar $x_2((3-n))_4$ y la secuencia resultante se mutliplica por $x_1(n)$ para dar la secuencia producto mostrada en la Figura 7.2.2(e). La suma de los valores de la secuencia producto es

$$x_3(3) = 16$$

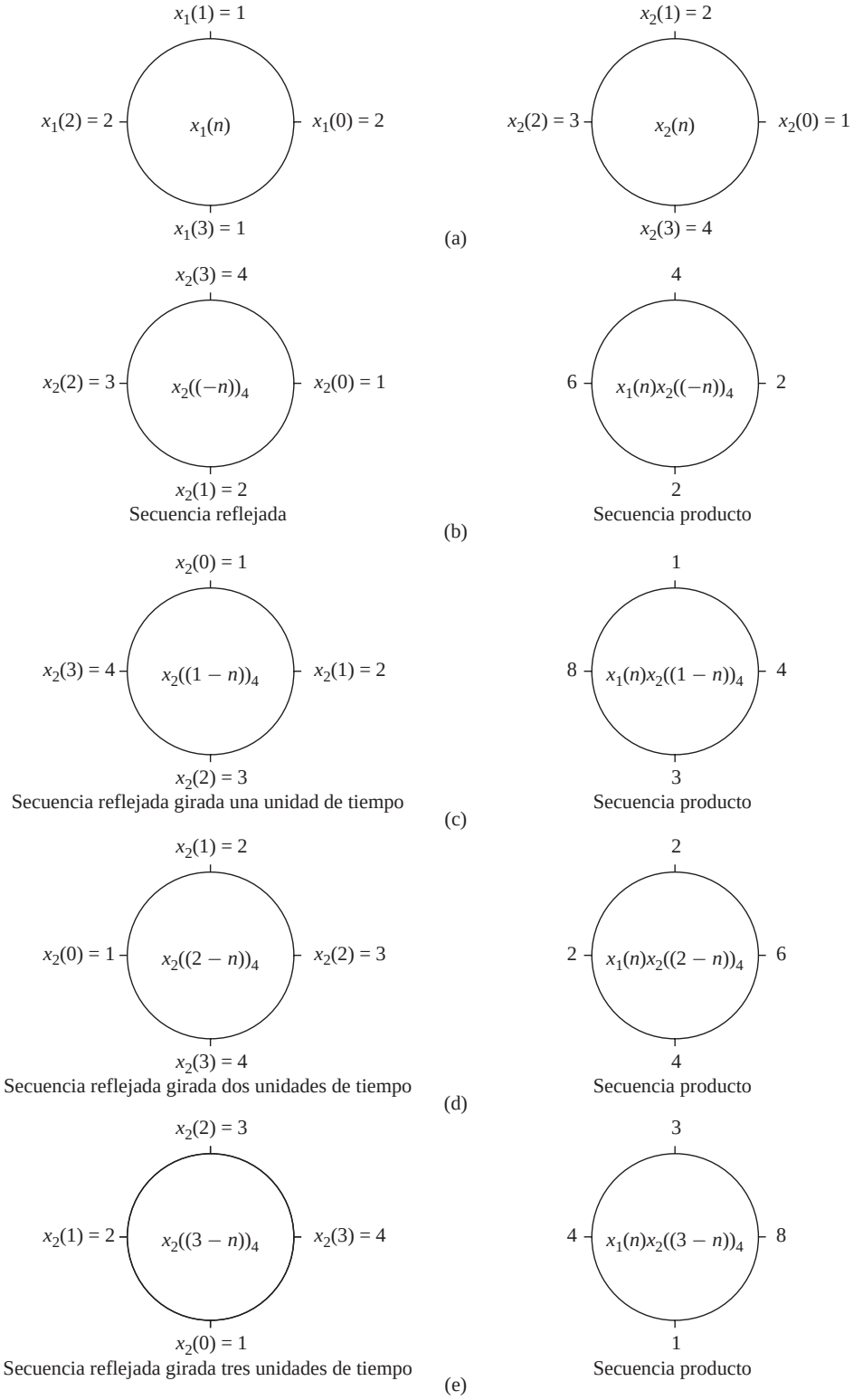


Figura 7.2.2. Convolución circular de dos secuencias.

Observe que si se continúan realizando estos cálculos más allá de $m = 3$, simplemente se repite la secuencia de los cuatro valores que hemos obtenido. Por tanto, la convolución circular de las dos secuencias $x_1(n)$ y $x_2(n)$ da como resultado la secuencia

$$x_3(n) = \{\underset{\uparrow}{14}, 16, 14, 16\}$$

A partir de este ejemplo, podemos decir que la convolución circular implica básicamente los mismos cuatro pasos que la *convolución lineal* ordinaria presentada en el Capítulo 2: *reflejar* (inversión temporal) una secuencia, *desplazar* la secuencia reflejada, *multiplicar* las dos secuencias para obtener una secuencia producto y, por último, *sumar* los valores de la secuencia producto. La diferencia principal entre estos tipos de convolución es que, en la convolución circular, las operaciones de reflexión y desplazamiento (rotación) se realizan de forma circular calculando el índice de una de las secuencias de módulo N. En la convolución lineal, no existe la operación módulo N.

El lector puede demostrar fácilmente a partir del desarrollo anterior que cualquiera de las dos secuencias se puede reflejar y girar sin que cambie el resultado de su convolución circular. Luego

$$x_3(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n) x_1((m-n))_N, \qquad m = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{7.2.40}$$

El siguiente ejemplo ilustra el cálculo de $x_3(n)$ por medio de la DFT y la IDFT.

EJEMPLO 7.2.2

Utilizando la DFT y la IDFT, determine la secuencia $x_3(n)$ correspondiente a la convolución circular de las secuencias $x_1(n)$ y $x_2(n)$ dadas en el Ejemplo 7.2.1.

Solución. En primer lugar, calculamos las DFT de $x_1(n)$ y $x_2(n)$. La DFT de cuatro puntos de $x_1(n)$ es

$$\begin{aligned} X_1(k) &= \sum_{n=0}^{3} x_1(n) e^{-j2\pi nk/4}, \qquad k = 0, 1, 2, 3 \\ &= 2 + e^{-j\pi k/2} + 2e^{-j\pi k} + e^{-j3\pi k/2} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$X_1(0) = 6, \qquad X_1(1) = 0, \qquad X_1(2) = 2, \qquad X_1(3) = 0$$

La DFT de $x_2(n)$ es

$$\begin{aligned} X_2(k) &= \sum_{n=0}^{3} x_2(n) e^{-j2\pi nk/4}, \qquad k = 0, 1, 2, 3 \\ &= 1 + 2e^{-j\pi k/2} + 3e^{-j\pi k} + 4e^{-j3\pi k/2} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$X_2(0) = 10, \qquad X_2(1) = -2 + j2, \qquad X_2(2) = -2, \qquad X_2(3) = -2 - j2$$

Si multiplicamos las dos DFT, obtenemos el producto

$$X_3(k) = X_1(k) X_2(k)$$

o, lo que es equivalente,

$$X_3(0) = 60, \qquad X_3(1) = 0, \qquad X_3(2) = -4, \qquad X_3(3) = 0$$

Ahora, la IDFT de $X_3(k)$ es

$$x_3(n) = \sum_{k=0}^{3} X_3(k) e^{j2\pi nk/4}, \qquad n = 0, 1, 2, 3$$

$$= \frac{1}{4}(60 - 4e^{j\pi n})$$

Por tanto,

$$x_3(0) = 14, \qquad x_3(1) = 16, \qquad x_3(2) = 14, \qquad x_3(3) = 16$$

que es el resultado obtenido en el Ejemplo 7.2.1 utilizando la convolución circular.

Terminamos esta sección enunciando formalmente esta importante propiedad de la DFT.

Convolución circular. Si

$$x_1(n) \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X_1(k)$$

y

$$x_2(n) \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X_2(k)$$

entonces

$$x_1(n) \circledN x_2(n) \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X_1(k) X_2(k) \tag{7.2.41}$$

donde $x_1(n) \circledN x_2(n)$ designa la convolución circular de las secuencias $x_1(n)$ y $x_2(n)$.

7.2.3 Propiedades adicionales de la DFT

Inversión temporal de una secuencia. Si

$$x(n) \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X(k)$$

entonces

$$x((-n))_N = x(N-n) \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X((-k))_N = X(N-k) \tag{7.2.42}$$

ya que invertir la secuencia de N puntos en el tiempo es equivalente a invertir los valores de la DFT. La inversión temporal de una secuencia $x(n)$ se ilustra en la Figura 7.2.3.

Demostración. A partir de la definición de la DFT dada por (7.2.1), tenemos

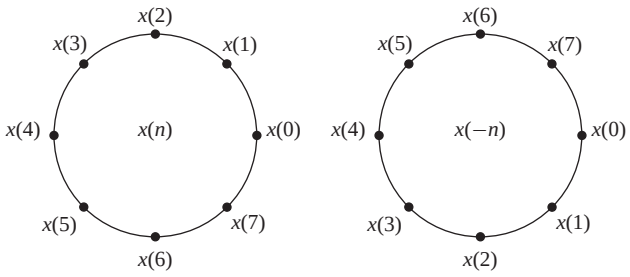


Figura 7.2.3. Inversión temporal de una secuencia.

$$\text{DFT}\{x(N-n)\} = \sum_{n=0}^{N-1} x(N-n)e^{-j2\pi kn/N}$$

Si cambiamos el índice de n a $m = N-n$, entonces

$$\begin{aligned}\text{DFT}\{x(N-n)\} &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m)e^{-j2\pi k(N-m)/N} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m)e^{j2\pi km/N} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m)e^{-j2\pi m(N-k)/N} = X(N-k)\end{aligned}$$

Observe que $X(N-k) = X((-k))_N$, $0 \le k \le N-1$.

Desplazamiento temporal circular de una secuencia. Si

$$x(n) \xleftrightarrow[N]{\text{DFT}} X(k)$$

entonces

$$x((n-l))_N \xleftrightarrow[N]{\text{DFT}} X(k)e^{-j2\pi kl/N} \tag{7.2.43}$$

Demostración. A partir de la definición de la DFT tenemos

$$\begin{aligned}\text{DFT}\{x((n-l))_N\} &= \sum_{n=0}^{N-1} x((n-l))_N e^{-j2\pi kn/N} \\ &= \sum_{n=0}^{l-1} x((n-l))_N e^{-j2\pi kn/N} \\ &\quad + \sum_{n=l}^{N-1} x(n-l)e^{-j\pi kn/N}\end{aligned}$$

Pero $x((n-l))_N = x(N-l+n)$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{l-1} x((n-l))_N e^{-j2\pi kn/N} &= \sum_{n=0}^{l-1} x(N-l+n)e^{-j2\pi kn/N} \\ &= \sum_{m=N-l}^{N-1} x(m)e^{-j2\pi k(m+l)/N}\end{aligned}$$

Además,

$$\sum_{n=l}^{N-1} x(n-l)e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{m=0}^{N-1-l} x(m)e^{-j2\pi k(m+l)/N}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\text{DFT}\{x((n-l))\} &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m)e^{-j2\pi k(m+l)/N} \\ &= X(k)e^{-j2\pi kl/N}\end{aligned}$$

Desplazamiento en frecuencia circular. Si

$$x(n) \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X(k)$$

entonces

$$x(n)e^{j2\pi ln/N} \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X((k-l))_N \tag{7.2.44}$$

Por tanto, la multiplicación de la secuencia $x(n)$ por la secuencia exponencial compleja $e^{j2\pi kn/N}$ es equivalente al desplazamiento circular de la DFT l unidades en frecuencia. Ésta es la propiedad dual de la propiedad de desplazamiento temporal circular y su demostración es similar a la misma.

Propiedades conjugadas complejas. Si

$$x(n) \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X(k)$$

entonces

$$x^*(n) \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X^*((-k))_N = X^*(N-k) \tag{7.2.45}$$

La demostración de esta propiedad se deja como ejercicio para el lector. La IDFT de $X^*(k)$ es

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)e^{j2\pi kn/N} = \left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi k(N-n)/N}\right]$$

Por tanto,

$$x^*((-n))_N = x^*(N-n) \overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} NX^*(k) \tag{7.2.46}$$

Correlación circular. En general, para secuencias complejas $x(n)$ e $y(n)$, si

$$x(n) \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X(k)$$

y

$$y(n) \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} Y(k)$$

entonces

$$\tilde{r}_{xy}(l) \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} \tilde{R}_{xy}(k) = X(k)Y^*(k) \tag{7.2.47}$$

donde $\tilde{r}_{xy}(l)$ es la correlación cruzada circular (no normalizada), definida como

$$\tilde{r}xy(l) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*((n-l))N$$

Demostración. Podemos escribir $\tilde{r}_{xy}(l)$ como la convolución circular de $x(n)$ e $y^*(-n)$, es decir,

$$\tilde{r}_{xy}(l) = x(l) \circledN y^*(-l)$$

Entonces, con la ayuda de las propiedades dadas por (7.2.41) y (7.2.46), la DFT de N puntos de $\tilde{r}_{xy}(l)$ es

$$\tilde{R}_{xy}(k) = X(k)Y^*(k)$$

En el caso especial en que $y(n) = x(n)$, tenemos que la expresión correspondiente para la autocorrelación circular es $x(n)$,

$$\tilde{r}_{xx}(l) \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} \tilde{R}_{xx}(k) = |X(k)|^2 \tag{7.2.48}$$

Multiplicación de dos secuencias. Si

$$x_1(n) \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X_1(k)$$

y

$$x_2(n) \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X_2(k)$$

entonces

$$x_1(n)x_2(n) \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} \frac{1}{N} X_1(k) \circledN X_2(k) \tag{7.2.49}$$

Esta propiedad es la dual de (7.2.41). Su demostración se obtiene simplemente intercambiando los papeles del tiempo y la frecuencia en la expresión de la convolución circular de dos secuencias.

Teorema de Parseval. En general, para secuencias complejas $x(n)$ e $y(n)$, si

$$x(n) \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X(k)$$

y

$$y(n) \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} Y(k)$$

entonces

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k) \tag{7.2.50}$$

Demostración. La propiedad se obtiene de forma inmediata a partir de la propiedad de correlación circular dada en (7.2.47). Tenemos

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \tilde{r}_{xy}(0)$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{xy}(l) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{R}_{xy}(k) e^{j2\pi kl/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k) e^{j2\pi kl/N} \end{aligned}$$

Por tanto, (7.2.50) se obtiene evaluando la IDFT en $l = 0$.

La expresión dada en (7.2.50) es la forma general del teorema de Parseval. En el caso especial en que $y(n) = x(n)$, (7.2.50) se reduce a

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \tag{7.2.51}$$

que expresa la energía de la secuencia de duración finita $x(n)$ en función de las componentes de frecuencia $\{X(k)\}$.

Las propiedades de la DFT descritas hasta aquí se resumen en la Tabla 7.2.

Propiedad	Dominio del tiempo	Dominio de la frecuencia
Notación	$x(n), y(n)$	$X(k), Y(k)$
Periodicidad	$x(n) = x(n+N)$	$X(k) = X(k+N)$
Linealidad	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(k) + a_2X_2(k)$
Inversión temporal	$x(N-n)$	$X(N-k)$
Desplazamiento temporal circular	$x((n-l))_N$	$X(k)e^{-j2\pi kl/N}$
Desplazamiento en frecuencia circular	$x(n)e^{j2\pi ln/N}$	$X((k-l))_N$
Conjugación compleja	$x^*(n)$	$X^*(N-k)$
Convolución circular	$x_1(n) \circledN x_2(n)$	$X_1(k)X_2(k)$
Correlación circular	$x(n) \circledN y^*(-n)$	$X(k)Y^*(k)$
Multiplicación de dos secuencias	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{N}X_1(k) \circledN X_2(k)$
Teorema de Parseval	$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n)$	$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k)$

Tabla 7.2. Propiedades de la DFT.

7.3 Métodos de filtrado lineal basados en la DFT

Como la DFT proporciona una representación discreta en frecuencia de una secuencia de duración finita en el dominio de la frecuencia, es interesante explorar su uso como una herramienta de cálculo para el análisis de sistema lineales y, especialmente, del filtrado lineal. Ya hemos establecido que un sistema con una respuesta en frecuencia $H(\omega)$, cuando se excita con una señal de entrada que tiene un espectro $X(\omega)$, presenta un espectro de salida $Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$. La secuencia de salida $y(n)$ se determina a partir de su espectro por medio de la transformada inversa de Fourier. En lo que se refiere a los cálculos, el problema con este método en el dominio de la frecuencia es que $X(\omega)$, $H(\omega)$ e $Y(\omega)$ son funciones de la variable continua ω. En consecuencia, los cálculos no se pueden hacer en una computadora digital, ya que la computadora sólo puede almacenar y realizar cálculos con cantidades definidas en frecuencias discretas.

Por otra parte, la DFT se presta al cálculo con una computadora digital. A continuación describimos cómo puede utilizarse la DFT para realizar el filtrado lineal en el dominio de la frecuencia. En particular, presentamos un procedimiento de cálculo que sirve como alternativa a la convolución en el dominio del tiempo. De hecho, el método en el dominio de la frecuencia basado en la DFT es más eficiente en lo que se refiere a los cálculos que la convolución en el dominio del tiempo, gracias a la existencia de algoritmos eficaces para calcular la DFT. Estos algoritmos, que se describen en el Capítulo 8, se conocen colectivamente como algoritmos de la transformada rápida de Fourier (FFT, *fast Fourier transform*).

7.3.1 Uso de la DFT en el filtrado lineal

En la sección anterior hemos demostrado que el producto de dos DFT es equivalente a la convolución circular de las correspondientes secuencias en el dominio del tiempo. Lamentablemente, no podemos emplear la convolución circular si nuestro objetivo es el de determinar la salida de un filtro lineal para una señal de entrada dada. En este caso, necesitamos una metodología en el dominio de la frecuencia equivalente a la convolución lineal.

Suponga que tenemos una secuencia de duración finita $x(n)$ de longitud L que excita un filtro FIR de longitud M. Sin perder generalidad, sean

$$x(n) = 0, \quad n < 0 \text{ y } n \geq L$$
$$h(n) = 0, \quad n < 0 \text{ y } n \geq M$$

donde $h(n)$ es la respuesta al impulso del filtro FIR.

La secuencia de salida $y(n)$ del filtro FIR se puede expresar en el dominio del tiempo como la convolución de $x(n)$ y $h(n)$, es decir

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) \tag{7.3.1}$$

Puesto que $h(n)$ y $x(n)$ son secuencias de duración finita, su convolución también es de duración finita. De hecho, la duración de $y(n)$ es $L+M-1$.

El equivalente en el dominio de la frecuencia de (7.3.1) es

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \tag{7.3.2}$$

Si la secuencia $y(n)$ se va a representar de forma unívoca en el dominio de la frecuencia mediante muestras de su espectro $Y(\omega)$ en un conjunto de frecuencias discretas, el número de muestras distintas tiene que ser igual o mayor que $L+M-1$. Por tanto, se necesita una DFT de tamaño $N \geq L+M-1$ para representar $\{y(n)\}$ en el dominio de la frecuencia.

Ahora, si

$$\begin{aligned} Y(k) &\equiv Y(\omega)|_{\omega=2\pi k/N}, && k = 0,1,\ldots,N-1 \\ &= X(\omega)H(\omega)|_{\omega=2\pi k/N}, && k = 0,1,\ldots,N-1 \end{aligned}$$

entonces

$$Y(k) = X(k)H(k), \qquad k = 0,1,\ldots,N-1 \tag{7.3.3}$$

donde $\{X(k)\}$ y $\{H(k)\}$ son las DFT de N puntos de las correspondientes secuencias $x(n)$ y $h(n)$. Puesto que las secuencias $x(n)$ y $h(n)$ tienen una menor duración que N, simplemente estas secuencias se rellenan con ceros para incrementar su longitud a N. Este incremento en tamaño de las secuencias no altera sus espectros $X(\omega)$ y $H(\omega)$, que son espectros continuos, ya que las secuencias son aperiódicas. Sin embargo, muestreando sus espectros en N puntos igualmente espaciados en la frecuencia (calculando las DFT de N puntos), hemos incrementado el número de muestras que representan estas secuencias en el dominio de la frecuencia más allá del número mínimo (L o M, respectivamente).

Dado que la DFT de ($N = L+M-1$) puntos de la secuencia de salida $y(n)$ basta para representar $y(n)$ en el dominio de la frecuencia, se deduce que la multiplicación de las DFT de N puntos de $X(k)$ y $H(k)$, según (7.3.3), seguida del cálculo de la IDFT de N puntos, debe proporcionar la secuencia $\{y(n)\}$. A su vez, esto implica que la convolución circular de N puntos de $x(n)$ y $h(n)$ tiene que ser equivalente a la convolución lineal de $x(n)$ y $h(n)$. En otras palabras, aumentando la longitud de las secuencias $x(n)$ y $h(n)$ a N puntos (añadiendo ceros) y haciendo la convolución circular de las secuencias resultantes, obtenemos el mismo resultado que habríamos obtenido con la convolución lineal. Por tanto, con el relleno con ceros, la DFT puede utilizarse para realizar el filtrado lineal.

El siguiente ejemplo ilustra la metodología para la aplicación de la DFT en el filtrado lineal.

EJEMPLO 7.3.1

Utilizando la DFT y la IDFT, determine la respuesta del filtro FIR con la respuesta al impulso

$$h(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3\}$$

a la secuencia de entrada

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 2, 1\}$$

Solución. La secuencia de entrada tiene una longitud $L = 4$ y la respuesta al impulso tiene la longitud $M = 3$. La convolución lineal de estas dos secuencias produce una secuencia de longitud $N = 6$. En consecuencia, el tamaño de las DFT tiene que ser al menos seis.

Por simplicidad, vamos a calcular las DFT de ocho puntos. También tenemos que mencionar que el cálculo eficiente de la DFT a través del algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT) normalmente se realiza para una longitud N que es una potencia de 2. Por tanto, la DFT de ocho puntos de $x(n)$ es

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{7} x(n) e^{-j2\pi kn/8} \\ &= 1 + 2e^{-j\pi k/4} + 2e^{-j\pi k/2} + e^{-j3\pi k/4}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 7 \end{aligned}$$

Este cálculo da

$$\begin{aligned} X(0) = 6, \quad & X(1) = \frac{2+\sqrt{2}}{2} - j\left(\frac{4+3\sqrt{2}}{2}\right) \\ X(2) = -1 - j, \quad & X(3) = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + j\left(\frac{4-3\sqrt{2}}{2}\right) \\ X(4) = 0, \quad & X(5) = \frac{2-\sqrt{2}}{2} - j\left(\frac{4-3\sqrt{2}}{2}\right) \\ X(6) = -1 + j, \quad & X(7) = \frac{2+\sqrt{2}}{2} + j\left(\frac{4+3\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

La DFT de ocho puntos de $h(n)$ es

$$\begin{aligned} H(k) &= \sum_{n=0}^{7} h(n) e^{-j2\pi kn/8} \\ &= 1 + 2e^{-j\pi k/4} + 3e^{-j\pi k/2} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} &H(0) = 6, && H(1) = 1 + \sqrt{2} - j\left(3 + \sqrt{2}\right), && H(2) = -2 - j2 \\ &H(3) = 1 - \sqrt{2} + j\left(3 - \sqrt{2}\right), && && H(4) = 2 \\ &H(5) = 1 - \sqrt{2} - j\left(3 - \sqrt{2}\right), && && H(6) = -2 + j2 \\ &H(7) = 1 + \sqrt{2} + j\left(3 + \sqrt{2}\right) && && \end{aligned}$$

El producto de estas dos DFT proporciona $Y(k)$, que es

$$\begin{aligned} &Y(0) = 36, \quad Y(1) = -14.07 - j17.48, \quad Y(2) = j4, \quad Y(3) = 0.07 + j0.515 \\ &Y(4) = 0, \quad Y(5) = 0.07 - j0.515, \quad Y(6) = -j4, \quad Y(7) = -14.07 + j17.48 \end{aligned}$$

Por último, la IDFT de ocho puntos es

$$y(n) = \sum_{k=0}^{7} Y(k) e^{j2\pi kn/8}, \qquad n = 0, 1, \ldots, 7$$

Este cálculo proporciona el resultado

$$y(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 4, 9, 11, 8, 3, 0, 0\}$$

Observe que los seis primeros valores de $y(n)$ constituyen el conjunto de valores de salida deseados. Los dos últimos valores son cero porque hemos utilizado una DFT y una IDFT de ocho puntos, cuando, de hecho, el número mínimo de puntos requerido era seis.

Aunque la multiplicación de dos DFT corresponde a una convolución circular en el dominio del tiempo, hemos observado que rellenar las secuencias $x(n)$ y $h(n)$ con un número suficiente de ceros fuerza la convolución circular para proporcionar la misma secuencia de salida que la convolución lineal. En el caso del problema del filtro FIR del Ejemplo 7.3.1, es fácil demostrar que la convolución circular de seis puntos de las secuencias

$$h(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 0, 0, 0\} \tag{7.3.4}$$

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 2, 1, 0, 0\} \tag{7.3.5}$$

da como resultado la secuencia de salida

$$y(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 4, 9, 11, 8, 3\} \tag{7.3.6}$$

que es la misma secuencia que la obtenida con la convolución lineal.

Es importante comprender que se produce *aliasing* en el dominio del tiempo cuando el tamaño de las DFT es menor que $L+M-1$. El siguiente ejemplo se centra en el problema del *aliasing*.

EJEMPLO 7.3.2

Determine la secuencia $y(n)$ que resulta del uso de las DFT de cuatro puntos del Ejemplo 7.3.1.

Solución. La DFT de cuatro puntos de $h(n)$ es

$$\begin{aligned} H(k) &= \sum_{n=0}^{3} h(n) e^{-j2\pi kn/4} \\ H(k) &= 1 + 2e^{-j\pi k/2} + 3e^{-jk\pi}, \qquad k = 0, 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$H(0) = 6, \qquad H(1) = -2 - j2, \qquad H(2) = 2, \qquad H(3) = -2 + j2$$

La DFT de cuatro de puntos de $x(n)$ es

$$X(k) = 1 + 2e^{-j\pi k/2} + 2e^{-j\pi k} + 1e^{-j3\pi k/2}, \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

Por tanto,

$$X(0) = 6, \qquad X(1) = -1 - j, \qquad X(2) = 0, \qquad X(3) = -1 + j$$

El producto de estas dos DFT de cuatro puntos es

$$\hat{Y}(0) = 36, \qquad \hat{Y}(1) = j4, \qquad \hat{Y}(2) = 0, \qquad \hat{Y}(3) = -j4$$

La IDFT de cuatro puntos es

$$\begin{aligned} \hat{y}(n) &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \hat{Y}(k) e^{j2\pi kn/4}, \qquad n = 0, 1, 2, 3 \\ &= \frac{1}{4}(36 + j4e^{j\pi n/2} - j4e^{j3\pi n/2}) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\hat{y}(n) = \{\underset{\uparrow}{9}, 7, 9, 11\}$$

El lector puede verificar que la convolución circular de cuatro puntos de $h(n)$ y $x(n)$ proprociona la misma secuencia $\hat{y}(n)$.

Si comparamos el resultado $\hat{y}(n)$, obtenido a partir de las DFT de cuatro puntos con la secuencia $y(n)$ obtenida utilizando transformadas DFT de ocho puntos (o seis puntos), los efectos del *aliasing* en el dominio del tiempo vistos en la Sección 7.2.2 son claramente patentes. En particular, $y(4)$ se solapa con $y(0)$ dando lugar a

$$\hat{y}(0) = y(0) + y(4) = 9$$

Del mismo modo, $y(5)$ se solapa con $y(1)$ dando lugar a

$$\hat{y}(1) = y(1) + y(5) = 7$$

Los restantes solapamientos no tienen ningún efecto, ya que $y(n) = 0$ para $n \geq 6$. En consecuencia, tenemos

$$\hat{y}(2) = y(2) = 9$$

$$\hat{y}(3) = y(3) = 11$$

Por tanto, sólo los dos primeros puntos de $\hat{y}(n)$ se ven distorsionados por el efecto del *aliasing* [es decir, $\hat{y}(0) \neq y(0)$ e $\hat{y}(1) \neq y(1)$]. Esta observación tiene ramificaciones importantes en el tema que vamos a abordar en la siguiente sección: el filtrado de secuencias largas.

7.3.2 Filtrado de secuencias de datos largas

En las aplicaciones prácticas que implican filtrado lineal de señales, la secuencia de entrada $x(n)$ a menudo es una secuencia muy larga. Esto ocurre especialmente en algunas aplicaciones de tratamiento de señales en tiempo real para monitorización y análisis.

Dado que el filtrado lineal se realiza a través de la DFT implica operaciones sobre un bloque de datos, el cual tiene que estar limitado en tamaño a causa de la memoria limitada de una computadora digital, una señal de entrada de larga duración debe segmentarse en bloques de tamaño fijo antes de poder ser procesada. Dado que el filtrado es lineal, pueden procesarse los bloques sucesivos uno cada vez a través de la DFT y los bloques de salida se unen para formar la secuencia de salida completa.

A continuación describimos dos métodos para llevar a cabo el filtrado FIR lineal de una secuencia de larga duración, bloque a bloque, utilizando la DFT. La secuencia de entrada se segmenta en bloques y cada bloque se procesa a través de la DFT e IDFT para generar un bloque de datos de salida. Los bloques de salida se unen para formar la secuencia de salida completa, que es idéntica a la secuencia que se obtendría si la secuencia de larga duración se hubiera procesado a través de la convolución en el dominio del tiempo.

Los dos métodos son el *método de solapamiento y almacenamiento* y el *método de solapamiento y adición*. Para ambos métodos suponemos que el filtro FIR tiene una duración M. La secuencia de datos de entrada se segmenta en bloques de L puntos, en los que, suponemos que $L >> M$ sin perder generalidad.

Método de solapamiento y almacenamiento. En este método, el tamaño de los bloques de datos de entrada es $N = L + M - 1$ y las DFT e IDFT tienen longitud N. Cada bloque de datos consta de los últimos $M - 1$ puntos de datos del bloque de datos anterior seguido de L nuevos puntos de datos para formar una secuencia de datos de longitud $N = L + M - 1$. Se calcula una DFT de N puntos para cada bloque de datos. La respuesta al impulso del filtro FIR se aumenta en longitud añadiendo $L - 1$ ceros y se calcula una vez una DFT de N puntos de la

secuencia y se almacena. La multiplicación de las dos DFT de N puntos $\{H(k)\}$ y $\{X_m(k)\}$ para el bloque de datos m es

$$\hat{Y}_m(k) = H(k)X_m(k), \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{7.3.7}$$

Luego la IDFT de N puntos es

$$\hat{Y}_m(n) = \{\hat{y}_m(0)\hat{y}_m(1)\cdots\hat{y}_m(M-1)\hat{y}_m(M)\cdots\hat{y}_m(N-1)\} \tag{7.3.8}$$

Dado que el registro de datos es de longitud N, los primeros $M-1$ puntos de $y_m(n)$ se ven distorsionados por el *aliasing* y deben descartarse. Los últimos L puntos de $y_m(n)$ son exactamente los mismos que el resultado obtenido con la convolución lineal y, en consecuencia,

$$\hat{y}_m(n) = y_m(n), n = M, M+1, \ldots, N-1 \tag{7.3.9}$$

Para evitar perder datos a causa del *aliasing*, los últimos $M-1$ puntos de cada registro de datos se almacenan, y dichos puntos pasan a ser los primeros $M-1$ puntos de datos del siguiente registro, como hemos indicado anteriormente. Para comenzar el procesamiento, los $M-1$ primeros puntos del primer registro se fijan en cero. Así, los bloques de las secuencias de datos son

$$x_1(n) = \{\underbrace{0, 0, \ldots, 0,}_{M-1 \text{ puntos}} x(0), x(1), \ldots, x(L-1)\} \tag{7.3.10}$$

$$x_2(n) = \{\underbrace{x(L-M+1), \ldots, x(L-1)}_{M-1 \text{ puntos de datos de } x_1(n)}, \underbrace{x(L), \ldots, x(2L-1)}_{L \text{ nuevos puntos de datos}}\} \tag{7.3.11}$$

$$x_3(n) = \{\underbrace{x(2L-M+1), \ldots, x(2L-1)}_{M-1 \text{ puntos de datos de } x_2(n)}, \underbrace{x(2L), \ldots, x(3L-1)}_{L \text{ nuevos puntos de datos}}\} \tag{7.3.12}$$

y así sucesivamente. Las secuencias de datos resultantes de la IDFT están dadas por (7.3.8), donde los primeros $M-1$ puntos se descartan a causa del *aliasing* y los restantes L puntos definen el resultado deseado de la convolución lineal. Esta segmentación de los datos de entrada y la agrupación de los bloques de datos de salida para formar la secuencia de salida se ilustran gráficamente en la Figura 7.3.1.

Método de solapamiento y adición. En este método, el tamaño del bloque de datos de entrada es de L puntos y el tamaño de las DFT y las IDFT es $N = L + M - 1$. Para cada bloque de datos añadimos $M-1$ ceros y calculamos la DFT de N puntos. Por tanto, los bloques de datos pueden representarse como

$$x_1(n) = \{x(0), x(1), \ldots, x(L-1), \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{M-1 \text{ ceros}}\} \tag{7.3.13}$$

$$x_2(n) = \{x(L), x(L+1), \ldots, x(2L-1), \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{M-1 \text{ ceros}}\} \tag{7.3.14}$$

$$x_3(n) = \{x(2L), \ldots, x(3L-1), \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{M-1 \text{ ceros}}\} \tag{7.3.15}$$

y así sucesivamente. Las dos DFT de N puntos se multiplican para formar

$$Y_m(k) = H(k)X_m(k), \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{7.3.16}$$

La IDFT proporciona bloques de datos de longitud N libres de *aliasing*, ya que el tamaño de las DFT e IDFT es $N = L + M - 1$ y las secuencias se incrementan hasta N puntos añadiendo ceros a cada bloque.

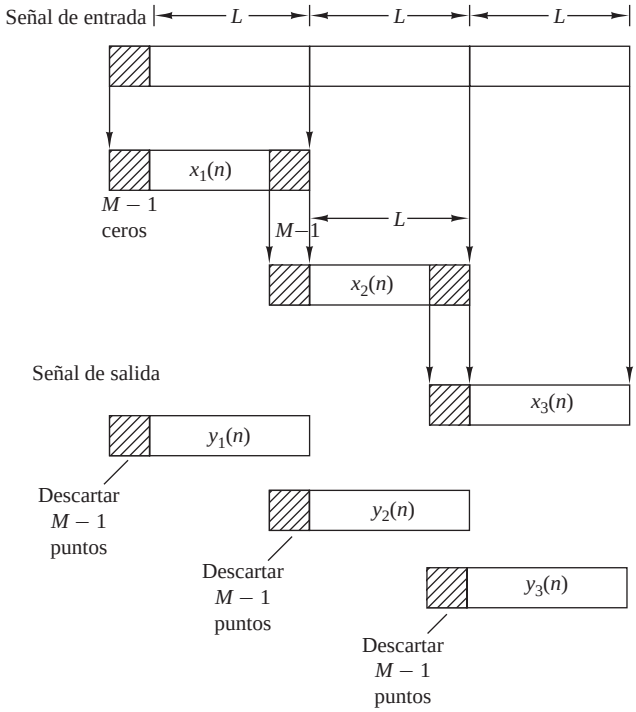


Figura 7.3.1. Filtrado FIR lineal mediante el método de solapamiento y almacenamiento.

Dado que cada bloque de datos se termina con $M-1$ ceros, los últimos $M-1$ puntos de cada bloque de salida deben solaparse y sumarse a los primeros $M-1$ puntos del bloque siguiente. Por esto, este método se conoce como método de solapamiento y adición. Este proceso de solapamiento y adición proporciona la secuencia de salida

$$\begin{aligned} y(n) = \; & \{y_1(0), y_1(1), \ldots, y_1(L-1), y_1(L)+y_2(0), y_1(L+1) \\ & +y_2(1), \ldots, y_1(N-1)+y_2(M-1), y_2(M), \ldots\} \end{aligned} \tag{7.3.17}$$

La segmentación de los datos de entrada en bloques y la agrupación de los bloques de datos de salida para formar la secuencia de salida se representan gráficamente en la Figura 7.3.2.

En este punto puede parecerle al lector que el uso de la DFT en el filtrado FIR lineal no sólo es un método indirecto de calcular la salida de un filtro FIR, sino que también puede resultar ser más caro en lo que respecta a los cálculos, ya que los datos de entrada deben convertirse primero al dominio de la frecuencia a través de la DFT, multiplicarse por la DFT del filtro FIR y, por último, convertirse de nuevo al dominio del tiempo a través de la IDFT. Sin embargo, por el contrario, utilizando el algoritmo de la transformada rápida de Fourier, como veremos en el Capítulo 8, las DFT e IDFT requieren menos cálculos para obtener la secuencia de salida que la realización directa del filtro FIR en el dominio del tiempo. Esta eficiencia en la realización de los cálculos tiene la ventaja fundamental de utilizar la DFT para calcular la salida de un filtro FIR.

7.4 Análisis en frecuencia de señales utilizando la DFT

Para calcular el espectro de una señal continua o discreta en el tiempo, se necesitan los valores de la señal para todos los instantes de tiempo. Sin embargo, en la práctica, sólo nos fijamos en las señales de duración finita. En

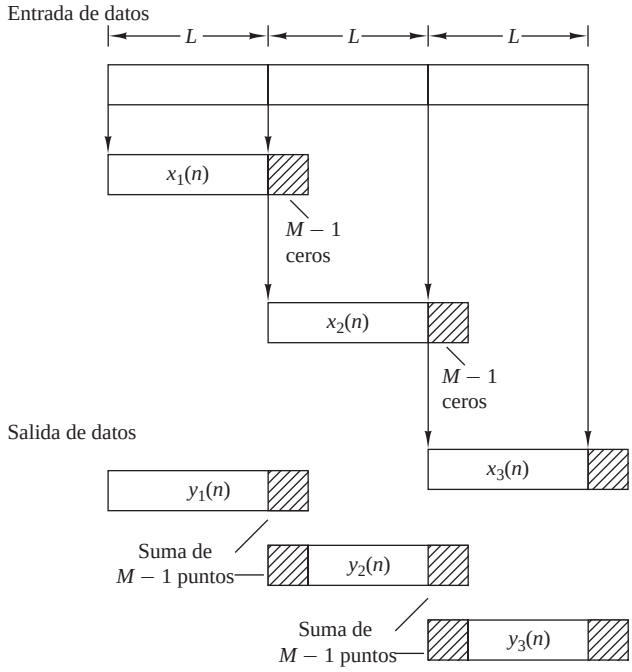


Figura 7.3.2. Filtro FIR lineal por el método de solapamiento y adición.

consecuencia, el espectro de una señal sólo puede aproximarse a partir de un registro de datos finito. En esta sección, vamos a examinar las implicaciones de un registro de datos finito en el análisis en frecuencia utilizando la DFT.

Si la señal que se va a analizar es una señal analógica, en primer lugar la haremos pasar a través de un filtro de suavizado y luego la muestrearemos a una frecuencia $F_s \geq 2B$, donde B es el ancho de banda de la señal filtrada. Por tanto, la frecuencia más alta de la señal muestreada es $F_s/2$. Por último, y con propósitos prácticos, vamos a limitar la duración de la señal al intervalo de tiempo $T_0 = LT$, donde L es el número de muestras y T es el intervalo de muestreo. Como veremos a continuación, el intervalo de observación finito para la señal pone un límite a la resolución en frecuencia; es decir, limita nuestra capacidad de diferenciar dos componentes de frecuencia cuya separación entre ellas sea menor que $1/T_0 = 1/LT$.

Sea $\{x(n)\}$ la secuencia que se va a analizar. Limitar la duración de la secuencia a L muestras en el intervalo $0 \leq n \leq L-1$, es equivalente a multiplicar $\{x(n)\}$ por una ventana rectangular $w(n)$ de longiud L. Es decir,

$$\hat{x}(n) = x(n)w(n) \tag{7.4.1}$$

donde

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{7.4.2}$$

Ahora supongamos que la secuencia $x(n)$ consta de una sola sinusoide, es decir,

$$x(n) = \cos \omega_0 n \tag{7.4.3}$$

Luego la transformada de Fourier de la secuencia de duración finita $x(n)$ puede expresarse como

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{2}[W(\omega - \omega_0) + W(\omega + \omega_0)] \tag{7.4.4}$$

donde $W(\omega)$ es la transformada de Fourier de la secuencia ventana, que es (para la ventana rectangular)

$$W(\omega) = \frac{\operatorname{sen}(\omega L/2)}{\operatorname{sen}(\omega/2)} e^{-j\omega(L-1)/2} \tag{7.4.5}$$

Para calcular $\hat{X}(\omega)$, utilizamos la DFT. Rellenar la secuencia $\hat{x}(n)$ con $N-L$ ceros, podemos calcular la DFT de N puntos de la secuencia truncada (L puntos) $\{\hat{x}(n)\}$. El módulo del espectro $|\hat{X}(k)| = |\hat{X}(\omega_k)|$ para $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, \ldots, N$, se ilustra en la Figura 7.4.1 para $L = 25$ y $N = 2048$. Observe que el espectro a través de la ventana $\hat{X}(\omega)$ no se localiza en una sola frecuencia, sino que se extiende a un amplio rango de frecuencias. Así, la potencia de la secuencia original $\{x(n)\}$ que estaba concentrada en una sola frecuencia se ha extendido a través de la ventana a un rango de frecuencias completo. Decimos que la potencia se ha "fugado" al rango completo de frecuencias. En consecuencia, este fenómeno, que es característico del filtrado mediante ventanas de la señal, se denomina *efecto de fuga*.

La ventana no sólo distorsiona la estimación espectral a causa del efecto de fuga, sino que también reduce la resolución espectral. Para ilustrar este problema, consideremos la siguiente señal formada por dos componentes de frecuencia,

$$x(n) = \cos\omega_1 n + \cos\omega_2 n \tag{7.4.6}$$

Cuando esta secuencia se trunca a L muestras en el rango $0 \le n \le L-1$, el espectro que se obtiene después de aplicar la ventana es

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{2}[W(\omega-\omega_1) + W(\omega-\omega_2) + W(\omega+\omega_1) + W(\omega+\omega_2)] \tag{7.4.7}$$

El espectro $W(\omega)$ de la secuencia de ventana rectangular presenta su primer paso por cero en $\omega = 2\pi/L$. Ahora, si $|\omega_1 - \omega_2| < 2\pi/L$, las dos funciones de ventana $W(\omega-\omega_1)$ y $W(\omega-\omega_2)$ se solapan y, en consecuencia, las dos líneas espectrales de $x(n)$ no se diferencian. Sólo si $(\omega_1 - \omega_2) \ge 2\pi/L$ se verán dos lóbulos separados en el espectro $\hat{X}(\omega)$. Por tanto, nuestra capacidad para obtener líneas espectrales de diferentes frecuencias está limitada por la anchura del lóbulo principal de la ventana. La Figura 7.4.2 ilustra el módulo del espectro $|\hat{X}(\omega)|$, calculado a través de la DFT, para la secuencia

$$x(n) = \cos\omega_0 n + \cos\omega_1 n + \cos\omega_2 n \tag{7.4.8}$$

donde $\omega_0 = 0.2\pi$, $\omega_1 = 0.22\pi$ y $\omega_2 = 0.6\pi$. Las longitudes de ventana seleccionadas son $L = 25$, 50 y 100. Observe que ω_0 y ω_1 no son distinguibles para $L = 25$ y 50, pero sí para $L = 100$.

Para reducir los efectos de fuga, podemos elegir una ventana de datos $w(n)$ que tenga lóbulos secundarios más pequeños en el dominio de la frecuencia comparados con la ventana rectangular. Sin embargo, como se

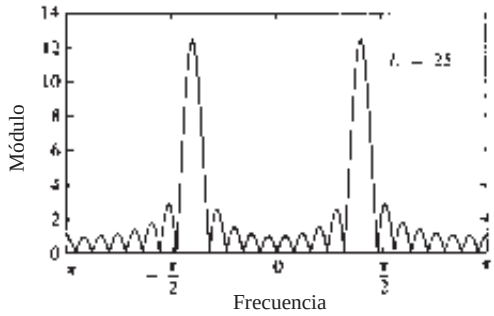


Figura 7.4.1. Módulo del espectro para $L = 25$ y $N = 2048$; puede verse la aparición del efecto de fuga.

describe más detalladamente en el Capítulo 10, una reducción de los lóbulos secundarios en una ventana $W(\omega)$ se obtiene a expensas de un incremento de la anchura del lóbulo principal de $W(\omega)$ y, por tanto, una pérdida de resolución. Para ilustrar esta cuestión, consideremos la ventana de Hanning, que se define como sigue

$$w(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-\cos\frac{2\pi}{L-1}n), & 0 \le n \le L-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{7.4.9}$$

La Figura 7.4.3 muestra la expresión $|\hat{X}(\omega)|$ dada por (7.4.4) para la ventana definida por (7.4.9). Sus lóbulos secundarios son significativamente más pequeños que los de la ventana rectangular, pero su lóbulo principal tiene aproximadamente una anchura que es el doble. La Figura 7.4.4 muestra el espectro de la señal dada en (7.4.8), y después de pasar por la ventana de Hanning, para $L = 50$, 75 y 100. La reducción de los lóbulos secundarios y la disminución de la resolución, con respecto a la ventana rectangular, es evidente.

Para una señal general $\{x(n)\}$, la relación en el dominio de la frecuencia entre la secuencia pasada por la ventana $\hat{x}(n)$ y la original $x(n)$ está dada por la fórmula de convolución

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\theta)W(\omega-\theta)d\theta \tag{7.4.10}$$

La DFT de la señal $\hat{x}(n)$ es la versión muestreada del espectro $\hat{X}(\omega)$. Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned} \hat{X}(k) &\equiv \hat{X}(\omega)|_{\omega=2\pi k/N} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\theta)W\left(\frac{2\pi k}{N}-\theta\right)d\theta, \qquad k = 0,1,\ldots,N-1 \end{aligned} \tag{7.4.11}$$

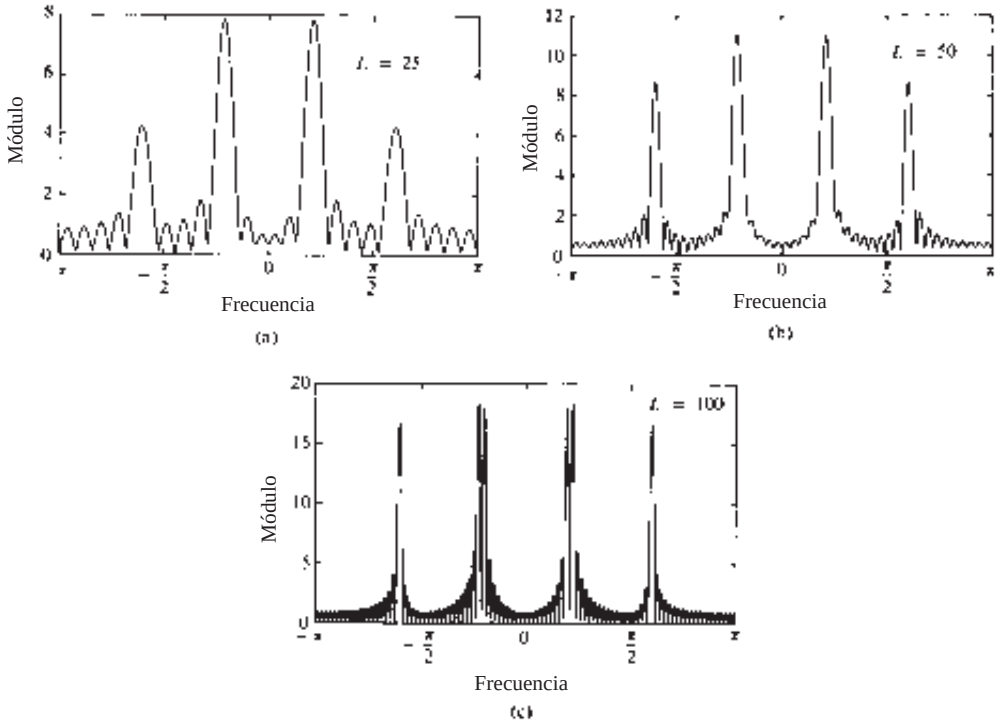


Figura 7.4.2. Módulo del espectro para la señal dada por (7.4.8), cuando se observa a través de la ventana rectangular.

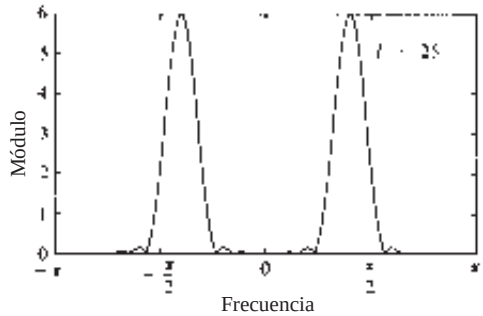


Figura 7.4.3. Módulo del espectro de la ventana de Hanning.

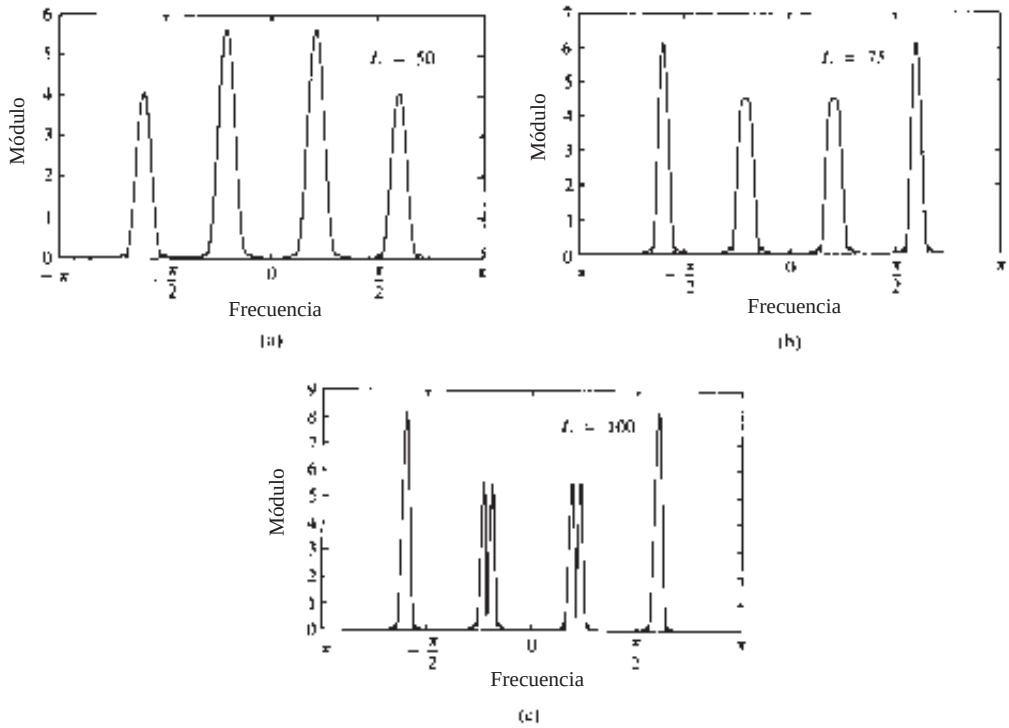


Figura 7.4.4. Módulo del espectro de la señal dada en (7.4.8) visto a través de una ventana de Hanning.

Al igual que en el caso de la señal sinusoidal, si el espectro de la ventana es relativamente estrecho en comparación con el ancho del espectro $X(\omega)$ de la señal, la función de ventana tendrá sólo un pequeño efecto de suavizado sobre el espectro $X(\omega)$. Por el contrario, si la función de ventana tiene una espectro ancho comparado con el de $X(\omega)$, estaríamos en el mismo caso que cuando el número de muestras L es pequeño, el espectro de la ventana enmascara el espectro de la señal y, en consecuencia, la DFT de los datos refleja las características espectrales de la ventana. Por supuesto, esta situación debe evitarse.

EJEMPLO 7.4.1

La señal exponencial

$$x_a(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

se muestrea a la frecuencia $F_s = 20$ muestras por segundo, y se utiliza un bloque de 100 muestras para estimar su espectro. Determine las características espectrales de la señal $x_a(t)$ calculando la DFT de la secuencia de duración finita. Compare el espectro de la señal truncada discreta en el tiempo con el espectro de la señal analógica.

Solución. El espectro de la señal analógica es

$$X_a(F) = \frac{1}{1 + j2\pi F}$$

La señal exponencial analógica muestreada a una frecuencia de 20 muestras por segundo proporciona la secuencia

$$\begin{aligned} x(n) &= e^{-nT} = e^{-n/20}, \qquad n \geq 0 \\ &= (e^{-1/20})^n = (0.95)^n, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

Ahora, sea

$$x(n) = \begin{cases} (0.95)^n, & 0 \leq n \leq 99 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La DFT de N puntos de la secuencia de $L = 100$ puntos es

$$\hat{X}(k) = \sum_{k=0}^{99} \hat{x}(n) e^{-j2\pi k/N}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

Para obtener con suficiente detalle el espectro, elegimos $N = 200$, lo que es equivalente a rellenar la secuencia $x(n)$ con 100 ceros.

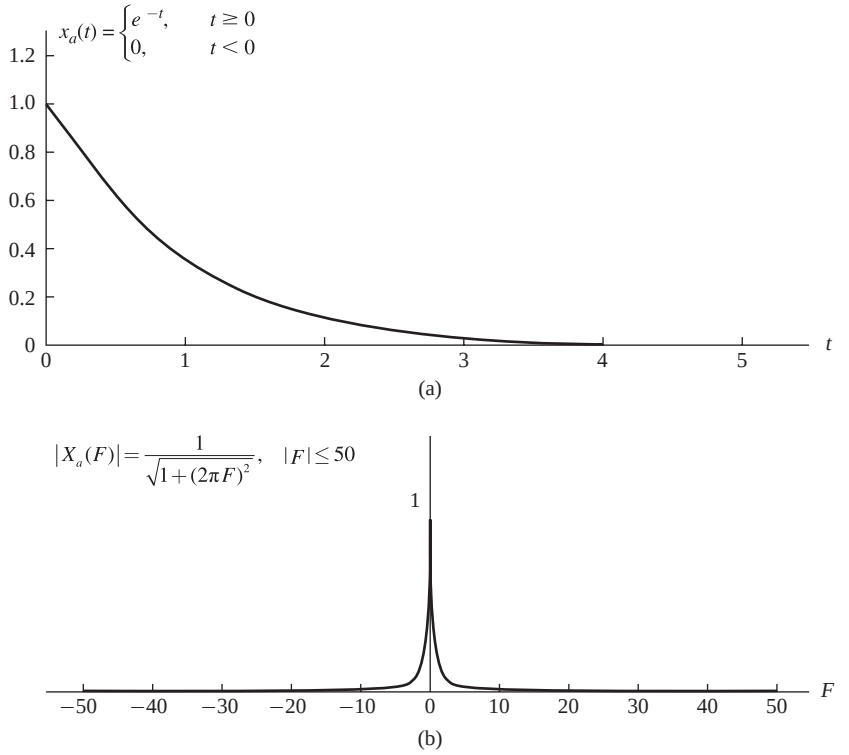


Figura 7.4.5. Efecto de aplicar la ventana (truncado) a la versión muestreada de la señal analógica del Ejemplo 7.4.1.

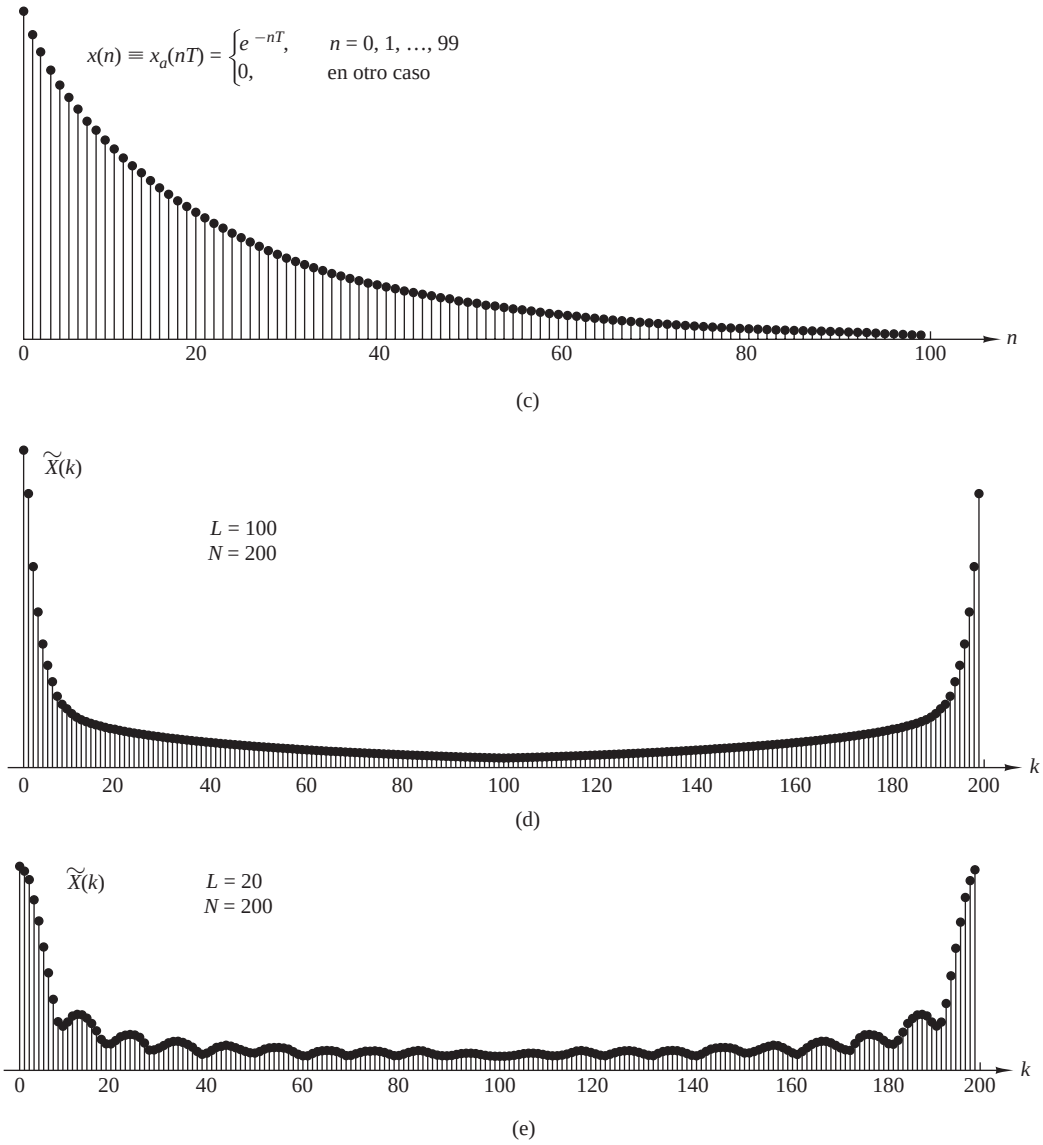


Figura 7.4.5. *Continuación.*

La gráfica de la señal analógica $x_a(t)$ y el módulo de su espectro $|X_a(F)|$ se ilustran en las Figuras 7.4.5(a) y 7.4.5(b), respectivamente. La secuencia truncada $x(n)$ y su DFT de $N = 200$ puntos (módulo) se muestra en las Figuras 7.4.5(c) y 7.4.5(d), respectivamente. En este caso, la DFT $\{X(k)\}$ es muy similar al espectro de la señal analógica. El efecto de la función de ventana apenas es apreciable.

Por el contrario, supongamos que se elige una ventana de longitud $L = 20$. Luego la secuencia truncada $x(n)$ estará dada por

$$\hat{x}(n) = \begin{cases} (0.95)^n, & 0 \le n \le 19 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Su DFT de $N = 200$ puntos se ilustra en la Figura 7.4.5(e). Ahora el efecto del espectro más ancho de la ventana es claramente evidente. En primer lugar, el pico principal es más ancho como resultado de la anchura espectral de la ventana. En segundo

lugar, las variaciones de la envolvente sinusoidal más alejadas del pico principal se deben a los grandes lóbulos secundarios de la ventana rectangular. En consecuencia, la DFT ya no es una buena aproximación de la señal analógica.

7.5 Transformada discreta del coseno

La DFT representa una secuencia $x(n)$ de N puntos, $0 \leq n \leq N-1$, como una combinación lineal de exponenciales complejas. Como resultado, los coeficientes de la DFT son, en general, pares complejos si $x(n)$ es real. Suponga que deseamos hallar una transformada ortogonal $N \times N$ que exprese una secuencia real $x(n)$ como una combinación lineal de secuencias coseno. A partir de las expresiones (7.2.25) y (7.2.26), vemos que esto es posible si la secuencia $x(n)$ de N puntos es real y par, es decir, $x(n) = x(N-n)$, $0 \leq n \leq N-1$. La DFT resultante, $X(k)$, es real y par. Esta observación sugiere que posiblemente podríamos obtener una transformada discreta coseno para cualquier secuencia real de N puntos, tomando la DFT de $2N$ puntos de una "extensión par" de la secuencia. Dado que existen ocho formas de obtener esta extensión par, existen muchas definiciones de la DCT (*discrete cosine transform*) (Wang 1984, Martucci 1994). Veremos una versión conocida como DCT-II, cuyo uso está muy extendido en la práctica para aplicaciones de compresión de voz e imágenes como parte de diversos estándares (Rao y Huang, 1996). Por simplicidad, utilizaremos el término DCT para referirnos a la DCT-II.

7.5.1 DCT directa

Sea $s(n)$ una extensión simétrica par de $2N$ puntos de $x(n)$ definida como sigue

$$s(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ x(2N-n-1), & N \leq n \leq 2N-1 \end{cases} \tag{7.5.1}$$

La secuencia $s(n)$ tiene simetría par respecto del punto de la "muestra intermedia" $n = N + (1/2)$ (*véase* la Figura 7.5.1). La DFT de $2N$ puntos de $s(n)$ está dada por

$$S(k) = \sum_{n=0}^{2N-1} s(n) W_{2N}^{nk}, \quad 0 \leq k \leq 2N-1 \tag{7.5.2}$$

Sustituyendo (7.5.1) en (7.5.2) se tiene

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_{2N}^{nk} + \sum_{n=N}^{2N-1} x(2N-n-1) W_{2N}^{nk} \tag{7.5.3}$$

Si cambiamos el segundo índice del sumatorio utilizando $n = 2N-1-m$, recordemos que $W_{2N}^{2mN} = 1$ para m entero, y sacando el factor $W_{2N}^{-k/2}$, obtenemos

$$S(k) = W_{2N}^{-k/2} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left[W_{2N}^{nk} W_{2N}^{k/2} + W_{2N}^{-nk} W_{2N}^{-k/2} \right], \quad 0 \leq k \leq 2N-1 \tag{7.5.4}$$

Esta última expresión se puede escribir como

$$S(k) = W_{2N}^{-k/2} 2 \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos \left[\frac{\pi}{N} \left(n + \frac{1}{2} \right) k \right], \quad 0 \leq k \leq 2N-1 \tag{7.5.5}$$

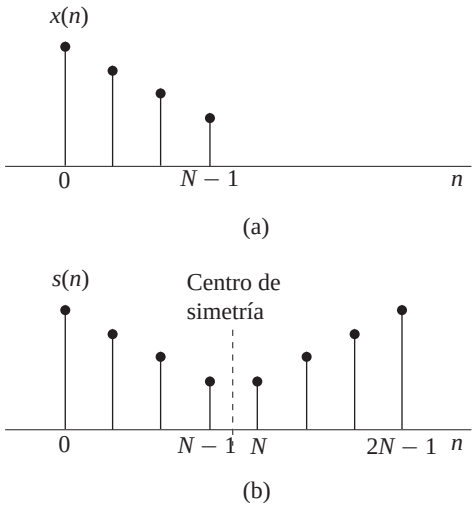


Figura 7.5.1. Secuencia original $x(n)$, $0 \le n \le N-1$ y su extensión par de $2N$ puntos $s(n)$, $0 \le n \le 2N-1$.

o, lo que es equivalente

$$S(k) = W_{2N}^{-k/2} 2\Re\left[W_{2N}^{k/2} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_{2N}^{kn}\right], \quad 0 \le k \le 2N-1 \tag{7.5.6}$$

Si definimos la DCT directa como

$$V(k) = 2\sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left[\frac{\pi}{N}\left(n+\frac{1}{2}\right)k\right], \quad 0 \le k \le N-1 \tag{7.5.7}$$

podemos demostrar fácilmente que

$$V(k) = W_{2N}^{k/2} S(k) \text{ or } S(k) = W_{2N}^{-k/2} V(k), \quad 0 \le k \le N-1 \tag{7.5.8}$$

y

$$V(k) = 2\Re\left[W_{2N}^{k/2} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_{2N}^{kn}\right], \quad 0 \le k \le N-1 \tag{7.5.9}$$

Observe que $V(k)$ es real y $S(k)$ es compleja. $S(k)$ es compleja porque la secuencia real $s(n)$ satisface la relación de simetría $s(2N-1-n) = s(n)$ en lugar de $s(2N-n) = s(n)$.

La DCT de $x(n)$ puede calcularse tomando la DFT de $2N$ puntos de $s(n)$, como en (7.5.2), y multiplicando el resultado por $W_{2N}^{k/2}$, como se ha hecho en (7.5.8). Otro método, que sugiere la expresión (7.5.9), consiste en tomar la DFT de $2N$ puntos de la secuencia original $x(n)$ añadiéndola N ceros, multiplicar el resultado por $W_{2N}^{k/2}$ y luego tomar dos veces la parte real.

7.5.2 DCT inversa

Deduciremos la DCT inversa a partir de la DFT inversa de la secuencia extendida par $s(n)$. La DFT inversa de $S(k)$ está dada por

$$s(n) = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} S(k) W_{2N}^{-nk} \tag{7.5.10}$$

Puesto que $s(n)$ es real, $S(k)$ es simétrica hermitiana, es decir,

$$S(2N-k) = S^*(k) \tag{7.5.11}$$

Además, a partir de (7.5.7), es sencillo demostrar que

$$S(N) = 0 \tag{7.5.12}$$

Utilizando (7.5.11) y (7.5.12), La Ecuación (7.5.10) se convierte en

$$\begin{aligned} s(n) &= \frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{N-1} S(k)W_{2N}^{-kn} + \frac{1}{2N}\sum_{k=N}^{2N-1} S(k)W_{2N}^{-kn} \\ &= \frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{N-1} S(k)W_{2N}^{-kn} + \frac{1}{2N}\sum_{m=1}^{N} S(2N-m)W_{2N}^{-(2N-m)n} \\ &= \frac{1}{2N}S(0) + \frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{N-1} S(k)W_{2N}^{-kn} + \frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{N-1} S^*(k)W_{2N}^{kn} \end{aligned}$$

o, puesto que $S(0)$ es real

$$s(n) = \frac{1}{N}\Re\left[\frac{S(0)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} S(k)W_{2N}^{-kn}\right], \quad 0 \le n \le 2N-1 \tag{7.5.13}$$

Sustituyendo (7.5.8) en (7.5.13) y utilizando (7.5.1) obtenemos la DCT inversa deseada

$$x(n) = \frac{1}{N}\left\{\frac{V(0)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} V(k)\cos\left[\frac{\pi}{N}\left(n+\frac{1}{2}\right)k\right]\right\}, \quad 0 \le n \le N-1 \tag{7.5.14}$$

Dada $V(k)$, calculamos en primer lugar $S(k)$ mediante (7.5.8). En el siguiente paso, tomamos la DFT inversa de $2N$ puntos indicada por (7.5.13). La parte real de esta DFT inversa proporciona $s(n)$ y, por tanto, $x(n)$.

Un método para calcular la DCT y la DCT inversa utilizando una DFT de N puntos se aborda en Makhoul (1980). En Rao e Yip (1990) se proprocionan muchos algoritmos especiales para implementaciones hardware y software de la DCT.

7.5.3 La DCT como transformada ortogonal

Las Ecuaciones (7.5.7) y (7.5.14) definen un par de transformadas DCT. Sin embargo, por razones que veremos más adelante, normalmente se redistribuyen simétricamente los factores de normalización entre las transformadas directa e inversa. Así, la DCT de la secuencia $x(n)$, $0 \le n \le N-1$ y su inversa se definen como

$$C(k) = \alpha(k)\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cos\left[\frac{\pi(2n+1)k}{2N}\right], \qquad 0 \le k \le N-1 \tag{7.5.15}$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha(k)C(k)\cos\left[\frac{\pi(2n+1)k}{2N}\right], \qquad 0 \le n \le N-1 \tag{7.5.16}$$

donde

$$\alpha(0) = \sqrt{\frac{1}{N}}, \quad \alpha(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \text{ para } 1 \le k \le N-1 \tag{7.5.17}$$

Al igual que la DFT tratada en la Sección 7.1.3, las fórmulas para la DCT (7.5.15) y (7.5.16) pueden expresarse en forma matricial utilizando la matriz DCT $N \times N$ $\mathbf{C}_N$ con los elementos

$$c_{kn} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{N}}, & k = 0, \qquad 0 \le n \le N-1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{N}} \cos \dfrac{\pi(2n+1)k}{2N}, & 1 \le k \le N-1,\ 0 \le n \le N-1 \end{cases} \tag{7.5.18}$$

Si definimos los vectores de la señal y los coeficientes como

$$\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \dots & x(N-1) \end{bmatrix}^T \tag{7.5.19}$$

$$\mathbf{c}_N = \begin{bmatrix} C(0) & C(1) & \dots & C(N-1) \end{bmatrix}^T \tag{7.5.20}$$

la DCT directa (7.5.15) y la DCT inversa (7.5.16) pueden escribirse en forma matricial como

$$\mathbf{c}_N = \mathbf{C}_N \mathbf{x}_N \tag{7.5.21}$$

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{C}_N^T \mathbf{c}_N \tag{7.5.22}$$

A partir de las expresiones (7.5.19) y (7.5.20) se deduce que $\mathbf{C}_N$ es una matriz real ortogonal, es decir, que cumple

$$\mathbf{C}_N^{-1} = \mathbf{C}_N^T \tag{7.5.23}$$

La ortogonalidad simplifica el cálculo de la transformada inversa porque reemplaza la inversión de la matriz por la transposición de la misma.

Si designamos por $\mathbf{c}_N(k)$ las columnas de $\mathbf{C}_N^T$, la DCT inversa puede escribirse como

$$\mathbf{x}_N = \sum_{k=0}^{N-1} C(k)\mathbf{c}_N(k) \tag{7.5.24}$$

que representa la señal como una combinación lineal de las secuencias base coseno de la DCT. El valor de los coeficientes $C(k)$ miden la similitud de la señal con el vector k.

EJEMPLO 7.5.1

Considere la señal sinusoidal discreta en el tiempo

$$x(n) = \cos(2\pi k_0 n/N), \quad 0 \le n \le N-1$$

En la Figura 7.5.2 se muestran las gráficas de la secuencia $x(n)$, los valores absolutos de los coeficiente $X(k)$ de la DFT de N puntos y los coeficientes de la DCT de N putos para $k_0 = 5$ y $N = 32$. Observe que, en contraste con la DFT, la DCT, aunque presenta un pico en $2k_0$, también exhibe una cantidad significativa de rizado en otras frecuencias. Por esta razón, la DCT no resulta útil en el análisis en frecuencia de señales y sistemas.

Utilizando la propiedad de ortogonalidad dada por (7.5.23), podemos demostrar fácilmente que

$$\sum_{k=0}^{N-1} |C(k)|^2 = \mathbf{c}_N^T \mathbf{c}_N = \mathbf{x}_N^T \mathbf{C}_N^T \mathbf{C}_N \mathbf{x}_N = \mathbf{x}_N^T \mathbf{x}_N = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = E_x \tag{7.5.25}$$

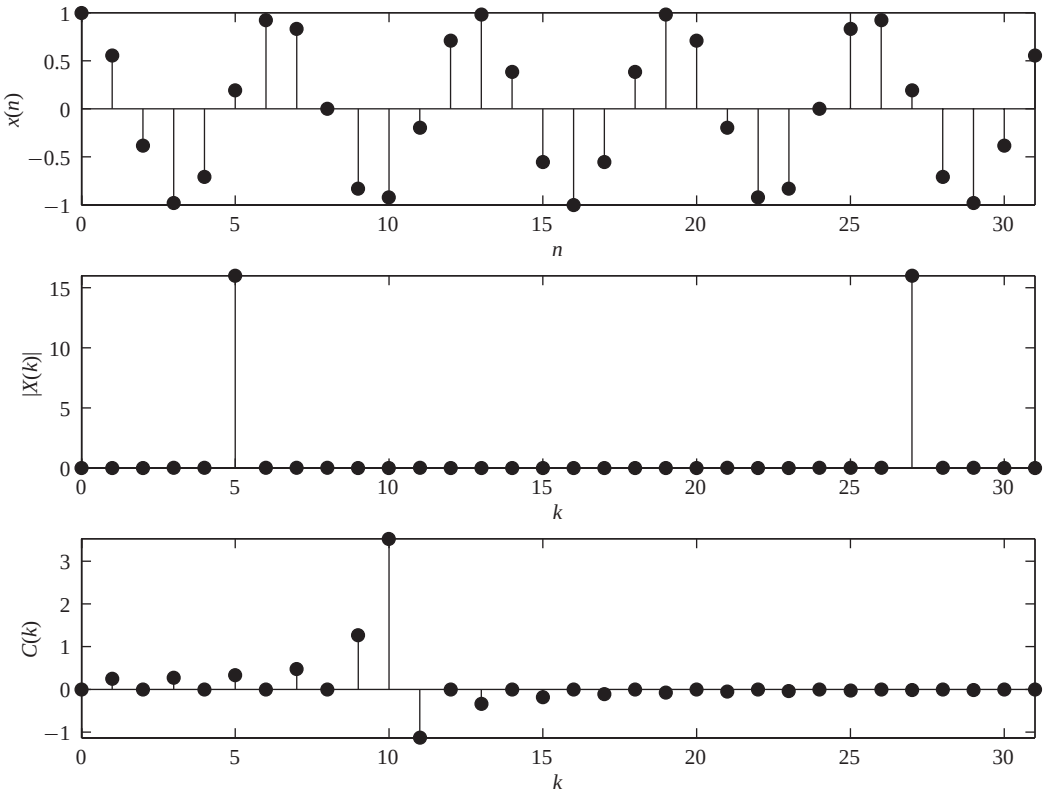


Figura 7.5.2. Una señal sinusoidal discreta en el tiempo y sus transformadas DFT y DCT.

Por tanto, la transformación ortogonal conserva la energía de la señal o, lo que es equivalente, la longitud del vector **x** en el espacio vectorial de N dimensiones (teorema de Parseval generalizado). Esto significa que una transformación ortogonal es simplemente una rotación del vector **x** en el espacio vectorial de N dimensiones.

La mayor parte de las transformadas ortogonales tienden a empaquetar una fracción importante de la energía media de la señal en relativamente pocas componentes de los coeficientes de la transformada (propiedad de la compactación de la energía). Como la energía total se conserva, muchos de los coeficientes de la transformada contendrá muy poca energía. Sin embargo, como se ilustra en el siguiente ejemplo, diferentes transformadas tienen distintas capacidades de compactación de la energía.

EJEMPLO 7.5.2

Vamos a comparar las capacidades de compactación de la energía de la DFT y la DCT utilizando la señal en rampa $x(n) = n$, $0 \leq n \leq N-1$, mostrada en la Figura 7.5.3(a) para $N = 32$. Las Figuras 7.5.3(d) y 7.5.3(f) muestran los valores absolutos de los coeficientes de la DFT y los valores de los coeficientes de la DCT, respectivamente. Es claro que los coeficientes de la DCT presentan un mejor "empaquetamiento de energía" que los de la DFT. Esto implica que podemos representar la secuencia $x(n)$ utilizando un número menor de coeficientes de la DCT.

Con la DCT establecemos los k_0 últimos coeficientes en cero y tomamos la DCT inversa para obtener una aproximación $x_{\text{DCT}}(n)$ de la secuencia original. Sin embargo, puesto que la DFT de una secuencia real es compleja, la información está contenida en los primeros $N/2$ valores (con el fin de simplificar, suponemos que N es un número par). Por tanto, tenemos que eliminar los coeficientes de la DFT de manera que se conserve la simetría compleja conjugada. Esto se lleva a cabo eliminando primero el coeficiente $X(N/2)$, luego los coeficientes $X(N/2-1)$ y $X(N/2+1)$, etc. Evidentemente, sólo podemos eliminar

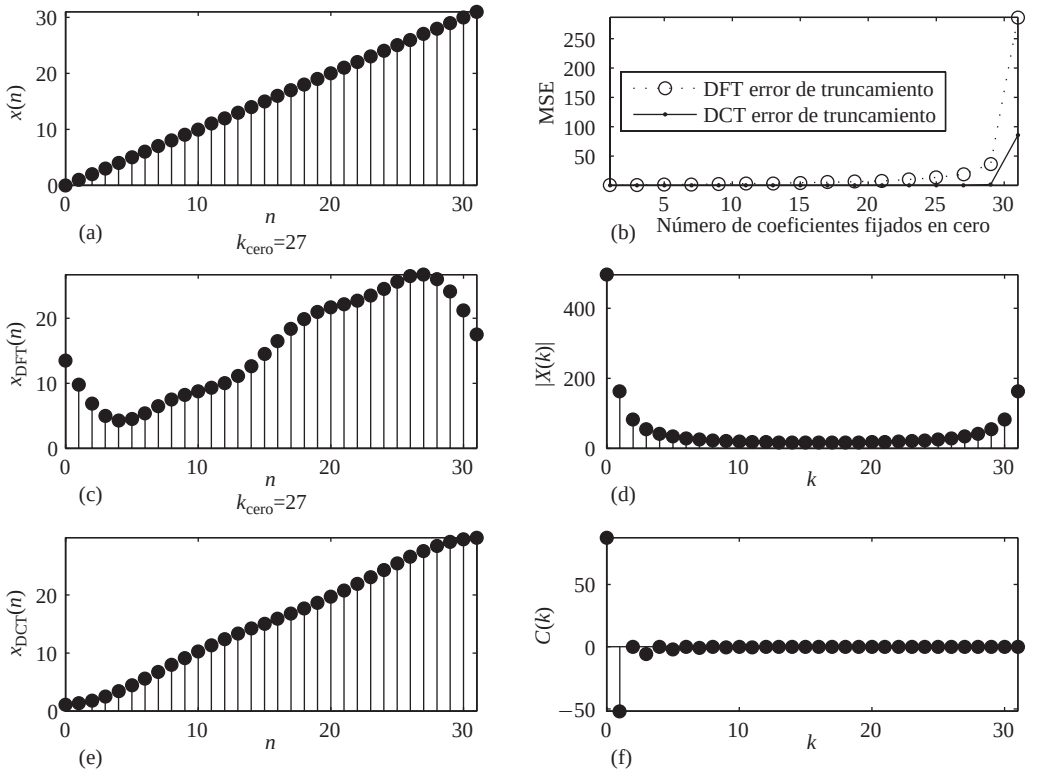


Figura 7.5.3. Señal sinusoidal discreta en el tiempo y sus transformadas DFT y DCT.

un número impar de coeficientes de la DFT, es decir, $k_0 = 1, 3, \ldots, N-1$. La secuencia reconstruida utilizando la DFT se designa por $x_{\mathrm{DFT}}(n)$.

El error de reconstrucción de la DCT, que es una función de k_0, se define como

$$E_{\mathrm{DCT}}(k_0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n) - x_{\mathrm{DCT}}(n)|^2$$

Para la DFT se emplea una definición similar. La Figura 7.5.3(b) muestra los errores de reconstrucción para la DFT y la DCT como una función de la cantidad k_0 de coeficientes omitidos. Las Figuras 7.5.3(c) y 7.5.3(e) muestran las señales reconstruidas cuando se conservan $N - k_0 = 5$ coeficientes. Podemos ver que se necesitan menos coeficientes de la DCT que de la DFT para obtener una buena aproximación de la señal original. En este ejemplo, la DFT (debido a su periodicidad inherente) sirve para modelar una señal en diente de sierra. Por tanto, tiene que dedicar muchos coeficientes de alta frecuencia para aproximar las discontinuidades en los extremos. En contraste, la DCT opera sobre la "extensión par" de $x(n)$, que es una onda triangular sin discontinuidades. Como resultado, la DCT puede aproximar mejor bloques pequeños de secuencias que tienen valores muy diferentes en la primera y la última muestra.

Desde un punto de vista estadístico, la transformada ortogonal óptima para compresión de la señal es la transformada de Karhunen–Loeve (KL) u Hotelling (Jayant y Noll, 1984). La transformada KL presenta dos propiedades de optimización: (a) minimiza el error de reconstrucción para cualquier número de coeficientes que se mantega, y (b) genera un conjunto de coeficientes no correlados de la transformada. La transformada KL se define por los autovectores de la matriz de covarianza de la secuencia de entrada. La DCT proporciona una buena

aproximación a la transformada KL para señales que cumplen la ecuación en diferencias $x(n) = ax(n-1) + w(n)$, donde $w(n)$ es ruido blanco y a $(0 < a < 1)$ es un coeficiente constante con valores próximos a uno. Muchas señales, incluyendo imágenes naturales, presentan esta característica. Pueden encontrarse más detalles sobre la transformada ortogonal y sus aplicaciones en Jayant y Noll (1984), Clarke (1985), Rao y Yip (1990) y Goyal (2001).

7.6 Resumen y referencias

El tema principal tratado en este capítulo ha sido la transformada discreta de Fourier, sus propiedades y sus aplicaciones. Hemos desarrollado la DFT muestreando el espectro $X(\omega)$ de la secuencia $x(n)$.

El muestreo en el dominio de la frecuencia del espectro de una señal discreta en el tiempo es especialmente importante en el tratamiento digital de señales. Particular importancia tiene la DFT, que permite representar de forma unívoca una secuencia de duración finita en el dominio de la frecuencia. La existencia de algoritmos eficaces para calcular la DFT, que se describen en el Capítulo 8, posibilitan el tratamiento digital de señales en el dominio de la frecuencia más rápidamente que en el dominio del tiempo. Los métodos de procesamiento en los que la DFT es especialmente adecuada incluyen los procesos de filtrado, como se ha descrito en este capítulo, y la correlación y el análisis de los espectros, que se abordan en los Capítulos 8 y 4. Un tratamiento conciso y especialmente bueno de la DFT y su aplicación al análisis en frecuencia está disponible en el libro de Brigham (1988).

También hemos descrito en el capítulo la transformada discreta del coseno (DCT). En el documento de Strang (1999) se proporciona un interesante tratamiento de la DCT desde la perspectiva del álgebra lineal.

Problemas

7.1 Los cinco primeros puntos de la DFT de ocho puntos de una secuencia real son $\{0.25, 0.125 - j0.3018, 0, 0.125 - j0.0518, 0\}$. Determine los tres puntos restantes.

7.2 Calcule la convolución circular de ocho puntos para las siguientes secuencias.

(a) $x_1(n) = \{1,1,1,1,0,0,0,0\}$

$x_2(n) = \text{sen}\,\frac{3\pi}{8}n, \qquad 0 \le n \le 7$

(b) $x_1(n) = (\frac{1}{4})^n, \qquad 0 \le n \le 7$

$x_2(n) = \cos\frac{3\pi}{8}n, \qquad 0 \le n \le 7$

(c) Calcule la DFT de las dos convoluciones circulares utilizando las DFT de $x_1(n)$ y $x_2(n)$.

7.3 Sea $X(k)$, $0 \le k \le N-1$, la DFT de N puntos de la secuencia $x(n)$, $0 \le n \le N-1$. Definimos

$$\hat{X}(k) = \begin{cases} X(k), & 0 \le k \le k_c, N-k_c \le k \le N-1 \\ 0, & k_c < k < N-k_c \end{cases}$$

y calculamos la DFT inversa de N puntos de $\hat{X}(k)$, $0 \le k \le N-1$. ¿Cuál es el efecto de este proceso sobre la secuencia $x(n)$? Explique su respuesta.

7.4 Para las secuencias

$$x_1(n) = \cos\frac{2\pi}{N}n, \qquad x_2(n) = \text{sen}\,\frac{2\pi}{N}n, \qquad 0 \le n \le N-1$$

determine:

(a) La convolución circular de N puntos $x_1(n) \circledN x_2(n)$

(b) La convolución circular de N puntos de $x_1(n)$ y $x_2(n)$

(c) La autocorrelación circular de N puntos de $x_1(n)$

(d) La autocorrelación circular de N puntos de $x_2(n)$

7.5 Calcule la magnitud

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2(n)$$

para las siguientes parejas de secuencias.

(a) $x_1(n) = x_2(n) = \cos\frac{2\pi}{N}n, \qquad 0 \le n \le N-1$

(b) $x_1(n) = \cos\frac{2\pi}{N}n, \qquad x_2(n) = \operatorname{sen}\frac{2\pi}{N}n, \qquad 0 \le n \le N-1$

(c) $x_1(n) = \delta(n) + \delta(n-8), \qquad x_2(n) = u(n) - u(n-N)$

7.6 Determine la DFT de N puntos de la ventana de Blackman

$$w(n) = 0.42 - 0.5\cos\frac{2\pi n}{N-1} + 0.08\cos\frac{4\pi n}{N-1}, \qquad 0 \le n \le N-1$$

7.7 Si $X(k)$ es la DFT de la secuencia $x(n)$, determine las DFT de N puntos de las secuencias

$$x_c(n) = x(n)\cos\frac{2\pi k_0 n}{N}, \qquad 0 \le n \le N-1$$

y

$$x_s(n) = x(n)\operatorname{sen}\frac{2\pi k_0 n}{N}, \qquad 0 \le n \le N-1$$

en función de $X(k)$.

7.8 Determine la convolución circular de las secuencias

$$\begin{aligned} x_1(n) &= \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 1\} \\ x_2(n) &= \{\underset{\uparrow}{4}, 3, 2, 2\} \end{aligned}$$

utilizando la fórmula en el dominio del tiempo dada por (7.2.39).

7.9 Utilice la DFT de cuatro puntos y la IDFT para determinar la secuencia

$$x_3(n) = x_1(n) \circledN x_2(n)$$

donde $x_1(n)$ y $x_2(n)$ son las secuencias dadas en el Problema 7.8.

7.10 Calcule la energía de la secuencia de N puntos

$$x(n) = \cos\frac{2\pi k_0 n}{N}, \qquad 0 \le n \le N-1$$

7.11 Dada la DFT de ocho puntos de la secuencia

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 3 \\ 0, & 4 \le n \le 7 \end{cases}$$

calcule la DFT de las secuencias

(a) $x_1(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & 1 \le n \le 4 \\ 1, & 5 \le n \le 7 \end{cases}$

(b) $x_2(n) = \begin{cases} 0, & 0 \le n \le 1 \\ 1, & 2 \le n \le 5 \\ 0, & 6 \le n \le 7 \end{cases}$

7.12 Considere una secuencia de duración finita

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 4\}$$

(a) Dibuje la secuencia $s(n)$ cuya DFT de seis puntos es

$$S(k) = W_2^* X(k), \qquad k = 0, 1, \ldots, 6$$

(b) Determine la secuencia $y(n)$ cuya DFT de seis puntos es $Y(k) = \Re|X(k)|$.

(c) Determine la secuencia $v(n)$ cuya DFT de seis puntos es $V(k) = \Im|X(k)|$.

7.13 Sea $x_p(n)$ una secuencia periódica de período fundamental N. Considere las siguientes transformadas DFT:

$$x_p(n) \xleftrightarrow[N]{\text{DFT}} X_1(k)$$

$$x_p(n) \xleftrightarrow[3N]{\text{DFT}} X_3(k)$$

(a) ¿Cuál es la relación entre $X_1(k)$ y $X_3(k)$?

(b) Verifique el resultado del apartado (a) utilizando la secuencia

$$x_p(n) = \{\cdots 1, 2, 1, \underset{\uparrow}{2}, 1, 2, 1, 2 \cdots\}$$

7.14 Considere las secuencias

$$x_1(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 4\}, \qquad x_2(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 0, 0, 0\}, \qquad s(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 0, 0, 0, 0\}$$

y sus DFT de cinco puntos.

(a) Determine una secuencia $y(n)$ de modo que $Y(k) = X_1(k)X_2(k)$.

(b) ¿Existe una secuencia $x_3(n)$ tal que $S(k) = X_1(k)X_3(k)$?

7.15 Considere un sistema LTI causal cuya función de sistema es

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

La salida $y(n)$ del sistema es conocida para $0 \leq n \leq 63$. Suponiendo que $H(z)$ está disponible. ¿Puede desarrollar una DFT de 64 puntos para recuperar la secuencia $x(n)$, $0 \leq n \leq 63$? ¿puede recuperar todos los valores de $x(n)$ en este intervalo?

7.16 La respuesta al impulso de un sistema LTI está dada por $h(n) = \delta(n) - \frac{1}{4}\delta(n - k_0)$. Para determinar la respuesta al impulso $g(n)$ del sistema inverso, un ingeniero calcula la DFT de N puntos $H(k)$, $N = 4k_0$, de $h(n)$ y luego define $g(n)$ como la DFT inversa de $G(k) = 1/H(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$. Determine $g(n)$ y la convolución $h(n) \times g(n)$, y comente si el sistema con la respuesta al impulso $g(n)$ es el inverso del sistema con la respuesta al impulso $h(n)$.

7.17 Determine la DFT de ocho puntos de la señal

$$x(n) = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0\}$$

y dibuje su módulo y su fase.

7.18 Un sistema lineal invariante en el tiempo con una respuesta en frecuencia $H(\omega)$ se excita con la entrada periódica

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN)$$

Suponga que calculamos la DFT de N puntos $Y(k)$ de las muestras $y(n)$, $0 \leq n \leq N-1$ de la secuencia de salida. ¿Cómo está $Y(k)$ relacionada con $H(\omega)$?

7.19 *DFT de secuencias reales con simetrías especiales.*

(a) Utilizando las propiedades de simetría vistas en la Sección 7.2 (especialmente las propiedades de descomposición), explique cómo se puede calcular la DFT de dos secuencias (pares) simétricas y dos secuencias (impares) antisimétricas simultáneamente utilizando sólo una DFT de N puntos.

(b) Suponga ahora que tenemos cuatro secuencias reales $x_i(n)$, $i = 1, 2, 3, 4$, todas ellas simétricas [es decir, $x_i(n) = x_i(N-n), 0 \leq n \leq N-1$]. Demuestre que las secuencias

$$s_i(n) = x_i(n+1) - x_i(n-1)$$

son antisimétricas [es decir, $s_i(n) = -s_i(N-n)$ y $s_i(0) = 0$].

(c) Forme una secuencia $x(n)$ utilizando $x_1(n)$, $x_2(n)$, $s_3(n)$ y $s_4(n)$, y demuestre cómo calcular la DFT $X_i(k)$ de $x_i(n)$, $i = 1, 2, 3, 4$ a partir de la DFT $X(k)$ de N puntos de $x(n)$.

(d) ¿Existe alguna muestra en frecuencia de $X_i(k)$ que no pueda calcularse a partir de $X(k)$? Explique su respuesta.

7.20 *DFT de secuencias reales sólo con armónicos pares.* Sea $x(n)$ una secuencia real de N puntos cuya DFT de N (N par) puntos es $X(k)$. Además, $x(n)$ satisface la siguiente propiedad de simetría:

$$x\left(n + \frac{N}{2}\right) = -x(n), \qquad n = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1$$

es decir, la mitad superior de la secuencia es la negativa de la mitad inferior.

(a) Demuestre que

$$X(k) = 0, \qquad k \text{ par}$$

es decir, la secuencia tiene un espectro con armónicos pares.

(b) Demuestre que los valores de este espectro de armónicos pares puede calcularse evaluando la DFT de $N/2$ puntos de una versión modulada compleja de la secuencia original $x(n)$.

7.21 Sea $x_a(t)$ una señal analógica con un ancho de banda $B = 3$ kHz. Se desea utilizar una DFT de $N = 2^m$ puntos para calcular el espectro de la señal con una resolución menor o igual que 50 Hz. Determine **(a)** la frecuencia mínima de muestreo, **(b)** el mínimo número de muestras necesarias y **(c)** la longitud mínima del registro de la señal analógica.

7.22 Considere la secuencia periódica

$$x_p(n) = \cos \frac{2\pi}{10} n, \qquad -\infty < n < \infty$$

de frecuencia $f_0 = \frac{1}{10}$ y período fundamental $N = 10$. Determine la DFT de 10 puntos de la secuencia $x(n) = x_p(n)$, $0 \le n \le N-1$.

7.23 Calcule las DFT de N puntos de las señales

(a) $x(n) = \delta(n)$

(b) $x(n) = \delta(n - n_0), \quad 0 < n_0 < N$

(c) $x(n) = a^n, \quad 0 \le n \le N-1$

(d) $x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N/2 - 1 \ (N \text{ par}) \\ 0, & N/2 \le n \le N-1 \end{cases}$

(e) $x(n) = e^{j(2\pi/N)k_0}, \quad 0 \le n \le N-1$

(f) $x(n) = \cos \frac{2\pi}{N} k_0 n, \quad 0 \le n \le N-1$

(g) $x(n) = \operatorname{sen} \frac{2n}{N} k_0 n, \quad 0 \le n \le N-1$

(h) $x(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar}, \quad 0 \le n \le N-1 \end{cases}$

7.24 Considere la señal de duración finita

$$x(n) = \{1, 2, 3, 1\}$$

(a) Calcule su DFT de cuatro puntos resolviendo explícitamente el sistema de ecuaciones lineales 4-por-4 definido por la fórmula de la DFT inversa.

(b) Compruebe la respuesta del apartado (a) calculando la DFT de cuatro puntos, utilizando su definición.

7.25 **(a)** Determine la transformada de Fourier $X(\omega)$ de la señal

$$x(n) = \{1, 2, \underset{\uparrow}{3}, 2, 1, 0\}$$

(b) Calcule la DFT de seis puntos $V(k)$ de la señal

$$v(n) = \{3, 2, 1, 0, 1, 2\}$$

(c) ¿Existe alguna relación entre $X(\omega)$ y $V(k)$? Explique su respuesta.

7.26 Demuestre la identidad

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(n+lN) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)kn}$$

(*Consejo:* halle la DFT de la señal periódica del lado izquierdo de la expresión).

7.27 *Cálculo de armónicos pares e impares utilizando la DFT.* Sea $x(n)$ una secuencia de N puntos con una DFT de N puntos $X(k)$ (N par).

(a) Considere la secuencia con *aliasing* en el tiempo

$$y(n) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n+lM), & 0 \le n \le M-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

¿Cuál es la relación entre la DFT de M puntos $Y(k)$ de $y(n)$ y la transformada de Fourier $X(\omega)$ de $x(n)$?

(b) Sea

$$y(n) = \begin{cases} x(n) + x\left(n+\dfrac{N}{2}\right), & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y

$$y(n) \xleftrightarrow[N/2]{\text{DFT}} Y(k)$$

Demuestre que $X(k) = Y(k/2)$, $k = 2, 4, \ldots, N-2$.

(c) Utilice los resultados de los apartados (a) y (b) para desarrollar un procedimiento que calcule los armónicos impares de $X(k)$ utilizando una DFT de $N/2$ puntos.

7.28 *Muestreo en el dominio de la frecuencia.* Considere la siguiente señal discreta en el tiempo

$$x(n) = \begin{cases} a^{|n|}, & |n| \le L \\ 0, & |n| > L \end{cases}$$

donde $a = 0.95$ y $L = 10$.

(a) Calcule y dibuje la señal $x(n)$.

(b) Demuestre que

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = x(0) + 2\sum_{n-1}^{L} x(n)\cos\omega n$$

Dibuje $X(\omega)$ calculándola en $\omega = \pi k/100$, $k = 0, 1, \ldots, 100$.

(c) Calcule

$$c_k = \frac{1}{N}X\left(\frac{2\pi}{N}K\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

para $N = 30$.

(d) Determine y dibuje la señal

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} cke^{j(2\pi/N)kn}$$

¿Cuál es la relación entre las señales $x(n)$ y $\tilde{x}(n)$? Explique su respuesta.

(e) Calcule y dibuje la señal $\tilde{x}_1(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN)$, $-L \leq n \leq L$ para $N = 30$. Compare las señales $\tilde{x}(n)$ y $\tilde{x}_1(n)$.

(f) Repita los apartados (c) hasta (e) para $N = 15$.

7.29 *Muestreo en el dominio de la frecuencia.* La señal $x(n) = a^{|n|}$, $-1 < a < 1$ tiene la transformada de Fourier

$$X(\omega) = \frac{1-a^2}{1-2a\cos\omega + a^2}$$

(a) Dibuje $X(\omega)$ para $0 \leq \omega \leq 2\pi$, $a = 0.8$. Reconstruya y dibuje $X(\omega)$ a partir de sus muestras $X(2\pi k/N)$, $0 \leq k \leq N-1$ para

(b) $N = 20$

(c) $N = 100$

(d) Compare los espectros obtenidos en los apartados (b) y (c) con el espectro original $X(\omega)$ y explique las diferencias.

(e) Ilustre el *aliasing* en el dominio del tiempo cuando $N = 20$.

7.30 *Análisis en frecuencia de señales discretas en el tiempo moduladas en amplitud.* Sea la señal discreta en el tiempo

$$x(n) = \cos 2\pi f_1 n + \cos 2\pi f_2 n$$

donde $f_1 = \frac{1}{18}$ y $f_2 = \frac{5}{128}$, modula la amplitud de la portadora

$$x_c(n) = \cos 2\pi f_c n$$

donde $f_c = \frac{50}{128}$. La señal modulada en amplitud resultante es

$$x_{\text{am}}(n) = x(n)\cos 2\pi f_c n$$

(a) Dibuje las señales $x(n)$, $x_c(n)$ y $x_{\text{am}}(n)$, $0 \leq n \leq 255$.

(b) Calcule y dibuje las DFT de 128 puntos de la señal $x_{\text{am}}(n)$, $0 \leq n \leq 127$.

(c) Calcule y dibuje las DFT de 128 puntos de la señal $x_{\text{am}}(n)$, $0 \leq n \leq 99$.

(d) Calcule y dibuje las DFT de 256 puntos de la señal $x_{\text{am}}(n)$, $0 \leq n \leq 179$.

(e) Explique los resultados obtenidos en los apartados (b) hasta (d), obteniendo el espectro de la señal modulada en amplitud y comparándolo con los resultados experimentales.

7.31 La forma de onda en diente de sierra de la Figura P.7.31 se puede expresar en serie de Fourier como sigue

$$x(t) = \frac{2}{\pi}\left(\operatorname{sen}\pi t - \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\pi t + \frac{1}{3}\operatorname{sen}3\pi t - \frac{1}{4}\operatorname{sen}4\pi t \cdots\right)$$

(a) Determine los coeficientes de la serie de Fourier c_k.

(b) Utilice una subrutina de N puntos para generar muestras de esta señal en el dominio del tiempo utilizando los seis primeros términos de la expansión para $N = 64$ y $N = 128$. Dibuje la señal $x(t)$ y las muestras generadas. Comente los resultados.

7.32 Recuerde que la transformada de Fourier de $x(t) = e^{j\Omega_0 t}$ es $X(j\Omega) = 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$ y la transformada de Fourier de

$$p(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le T_0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es

$$P(j\Omega) = T_0 \frac{\operatorname{sen} \Omega T_0/2}{\Omega T_0/2} e^{-j\Omega T_0/2}$$

(a) Determine la transformada de Fourier $Y(j\Omega)$ de

$$y(t) = p(t)e^{j\Omega_0 t}$$

y dibuje de manera aproximada $|Y(j\Omega)|$ en función de Ω.

(b) Considere ahora la secuencia exponencial

$$x(n) = e^{j\omega_0 n}$$

donde ω_0 es una frecuencia arbitraria perteneciente al rango $0 < \omega_0 < \pi$ radianes. Indique la condición más general que debe satisfacer ω_0 para que $x(n)$ sea periódica de período P (P es un entero positivo).

(c) Sea $y(n)$ la secuencia de duración finita

$$y(n) = x(n)w_N(n) = e^{j\omega_0 n} w_N(n)$$

donde $w_N(n)$ es una secuencia rectangular de duración finita de longitud N y donde $x(n)$ no es necesariamente periódica. Determine $Y(\omega)$ y dibuje de manera aproximada $|Y(\omega)|$ para $0 \le \omega \le 2\pi$. ¿Qué efecto tiene N sobre $|Y(\omega)|$? Comente brevemente las similitudes y diferencias entre $|Y(\omega)|$ y $|Y(j\Omega)|$.

(d) Suponga que

$$x(n) = e^{j(2\pi/P)n}, \qquad P \text{ un entero positivo}$$

e

$$y(n) = w_N(n)x(n)$$

donde $N = lP$, l un entero positivo. Determine y dibuje la DFT de N puntos de $y(n)$. Relacione su respuesta con la característica de $|Y(\omega)|$.

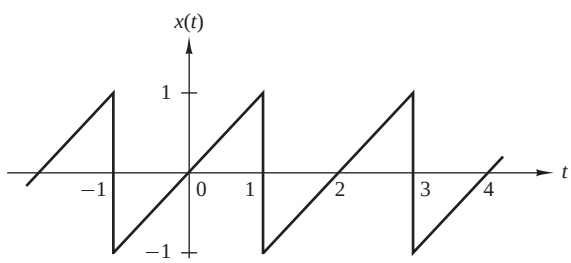


Figura P.7.31.

(e) ¿Es el muestreo en frecuencia de la DFT del apartado (d) adecuado para obtener una aproximación de $|Y(\omega)|$ directamente a partir del módulo de la DFT $|Y(k)|$? Si no es así, explique brevemente cómo puede incrementarse el muestreo, de modo que sea posible obtener una gráfica aproximada de $|Y(\omega)|$ a partir de una secuencia apropiada $|Y(k)|$.

7.33 Desarrolle un algoritmo que calcule la DCT utilizando la DFT como se ha descrito en las Secciones 7.5.1 y 7.5.2.

7.34 Utilice el algoritmo desarrollado en el Problema 7.33 para reproducir los resultados del Ejemplo 7.5.2.

7.35 Repita el Ejemplo 7.5.2 utilizando la señal $x(n) = a^n \cos(2\pi f_0 n + \phi)$ con $a = 0.8$, $f_0 = 0.05$ y $N = 32$.

8

Cálculo eficiente de la DFT: algoritmos de la transformada rápida de Fourier

En el capítulo anterior hemos visto que la transformada discreta de Fourier (DFT) desempeña un papel importante en muchas aplicaciones de tratamiento digital de la señal, entre las que se incluye el filtrado lineal, el análisis de la correlación y el análisis espectral. Una razón fundamental de su importancia es la existencia de algoritmos eficientes para calcular la DFT.

El tema principal de este capítulo es la descripción de algoritmos de cálculo eficientes que permitan evaluar la DFT. Se describen dos métodos diferentes. Uno de ellos es el método de divide y vencerás, en el que una DFT de tamaño N, donde N es un número compuesto, se reduce al cálculo de transformadas DFT más pequeñas que la que se va a calcular. En particular, vamos a presentar importantes algoritmos de cálculo, conocidos como algoritmos de la transformada rápida de Fourier (FFT, *Fast Fourier Transform*), para calcular la DFT cuando el tamaño N es una potencia de 2 y cuando es una potencia de 4.

El segundo método se basa en la formulación de la DFT como una operación de filtrado lineal sobre los datos. Este método lleva a dos algoritmos: el algoritmo de Goertzel y el algoritmo de la transformada *z chirp*, para calcular la DFT a través del filtrado lineal de la secuencias de datos.

8.1 Cálculo eficiente de la DFT: algoritmos FFT

En esta sección vamos a presentar varios métodos para calcular la DFT de manera eficiente. En vista de la importancia que tiene la DFT en las aplicaciones de tratamiento digital de señales, como el filtrado lineal, el análisis de la correlación y el análisis espectral, su cálculo es un tema que ha recibido una especial atención por parte de muchos matemáticos, ingenieros y científicos.

Básicamente, el problema de calcular la DFT es calcular la secuencia $\{X(k)\}$ de N valores complejos dada otra secuencia de datos $\{x(n)\}$ de longitud N, de acuerdo con la fórmula

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \qquad 0 \le k \le N-1 \tag{8.1.1}$$

donde

$$W_N = e^{-j2\pi/N} \tag{8.1.2}$$

En general, la secuencia de datos $x(n)$ se supone que también es compleja.

De manera similar, la IDFT es

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, \qquad 0 \le n \le N-1 \tag{8.1.3}$$

Puesto que tanto la DFT como la IDFT implican básicamente el mismo tipo de cálculos, nuestro estudio de los algoritmos de cálculo para la DFT se aplica también al cálculo eficiente de la IDFT.

Observe que para cada valor de k, el cálculo directo de $X(k)$ implica N multiplicaciones complejas ($4N$ multiplicaciones reales) y $N-1$ sumas complejas ($4N-2$ sumas reales). En consecuencia, para calcular todos los N valores de la DFT se necesitan N^2 multiplicaciones complejas y $N^2 - N$ sumas complejas.

El cálculo directo de la DFT es ineficiente, principalmente porque no se aprovecha de las propiedades de simetría y periodicidad del factor de fase W_N. En este caso, estas dos propiedades son:

$$\text{Propiedad de simetría:} \qquad W_N^{k+N/2} = -W_N^k \tag{8.1.4}$$

$$\text{Propiedad de periodicidad:} \qquad W_N^{k+N} = W_N^k \tag{8.1.5}$$

Los algoritmos eficientes de cálculo descritos en esta sección, conocidos colectivamente como algoritmos FFT, aprovechan estas dos propiedades básicas del factor de fase.

8.1.1 Cálculo directo de la DFT

Para una secuencia compleja $x(n)$ de N puntos, la DFT se puede expresar como sigue

$$X_R(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[x_R(n) \cos \frac{2\pi kn}{N} + x_I(n) \operatorname{sen} \frac{2\pi kn}{N} \right] \tag{8.1.6}$$

$$X_I(k) = -\sum_{n=0}^{N-1} \left[x_R(n) \operatorname{sen} \frac{2\pi kn}{N} - x_I(n) \cos \frac{2\pi kn}{N} \right] \tag{8.1.7}$$

El cálculo directo de (8.1.6) y (8.1.7) requiere:

1. $2N^2$ evaluaciones de funciones trigonométricas.
2. $4N^2$ multiplicaciones reales.
3. $4N(N-1)$ sumas reales.
4. Una serie de operaciones de indexación y direccionamiento.

Estas operaciones son típicas de los algoritmos de cálculo de la DFT. Las operaciones indicadas en los puntos 2 y 3 dan como resultado los valores $X_R(k)$ y $X_I(k)$ de la DFT. Las operaciones de indexación y direccionamiento son necesarias para extraer los datos de $x(n)$, $0 \le n \le N-1$ y los factores de fase y almacenar los resultados. La variedad de algoritmos DFT optimiza cada uno de estos procesos de cálculo de una forma diferente.

8.1.2 Método divide y vencerás para calcular la DFT

El desarrollo de algoritmos eficientes de cálculo de la DFT es posible si se adopta el método de divide y vencerás. Este método se basa en la descomposición de una DFT de N puntos en transformadas DFT sucesivamente más pequeñas. Este método básico nos lleva a una familia de algoritmos de cálculo eficientes conocidos colectivamente como algoritmos FFT.

Para ilustrar las ideas básicas, consideremos el cálculo de una DFT de N puntos, donde N puede descomponerse en factores como un producto de dos enteros, es decir,

$$N = LM \tag{8.1.8}$$

La suposición de que N no es un número primo no es restrictiva, ya que podemos rellenar cualquier secuencia con ceros para asegurar una descomposición en factores de la forma indicada en (8.1.8).

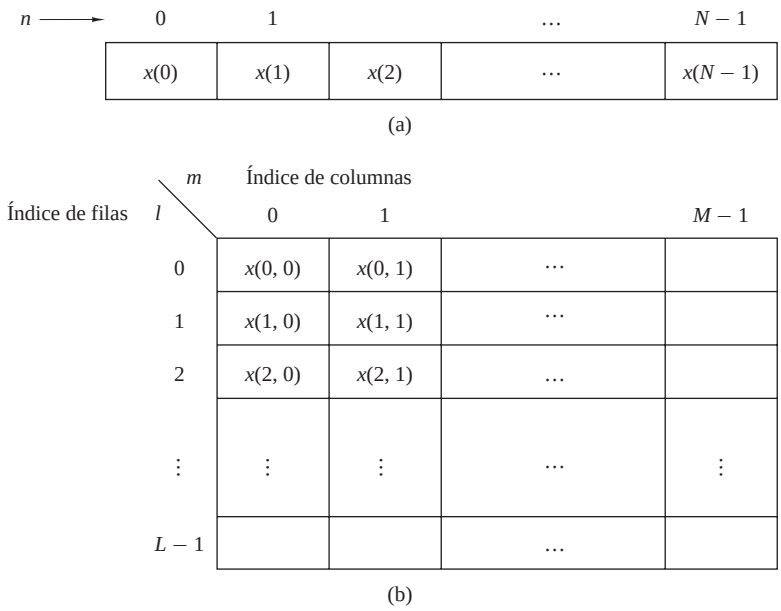


Figura 8.1.1. Matriz de datos bidimensional para almacenar la secuencia $x(n)$, $0 \leq n \leq N-1$.

Ahora la secuencia $x(n)$, $0 \leq n \leq N-1$, puede almacenarse en una matriz unidimensional indexada por n o como una matriz bidimensional indexada por l y m, donde $0 \leq l \leq L-1$ y $0 \leq m \leq M-1$, las cuales se muestran en la Figura 8.1.1. Observe que l es el índice para las filas y m es el índice para las columnas. Así, la secuencia $x(n)$ puede almacenarse en una matriz rectangular de diferentes maneras, dependiendo cada una de ellas de la correpondencia existente entre el índice n y los índices (l,m).

Por ejemplo, suponga que seleccionamos la correspondencia

$$n = Ml + m \tag{8.1.9}$$

Esto nos lleva a una disposición en la que la primera fila consta de los primeros M elementos de $x(n)$, la segunda fila está formada por los M elementos siguientes de $x(n)$, y así sucesivamente, como se ilustra en la Figura 8.1.2(a). Por el contrario, la correspondencia

$$n = l + mL \tag{8.1.10}$$

almacena los L primeros elementos de $x(n)$ en la primera columna, los siguientes L elementos en la segunda columna, y así sucesivamente, como se ilustra en la Figura 8.1.2(b).

Por filas $\quad n = Ml + m$

$l \backslash m$	0	1	2		$M-1$
0	$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	$\dots$	$x(M-1)$
1	$x(M)$	$x(M+1)$	$x(M+2)$	$\dots$	$x(2M-1)$
2	$x(2M)$	$x(2M+1)$	$x(2M+2)$	$\dots$	$x(3M-1)$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$L-1$	$x((L-1)M)$	$x((L-1)M+1)$	$x((L-1)M+2)$	$\dots$	$x(LM-1)$

(a)

Por columnas $\quad n = l + mL$

$l \backslash m$	0	1	2		$M-1$
0	$x(0)$	$x(L)$	$x(2L)$	$\dots$	$x((M-1)L)$
1	$x(1)$	$x(L+1)$	$x(2L+1)$	$\cdots$	$x((M-1)L+1)$
2	$x(2)$	$x(L+2)$	$x(2L+2)$	$\dots$	$x((M-1)L+2)$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$L-1$	$x(L-1)$	$x(2L-1)$	$x(3L-1)$	$\cdots$	$x(LM-1)$

(b)

Figura 8.1.2. Dos disposiciones para la matrices de datos.

Se puede utilizar una disposición similar para almacenar los valores calculados de la DFT. En este caso, la correspondencia se establece entre el índice k y la pareja de índices (p,q), donde $0 \le p \le L-1$ y $0 \le q \le M-1$. Si seleccionamos la correspondencia

$$k = Mp + q \tag{8.1.11}$$

la DFT se almacena por filas, donde la primera fila contiene los M primeroa elementos de la DFT $X(k)$, la segunda fila contiene el siguiente conjunto de M elementos, y así sucesivamente. Por el contrario, la correspondencia

$$k = qL + p \tag{8.1.12}$$

da como resultado un almacenamiento por columnas de $X(k)$, donde los L primeros elementos se almacenan en la primera columna, el segundo conjunto de L elementos se almacena en la segunda columna, y así sucesivamente.

Ahora suponga que $x(n)$ se hace corresponder con una matriz rectangular $x(l,m)$ y $X(k)$ con la correspondiente matriz rectangular $X(p,q)$. Luego la DFT se puede expresar como una suma doble sobre los elementos de la matriz rectangular multiplicada por los correspondientes factores de fase. Más específicamente, adoptamos la correspondencia por columnas para $x(n)$ dada por (8.1.10) y la correspondencia por filas para la DFT dada por (8.1.11). Por tanto,

$$X(p,q) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{L-1} x(l,m) W_N^{(Mp+q)(mL+l)} \tag{8.1.13}$$

Pero

$$W_N^{(Mp+q)(mL+l)} = W_N^{MLmp} W_N^{mLq} W_N^{Mpl} W_N^{lq} \tag{8.1.14}$$

Sin embargo, $W_N^{Nmp} = 1$, $W_N^{mqL} = W_{N/L}^{mq} = W_M^{mq}$, y $W_N^{Mpl} = W_{N/M}^{pl} = W_L^{pl}$.

Con estas simplificaciones, (8.1.13) se puede expresar como

$$X(p,q) = \sum_{l=0}^{L-1} \left\{ W_N^{lq} \left[\sum_{m=0}^{M-1} x(l,m) W_M^{mq} \right] \right\} W_L^{lp} \tag{8.1.15}$$

La expresión (8.1.15) implica el cálculo de transformadas DFT de longitud M y longitud L. A continuación, subdividimos el cálculo en tres pasos:

1. En primer lugar, calculamos las DFT de M puntos

$$F(l,q) \equiv \sum_{m=0}^{M-1} x(l,m) W_M^{mq}, \qquad 0 \le q \le M-1 \tag{8.1.16}$$

para cada una de las filas $l = 0, 1, \ldots, L-1$.

2. En segundo lugar, calculamos una nueva matriz rectangular $G(l,q)$ definida como

$$G(l,q) = W_N^{lq} F(l,q), \qquad \begin{array}{l} 0 \le l \le L-1 \\ 0 \le q \le M-1 \end{array} \tag{8.1.17}$$

3. Por último, calculamos las DFT de L puntos

$$X(p,q) = \sum_{l=0}^{L-1} G(l,q) W_L^{lp} \tag{8.1.18}$$

para cada columna $q = 0, 1, \ldots, M-1$, de la matriz $G(l,q)$.

En principio puede parecer que el procedimiento de cálculo anterior es más complicado que el cálculo directo de la DFT. Sin embargo, evaluemos la complejidad de cálculo de la expresión (8.1.15). El primer paso implica el cálculo de L transformadas DFT, cada de una ellas de M puntos. Luego este paso requiere LM^2 multiplicaciones complejas y $LM(M-1)$ sumas complejas. El segundo paso requiere LM multiplicaciones complejas. Por último, el tercer paso requiere ML^2 multiplicaciones complejas y $ML(L-1)$ sumas complejas. Por tanto, la complejidad de cálculo es

$$\begin{array}{ll} \text{Multiplicaciones complejas:} & N(M+L+1) \\ \text{Sumas complejas:} & N(M+L-2) \end{array} \tag{8.1.19}$$

donde $N = ML$. Por tanto, el número de multiplicaciones se ha reducido de N^2 a $N(M+L+1)$ y el número de sumas se ha reducido de $N(N-1)$ a $N(M+L-2)$.

Por ejemplo, suponga que $N = 1000$ y que seleccionamos $L = 2$ y $M = 500$. Por tanto, en lugar de tener que realizar 10^6 multiplicaciones complejas del cálculo directo de la DFT, este método nos lleva a 503.000

multiplicaciones complejas, lo que representa una reducción de aproximadamente el 50 por ciento. El número de sumas también se reduce aproximadamente en la misma cantidad.

Cuando N es un número compuesto muy alto, es decir, N puede descomponerse en factores para definir un producto de números primos de la forma

$$N = r_1 r_2 \cdots r_\nu \tag{8.1.20}$$

entonces la descomposición anterior puede repetirse $(\nu - 1)$ más veces. Este procedimiento da como resultado transformadas DFT más pequeñas, lo que, a su vez, lleva a un algoritmo de cálculo más eficiente.

En efecto, la primera segmentación de la secuencia $x(n)$ en una matriz rectangular de M columnas con L elementos en cada columna genera transformadas DFT de tamaños L y M. Además, la descomposición de los datos implica la segmentación de cada fila (o columna) en matrices rectangulares más pequeñas que darán lugar a transformadas DFT más pequeñas. Este procedimiento termina cuando N se descompone en sus factores primos.

EJEMPLO 8.1.1

Para ilustrar este procedimiento de cálculo, consideremos el cálculo de una DFT de $N = 15$ puntos. Como $N = 5 \times 3 = 15$, seleccionamos $L = 5$ y $M = 3$. En otras palabras, almacenamos por columnas la secuencia $x(n)$ de 15 puntos como sigue:

$$\begin{array}{lccc}
\text{Fila 1:} & x(0,0) = x(0) & x(0,1) = x(5) & x(0,2) = x(10) \\
\text{Fila 2:} & x(1,0) = x(1) & x(1,1) = x(6) & x(1,2) = x(11) \\
\text{Fila 3:} & x(2,0) = x(2) & x(2,1) = x(7) & x(2,2) = x(12) \\
\text{Fila 4:} & x(3,0) = x(3) & x(3,1) = x(8) & x(3,2) = x(13) \\
\text{Fila 5:} & x(4,0) = x(4) & x(4,1) = x(9) & x(4,2) = x(14)
\end{array}$$

Ahora comparamos la DFT de tres puntos para cada una de las cinco filas. Esto nos lleva a la siguiente matriz 5×3:

$$\begin{array}{ccc}
F(0,0) & F(0,1) & F(0,2) \\
F(1,0) & F(1,1) & F(1,2) \\
F(2,0) & F(2,1) & F(2,2) \\
F(3,0) & F(3,1) & F(3,2) \\
F(4,0) & F(4,1) & F(4,2)
\end{array}$$

El siguiente paso consiste en multiplicar cada uno de los términos $F(l,q)$ por los factores de fase $W_N^{lq} = W_{15}^{lq}$, $0 \le l \le 4$ y $0 \le q \le 2$. Este cálculo da como resultado la matriz 5×3:

$$\begin{array}{ccc}
\text{Columna 1} & \text{Columna 2} & \text{Columna 3} \\
G(0,0) & G(0,1) & G(0,2) \\
G(1,0) & G(1,1) & G(1,2) \\
G(2,0) & G(2,1) & G(2,2) \\
G(3,0) & G(3,1) & G(3,2) \\
G(4,0) & G(4,1) & G(4,2)
\end{array}$$

El paso final consiste en calcular las DFT de cinco puntos para cada una de las tres columnas. Este cálculo proporciona los valores deseados de la DFT en la forma

$$\begin{array}{ccc}
X(0,0) = X(0) & X(0,1) = X(1) & X(0,2) = X(2) \\
X(1,0) = X(3) & X(1,1) = X(4) & X(1,2) = X(5) \\
X(2,0) = X(6) & X(2,1) = X(7) & X(2,2) = X(8) \\
X(3,0) = X(9) & X(3,1) = X(10) & X(3,2) = X(11) \\
X(4,0) = X(12) & X(4,1) = X(13) & X(4,2) = X(14)
\end{array}$$

La Figura 8.1.3 ilustra los pasos para la realización del cálculo.

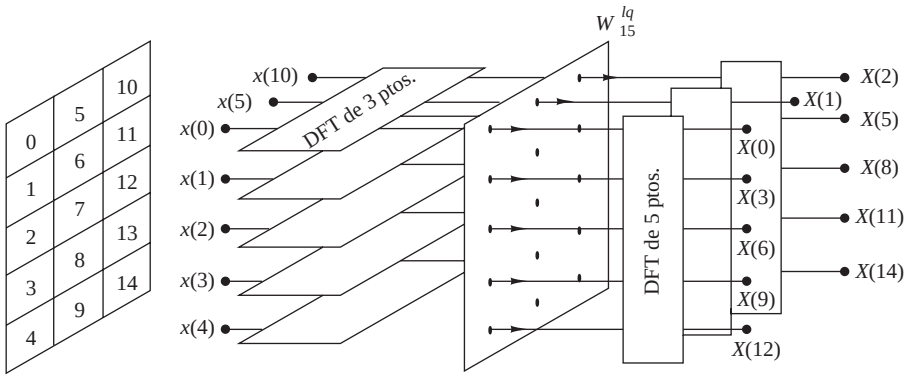


Figura 8.1.3. Cálculo de la DFT de $N = 15$ puntos por medio de transformadas DFT de 3 y 5 puntos.

Resulta interesante ver la secuencia de datos segmentada y la DFT resultante en términos de matrices unidimensionales de salida. Cuando la secuencia de entrada $x(n)$ y la DFT de salida $X(k)$ se leen en sus representaciones matriciales bidimensionales recorriendo desde la fila 1 hasta la fila 5, obtenemos las siguientes secuencias:

MATRIZ DE ENTRADA

$$x(0)\ x(5)\ x(10)\ x(1)\ x(6)\ x(11)\ x(2)\ x(7)\ x(12)\ x(3)\ x(8)\ x(13)\ x(4)\ x(9)\ x(14)$$

MATRIZ DE SALIDA

$$X(0)\ X(1)\ X(2)\ X(3)\ X(4)\ X(5)\ X(6)\ X(7)\ X(8)\ X(9)\ X(10)\ X(11)\ X(12)\ X(13)\ X(14)$$

Observe que la secuencia de datos de entrada se ha reestructurado respecto del orden normal en el cálculo de la DFT. Por el contrario, la secuencia de salida se genera en orden normal. En este caso, la reordenación de la matriz de los datos de entrada se debe a la segmentación de la matriz unidimensional en una matriz rectangular y al orden en que se calculan las DFT. Esta reestructuración de la secuencia de datos de entrada o de la secuencia de los datos de salida es una característica de la mayoría de los algoritmos FFT.

En resumen, el algoritmo que hemos presentado implica los siguientes cálculos:

Algoritmo 1

1. Almacenar la señal por columnas.
2. Calcular la DFT de M puntos de cada fila.
3. Multiplicar la matriz resultante por los factores de fase W_N^{lq}.
4. Calcular la DFT de L puntos de cada columna.
5. Leer la matriz resultante por filas.

Puede obtenerse un algoritmo adicional con una estructura de cálculo similar si la señal de entrada se almacena por filas y la transformación resultante se hace por columnas. En dicho caso, seleccionamos

$$\begin{aligned} n &= Ml + m \\ k &= qL + p \end{aligned} \tag{8.1.21}$$

Esta elección de índices nos lleva a la fórmula de la DFT de la forma

$$X(p,q) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{L-1} x(l,m)W_N^{pm}W_L^{pl}W_M^{qm} = \sum_{m=0}^{M-1} W_M^{mq}\left[\sum_{l=0}^{L-1} x(l,m)W_L^{lp}\right]W_N^{mp} \tag{8.1.22}$$

Así obtenemos el segundo algoritmo.

Algoritmo 2

1. Almacenar la señal por filas.
2. Calcular la DFT de L puntos en cada columna.
3. Multiplicar la matriz resultante por los factores W_N^{pm}.
4. Calcular la DFT de M puntos de cada fila.
5. Leer la matriz resultante por columnas.

Estos dos algoritmos presentan la misma complejidad. Sin embargo, difieren en el orden de los cálculos. En las secciones siguientes, vamos a emplear el método de divide y vencerás para deducir algoritmos más rápidos cuando el tamaño de la DFT se restringe a una potencia de 2 o a una potencia de 4.

8.1.3 Algoritmos FFT base 2

En la sección anterior hemos descrito cuatro algoritmos de cálculo eficiente de la DFT basados en el método de divide y vencerás. Tal enfoque es aplicable cuando el número N de puntos de datos no es un número primo. En particular, dicho enfoque es muy eficiente cuando N es compuesto, es decir, cuando N puede descomponerse en factores como $N = r_1 r_2 r_3 \cdots r_\nu$, donde los $\{r_j\}$ son primos.

De especial importancia es el caso en el que $r_1 = r_2 = \cdots = r_\nu \equiv r$, de modo que $N = r^\nu$. En dicho caso, las DFT son de tamaño r, por lo que el cálculo de la DFT de N puntos presenta un patrón regular. El número r se conoce como la base del algoritmo FFT.

En esta sección, vamos a exponer los algoritmos en base 2, que son, con mucho, los algoritmos FFT más ampliamente utilizados. Los algoritmos en base 4 se describen en la siguiente sección.

Consideremos el cálculo de la DFT de $N = 2^\nu$ puntos aplicando el método de divide y vencerás especificado por las Ecuaciones (8.1.16) hasta (8.1.18). Seleccionamos $M = N/2$ y $L = 2$. Esta selección resulta de dividir la secuencia de datos de N puntos en dos secuencias de $N/2$ puntos, $f_1(n)$ y $f_2(n)$, correspondientes a las muestras pares e impares de $x(n)$, respectivamente, es decir,

$$\begin{aligned} f_1(n) &= x(2n) \\ f_2(n) &= x(2n+1), \qquad n = 0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1 \end{aligned} \tag{8.1.23}$$

Así, $f_1(n)$ y $f_2(n)$ se obtienen mediante el diezmado de $x(n)$ en un factor de 2 y, por tanto, el algoritmo FFT resultante se conoce como algoritmo de diezmado temporal.

Ahora la DFT de N puntos se puede expresar en función de las DFT de las secuencias diezmadas como sigue:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}, \qquad k = 0,1,\ldots,N-1 \\ &= \sum_{n\ \text{par}} x(n)W_N^{kn} + \sum_{n\ \text{impar}} x(n)W_N^{kn} \\ &= \sum_{m=0}^{(N/2)-1} x(2m)W_N^{2mk} + \sum_{m=0}^{(N/2)-1} x(2m+1)W_N^{k(2m+1)} \end{aligned} \tag{8.1.24}$$

Pero $W_N^2 = W_{N/2}$. Aplicando esta sustitución, (8.1.24) puede expresarse como

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{m=0}^{(N/2)-1} f_1(m) W_{N/2}^{km} + W_N^k \sum_{m=0}^{(N/2)-1} f_2(m) W_{N/2}^{km} \\ &= F_1(k) + W_N^k F_2(k), \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \end{aligned} \tag{8.1.25}$$

donde $F_1(k)$ y $F_2(k)$ son las DFT de $N/2$ puntos de las secuencias $f_1(m)$ y $f_2(m)$, respectivamente.

Puesto que $F_1(k)$ y $F_2(k)$ son periódicas de período $N/2$, tenemos $F_1(k+N/2) = F_1(k)$ y $F_2(k+N/2) = F_2(k)$. Además, el factor $W_N^{k+N/2} = -W_N^k$. Por tanto, podemos expresar (8.1.25) como

$$X(k) = F_1(k) + W_N^k F_2(k), \qquad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \tag{8.1.26}$$

$$X\left(k + \frac{N}{2}\right) = F_1(k) - W_N^k F_2(k), \qquad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \tag{8.1.27}$$

Observe que el cálculo directo de $F_1(k)$ requiere $(N/2)^2$ multiplicaciones complejas. Lo mismo podemos decir del cálculo de $F_2(k)$. Además, son necesarias $N/2$ multiplicaciones complejas adicionales para calcular $W_N^k F_2(k)$. Por tanto, el cálculo de $X(k)$ requiere $2(N/2)^2 + N/2 = N^2/2 + N/2$ multiplicaciones complejas. Este primer paso reduce el número de multiplicaciones de N^2 a $N^2/2 + N/2$, lo que es aproximadamente igual a dividir entre 2 cuando N es grande.

Con el fin de ser coherentes con la notación anterior, podemos definir

$$\begin{aligned} G_1(k) &= F_1(k), \quad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \\ G_2(k) &= W_N^k F_2(k), \quad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \end{aligned}$$

Entonces la DFT $X(k)$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} X(k) &= G_1(k) + G_2(k), \quad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \\ X(k + \frac{N}{2}) &= G_1(k) - G_2(k), \quad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \end{aligned} \tag{8.1.28}$$

Este cálculo se ilustra en la Figura 8.1.4.

Habiendo realizado una vez el diezmado temporal, podemos repetir el proceso para cada una de las secuencias $f_1(n)$ y $f_2(n)$. Así, $f_1(n)$ producirá las dos secuencias de $N/4$ puntos

$$\begin{aligned} v_{11}(n) &= f_1(2n), \qquad n = 0, 1, \ldots, \frac{N}{4} - 1 \\ v_{12}(n) &= f_1(2n+1), \quad n = 0, 1, \ldots, \frac{N}{4} - 1 \end{aligned} \tag{8.1.29}$$

y $f_2(n)$ producirá

$$\begin{aligned} v_{21}(n) &= f_2(2n), \qquad n = 0, 1, \ldots, \frac{N}{4} - 1 \\ v_{22}(n) &= f_2(2n+1), \quad n = 0, 1, \ldots, \frac{N}{4} - 1 \end{aligned} \tag{8.1.30}$$

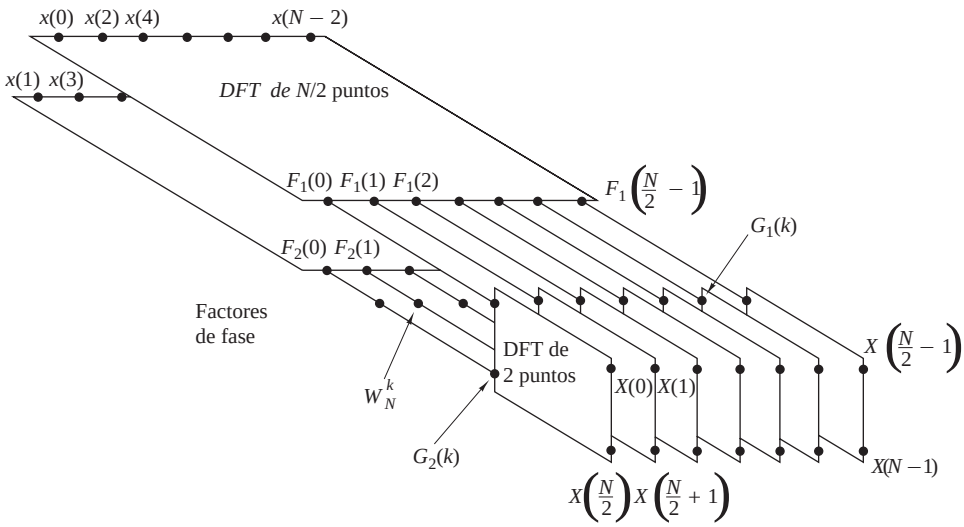


Figura 8.1.4. Primer paso del algoritmo de diezmado temporal.

Calculando las DFT de $N/4$ puntos, obtendríamos las DFT de $N/2$ puntos $F_1(k)$ y $F_2(k)$ a partir de las relaciones

$$F_1(k) = V_{11}(k) + W_{N/2}^k V_{12}(k), \quad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{4} - 1$$

$$F_1\left(k + \frac{N}{4}\right) = V_{11}(k) - W_{N/2}^k V_{12}(k), \quad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{4} - 1 \tag{8.1.31}$$

$$F_2(k) = V_{21}(k) + W_{N/2}^k V_{22}(k), \quad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{4} - 1$$

$$F_2\left(k + \frac{N}{4}\right) = V_{21}(k) - W_{N/2}^k V_{22}(k), \quad k = 0, \ldots, \frac{N}{4} - 1 \tag{8.1.32}$$

donde los $\{V_{ij}(k)\}$ son las DFT de $N/4$ puntos de las secuencias $\{v_{ij}(n)\}$.

Observe que el cálculo de $\{V_{ij}(k)\}$ requiere $4(N/4)^2$ multiplicaciones y, por tanto, el cálculo de $F_1(k)$ y $F_2(k)$ puede llevarse a cabo mediante $N^2/4 + N/2$ multiplicaciones complejas. Son necesarias $N/2$ multiplicaciones complejas adicionales para calcular $X(k)$ a partir de $F_1(k)$ y $F_2(k)$. En consecuencia, el número total de multiplicaciones de nuevo se reduce, aproximadamente, a la mitad, es decir a $N^2/4 + N$.

El diezmado de la secuencia de datos se puede repetir una y otra vez hasta que las secuencias resultantes queden reducidas a secuencias de un punto. Para $N = 2^\nu$, este diezmado puede realizarse $\nu = \log_2 N$ veces. De esta manera, el número total de multiplicaciones complejas se reduce a $(N/2)\log_2 N$. El número de sumas complejas es $N \log_2 N$. La Tabla 8.1 presenta una comparación del número de multiplicaciones complejas necesarias en el cálculo de la FFT y en el cálculo directo de la DFT.

Con fines ilustrativos, en la Figura 8.1.5 se muestra el cálculo de una DFT de $N = 8$ puntos. Observe que el cálculo se realiza en tres etapas; se empieza calculando cuatro transformadas DFT de dos puntos, luego dos de cuatro puntos y, por último, una DFT de ocho puntos. La combinación de las DFT más pequeñas para formar la DFT más grande se ilustra en la Figura 8.1.6 para $N = 8$.

Observe que el cálculo básico realizado en cada etapa, como se ilustra en la Figura 8.1.6, consiste en tomar dos número complejos, por ejemplo, la pareja (a, b), multiplicar b por W_N^r, y luego sumar y restar el producto de

Número de puntos, N	Multiplicaciones complejas en el cálculo directo, N^2	Multiplicaciones complejas en el algoritmo FFT, $(N/2)\log_2 N$	Factor de mejora de la velocidad
4	16	4	4.0
8	64	12	5.3
16	256	32	8.0
32	1,024	80	12.8
64	4,096	192	21.3
128	16,384	448	36.6
256	65,536	1,024	64.0
512	262,144	2,304	113.8
1,024	1,048,576	5,120	204.8

Tabla 8.1. Comparación de la complejidad del cálculo directo de la DFT y del algoritmo FFT.

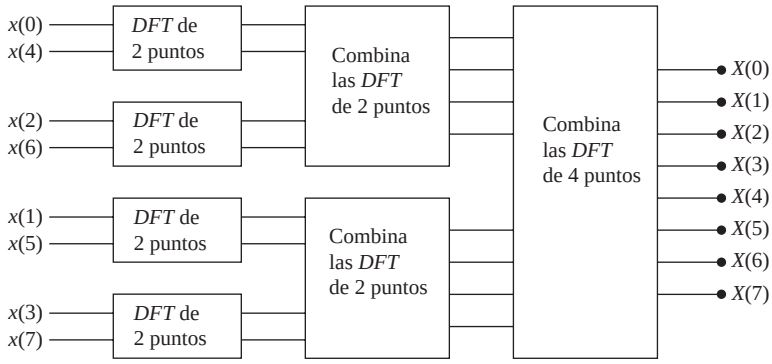


Figura 8.1.5. Las tres etapas de cálculo de una DFT de $N = 8$ puntos.

a para formar los dos nuevos números complejos (A, B). Este cálculo básico, que se ilustra en la Figura 8.1.7, se conoce como *mariposa*, porque el diagrama de flujo parece una mariposa.

En general, cada mariposa implica una multiplicación compleja y dos sumas complejas. Para $N = 2^\nu$, existen $N/2$ mariposas por etapa del proceso de cálculo y $\log_2 N$ etapas. Por tanto, como se ha indicado anteriormente, el número total de multiplicaciones complejas es $(N/2)\log_2 N$ y el de sumas complejas es $N \log_2 N$.

Una vez que se ha efectuado una operación mariposa sobre una pareja de números complejos (a, b) para generar (A, B), no hay necesidad de almacenar la pareja de entrada (a, b). Por tanto, podemos almacenar el resultado (A, B) en la misma posición que estaba (a, b). En consecuencia, necesitamos un espacio fijo de almacenamiento, es decir, $2N$ registros de almacenamiento para almacenar los resultados (N números complejos) de los cálculos de cada etapa. Puesto que se emplean las mismas $2N$ posiciones de almacenamiento para llevar a cabo el cálculo de la DFT de N puntos, decimos que *los cálculos se hacen in situ*.

Una segunda observación importante hace referencia al orden de la secuencia de datos de entrada después de haberse diezmado $(\nu - 1)$ veces. Por ejemplo, si consideramos el caso en que $N = 8$, sabemos que el primer proceso de diezmado produce la secuencia $x(0)$, $x(2)$, $x(4)$, $x(6)$, $x(1)$, $x(3)$, $x(5)$, $x(7)$, y el segundo proceso de diezmado produce la secuencia $x(0)$, $x(4)$, $x(2)$, $x(6)$, $x(1)$, $x(5)$, $x(3)$, $x(7)$. Esta *reestructuración* de la secuencia de datos de entrada presenta un orden bien definido, como puede comprobarse observando la Figura 8.1.8, la cual ilustra el diezmado de la secuencia de ocho puntos. Expresando el índice n de la secuencia $x(n)$ en formato binario, podemos ver que el orden de la secuencia de datos diezmada se obtiene fácilmente leyendo

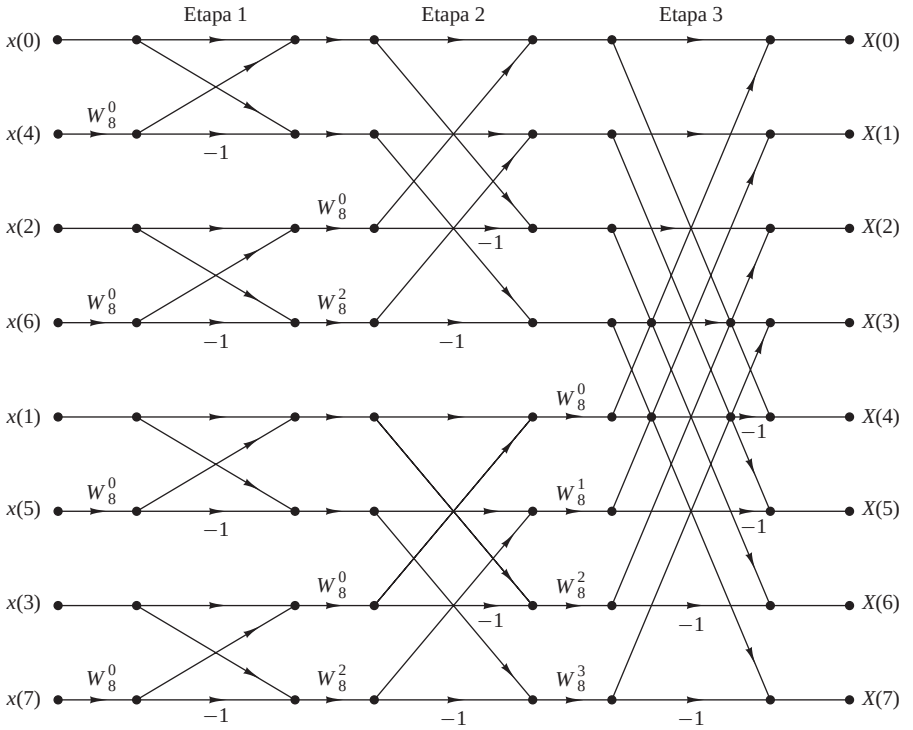


Figura 8.1.6. Algoritmo FFT de diezmado temporal de ocho puntos.

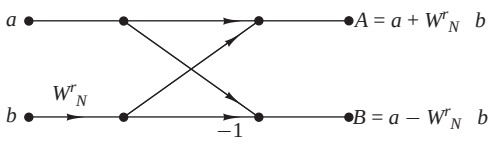
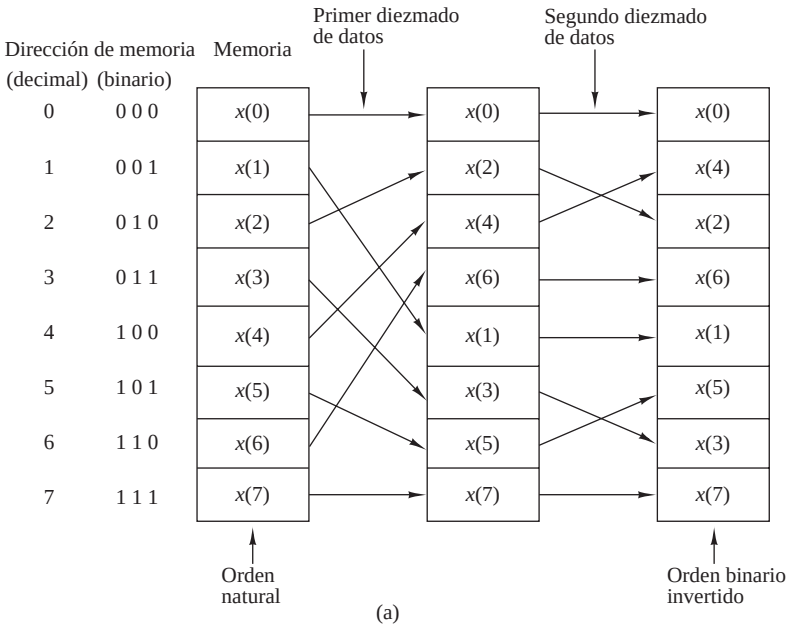


Figura 8.1.7. Mariposa básica del algoritmo FFT de diezmado temporal.

la representación binaria del índice n en orden inverso. Así, el punto de datos $x(3) \equiv x(011)$ se coloca en la posición $m = 110$ o $m = 6$ en la matriz diezmada. Por tanto, decimos que los datos $x(n)$ después del diezmado se almacenan en orden binario inverso.

Con la secuencia de datos almacenada en orden binario inverso y las operaciones mariposa realizadas in situ, la DFT resultante $X(k)$ se obtiene en orden natural (es decir, $k = 0, 1, \ldots, N-1$). Por otro lado, debemos indicar que es posible ordenar el algoritmo FFT de manera que la entrada se deje en orden natural y la DFT de salida resultante se genere en orden binario inverso. Además, podemos imponer la restricción de que tanto los datos de entrada $x(n)$ como la DFT de salida $X(k)$ estén en orden natural, y deducir un algoritmo FFT en el que los cálculos no tengan lugar in situ. Por tanto, un algoritmo así necesitará espacio de almacenamiento adicional.

Otro importante algoritmo FFT base 2, conocido como algoritmo de diezmado en frecuencia, se obtiene empleando el método de divide y vencerás descrito en el Sección 8.1.2, eligiendo $M = 2$ y $L = N/2$. Esta elección de parámetros implica un almacenamiento por columnas de la secuencia de datos de entrada. Para deducir el algoritmo, empezamos dividiendo la fórmula de la DFT en dos sumatorios, de los que uno implica la suma de los $N/2$ primeros puntos de datos y el segundo la suma de los $N/2$ últimos puntos de datos. De este modo, obtenemos



(a)

$(n_2n_1n_0)$	$\rightarrow$	$(n_1n_0n_2)$	$\rightarrow$	$(n_0n_1n_2)$
(0 0 0)	$\rightarrow$	(0 0 0)	$\rightarrow$	(0 0 0)
(0 0 1)	$\rightarrow$	(0 1 0)	$\rightarrow$	(1 0 0)
(0 1 0)	$\rightarrow$	(1 0 0)	$\rightarrow$	(0 1 0)
(0 1 1)	$\rightarrow$	(1 1 0)	$\rightarrow$	(1 1 0)
(1 0 0)	$\rightarrow$	(0 0 1)	$\rightarrow$	(0 0 1)
(1 0 1)	$\rightarrow$	(0 1 1)	$\rightarrow$	(1 0 1)
(1 1 0)	$\rightarrow$	(1 0 1)	$\rightarrow$	(0 1 1)
(1 1 1)	$\rightarrow$	(1 1 1)	$\rightarrow$	(1 1 1)

(b)

Figura 8.1.8. Reestructuración de los datos e inversión de bits.

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(n)W_N^{kn} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(n)W_N^{kn} + W_N^{Nk/2} \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x\left(n+\frac{N}{2}\right) W_N^{kn} \end{aligned} \tag{8.1.33}$$

Puesto que $W_N^{kN/2} = (-1)^k$, la expresión (8.1.33) puede escribirse como sigue

$$X(k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left[x(n) + (-1)^k x\left(n+\frac{N}{2}\right)\right] W_N^{kn} \tag{8.1.34}$$

Ahora, dividimos (diezmamos) $X(k)$ en muestras pares e impares. Por tanto, obtenemos

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left[x(n) + x\left(n+\frac{N}{2}\right)\right] W_{N/2}^{kn}, \qquad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \tag{8.1.35}$$

y

$$X(2k+1) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left\{ \left[x(n) - x\left(n+\frac{N}{2}\right) \right] W_N^n \right\} W_{N/2}^{kn}, \qquad k = 0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1 \tag{8.1.36}$$

donde hemos aplicado el hecho de que $W_N^2 = W_{N/2}$.

Si definimos las secuencias de $N/2$ puntos $g_1(n)$ y $g_2(n)$ como

$$\begin{aligned} g_1(n) &= x(n) + x\left(n+\frac{N}{2}\right) \\ g_2(n) &= \left[x(n) - x\left(n+\frac{N}{2}\right) \right] W_N^n, \qquad n = 0,1,2,\ldots,\frac{N}{2}-1 \end{aligned} \tag{8.1.37}$$

entonces

$$\begin{aligned} X(2k) &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g_1(n) W_{N/2}^{kn} \\ X(2k+1) &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g_2(n) W_{N/2}^{kn} \end{aligned} \tag{8.1.38}$$

El cálculo de las secuencias $g_1(n)$ y $g_2(n)$ de acuerdo con (8.1.37) y el subsiguiente uso de estas secuencias para calcular las DFT de $N/2$ puntos se ilustran en la Figura 8.1.9. Observe que el cálculo básico en esta figura implica la operación mariposa mostrada en la Figura 8.1.10.

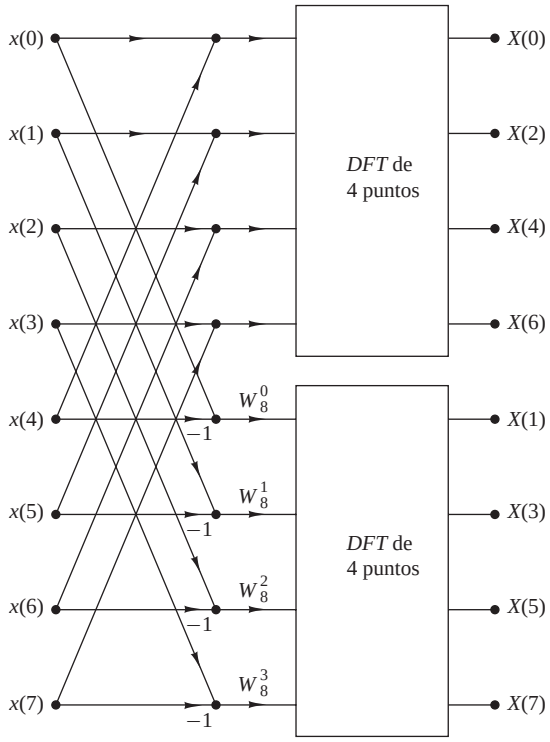


Figura 8.1.9. Primera etapa del algoritmo FFT de diezmado en frecuencia.

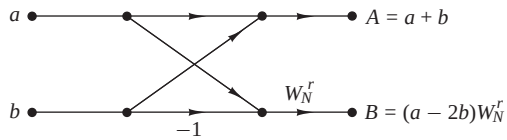


Figura 8.1.10. Operación mariposa en el algoritmo FFT de diezmado en frecuencia.

Este procedimiento de cálculo puede repetirse diezmando las DFT de $N/2$ puntos, $X(2k)$ y $X(2k+1)$. El proceso completo implica $\nu = \log_2 N$ etapas de diezmado, donde cada etapa precisa $N/2$ operaciones mariposa del tipo mostrado en la Figura 8.1.10. En consecuencia, el cálculo de la DFT de N puntos a través del algoritmo FFT de diezmado en frecuencia requiere $(N/2)\log_2 N$ multiplicaciones complejas y $N\log_2 N$ sumas complejas, al igual que el algoritmo de diezmado temporal. Con propósitos de ilustración, la Figura 8.1.11 muestra el algoritmo de diezmado en frecuencia de ocho puntos.

Observe en la Figura 8.1.11 que los datos de entrada $x(n)$ siguen el orden natural, pero la DFT de salida está en orden binario inverso. Fíjese también en que los cálculos se realizan in situ. Sin embargo, es posible reconfigurar el algoritmo de diezmado en frecuencia de modo que la secuencia de entrada siga el orden binario inverso mientras que la DFT de salida se obtiene en orden natural. Además, si abandonamos el requisito de realizar los cálculos in situ, también es posible tener los datos de entrada y la DFT de salida en orden normal.

8.1.4 Algoritmos FFT base 4

Cuando el número de puntos de datos N en la DFT es una potencia de 4 (es decir, $N = 4^\nu$), podemos, evidentemente, utilizar siempre el algoritmo en base 2 para llevar a cabo el cálculo. Sin embargo, en este caso, es más eficiente emplear el algoritmo FFT base 4.

Comenzamos describiendo un algoritmo FFT de diezmado temporal en base 4, que se obtiene seleccionando $L = 4$ y $M = N/4$ en el método de divide y vencerás descrito en la Sección 8.1.2. Eligiendo estos valores para L y M, tenemos l, $p = 0, 1, 2, 3$; m, $q = 0, 1, \ldots, N/4-1$; $n = 4m+l$; y $k = (N/4)p+q$. De este modo, dividimos o diezmamos la secuencia de entrada de N puntos en cuatro subsecuencias $x(4n)$, $x(4n+1)$, $x(4n+2)$, $x(4n+3)$, $n = 0, 1, \ldots, N/4-1$.

Aplicando la Ecuación (8.1.15), obtenemos

$$X(p,q) = \sum_{l=0}^{3} \left[W_N^{lq} F(l,q)\right] W_4^{lp}, \qquad p = 0,1,2,3 \tag{8.1.39}$$

donde $F(l,q)$ está dada por (8.1.16), es decir,

$$F(l,q) = \sum_{m=0}^{(N/4)-1} x(l,m) W_{N/4}^{mq}, \qquad \begin{array}{l} l = 0,1,2,3, \\ q = 0,1,2,\ldots,\dfrac{N}{4}-1 \end{array} \tag{8.1.40}$$

y

$$x(l,m) = x(4m+l) \tag{8.1.41}$$

$$X(p,q) = X\left(\frac{N}{4}p+q\right) \tag{8.1.42}$$

Por tanto, las cuatro DFT de $N/4$ puntos obtenidas a partir de (8.1.40) se combinan de acuerdo con (8.1.39) para proporcionar la DFT de N puntos. La expresión dada en (8.1.39) para combinar las DFT de $N/4$ puntos define una operación mariposa de diezmado temporal en base 4, que puede expresarse en forma matricial como

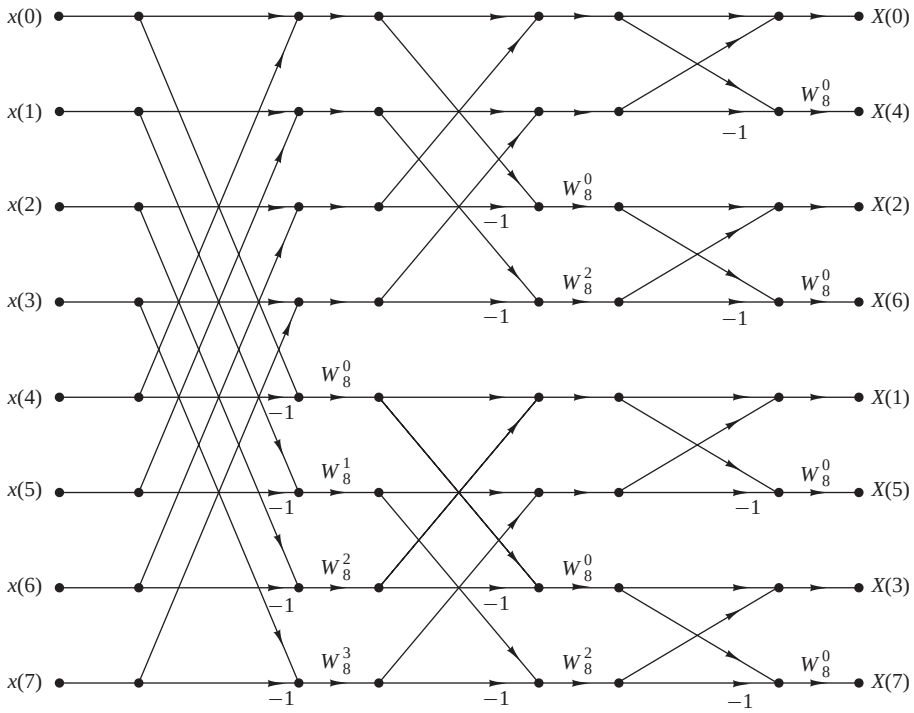


Figura 8.1.11. Algoritmo FFT de diezmado en frecuencia para $N = 8$ puntos.

$$\begin{bmatrix} X(0,q) \\ X(1,q) \\ X(2,q) \\ X(3,q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_N^0 F(0,q) \\ W_N^q F(1,q) \\ W_N^{2q} F(2,q) \\ W_N^{3q} F(3,q) \end{bmatrix} \tag{8.1.43}$$

La operación mariposa en base 4 se describe en la Figura 8.1.12(a) y de forma más compacta en la Figura 8.1.12(b). Observe que, dado que $W_N^0 = 1$, cada operación mariposa implica tres multiplicaciones complejas y doce sumas complejas.

Este procedimiento de diezmado temporal puede repetirse de forma recursiva ν veces. Así, el algoritmo FFT resultante consta de ν etapas, donde cada etapa consta de $N/4$ operaciones mariposa. En consecuencia, el grueso del cálculo del algoritmo es $3\nu N/4 = (3N/8)\log_2 N$ multiplicaciones complejas y $(3N/2)\log_2 N$ sumas complejas. Observe que el número de multiplicaciones se reduce en un 25 %, pero el número de sumas ha aumentado en un 50 %, de $N\log_2 N$ a $(3N/2)\log_2 N$.

Sin embargo, es interesante observar que realizando las sumas en dos pasos, es posible reducir el número de las mismas por operación mariposa de 12 a 8. Esto puede conseguirse expresando la matriz de la transformación lineal de la Ecuación (8.1.43) como un producto de dos matrices como sigue:

$$\begin{bmatrix} X(0,q) \\ X(1,q) \\ X(2,q) \\ X(3,q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -j \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_N^0 F(0,q) \\ W_N^q F(1,q) \\ W_N^{2q} F(2,q) \\ W_N^{3q} F(3,q) \end{bmatrix} \tag{8.1.44}$$

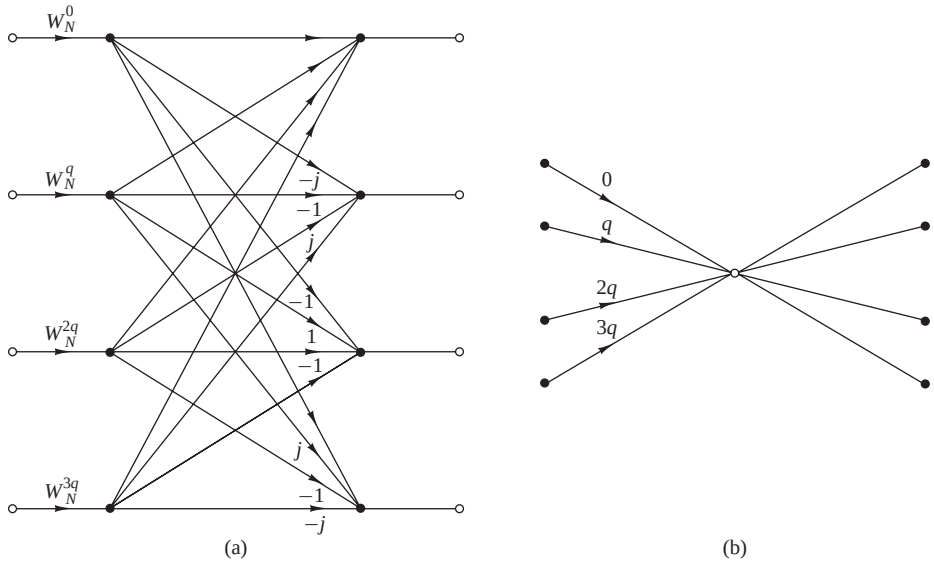


Figura 8.1.12. Operación mariposa básica en el algoritmo FFT base 4.

Ahora cada multiplicación matricial implica cuatro sumas para un total de ocho sumas. Luego el número total de sumas complejas se reduce a $N\log_2 N$, lo que es idéntico al algoritmo FFT base 2. El ahorro en cálculos supone una reducción del 25 % en el número de multiplicaciones complejas.

En la Figura 8.1.13 se ilustra un algoritmo FFT base 4 de diezmado temporal para $N = 16$. Observe que en este algoritmo, la secuencia de entrada está en orden normal mientras que la DFT de salida se ha reestructurado. En el algoritmo FFT base 4, donde el factor de diezmado es 4, el orden de la secuencia diezmada puede determinarse invirtiendo el orden del número que representa el índice n en el sistema de numeración cuaternario (es decir, el sistema de numeración basado en los dígitos 0, 1, 2, 3).

Se puede obtener un algoritmo FFT de diezmado en frecuencia seleccionando $L = N/4$, $M = 4$; l, $p = 0, 1, \ldots, N/4-1$; m, $q = 0, 1, 2, 3$; $n = (N/4)m + l$; y $k = 4p + q$. Con esta elección de parámetros, la ecuación general dada por (8.1.15) puede expresarse como

$$X(p,q) = \sum_{l=0}^{(N/4)-1} G(l,q)W_{N/4}^{lp} \tag{8.1.45}$$

donde

$$G(l,q) = W_N^{lq}F(l,q), \qquad \begin{array}{l} q = 0,1,2,3 \\ l = 0,1,\ldots,\dfrac{N}{4}-1 \end{array} \tag{8.1.46}$$

y

$$F(l,q) = \sum_{m=0}^{3} x(l,m)W_4^{mq}, \qquad \begin{array}{l} q = 0,1,2,3 \\ l = 0,1,2,3,\ldots,\dfrac{N}{4}-1 \end{array} \tag{8.1.47}$$

Observe que $X(p,q) = X(4p+q)$, $q = 0, 1, 2, 3$. En consecuencia, la DFT de N puntos se divide en cuatro transformadas DFT de $N/4$ puntos y, por tanto, obtenemos un algoritmo FFT de diezmado en frecuencia. Los cálculos indicados en la Ecuaciones (8.1.46) y (8.1.47) definen la operación mariposa básica en base 4 para el algoritmo de diezmado en frecuencia. Observe que las multiplicaciones por los factores W_N^{lq} se hacen después

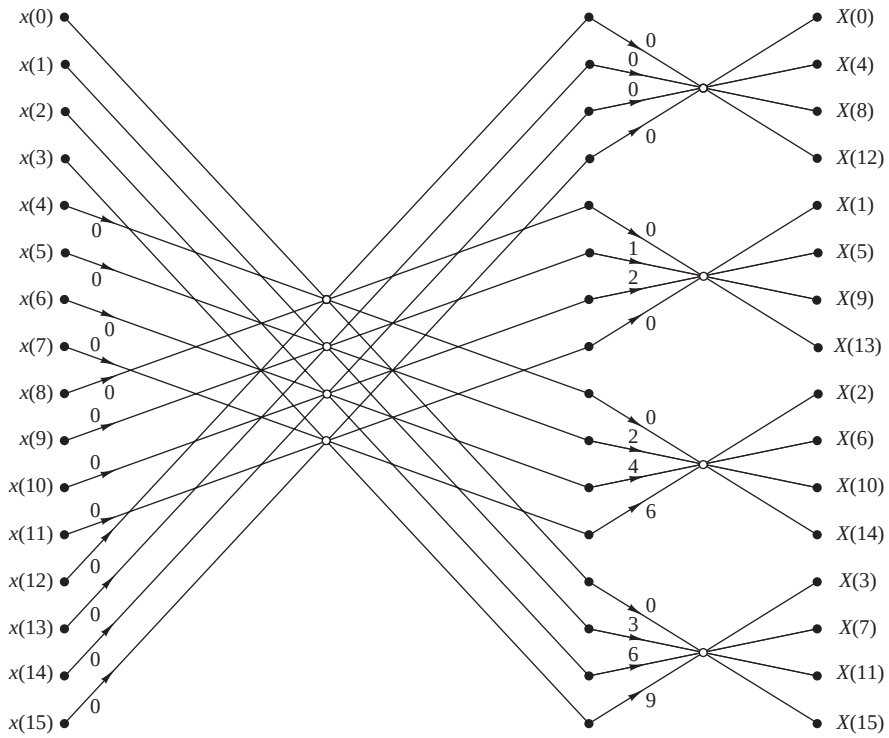


Figura 8.1.13. Algoritmo en base 4 de diezmado temporal para dieciseis puntos con la entrada en orden normal y la salida en orden inverso. Los multiplicadores enteros indicados en la gráfica representan los exponentes de W_{16}.

de la combinación de los puntos de datos $x(l,m)$, al igual que en el caso del algoritmo de diezmado en frecuencia en base 2.

En la Figura 8.1.14 se muestra un algoritmo de diezmado en frecuencia de 16 puntos en base 4. La entrada está en orden normal y la salida en orden binario inverso. Presenta exactamente la misma complejidad de cálculo que el algoritmo FFT en base 4 de diezmado temporal.

Con propósitos de ilustración, vamos a deducir de nuevo el algoritmo de diezmado en frecuencia en base 4 separando la fórmula de la DFT de N puntos en cuatro transformadas DFT más pequeñas. Así,

$$\begin{aligned}
X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \\
&= \sum_{n=0}^{N/4-1} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n=N/4}^{N/2-1} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n=N/2}^{3N/4-1} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n=3N/4}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \\
&= \sum_{n=0}^{N/4-1} x(n) W_N^{kn} + W_N^{Nk/4} \sum_{n=0}^{N/4-1} x\left(n+\frac{N}{4}\right) W_N^{kn} \\
&+ W_N^{kN/2} \sum_{n=0}^{N/4-1} x\left(n+\frac{N}{2}\right) W_N^{nk} + W_N^{3kN/4} \sum_{n=0}^{N/4-1} x\left(n+\frac{3N}{4}\right) W_N^{kn}
\end{aligned} \tag{8.1.48}$$

A partir de la definición de los factores de fase, tenemos

$$W_N^{kN/4} = (-j)^k, \qquad W_N^{Nk/2} = (-1)^k, \qquad W_N^{3Nk/4} = (j)^k \tag{8.1.49}$$

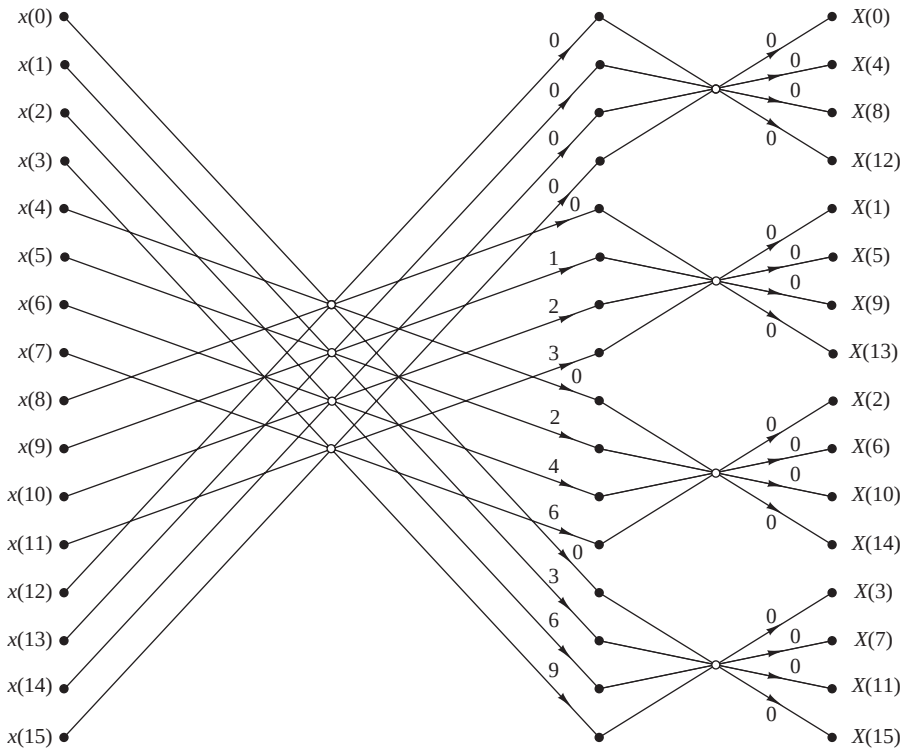


Figura 8.1.14. Algoritmo de diezmado en frecuencia en base 4 de dieciseis puntos con la entrada en orden normal y la salida en orden binario inverso.

Sustituyendo a continuación (8.1.49) en (8.1.48), obtenemos

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/4-1} \left[x(n) + (-j)^k x\left(n+\frac{N}{4}\right) + (-1)^k x\left(n+\frac{N}{4}\right) + (j)^k x\left(n+\frac{3N}{4}\right) \right] W_N^{nk} \tag{8.1.50}$$

La relación dada en (8.1.50) no es una DFT de $N/4$ puntos porque el factor de fase depende de N y no de $N/4$. Para convertirla en una DFT de $N/4$ puntos, subdividimos la secuencia DFT en cuatro secuencias de $N/4$ puntos: $X(4k)$, $X(4k+1)$, $X(4k+2)$ y $X(4k+3)$, $k = 0, 1, \ldots, N/4-1$. Así, obtenemos la siguiente DFT diezmada en frecuencia en base 4

$$X(4k) = \sum_{n=0}^{N/4-1} \left[x(n) + x\left(n+\frac{N}{4}\right) + x\left(n+\frac{N}{2}\right) + x\left(n+\frac{3N}{4}\right) \right] W_N^0 W_{N/4}^{kn} \tag{8.1.51}$$

$$X(4k+1) = \sum_{n=0}^{N/4-1} \left[x(n) - jx\left(n+\frac{N}{4}\right) - x\left(n+\frac{N}{2}\right) + jx\left(n+\frac{3N}{4}\right) \right] W_N^n W_{N/4}^{kn} \tag{8.1.52}$$

$$X(4k+2) = \sum_{n=0}^{N/4-1} \left[x(n) - x\left(n+\frac{N}{4}\right) + x\left(n+\frac{N}{2}\right) - x\left(n+\frac{3N}{4}\right) \right] W_N^{2n} W_{N/4}^{kn} \tag{8.1.53}$$

$$X(4k+3) = \sum_{n=0}^{N/4-1} \left[x(n) + jx\left(n+\frac{N}{4}\right) - x\left(n+\frac{N}{2}\right) - jx\left(n+\frac{3N}{4}\right) \right] W_N^{3n} W_{N/4}^{kn} \tag{8.1.54}$$

donde hemos utilizado la propiedad $W_N^{4kn} = W_{N/4}^{kn}$. Observe que la entrada a cada DFT de $N/4$ puntos es una combinación lineal de cuatro muestras de la señal escaladas por un factor de fase. Este procedimiento se repite v veces, donde $v = \log_4 N$.

8.1.5 Algoritmos FFT de base dividida

Una inspección del diagrama de flujo del método de diezmado en frecuencia en base 2, mostrado en la Figura 8.1.11, indica que los puntos impares de la DFT pueden calcularse independientemente de los puntos impares. Esto sugiere la posibilidad de utilizar métodos de cálculo distintos para partes independientes del algoritmo, con el objetivo de reducir el número de cálculos. Los algoritmos FFT de base dividida (SRFFT, *split-radix FFT*) aplican esta idea utilizando la descomposición en base 2 y en base 4 en el mismo algoritmo FFT.

Vamos a examinar este método con un algoritmo SRFFT de diezmado en frecuencia, que se debe a Duhamel (1986). Recordemos en primer lugar que en el algoritmo FFT de diezmado en frecuencia en base 2, las muestras impares de la DFT de N puntos están dadas por

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_{N/2}^{nk}, \qquad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \tag{8.1.55}$$

Observe que estos puntos de la DFT se pueden obtener de una DFT de $N/2$ puntos sin ninguna multiplicación adicional. En consecuencia, para este cálculo basta con el algoritmo en base 2.

Las muestras impares $\{X(2k+1)\}$ de la DFT requieren la premultiplicación de la secuencia de entrada por los factores de fase W_N^n. Para estas muestras, una descomposición en base 4 da lugar a un cálculo eficiente, porque la DFT de cuatro puntos tiene la mayor mariposa libre de multiplicaciones. Por tanto, podemos demostrar que utilizar una base mayor que 4 no lleva acarreada una reducción significativa en la complejidad del cálculo.

Si empleamos un algoritmo FFT de diezmado en frecuencia en base 4 para las muestras impares de la DFT de N, obtenemos las siguientes DFT de $N/4$:

$$\begin{aligned} X(4k+1) = \sum_{n=0}^{N/4-1} & \{[x(n) - x(n+N/2)] \\ & - j[x(n+N/4) - x(n+3N/4)]\} W_N^n W_{N/4}^{kn} \end{aligned} \tag{8.1.56}$$

$$\begin{aligned} X(4k+3) = \sum_{n=0}^{N/4-1} & \{[x(n) - x(n+N/2)] \\ & + j[x(n+N/4) - x(n+3N/4)]\} W_N^{3n} W_{N/4}^{kn} \end{aligned} \tag{8.1.57}$$

Por tanto, la DFT de N puntos se descompone en una DFT de $N/2$ puntos sin factores de fase adicionales y dos DFT de $N/4$ puntos con factores de fase. La DFT de N puntos se obtiene por el uso sucesivo de estas descomposiciones hasta la última etapa. Por tanto, obtenemos un algoritmo SRFFT de diezmado en frecuencia.

La Figura 8.1.15 muestra el diagrama de flujo de un algoritmo SRFFT de diezmado en frecuencia de 32 puntos in situ. En la etapa A del cálculo para $N = 32$, los 16 puntos superiores forman la secuencia

$$g_0(n) = x(n) + x(n+N/2), \qquad 0 \le n \le 15 \tag{8.1.58}$$

Ésta es la secuencia que se necesita para el cálculo de $X(2k)$. Los siguientes ocho puntos definen la secuencia

$$g_1(n) = x(n) - x(n+N/2), \qquad 0 \le n \le 7 \tag{8.1.59}$$

Los ocho puntos inferiores forman la secuencia $jg_2(n)$, donde

$$g_2(n) = x(n+N/4) - x(n+3N/4), \qquad 0 \le n \le 7 \tag{8.1.60}$$

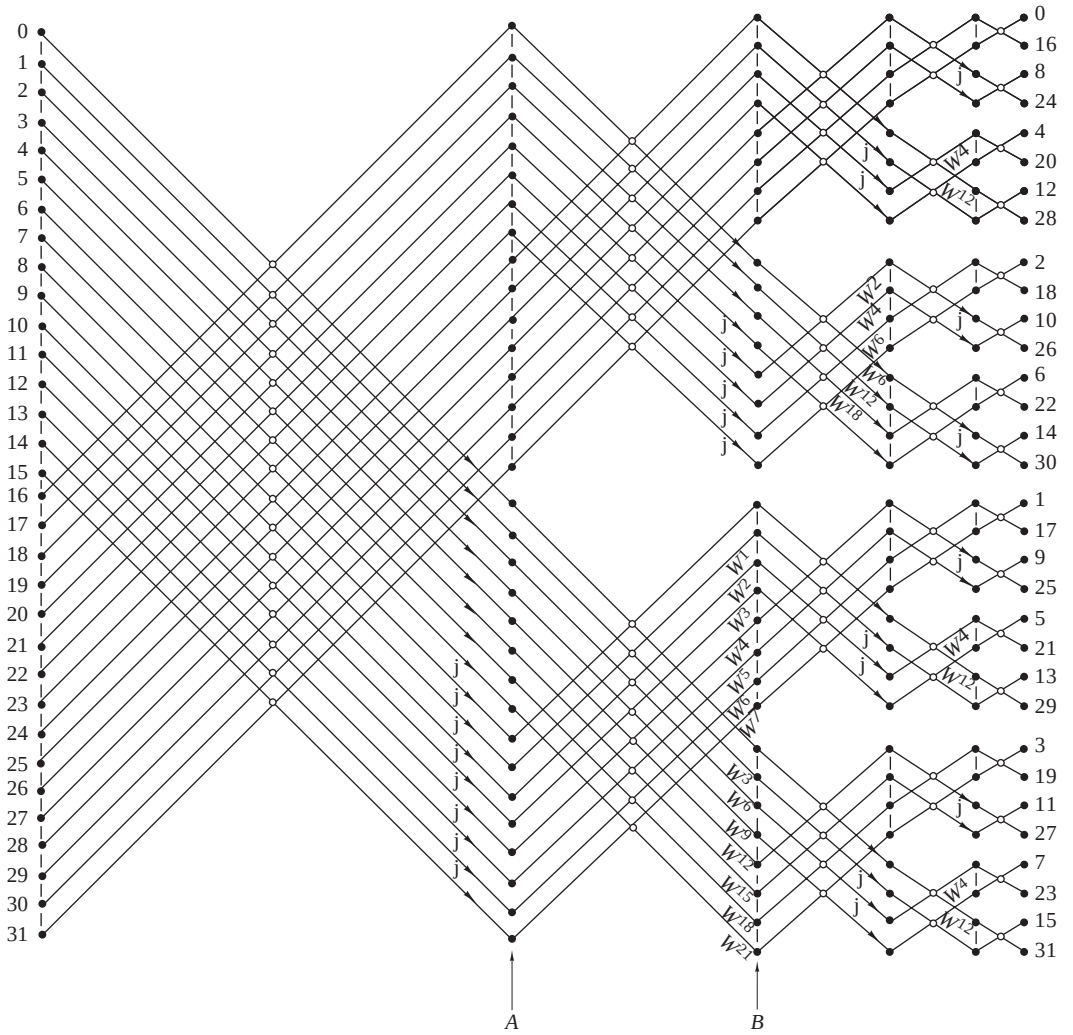


Figura 8.1.15. Algoritmos FFT de base dividida de longitud 32 de Duhamel (1986); reimpreso con permiso del IEEE.

Las secuencias $g_1(n)$ y $g_2(n)$ se utilizan con el cálculo de $X(4k+1)$ y $X(4k+3)$. Por tanto, en la etapa A, hemos completado el primer diezmado para la componente en base 2 del algoritmo. En la etapa B, los ochos puntos inferiores constituyen el cálculo de $[g_1(n)+jg_2(n)]W_{32}^{3n}$, $0 \le n \le 7$, lo que se emplea para determinar $X(4k+3)$, $0 \le k \le 7$. Los ocho puntos inferiores siguientes constituyen el cálculo de $[g_1(n)-jg_2(n)]\ W_{32}^{n}$, $0 \le n \le 7$, que se utiliza para calcular $X(4k+1)$, $0 \le k \le 7$. Así, en la etapa B, hemos completado el primer diezmado del algoritmo en base 4, que resulta en dos secuencias de 8 puntos. Así, la operación básica mariposa del algoritmo SRFFT tiene la forma de "L" mostrada en la Figura 8.1.16.

A continuación repetimos los pasos del cálculo anterior. Comenzamos en la etapa A con los primeros 16 puntos y repetimos la descomposición para la DFT de 16 puntos. En otras palabras, descomponemos el cálculo en una DFT en base 2 de ocho puntos y dos DFT en base 4 de cuatro puntos. Así, en la etapa B, los ocho puntos superiores constituyen la secuencia (con $N = 16$)

$$g_0'(n) = g_0(n) + g_0(n+N/2), \qquad 0 \le n \le 7 \tag{8.1.61}$$

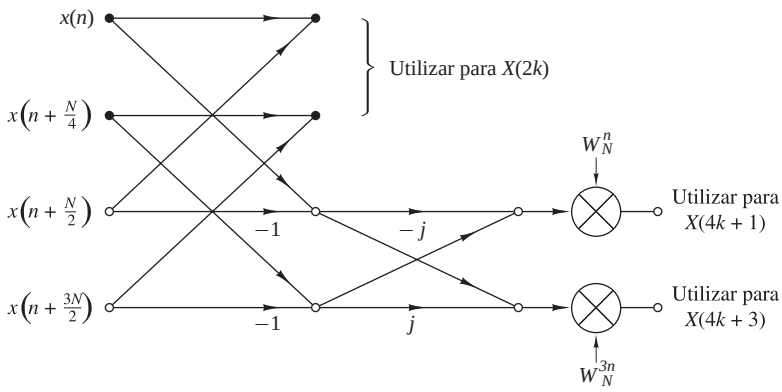


Figura 8.1.16. Mariposa para el algoritmo SRFFT.

y los siguientes ocho puntos definen las dos secuencias de cuatro puntos $g_1'(n)$ y $jg_2'(n)$, donde

$$\begin{aligned} g_1'(n) &= g_0(n) - g_0(n+N/2), \qquad 0 \le n \le 3 \\ g_2'(n) &= g_0(n+N/4) - g_0(n+3N/4), \qquad 0 \le n \le 3 \end{aligned} \tag{8.1.62}$$

Los 16 puntos inferiores de la etapa B definen dos DFT de ocho puntos. Por tanto, cada DFT de ocho puntos se descompone en una DFT en base 2 de cuatro puntos y una DFT en base 4 de cuatro puntos. En la etapa final, los cálculos implican la combinación de secuencias de dos puntos.

La Tabla 8.2 presenta una comparación del número de sumas y multiplicaciones reales *no triviales* necesarias para calcular una DFT de N puntos con datos complejos utilizando transformadas FFT en base 2, base 4 y de base dividida. Observe que el algoritmo SRFFT requiere el número mínimo de multiplicaciones y sumas. Por ello, es el método preferido en muchas aplicaciones prácticas.

Price (1990) desarrolló otro tipo de algoritmo SRFFT. Su relación con el algoritmo de Duhamel que acabamos de ver puede establecerse observando que los términos de las DFT en base 4 $X(4k+1)$ y $X(4k+3)$ implican

	Multiplicaciones reales				Sumas reales			
N	Base 2	Base 4	Base 8	Base dividida	Base 2	Base 4	Base 8	Base dividida
16	24	20		20	152	148		148
32	88			68	408			388
64	264	208	204	196	1,032	976	972	964
128	712			516	2,504			2,308
256	1,800	1,392		1,284	5,896	5,488		5,380
512	4,360		3,204	3,076	13,566		12,420	12,292
1,024	10,248	7,856		7,172	30,728	28,336		27,652

Fuente: Extraido de (1986).

Tabla 8.2. Número de sumas y multiplicaciones no triviales para calcular una DFT de N puntos complejos.

las DFT de $N/4$ puntos de las secuencias $[g_1(n) - jg_2(n)]W_N^n$ y $[g_1(n) + jg_2(n)]W_N^{3n}$, respectivamente. En efecto, las secuencias $g_1(n)$ y $g_2(n)$ están mutliplicadas por el factor (vector) $(1, -j) = (1, W_{32}^8)$ y por W_N^n para calcular $X(4k+1)$, mientras que el cálculo de $X(4k+3)$ requiere los factores $(1, j) = (1, W_{32}^{-8})$ y W_N^{3n}. En lugar de ello, se pueden reordenar los cálculos de modo que el factor para $X(4k+3)$ sea $(-j, -1) = -(W_{32}^{-8}, 1)$. Como resultado de esta rotación de fase, los factores de fase para el cálculo de $X(4k+3)$ se convierten exactamente en los mismos que los de $X(4k+1)$, excepto en que se aplican en orden inverso. Por ejemplo, en la etapa B de la Figura 8.1.15, los factores de fase $W^{21}, W^{18}, \ldots, W^3$ se reemplazan por $W^1, W^2, \ldots, W^7$, respectivamente. Esta simetría de reflexión se produce en cada etapa del algoritmo. Como consecuencia, el número de factores de fase que se tienen que calcular y almacenar se reduce en un factor de 2 en comparación con el algoritmo de Duhamel. El algoritmo resultante es el algoritmo "espejo" para la FFT (MFFT, *mirror FFT*).

Puede obtenerse un ahorro adicional de factor 2 en lo que se refiere al almacenamiento de los factores de fase, introduciendo un desplazamiento de fase de 90° en el punto medio de cada matriz de factores, la cual puede borrarse, si es necesario, en la salida del cálculo de la SRFFT. La incorporación de esta mejora en la SRFFT (o la MFFT) da lugar a otro algoritmo, también debido a Price (1990), conocido como algoritmo de "fase" para la FFT (PFFT).

8.1.6 Implementación de los algoritmos FFT

Ahora que hemos descrito los algoritmos FFT en base 2 y en base 4, consideremos algunas de las cuestiones relativas a la implementación. Nuestros comentarios se aplican directamente a los algoritmos en base 2, aunque podríamos hacer comentarios similares sobre los algoritmos en base 4 y de orden superior.

Básicamente, el algoritmo FFT en base 2 consiste en tomar dos puntos de datos de la memoria en un instante, realizar los operaciones mariposa y devolver los valores resultantes a la memoria. Este procedimiento se repite muchas veces ($(N \log_2 N)/2$ veces) en el cálculo de una DFT de N puntos.

Las operaciones mariposa necesitan los factores de fase $\{W_N^k\}$ en varias etapas en orden natural o en orden binario inverso. En una implementación eficiente del algoritmo, los factores de fase se calculan una vez y se almacenan en una tabla, bien en orden normal o en orden binario inverso, dependiendo de la implementación específica del algoritmo.

El requisito de memoria es otro factor que hay que tener en cuenta. Si los cálculos se efectúan in situ, el número de posiciones de memoria necesario es $2N$, ya que se trata de números complejos. Sin embargo, podemos duplicar la memoria a 4N, simplificando así las operaciones de indexación y control en los algoritmos FFT. En este caso, simplemente alternaremos en el uso de dos conjuntos de posiciones de memoria de una etapa del algoritmo FFT a la otra. Duplicar la memoria también nos permite disponer de la secuencia de entrada y de la secuencia de salida en orden normal.

Existen otras muchas cuestiones relacionadas con la implementación que hacen referencia a la indexación, la inversión de bits y el grado de paralelismo en los cálculos. Estas cuestiones también son una función del algoritmo concreto y del tipo de implementación, es decir, implementación hardware o software. En las implementaciones basadas en máquinas pequeñas que emplean aritmética de punto fijo o de punto flotante, aparece también el problema de los errores de redondeo en los cálculos. Este tema se aborda en la Sección 8.4.

Aunque los algoritmos FFT descritos anteriormente se han presentado en el contexto de calcular la DFT de forma eficiente, también se pueden emplear para calcular la IDFT, que es

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \tag{8.1.63}$$

La única diferencia entre las dos transformadas es el factor de normalización $1/N$ y el signo del factor de fase W_N. En consecuencia, un algoritmo FFT para calcular la DFT puede convertirse en un algoritmo FFT para

calcular la IDFT, cambiando el signo de todos los factores de fase y dividiendo la salida final del algoritmo entre N.

De hecho, si tomamos el algoritmo de diezmado temporal que hemos descrito en la Sección 8.1.3, invertimos la dirección de la gráfica de flujo, cambiamos el signo de los factores de fase, intercambiamos la salida y la entrada y, por último, dividimos la entrada entre N, obtenemos un algoritmo FFT de diezmado en frecuencia para calcular la IDFT. Por el contrario, si comenzamos con el algoritmo FFT de diezmado en frecuencia descrito en la Sección 8.1.3 y repetimos los cambios enumerados más arriba, obtenemos un algoritmo FFT de diezmado temporal para calcular la IDFT. De este modo tan simple podemos emplear los algoritmos FFT para calcular la IDFT.

Por último, fíjese en que en nuestro estudio de los algoritmos FFT hemos hecho hincapié en los algoritmos en base 2, en base 4 y de base dividida, ya que éstos son, con mucho, los más ampliamente utilizados. Cuando el número de puntos de datos no es una potencia de 2 o de 4, basta con rellenar la secuencia $x(n)$ con ceros, tal que $N = 2^v$ o $N = 4^v$.

La medida de la complejidad de los algoritmos de la FFT que hemos visto se encuentra en el número necesario de operaciones aritméticas (multiplicaciones y sumas). Aunque éste es un marco de trabajo muy importante para la complejidad del cálculo, hay otras cuestiones que se deben considerar en la implementación práctica de los algoritmos para la FFT. Entre éstas se incluyen la arquitectura del procesador, el conjunto de instrucciones disponible, las estructuras de datos para almacenar los factores de fase y otras cuestiones.

En las computadoras de propósito general, en las que el coste de las operaciones númericas domina, los algoritmos FFT en base 2, base 4 y de base dividida son buenos candidatos. Sin embargo, en el caso de procesadores de señales digitales de propósito especial, que se caracterizan por la operación de multiplicar y acumular en un único ciclo, por el direccionamiento en orden binario inverso y por un alto grado de paralelismo de instrucciones, la regularidad estructural del algoritmo es tan importante como la complejidad aritmética. Por tanto, en los procesadores DSP, los algoritmos FFT de diezmado en frecuencia en base 2 o base 4 son preferibles en términos de velocidad y precisión. La estructura irregular de la SRFFT puede resultar menos adecuada para la implementación en procesadores digitales de señales. La regularidad estructural también es importante en la implementación de algoritmos FFT sobre procesadores de vectores, multiprocesadores y en VLSI. La comunicación interprocesadores es una consideración importante en estas implementaciones sobre procesadores paralelo.

Resumiendo, hemos presentado varias cuestiones importantes sobre la implementación de los algoritmos FFT. Los avances en la tecnología del tratamiento digital de señales, tanto en el campo hardware como en el de software, continuarán influyendo en la elección entre los distintos algoritmos FFT en las aplicaciones prácticas.

8.2 Aplicaciones de los algoritmos FFT

Los algoritmos FFT descritos en la sección anterior tienen aplicación en una amplia variedad de áreas, entre las que se incluyen el filtrado lineal, la correlación y el análisis de espectros. Básicamente, el algoritmo FFT se utiliza como un medio eficiente para calcular la DFT y la IDFT.

En esta sección consideramos el uso del algoritmo de la FFT en el filtrado lineal y el cálculo de la correlación cruzada de dos secuencias. El uso de la FFT en la estimación del esprectro se aborda en el Capítulo 14. Además, hemos ilustrado cómo mejorar la eficiencia del algoritmo FFT formando secuencias complejas a partir de las secuencias reales antes de calcular la DFT.

8.2.1 Cálculo eficiente de la DFT de dos secuencias reales

El algoritmo FFT está diseñado para realizar multiplicaciones y sumas complejas, incluso aunque los datos de entrada sean reales. La razón básica de esta situación es que los factores de fase son complejos y, por tanto, después de la primera etapa del algoritmo, todas las variables son básicamente valores complejos.

En vista del hecho de que el algoritmo puede manejar secuencias de entrada complejas, podemos aplicar esta capacidad en el cálculo de la DFT de dos secuencias reales.

Suponga que $x_1(n)$ y $x_2(n)$ son dos secuencias reales de longitud N, y sea $x(n)$ una secuencia compleja definida como

$$x(n) = x_1(n) + jx_2(n), \qquad 0 \le n \le N-1 \tag{8.2.1}$$

La operación de la DFT es lineal y, por tanto, la DFT de $x(n)$ se puede expresar como

$$X(k) = X_1(k) + jX_2(k) \tag{8.2.2}$$

Las secuencias $x_1(n)$ y $x_2(n)$ pueden escribirse en términos de $x(n)$ como sigue:

$$x_1(n) = \frac{x(n) + x^*(n)}{2} \tag{8.2.3}$$

$$x_2(n) = \frac{x(n) - x^*(n)}{2j} \tag{8.2.4}$$

Luego las DFT de $x_1(n)$ y $x_2(n)$ son

$$X_1(k) = \frac{1}{2}\{\mathrm{DFT}[x(n)] + \mathrm{DFT}[x^*(n)]\} \tag{8.2.5}$$

$$X_2(k) = \frac{1}{2j}\{\mathrm{DFT}[x(n)] - \mathrm{DFT}[x^*(n)]\} \tag{8.2.6}$$

Recuerde que la DFT de $x^*(n)$ es $X^*(N-k)$. Por tanto,

$$X_1(k) = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)] \tag{8.2.7}$$

$$X_2(k) = \frac{1}{j2}[X(k) - X^*(N-k)] \tag{8.2.8}$$

Así, realizando una única DFT sobre la secuencia compleja $x(n)$, hemos obtenido la DFT de dos secuencias reales con sólo unos pocos cálculos adicionales que proporcionan $X_1(k)$ y $X_2(k)$ a partir de $X(k)$ utilizando (8.2.7) y (8.2.8).

8.2.2 Cálculo eficiente de la DFT de una secuencia real de 2N puntos

Suponemos que $g(n)$ es una secuencia real de $2N$ puntos. Ahora vamos a demostrar cómo obtener la DFT de $2N$ puntos de $g(n)$ a partir del cálculo de una DFT de N puntos que utiliza datos complejos. En primer lugar, definimos

$$\begin{aligned} x_1(n) &= g(2n) \\ x_2(n) &= g(2n+1) \end{aligned} \tag{8.2.9}$$

De este modo hemos subdividido la secuencia real de $2N$ puntos en dos secuencias reales de N. Ahora podemos aplicar el método descrito en la sección anterior.

Sea $x(n)$ la secuencia compleja de N puntos

$$x(n) = x_1(n) + jx_2(n) \tag{8.2.10}$$

A partir de los resultados de la sección anterior, tenemos

$$\begin{aligned} X_1(k) &= \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)] \\ X_2(k) &= \frac{1}{2j}[X(k) - X^*(N-k)] \end{aligned} \tag{8.2.11}$$

Por último, debemos expresar la DFT de $2N$ puntos en función de las DFT de dos DFT de N puntos, $X_1(k)$ y $X_2(k)$. Para ello, continuamos con el algoritmo DDT de diezmado en frecuencia, así

$$\begin{aligned} G(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} g(2n)W_{2N}^{2nk} + \sum_{n=0}^{N-1} g(2n+1)W_{2N}^{(2n+1)k} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)W_N^{nk} + W_{2N}^{k}\sum_{n=0}^{N-1} x_2(n)W_N^{nk} \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} G(k) &= X_1(k) + W_2^k N X_2(k), \qquad k = 0,1,\ldots,N-1 \\ G(k+N) &= X_1(k) - W_2^k N X_2(k), \qquad k = 0,1,\ldots,N-1 \end{aligned} \tag{8.2.12}$$

De este modo hemos calculado la DFT de una secuencia real de $2N$ puntos a partir de una DFT de N puntos y algunos cálculos adicionales como se indica en (8.2.11) y (8.2.12).

8.2.3 Uso de los algoritmos FFT en el filtrado lineal y la correlación

Una aplicación importante de los algoritmos FFT es el filtrado lineal FIR de secuencias de datos largas. En el Capítulo 7, hemos descrito dos métodos, el método de solapamiento y suma, y el método de solapamiento y almacenar, para el filtrado de una secuencia de datos larga con un filtro FIR basado en el uso de la DFT. En esta sección, hemos considerado el uso de estos dos métodos junto con el algoritmo FFT para calcular la DFT y la IDFT.

Sea $h(n)$, $0 \leq n \leq M-1$, la respuesta al impulso unitario del filtro FIR y sea $x(n)$ la secuencia de datos de entrada. El tamaño de bloque del algoritmo FFT es N, donde $N = L+M-1$ y L es el número de muestras de datos nuevas que el filtro va a procesar. Supongamos que para cualquier valor dado de M, el número L de muestras de datos se selecciona de modo que N sea una potencia de 2. En esta exposición vamos a considerar sólo los algoritmos en base 2.

La DFT de N puntos de $h(n)$, que está rellenada con $L-1$ ceros, se designa por $H(k)$. Este cálculo se realiza una vez por medio de la FFT y los N números complejos resultantes se almacenan. Más específicamente, supongamos que se utiliza el algoritmo FFT de diezmado en frecuencia para calcular $H(k)$. Esto proporciona $H(k)$ en orden binario inverso, que es la forma en la que se almacena en memoria.

En el método de solapamiento y almacenar, los primeros $M-1$ puntos de datos de cada bloque son los últimos $M-1$ puntos de datos de los bloques de datos anteriores. Cada bloque de datos contiene L nuevos puntos de datos, tal que $N = L+M-1$. La DFT de N puntos de cada bloque se obtiene gracias al algoritmo FFT. Si se emplea un algoritmo FFT de diezmado en frecuencia, no es necesario reordenar el bloque de datos de entrada y los valores de la DFT se obtienen en orden binario inverso. Puesto que éste es exactamente el orden de $H(k)$, podemos multiplicar la DFT de los datos, por ejemplo $X_m(k)$, por $H(k)$, y así el resultado

$$Y_m(k) = H(k)X_m(k)$$

también estará en orden binario inverso.

La DFT inversa (IDFT) puede calcularse utilizando un algoritmo FFT que tome la entrada en orden binario inverso y genere una salida en orden normal. Por tanto, no es necesario reordenar ningún bloque de datos al calcular la DFT o la IDFT.

Si se emplea el método de solapamiento y suma para llevar a cabo un filtrado lineal, el método de cálculo que utiliza el algoritmo FFT es básicamente el mismo. La única diferencia es que los bloques de datos de N puntos constan de L nuevos puntos de datos y $M-1$ ceros adicionales. Después de calcular la IDFT para cada bloque de datos, los bloques de N puntos filtrados se solapan como se ha dicho en la Sección 7.3.2, y los $M-1$ puntos de datos que se solapan entre registros de salida sucesivos se suman.

Valoremos ahora la complejidad de cálculo del método FFT utilizado para el filtrado lineal. El cálculo de $H(k)$ se hace una vez, por lo que es insignificante y puede ignorarse. Cada FFT requiere $(N/2)\log_2 N$ multiplicaciones complejas y $N\log_2 N$ sumas. Dado que la FFT se realiza dos veces, una para la DFT y otra para la IDFT, el grueso del cálculo es $N\log_2 N$ multiplicaciones complejas y $2N\log_2 N$ sumas. También son necesarias N multiplicaciones complejas y $N-1$ sumas para calcular $Y_m(k)$. Por tanto, tenemos $(N\log_2 2N)/L$ multiplicaciones complejas por punto de datos de salida y, aproximadamente, $(2N\log_2 2N)/L$ sumas por punto de datos de salida. El método de solapamiento y suma implica un incremento de $(M-1)/L$ operaciones de suma.

Si comparamos, vemos que una realización de la forma directa del filtro FIR necesita M multiplicaciones reales por punto de salida si el filtro no es de fase lineal y $M/2$ si es de fase lineal (simétrico). Además, el número de sumas necesario es $M-1$ por punto de salida (*véase* la Sección 10.2).

Es interesante comparar la eficiencia del algoritmo FFT con la realización de la forma directa del filtro FIR. Vamos a centrarnos en el número de multiplicaciones, ya que consumen más tiempo que las sumas. Suponga que $M = 128 = 2^7$ y $N = 2^\nu$. Así, el número de multiplicaciones complejas por punto de salida para un tamaño de FFT de $N = 2^\nu$ es

$$\begin{aligned} c(\nu) &= \frac{N\log_2 2N}{L} = \frac{2^\nu(\nu+1)}{N-M+1} \\ &\approx \frac{2^\nu(\nu+1)}{2^\nu - 2^7} \end{aligned}$$

Los valores de $c(\nu)$ para valores diferentes de ν se proporcionan en la Tabla 8.3. Observe que existe un valor óptimo de ν que minimiza $c(\nu)$. Para el filtro FIR de tamaño $M = 128$, el valor óptimo se obtiene en $\nu = 10$.

Es preciso destacar que $c(\nu)$ representa el número de multiplicaciones complejas para el método basado en la FFT. El número de multiplicaciones reales es cuatro veces este número. Sin embargo, incluso si el filtro FIR tiene fase lineal (*véase* la Sección 10.2), el número de cálculos por punto de salida es aún menor que con el método basado en la FFT. Además, la eficiencia del método basado en la FFT puede mejorarse calculando simultáneamente la DFT de dos bloques de datos sucesivos, siguiendo el método que acabamos de describir. En consecuencia, el método basado en la FFT es superior desde el punto de vista de cálculo cuando la longitud del filtro es relativamente grande.

El cálculo de la correlación cruzada entre dos secuencias utilizando el algoritmo FFT es similar al problema del filtrado lineal que acabamos de describir. En las aplicaciones prácticas que implican la correlación cruzada, al menos una de las secuencias tiene duración finita y es similar a la respuesta al impulso del filtro FIR. La segunda secuencia puede ser una secuencia de larga duración que contenga la secuencia deseada distorsionada por ruido aditivo. Por tanto, la segunda secuencia es como la entrada del filtro FIR. Aplicando una inversión temporal a la primera secuencia y calculando su DFT, hemos reducido la correlación cruzada a un problema

Tamaño de la FFT $\nu = \log_2 N$	$c(\nu)$ Número de multiplicaciones complejas por punto de salida
9	13.3
10	12.6
11	12.8
12	13.4
14	15.1

Tabla 8.3. Complejidad de cálculo.

equivalente de convolución (es decir, un problema de filtro FIR lineal). Por tanto, la metodología que hemos desarrollado para el filtrado lineal FIR usando la FFT se aplica directamente.

8.3 Método de filtrado lineal para calcular la DFT

El algoritmo FFT toma N puntos de los datos de entrada y produce una secuencia de salida de N puntos que corresponden a la DFT de los datos de entrada. Como hemos demostrado, el algoritmo FFT en base 2 calcula la DFT haciendo $(N/2)\log_2 N$ multiplicaciones y $N\log_2 N$ sumas para una secuencia de N puntos.

En algunas aplicaciones sólo se precisa un número seleccionado de valores de la DFT y no la DFT completa. En un caso así, el algoritmo FFT puede no ser tan eficiente como el cálculo directo de los valores deseados de la DFT. De hecho, cuando el número deseado de valores de la DFT es menor que $\log_2 N$, un cálculo directo de los mismos resulta más eficiente.

El cálculo directo de la DFT puede formularse como una operación de filtrado lineal sobre la secuencia de datos de entrada. Como vamos a demostrar, el filtro lineal toma la forma de un banco paralelo de resonadores, donde cada resonador selecciona una de las frecuencias $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$ correspondientes a las N frecuencias de la DFT.

Existen otras aplicaciones en las que necesitaremos evaluar la transformada z de una secuencia de duración finita en puntos distintos a los de la circunferencia unidad. Si el conjunto de puntos deseados en el plano z posee cierta regularidad, también es posible expresar el cálculo de la transformada z como una operación de filtrado lineal. En esta conexión, introducimos otro algoritmo, conocido como algoritmo de la transformada z *chirp*, que es adecuado para evaluar la transformada z de un conjunto de datos sobre diferentes contornos en el plano z. Este algoritmo también se formula como un filtrado lineal de un conjunto de datos de entrada. En consecuencia, el algoritmo FFT puede emplearse para calcular la transformada z chirp y, por tanto, evaluar la transformada z en varios contornos contenidos en el plano z, incluyendo la circunferencia unidad.

8.3.1 Algoritmo de Goertzel

El algoritmo de Goertzel utiliza la periodicidad de los factores de fase $\{W_N^k\}$ y nos permite expresar el cálculo de la DFT como una operación de filtrado lineal. Dado que $W_N^{-kN} = 1$, podemos multiplicar la DFT por este factor. Por tanto,

$$X(k) = W_N^{-kN} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{km} = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{-k(N-m)} \tag{8.3.1}$$

Observe que la Ecuación (8.3.1) tiene la forma de una operación de convolución. Por tanto, si definimos la secuencia $y_k(n)$ como

$$y_k(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{-k(n-m)} \tag{8.3.2}$$

entonces es evidente que $y_k(n)$ es la convolución de la secuencia de entrada de duración finita $x(n)$ de longitud N con un filtro que tiene una respuesta al impulso

$$h_k(n) = W_N^{-kn} u(n) \tag{8.3.3}$$

La salida de este filtro en $n = N$ proporciona el valor de la DFT a la frecuencia $\omega_k = 2\pi k/N$. Es decir,

$$X(k) = y_k(n)|_{n=N} \tag{8.3.4}$$

como se puede comprobar comparando (8.3.1) con (8.3.2).

El filtro con la respuesta al impulso $h_k(n)$ tiene la función del sistema

$$H_k(z) = \frac{1}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \tag{8.3.5}$$

Este filtro tiene un polo sobre la circunferencia unidad a la frecuencia $\omega_k = 2\pi k/N$. Luego se puede calcular la DFT completa pasando el bloque de datos de entrada por un banco paralelo de N filtros de un solo polo (resonadores), donde cada filtro tiene un polo en la frecuencia correspondiente de la DFT.

En lugar de calcular la DFT mediante convolución empleando la Ecuación (8.3.2), podemos utilizar la ecuación en diferencias correspondiente al filtro dada por (8.3.5) para calcular recursivamente $y_k(n)$. Así, tenemos

$$y_k(n) = W_N^{-k} y_k(n-1) + x(n), \qquad y_k(-1) = 0 \tag{8.3.6}$$

La salida deseada es $X(k) = y_k(N)$, para $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Para efectuar este cálculo, podemos hacer el cálculo una vez y almacenar los W_N^{-k} factores de fase.

Las multiplicaciones y sumas complejas de (8.3.6) pueden evitarse combinando parejas de resonadores que tengan polos complejos conjugados. Esto nos lleva a filtros de dos polos con funciones del sistema de la forma

$$H_k(z) = \frac{1 - W_N^k z^{-1}}{1 - 2\cos(2\pi k/N) z^{-1} + z^{-2}} \tag{8.3.7}$$

La realización de la forma directa II del sistema se ilustra en la Figura 8.3.1 y se describe mediante las ecuaciones en diferencias

$$v_k(n) = 2\cos\frac{2\pi k}{N} v_k(n-1) - v_k(n-2) + x(n) \tag{8.3.8}$$

$$y_k(n) = v_k(n) - W_N^k v_k(n-1) \tag{8.3.9}$$

con las condiciones iniciales $v_k(-1) = v_k(-2) = 0$.

La relación recursiva dada en (8.3.8) se itera para $n = 0, 1, \ldots, N$, pero la Ecuación (8.3.9) se evalúa una sola vez en el instante $n = N$. Cada iteración requiere una multiplicación real y dos sumas. En consecuencia, para una secuencia de entrada real $x(n)$, este algoritmo requiere $N+1$ multiplicaciones reales para proporcionar no sólo $X(k)$ sino también, teniendo en cuenta la simetría, el valor de $X(N-k)$.

El algoritmo de Goertzel es especialmente atractivo cuando la DFT se va a calcular para un número relativamente pequeño M de valores, donde $M \leq \log_2 N$. En otro caso, el algoritmo FFT es un método más eficiente.

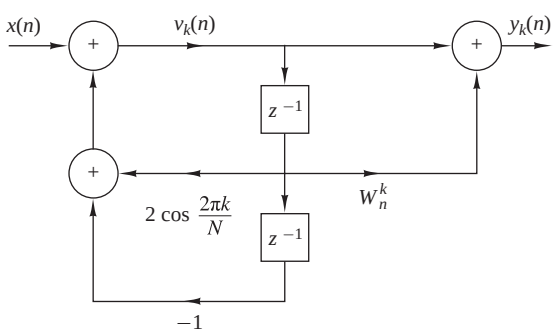


Figura 8.3.1. Realización de la forma directa II de resonadores de dos polos para calcular la DFT.

8.3.2 Algoritmo de la transformada *z chirp*

Hemos visto la DFT de una secuencia de datos de N puntos $x(n)$ como la transformada z de $x(n)$ evaluada en N puntos igualmente espaciados sobre la circunferencia unidad. También la hemos visto como N muestras igualmente espaciadas de la transformada de Fourier de la secuencia de datos $x(n)$. En esta sección, vamos a abordar la evaluación de $X(z)$ sobre otros contornos en el plano z, incluyendo la circunferencia unidad.

Suponga que deseamos calcular los valores de la transformada z de $x(n)$ en un conjunto de puntos $\{z_k\}$. Luego,

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z_k^{-n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, L-1 \tag{8.3.10}$$

Por ejemplo, si el contorno es una circunferencia de radio r y z_k son los N puntos igualmente espaciados, luego

$$\begin{aligned} z_k &= re^{j2\pi kn/N}, & k &= 0, 1, 2, \ldots, N-1 \\ X(z_k) &= \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) r^{-n}] e^{-j2\pi kn/N}, & k &= 0, 1, 2, \ldots, N-1 \end{aligned} \tag{8.3.11}$$

En este caso, el algoritmo FFT puede aplicarse sobre la secuencia modificada $x(n)r^{-n}$.

De forma más general, supongamos que los puntos z_k del plano z caen sobre un arco que comienza en un determinado punto

$$z_0 = r_0 e^{j\theta_0}$$

y gira formando una espiral, bien hacia el origen, bien hacia fuera, de manera que los puntos $\{z_k\}$ están definidos como

$$z_k = r_0 e^{j\theta_0} (R_0 e^{j\phi_0})^k, \qquad k = 0, 1, \ldots, L-1 \tag{8.3.12}$$

Observe que si $R_0 < 1$, los puntos caen sobre un contorno que gira en espiral hacia el origen, y si $R_0 > 1$, el contorno gira alejándose del origen. Si $R_0 = 1$, el contorno es un arco circular de radio r_0. Si $r_0 = 1$ y $R_0 = 1$, el contorno es un arco de la circunferencia unidad. Este último contorno nos permitirá calcular el contenido en frecuencia de la secuencia $x(n)$ en un conjunto denso de L frecuencias en el rango cubierto por el archo sin tener que calcular una DFT grande, es decir, una DFT de la secuencia $x(n)$ rellenada con muchos ceros para obtener la resolución deseada en frecuencia. Por último, si $r_0 = R_0 = 1$, $\theta_0 = 0$, $\phi_0 = 2\pi/N$, y $L = N$, el contorno será la circunferencia unidad completa y las frecuencias serán las de la DFT. En la Figura 8.3.2 se muestran los distintos contornos.

Si sustituimos los puntos $\{z_k\}$ de la Ecuación (8.3.12) en la expresión de la transformada z, obtenemos

$$\begin{aligned} X(z_k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z_k^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) (r_0 e^{j\theta_0})^{-n} V^{-nk} \end{aligned} \tag{8.3.13}$$

donde, por definición,

$$V = R_0 e^{j\phi_0} \tag{8.3.14}$$

Podemos expresar (8.3.13) como una convolución, teniendo en cuenta que

$$nk = \frac{1}{2}[n^2 + k^2 - (k-n)^2] \tag{8.3.15}$$

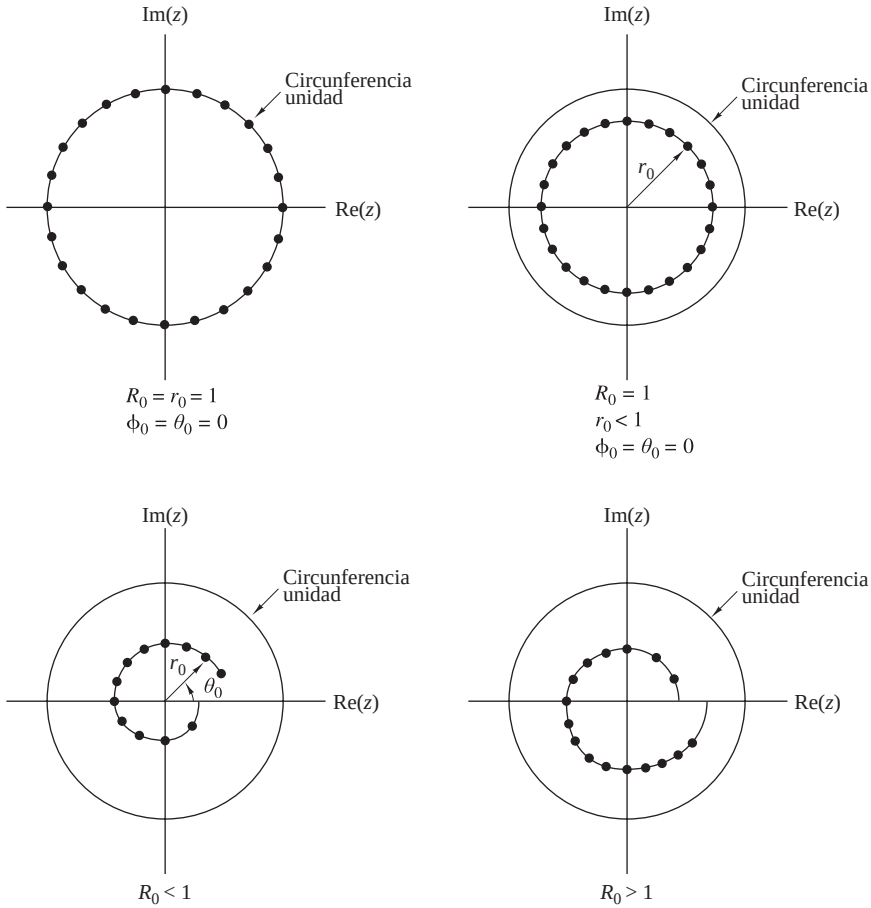


Figura 8.3.2. Algunos ejemplos de contornos en los que se puede evaluar la transformada z.

Sustituyendo (8.3.15) en (8.3.13), obtenemos

$$X(z_k) = V^{-k^2/2} \sum_{n=0}^{N-1} [x(n)(r_0 e^{j\theta_0})^{-n} V^{-n^2/2}] V^{(k-n)^2/2} \tag{8.3.16}$$

Definimos una nueva secuencia $g(n)$ como

$$g(n) = x(n)(r_0 e^{j\theta_0})^{-n} V^{-n^2/2} \tag{8.3.17}$$

Luego podemos expresar (8.3.16) de la forma siguiente

$$X(z_k) = V^{-k^2/2} \sum_{n=0}^{N-1} g(n) V^{(k-n)^2/2} \tag{8.3.18}$$

El sumatorio de (8.3.18) puede interpretarse con la convolución de la secuencia $g(n)$ con la respuesta al impulso $h(n)$ de un filtro, donde

$$h(n) = V^{n^2/2} \tag{8.3.19}$$

En consecuencia, (8.3.18) puede expresarse como

$$\begin{aligned} X(z_k) &= V^{-k^2/2} y(k) \\ &= \frac{y(k)}{h(k)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, L-1 \end{aligned} \tag{8.3.20}$$

donde $y(k)$ es la salida del filtro

$$y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) h(k-n), \qquad k = 0, 1, \ldots, L-1 \tag{8.3.21}$$

Observe que tanto $h(n)$ como $g(n)$ son secuencias complejas.

La secuencia $h(n)$ con $R_0 = 1$ tiene la forma de una exponencial compleja cuyo argumento es $\omega n = n^2 \phi_0/2 = (n\phi_0/2)n$. La magnitud $n\phi_0/2$ representa la frecuencia de la señal exponencial compleja, que aumenta linealmente con el tiempo. Tales señales se emplean en sistemas de radar y se denominan *señales chirp*. Por tanto, la transformada z evaluada según (8.3.18) se denomina *transformada z chirp*.

La convolución lineal dada en (8.3.21) se obtiene de forma más eficiente utilizando el algoritmo FFT. La secuencia $g(n)$ tiene longitud N. Sin embargo, $h(n)$ tiene duración infinita. Afortunadamente, sólo se necesita una parte de $h(n)$ para calcular los L valores de $X(z)$.

Como calculamos la convolución dada por (8.3.21) a través de la FFT, vamos a considerar la convolución circular de la secuencia de N puntos $g(n)$ con una sección de M puntos de $h(n)$, donde $M > N$. En un caso así, sabemos que los primeros $N-1$ puntos contienen *aliasing* y que los restantes $M-N+1$ puntos son idénticos al resultado que obtendríamos calculando la convolución lineal de $h(n)$ con $g(n)$. En vista de esto, seleccionamos una DFT de tamaño

$$M = L + N - 1$$

que proporcionaría L puntos válidos y $N-1$ puntos distorsionados por el *aliasing*.

La sección de $h(n)$ que se necesita para realizar este cálculo se corresponde con los valores de $h(n)$ para $-(N-1) \le n \le (L-1)$, cuya longitud es $M = L+N-1$, como se puede ver fijándose en (8.3.21). Definimos la secuencia $h_1(n)$ de longitud M como

$$h_1(n) = h(n-N+1), \qquad n = 0, 1, \ldots, M-1 \tag{8.3.22}$$

y calculamos su DFT de M puntos a través del algoritmo FFT para obtener $H_1(k)$. A partir de $x(n)$ calculamos $g(n)$ como especifica (8.3.17), rellenamos $g(n)$ con $L-1$ ceros, y calculamos su DFT de M puntos para obtener $G(k)$. La IDFT del producto $Y_1(k) = G(k)H_1(k)$ proporciona la secuencia de M puntos $y_1(n)$, $n = 0, 1, \ldots, M-1$. Los primeros $N-1$ puntos de $y_1(n)$ están distorsionados por el *aliasing* y se descartan. Los valores deseados son $y_1(n)$ para $N-1 \le n \le M-1$, que corresponden con el intervalo $0 \le n \le L-1$ de (8.3.21), es decir,

$$y(n) = y_1(n+N-1), \qquad n = 0, 1, \ldots, L-1 \tag{8.3.23}$$

Alternativamente, definimos una secuencia $h_2(n)$ como

$$h_2(n) = \begin{cases} h(n), & 0 \le n \le L-1 \\ h(n-N-L+1), & L \le n \le M-1 \end{cases} \tag{8.3.24}$$

La DFT de M puntos de $h_2(n)$ proporciona $H_2(k)$, la cual si se multiplica por $G(k)$ proporciona $Y_2(k) = G(k)H_2(k)$. La IDFT de $Y_2(k)$ produce la secuencia $y_2(n)$ para $0 \le n \le M-1$. Los valores deseados de $y_2(n)$ se encuentran en el rango $0 \le n \le L-1$, esto es,

$$y(n) = y_2(n), \qquad n = 0, 1, \ldots, L-1 \tag{8.3.25}$$

Por último, los valores complejos $X(z_k)$ se calculan dividiendo $y(k)$ entre $h(k)$, $k = 0, 1, \ldots, L-1$, como especifica la Ecuación (8.3.20).

En general, la complejidad de cálculo del algoritmo de la transformada *z chirp* descrita anteriormente es del orden de $M \log_2 M$ multiplicaciones complejas, donde $M = N + L - 1$. Este número debe compararse con el producto, $N \cdot L$, el número de cálculos necesarios en la evaluación directa de la transformada *z*. Evidentemente, si L es pequeño, el cálculo directo es más eficiente. Sin embargo, si L es grande, entonces el algoritmo de la transformada *z chirp* resulta más eficiente.

El método de la transformada *z chirp* se ha implementado por hardware para calcular la DFT de señales. Para efectuar este cálculo, seleccionamos $r_0 = R_0 = 1$, $\theta_0 = 0$, $\phi_0 = 2\pi/N$ y $L = N$. En este caso,

$$\begin{aligned} V^{-n^2/2} &= e^{-j\pi n^2/N} \\ &= \cos\frac{\pi n^2}{N} - j\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi n^2}{N} \end{aligned} \tag{8.3.26}$$

El filtro *chirp* con la respuesta al impulso

$$\begin{aligned} h(n) &= V^{n^2/2} \\ &= \cos\frac{\pi n^2}{N} + j\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi n^2}{N} \\ &= h_r(n) + jh_i(n) \end{aligned} \tag{8.3.27}$$

se ha implementado como una pareja de filtros FIR con coeficientes $h_r(n)$ y $h_i(n)$, respectivamente. En la práctica, para los filtros FIR se han empleado tanto dispositivos SAW *surface acoustic wave, onda acústica superficial* como dispositivos CCD *charge coupled devices, dispositivo de carga acoplada*. Las secuencias coseno y seno dadas en (8.3.26) necesarias para las premultiplicaciones y postmultiplicaciones normalmente se almacenan en memorias de sólo lectura ROM (*read-only memory*). Además, observe que si sólo se desea obtener el módulo de la DFT, las postmultiplicaciones no son necesarias. En este caso,

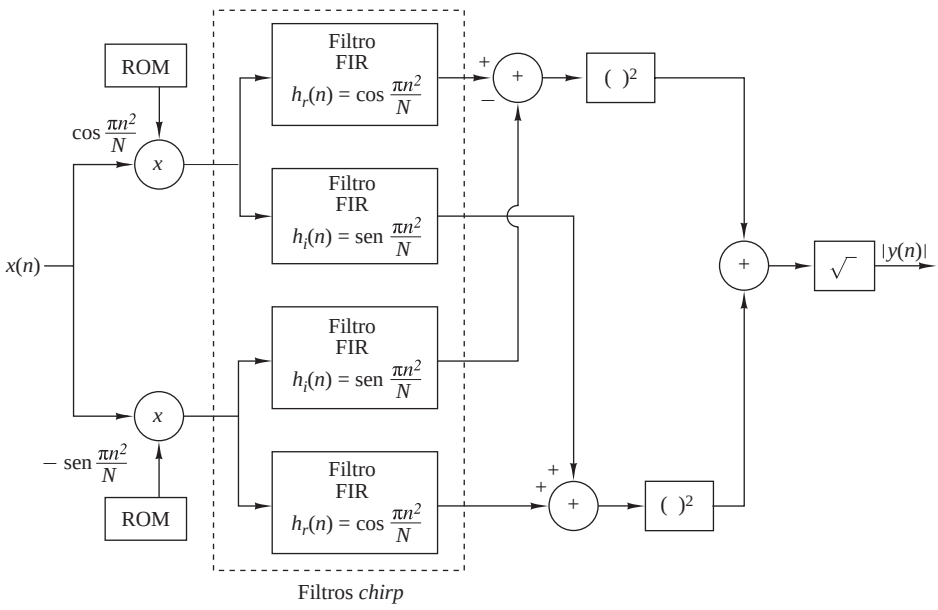


Figura 8.3.3. Diagrama de bloques que ilustra la implementación de la transformada *z chirp* para calcular la DFT (sólo el módulo).

$$|X(z_k)| = |y(k)|, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{8.3.28}$$

como se ilustra en la Figura 8.3.3. Por tanto, se ha implementado el método de filtrado lineal FIR utilizando la tranformada *z chirp* para calcular la DFT.

8.4 Efectos de cuantificación en el cálculo de la DFT[1]

[1]Como hemos observado anteriormente, la DFT desempeña un papel importante en muchas aplicaciones de tratamiento digital de señales, entre las que se incluyen el filtrado FIR, el cálculo de la correlación entre señales y el análisis espectral. Por esta razón, es importante conocer el efecto de los errores de cuantificación en este cálculo. En particular, consideremos el efecto de los errores de redondeo debidos a las multiplicaciones realizadas en la DFT utilizando aritmética de punto fijo.

El modelo que adoptaremos para caracterizar los errores de redondeo en las multiplicaciones es el modelo de ruido blanco aditivo que se emplea en el análisis estadístico de los errores de redondeo en los filtros IIR y FIR (*véase* la Figura 9.6.8). Aunque el análisis estadístico se realiza por redondeo, puede modificarse fácilmente aplicando truncamiento en artimética en complemento a dos (*véase* la Sección 9.4.3).

De especial interés es el análisis de los errores de redondeo en el cálculo de la DFT a través del algoritmo FFT. Sin embargo, en primer lugar, vamos a establecer un marco de trabajo para determinar los errores de redondeo en el cálculo directo de la DFT.

8.4.1 Efectos de cuantificación en el cálculo directo de la DFT

Dada una secuencia de duración finita $\{x(n)\}$, $0 \le n \le N-1$, la DFT de $\{x(n)\}$ se define como

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{8.4.1}$$

donde $W_N = e^{-j2\pi/N}$. Suponga que, en general, $\{x(n)\}$ es una secuencia compleja. Suponga también que las componentes real e imaginaria de $\{x(n)\}$ y $\{W_N^{kn}\}$ están representadas mediante b bits. Luego el cálculo del producto $x(n)W_N^{kn}$ requiere cuatro multiplicaciones reales. Cada una de estas multiplicaciones se redondea de $2b$ bits a b bits, y son por tanto cuatro los errores de cuantificación para cada multiplicación compleja.

En el cálculo directo de la DFT, hay N multiplicaciones complejas por cada punto de la DFT. Por tanto, el número total de multiplicaciones reales en el cálculo de un sólo punto de la DFT es $4N$. En consecuencia, existen $4N$ errores de cuantificación.

Evaluemos la varianza de los errores de cuantificación en un cálculo de la DFT con aritmética de punto fijo. En primer lugar, vamos a hacer las siguientes suposiciones sobre las propiedades estadísticas de los errores de cuantificación.

1. Los errores de cuantificación debidos al redondeo son variables aleatorias uniformemente distribuidas en el intervalo $(-\Delta/2, \Delta/2)$ donde $\Delta = 2^{-b}$.
2. Los $4N$ errores de cuantificación están mutuamente incorrelados.
3. Los $4N$ errores de cuantificación están incorrelados con la secuencia $\{x(n)\}$.

Dado que cada uno de los errores de cuantificación tiene una varianza

[1]Es recomendable que el lector lea la Sección 9.5 antes de abordar esta sección.

$$\sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{2^{-2b}}{12} \tag{8.4.2}$$

la varianza de los errores de cuantificación de $4N$ multiplicaciones es

$$\begin{aligned} \sigma_q^2 &= 4N\sigma_e^2 \\ &= \frac{N}{3} \cdot 2^{-2b} \end{aligned} \tag{8.4.3}$$

Por tanto, la varianza del error de cuantificación es proporcional al tamaño de la DFT. Observe que cuando N es una potencia de 2 (es decir, $N = 2^v$), la varianza puede expresarse como

$$\sigma_q^2 = \frac{2^{-2(b-v/2)}}{3} \tag{8.4.4}$$

Esta expresión implica que cada incremento cuádruple en el valor de N de la DFT requiere un bit adicional para compensar los errores de cuantificación adicionales.

Para evitar el desbordamiento, la secuencia de entrada de la DFT requiere que se le aplique un factor de escala. Evidentemente, un límite superior de $|X(k)|$ es

$$|X(k)| \leq \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)| \tag{8.4.5}$$

Si el rango dinámico de la suma es $(-1, 1)$, entonces $|X(k)| < 1$ requiere que

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)| < 1 \tag{8.4.6}$$

Si inicialmente $|x(n)|$ se escala de modo que $|x(n)| < 1$ para todo n, entonces cada punto de la secuencia puede dividirse entre N para asegurar que la Ecuación (8.4.6) se satisfaga.

El escalado aplicado por (8.4.6) es extremadamente severo. Por ejemplo, suponga que la secuencia $\{x(n)\}$ es ruido blanco y, después de aplicarla un factor de escala, cada valor $|x(n)|$ de la secuencia queda uniformemente distribuido en el intervalo $(-1/N, 1/N)$. Luego la varianza de la secuencia es

$$\sigma_x^2 = \frac{(2/N)^2}{12} = \frac{1}{3N^2} \tag{8.4.7}$$

y la varianza de los coeficientes de la DFT de salida $|X(k)|$ es

$$\sigma_X^2 = N\sigma_x^2 = \frac{1}{3N} \tag{8.4.8}$$

Luego la relación de potencia señal–ruido es

$$\frac{\sigma_X^2}{\sigma_q^2} = \frac{2^{2b}}{N^2} \tag{8.4.9}$$

Observe que el cambio de escala es responsable de la reducción de la relación SNR en un factor N y la combinación de los errores de cuantificación y debidos al cambio de escala dan lugar a una reducción total que es proporcional a N^2. Por tanto, el cambio de escala de la secuencia de entrada $\{x(n)\}$ para satisfacer (8.4.6) impone una importante penalización sobre la relación señal–ruido de la DFT.

EJEMPLO 8.4.1

Utilice la Ecuación (8.4.9) para determinar el número de bits necesarios para calcular la DFT de una secuencia de 1024 puntos con una relación SNR de 30 dB.

Solución. El tamaño de la secuencia es $N = 2^{10}$. Por tanto, la SNR es

$$10\log_{10}\frac{\sigma_X^2}{\sigma_q^2} = 10\log_{10}2^{2b-20}$$

Para una SNR de 30 dB, tenemos

$$\begin{aligned} 3(2b-20) &= 30 \\ b &= 15 \text{ bits} \end{aligned}$$

Observe que los 15 bits determinan la precisión tanto para la multiplicación como para la suma.

En lugar de aplicar el cambio de escala a la secuencia de entrada $\{x(n)\}$, suponga que simplemente necesitamos que se cumpla $|x(n)| < 1$. A continuación, debemos proporcionar un rango dinámico lo suficientemente grande para la suma como para que se cumpla que $|X(k)| < N$. En este caso, la varianza de la secuencia $\{|x(n)|\}$ es $\sigma_x^2 = \frac{1}{3}$ y, por tanto, la varianza de $|X(k)|$ es

$$\sigma_X^2 = N\sigma_x^2 = \frac{N}{3} \tag{8.4.10}$$

En consecuencia, la relación SNR es

$$\frac{\sigma_X^2}{\sigma_q^2} = 2^{2b} \tag{8.4.11}$$

Si repetimos el cálculo del Ejemplo 8.4.1, comprobamos que el número de bits necesario para conseguir una relación SNR de 30 dB es $b = 5$ bits. Sin embargo, necesitamos 10 bits adicionales para el acumulador (el sumador) con el fin de acomodar el incremento del rango dinámico para la suma. Aunque no hemos conseguido ninguna reducción en el rango dinámico para la suma, hemos conseguido reducir la precisión en la multiplicación de 15 bits a 5 bits, lo que es muy significativo.

8.4.2 Errores de cuantificación en los algoritmos FFT

Como hemos mencionado, los algoritmos FFT requieren muchas menos multiplicaciones que el cálculo directo de la DFT. En vista de esto, podemos concluir que el cálculo de la DFT a través de un algoritmo FFT dará lugar a muchos menos errores de cuantificación. Lamentablemente, éste no es el caso, como vamos a demostrar.

Considere que se emplea aritmética de punto fijo en el cálculo de un algoritmo FFT en base 2. Específicamente, seleccionamos el algoritmo de diezmado temporal en base 2 ilustrado en la Figura 8.4.1 para el caso de $N = 8$. Los resultados sobre los errores de cuantificación que podemos obtener para este algoritmo FFT en base 2 son típicos de los resultados obtenidos con algoritmos en base 2 o superior.

Observe que cada operación mariposa implica una multiplicación compleja o, lo que es equivalente, cuatro multiplicaciones reales. Ignoramos el hecho de que algunas operaciones mariposa contienen una multiplicación trivial por ± 1. Si consideramos las operaciones mariposa que afectan al cálculo de cualquier valor de la DFT, comprobamos que, en general, existen $N/2$ puntos en la primera etapa de la FFT, $N/4$ en la segunda etapa, $N/8$ en la tercera etapa, etc., hasta alcanzar la última etapa, en la que sólo hay uno. En consecuencia, el número de operaciones mariposa por punto de salida es

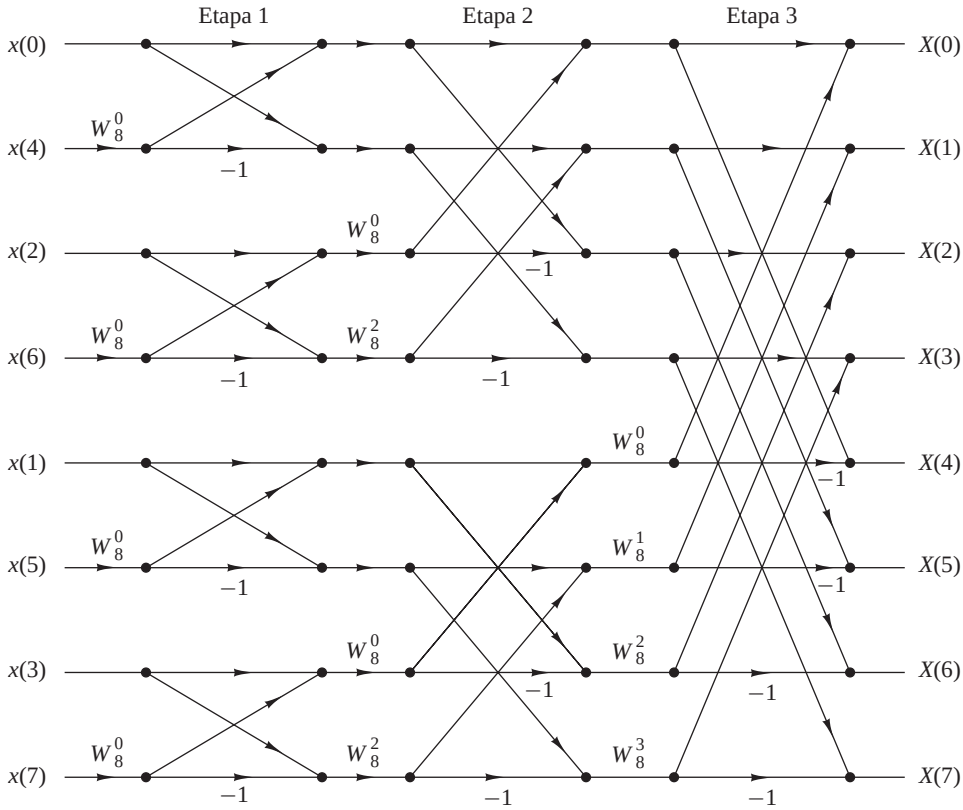


Figura 8.4.1. Algoritmo FFT de diezmado temporal.

$$
\begin{aligned}
2^{\nu-1}+2^{\nu-2}+\cdots+2+1 &= 2^{\nu-1}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}\right] \\
&= 2^{\nu}[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu}] = N-1
\end{aligned}
\tag{8.4.12}
$$

Por ejemplo, las operaciones mariposa que afectan al cálculo de $X(3)$ en el algoritmo FFT de ocho puntos de la Figura 8.4.1 se muestran en la Figura 8.4.2.

Los errores de cuantificación que aparecen en cada operación mariposa se propagan hasta la salida. Observe que los errores de cuantificación de la primera etapa se propagan a través de $(\nu-1)$ etapas, los correspondientes a la segunda etapa se propagan a través de $(\nu-2)$ etapas, etc. Dado que estos errores de cuantificación se propagan a traves de las etapas subsiguientes, están desfasados (giro de la fase) de acuerdo con los factores de fase W_N^{kn}. Estas rotaciones de fase no cambian las propiedades estadísticas de los errores de cuantificación y, en particular, la varianza de cada error de cuantificación no varía.

Si suponemos que los errores de cuantificación de cada operación mariposa no están correlados con los errores de otras operaciones de este tipo, entonces son $4(N-1)$ errores los que afectan a la salida de cada punto de la FFT. En consecuencia, la varianza del error de cuantificación total en la salida es

$$
\sigma_q^2 = 4(N-1)\frac{\Delta^2}{12} \approx \frac{N\Delta^2}{3} \tag{8.4.13}
$$

donde $\Delta = 2^{-b}$. Por tanto,

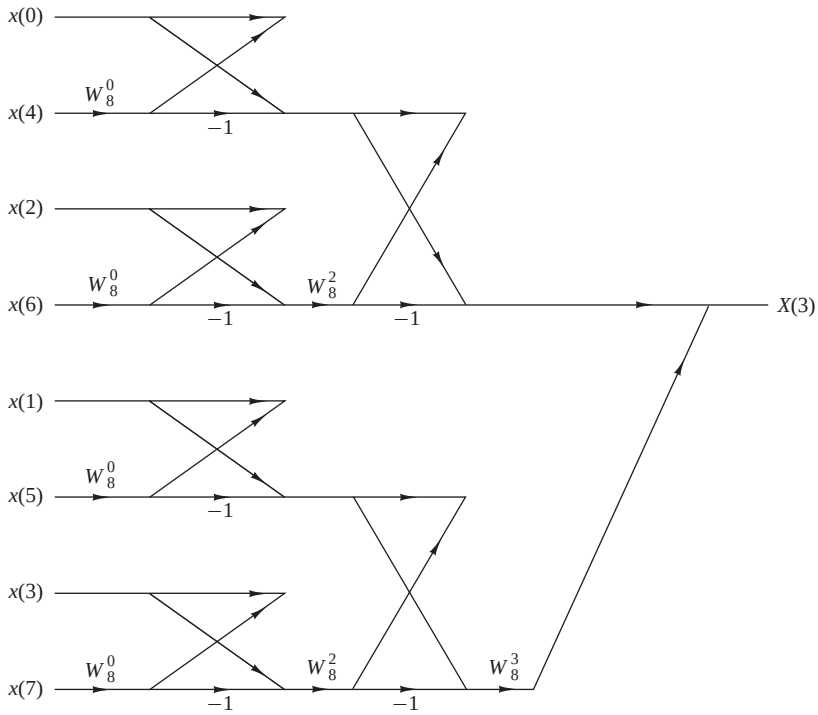


Figura 8.4.2. Operaciones mariposa que afectan al cálculo de $X(3)$.

$$\sigma_q^2 = \frac{N}{3} \cdot 2^{-2b} \tag{8.4.14}$$

Éste es exactamente el mismo resultado que el que hemos obtenido en el cálculo directo de la DFT.

El resultado de (8.4.14) no debe sorprendernos. De hecho, el algoritmo FFT no reduce el número de multiplicaciones necesarias para calcular un solo punto de la DFT. Sin embargo, aplica la propiedad de periodicidad de W_N^{kn} y reduce el número de multiplicaciones del cálculo del bloque completo de N puntos de la DFT.

Como en el caso del cálculo directo de la DFT, tenemos que aplicar un cambio de escala a la secuencia de entrada para evitar el desbordamiento. Recuerde que si $|x(n)| < 1/N$, $0 \le n \le N-1$, entonces $|X(k)| < 1$ para $0 \le k \le N-1$. Así el desbordamiento se evita. Con este cambio de escala, las relaciones dadas por (8.4.7), (8.4.8) y (8.4.9) obtenidas anteriormente en el cálculo directo de la DFT, aplican también el algoritmo FFT. En consecuencia, se obtiene la misma relación SNR para la FFT.

Dado que los algoritmos FFT constan de una secuencia de etapas, donde cada etapa contiene operaciones mariposa que implican parejas de puntos, es posible establecer una estrategia de cambio de escala que no sea tan estricta como la de dividir cada punto de entrada entre N. Esta estrategia de cambio de escala alternativa está motivada por la observación de que los valores intermedios $|X_n(k)|$ en las etapas $n = 1, 2, \ldots, \nu$ del algoritmo FFT satisfacen las condiciones (*véase* el Problema 8.35)

$$\begin{aligned} \max[|X_{n+1}(k)|, |X_{n+1}(l)|] &\ge \max[|X_n(k)|, |X_n(l)|] \\ \max[|X_{n+1}(k)|, |X_{n+1}(l)|] &\le 2\max[|X_n(k)|, |X_n(l)|] \end{aligned} \tag{8.4.15}$$

En vista de estas relaciones, podemos distribuir el cambio de escala total de $1/N$ en cada una de las etapas del algoritmo FFT. En particular, si $|x(n)| < 1$, aplicamos un factor de escala $\frac{1}{2}$ a la primera etapa de modo

que $|x(n)| < \frac{1}{2}$. Entonces la salida de cada etapa siguiente en el algoritmo FFT queda escalada por $\frac{1}{2}$, de modo que después de ν etapas hemos obtenido un factor de escala global $(\frac{1}{2})^{\nu} = 1/N$. De esta manera se evita el desbordamiento en el cálculo de la DFT.

Este procedimiento de cambio de escala no afecta al nivel de la señal en la salida del algoritmo FFT, pero reduce significativamente la varianza de los errores de cuantificación en la salida. Específicamente, cada factor $\frac{1}{2}$ reduce la varianza de un error de cuantificación en un factor de $\frac{1}{4}$. Luego los $4(N/2)$ errores de cuantificación de la primera etapa reducen su varianza en $(\frac{1}{4})^{\nu-1}$, los $4(N/4)$ errores de cuantificación introducidos en la segunda etapa reducen su varianza en $(\frac{1}{4})^{\nu-2}$, y así sucesivamente. En consecuencia, la varianza total de los errores de cuantificación en la salida del algoritmo FFT es

$$\begin{aligned}
\sigma_q^2 &= \frac{\Delta^2}{12}\left\{4\left(\frac{N}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{\nu-1} + 4\left(\frac{N}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{\nu-2} + 4\left(\frac{N}{8}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{\nu-3} + \cdots + 4\right\} \\
&= \frac{\Delta^2}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-2} + \cdots + \frac{1}{2} + 1\right\} \\
&= \frac{2\Delta^2}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu}\right] \approx \frac{2}{3}\cdot 2^{-2b}
\end{aligned} \tag{8.4.16}$$

donde el factor $(\frac{1}{2})^{\nu}$ es despreciable.

Observe ahora que (8.4.16) ya no es proporcional a N. Por otro lado, la señal tiene una varianza $\sigma_X^2 = 1/3N$, dada por (8.4.8). Luego la relación SNR es

$$\frac{\sigma_X^2}{\sigma_q^2} = \frac{1}{2N}\cdot 2^{2b} = 2^{2b-\nu-1} \tag{8.4.17}$$

Por tanto, distribuyendo el cambio de escala de $1/N$ uniformemente a través del algoritmo FFT, hemos conseguido una relación SNR que es inversamente proporcional a N en lugar de a N^2.

EJEMPLO 8.4.2

Determine el número de bits necesario para calcular una FFT de 1024 puntos con una relación SNR de 30 dB cuando el cambio de escala se distribuye como se ha descrito anteriormente.

Solución. El tamaño de la FFT es $N = 2^{10}$. Luego la SNR según (8.4.17) es

$$\begin{aligned}
10\log_{10} 2^{2b-\nu-1} &= 30 \\
3(2b-11) &= 30 \\
b &= \frac{21}{2}(11 \text{ bits})
\end{aligned}$$

Esto puede compararse con los 15 bits necesarios si todo el escalado se hace en la primera etapa de los algoritmos FFT.

8.5 Resumen y referencias

Este capítulo se ha centrado en el cálculo eficiente de la DFT. Hemos demostrado que aprovechando las propiedades de simetría y periodicidad de los factores exponenciales W_N^{kn}, podemos reducir el número de multi-

plicaciones complejas necesarias para calcular la DFT de N^2 a $N \log_2 N$ cuando N es una potencia de 2. Como hemos indicado, cualquier secuencia puede hacerse más grande mediante ceros, de modo que $N = 2^\nu$.

Durante décadas, los algoritmos FFT interesaron a los matemáticos que se ocupaban del cálculo de los valores de las series de Fourier de forma manual. Sin embargo, no fue hasta que Cooley y Tukey (1965) publicaron su documento bien conocido, que el impacto y la significancia del cálculo eficiente fueron reconocidos. Posteriormente al algoritmo FFT de Cooley–Tukey y sus diversas formas, los algoritmos de Singleton (1967, 1969), por ejemplo, han tenido una tremenda influencia en el uso de la DFT en la convolución, correlación y el análisis espectral. El lector que desee ver una perspectiva histórica de los algoritmos FFT, puede consultar los documentos de Cooley *et al.* (1967).

El algoritmo FFT de base dividida (SRFFT), descrito en la Sección 8.1.5, se debe a Duhamel y Hollmann (1984, 1986). Los algoritmos FFT de espejo (MFFT, FFT "mirror") y FFT de fase (PFFT, "phase" FFT) fueron descritos a los autores por R. Price. La aplicación de las propiedades de simetría a los datos para reducir el tiempo de cálculo se describe en un documento de Swarztrauber (1986).

A lo largo de los años, se han publicado una serie de tutoriales de los algoritmos FFT. Algunos de los primeros documentos son los de Brigham y Morrow (1967), Cochran *et al.* (1967), Bergland (1969) y Cooley *et al.* (1967, 1969).

El conocimiento de que la DFT puede reordenarse y calcularse como una convolución lineal es también muy importante. Goertzel (1968) indicó que la DFT puede calcularse a través del filtrado lineal, aunque el ahorro en los cálculos que proporciona este método es bastante modesto, como hemos visto. También es importante el trabajo de Bluestein (1970), quien demostró que el cálculo de la DFT puede formularse como una operación de filtrado lineal *chirp*. Este trabajo de Rabiner *et al.* (1969) lleva al desarrollo del algoritmo de la transformada *z chirp*.

Además de los algoritmos FFT descritos en este capítulo, existen otros algoritmos de coeficientes que permiten calcular la DFT, algunos de los cuales reducen aún más el número de multiplicaciones, pero normalmente requieren más sumas. De particular importancia es el algoritmo debido a Rader y Brenner (1976), la clase de algoritmos de factor primo, como el algoritmo de Good (1971) y el algoritmo de Winograd (1976, 1978). El lector puede consultar los textos de Blahut (1985) para ver una descripción de estos y otros algoritmos relacionados.

Problemas

8.1 Demuestre que cada uno de los números

$$e^{j(2\pi/N)k}, \qquad 0 \le k \le N-1$$

corresponde a una raíz N de la unidad. Represente estos números como fasores en el plano complejo y demuestre, por medio de esta representación, la propiedad de ortogonalidad.

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)kn} e^{-j(2\pi/N)ln} = \begin{cases} N, & \text{si } k = l \\ 0, & \text{si } k \neq l \end{cases}$$

8.2 **(a)** Demuestre que los factores de fase pueden calcularse de forma recursiva mediante la relación

$$W_N^{ql} = W_N^q W_N^{q(l-1)}$$

(b) Realice este cálculo una vez utilizando aritmética en punto flotante de simple precisión y otra vez utilizando sólo cuatro dígitos significativos. Observe el deterioro debido a la acumulación de errores de redondeo en el caso anterior.

(c) Demuestre cómo los resultados del apartado (b) pueden mejorarse reestableciendo el resultado al valor correcto $-j$, cada $ql = N/4$.

8.3 Sea $x(n)$ una secuencia real de N puntos $(N = 2^{\nu})$. Desarrolle un método para calcular una DFT de N puntos $X'(k)$, que sólo contenga los armónicos impares [es decir, $X'(k) = 0$ si k es par] utilizando sólo la DFT real de $N/2$ puntos.

8.4 Un diseñador dispone de una serie de chips FFT de ocho puntos. Demuestre explícitamente cómo debe interconectar tres de tales chips para calcular una DFT de 24 puntos.

8.5 La transformada z de la secuencia $x(n) = u(n) - u(n-7)$ se muestrea en cinco puntos sobre la circunferencia unidad como sigue:

$$x(k) = X(z)|_z = e^{j2\pi k/5}, \qquad k = 0,1,2,3,4$$

Determine la DFT inversa $x'(n)$ de $X(k)$. Compárela con $x(n)$ y explique los resultados.

8.6 Considere una secuencia de duración finita $x(n)$, $0 \le n \le 7$, cuya transformada z es $X(z)$. Deseamos calcular $X(z)$ en el siguiente conjunto de valores:

$$z_k = 0.8e^{j[(2\pi k/8)+(\pi/8)]}, \qquad 0 \le k \le 7$$

(a) Represente los puntos $\{z_k\}$ en el plano complejo.

(b) Determine una secuencia $s(n)$ tal que su DFT proporcione las muestras deseadas de $X(z)$.

8.7 Deduzca el algoritmo FFT de diezmado temporal en base 2 dado por (8.1.26) y (8.1.27) como un caso especial del procedimiento algorítmico general dado por (8.1.16) hasta (8.1.18).

8.8 Calcule la DFT de ocho puntos de la secuencia

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 7 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

utilizando el algoritmo FFT de diezmado en frecuencia descrito en el texto.

8.9 Deduzca el flujo de la señal para el algoritmo FFT de diezmado temporal en base 4 de $N = 16$ puntos en el que la secuencia de entrada está en orden normal y los cálculos se efectúan in situ.

8.10 Deduzca el flujo de la señal para el algoritmo FFT de diezmado en frecuencia en base 4 de $N = 16$ puntos en el que la secuencia de entrada está en orden binario inverso y la DFT de salida está en orden normal.

8.11 Calcule la DFT de ocho puntos de la secuencia

$$x(n) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0\right\}$$

utilizando los algoritmos de diezmado temporal en base 2 y de diezmado en frecuencia. Siga exactamente las gráficas de flujo de la señal correspondiente y haga un seguimiento de todas las cantidades intermedias colocándolas sobre los diagramas.

8.12 Calcule la DFT de 16 puntos de la secuencia

$$x(n) = \cos\frac{\pi}{2}n, \qquad 0 \le n \le 15$$

utilizando el algoritmo de diezmado temporal en base 4.

8.13 Considere la gráfica de flujo del algoritmo de diezmado temporal de ocho puntos de la Figura 8.1.6.

(a) ¿Cuál es la ganancia en el "camino de la señal" que va desde $x(7)$ a $X(2)$?

(b) ¿Cuántos caminos llevan desde la entrada hasta una muestra de salida dada? ¿Se cumple esto para todas las muestras de salida?

(c) Calcule $X(3)$ utilizando las operaciones indicadas por este diagrama.

8.14 Dibuje el diagrama para el algoritmo de diezmado en frecuencia SRFFT para $N = 16$. ¿Cuál es el número de multiplicaciones no triviales?

8.15 Deduzca el algoritmo y dibuje la gráfica para $N = 8$ correspondiente al algoritmo de diezmado temporal SRFFT. Compare su gráfica con el diagrama FFT en base 2 mostrado en la Figura 8.1.11.

8.16 Demuestre que el producto de dos números complejos $(a + jb)$ y $(c + jd)$ puede realizarse con tres multiplicaciones reales y cinco sumas utilizando el algoritmo

$$\begin{aligned} x_R &= (a-b)d + (c-d)a \\ x_I &= (a-b)d + (c+d)b \end{aligned}$$

donde

$$x = x_R + jx_I = (a+jb)(c+jd)$$

8.17 Explique cómo puede utilizarse la DFT para calcular N muestras equiespaciadas de la transformada z de una secuencia de N puntos sobre un círculo de radio r.

8.18 Una secuencia real de N puntos $x(n)$ es una DFT de banda limitada si su DFT $X(k) = 0$ para $k_0 \le k \le N - k_0$. Insertamos $(L-1)N$ ceros en el centro de $X(k)$ para obtener la siguiente DFT de LN puntos:

$$X'(k) = \begin{cases} X(k), & 0 \le k \le k_0 - 1 \\ 0, & k_0 \le k \le LN - k_0 \\ X(k+N-LN), & LN - k_0 + 1 \le k \le LN - 1 \end{cases}$$

Demuestre que

$$Lx'(Ln) = x(n), \qquad 0 \le n \le N-1$$

donde

$$x'(n) \underset{LN}{\overset{DFT}{\longleftrightarrow}} X'(k)$$

Explique el significado de este tipo de procesamiento empleando un ejemplo en el que $N = 4$, $L = 1$ y $X(k) = \{1, 0, 0, 1\}$.

8.19 Sea $X(k)$ la DFT de N puntos de la secuencia $x(n)$, $0 \le n \le N-1$. ¿Cuál es la DFT de N puntos de la secuencia $s(n) = X(n)$, $0 \le n \le N-1$?

8.20 Sea $X(k)$ la DFT de N puntos de la secuencia $x(n)$, $0 \le n \le N-1$. Definimos una secuencia de $2N$ puntos $y(n)$ como

$$y(n) = \begin{cases} x\left(\dfrac{n}{2}\right), & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$$

Exprese la DFT de $2N$ puntos de $y(n)$ en función de $X(k)$.

8.21 **(a)** Determine la transformada z $W(z)$ de la ventana de Hanning $w(n) = \left(1 - \cos\frac{2\pi n}{N-1}\right)/2$.

(b) Determine una fórmula para calcular la DFT de N puntos $X_w(k)$ de la señal $x_w(n) = w(n)x(n)$, $0 \leq n \leq N-1$, a partir de la DFT de N puntos $X(k)$ de la señal $x(n)$.

8.22 Cree una tabla de coeficientes de la DFT que sólo utilice $N/4$ posiciones de memoria para almacenar el primer cuadrante de la secuencia seno (suponga N par).

8.23 Determine la complejidad de cálculo del algoritmo dado por (8.2.12) y compárela con la complejidad que necesita la DFT de $2N$ puntos de $g(n)$. Suponga que el algoritmo FFT es un algoritmo en base 2.

8.24 Considere el sistema IIR descrito por la ecuación en diferencias

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

Describa un procedimiento que calcule la respuesta en frecuencia $H\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$ utilizando el algoritmo FFT $(N = 2^\nu)$.

8.25 Desarrolle un algoritmo FFT de diezmado temporal en base 3 para $N = 3^\nu$ y dibuje el correspondiente diagrama de flujo para $N = 9$. ¿Cuál es el número de multiplicaciones complejas necesarias? ¿Pueden realizarse las operaciones in situ?

8.26 Repita el Problema 8.25 para el algoritmo de diezmado en frecuencia.

8.27 *Recorte de la entrada y la salida de la FFT* En muchas aplicaciones deseamos calcular sólo unos pocos puntos M de la DFT de N puntos de una secuencia de duración finita de longitud L (es decir, $M << N$ y $L << N$).

(a) Dibuje el diagrama de flujo del algoritmo FFT de diezmado en frecuencia en base 2 para $N = 16$ y elimine [es decir, recorte] todos los caminos de la señal que dan lugar a entradas nulas suponiendo que sólo $x(0)$ y $x(1)$ son distintas de cero.

(b) Repita el apartado (a) para el algoritmo de diezmado temporal en base 2.

(c) ¿Qué algoritmo es mejor si queremos calcular todos los puntos de la DFT? ¿Qué sucede si deseamos calcular sólo los puntos $X(0)$, $X(1)$, $X(2)$ y $X(3)$? Establezca una regla para elegir entre el recorte del algoritmo de diezmado temporal y el algoritmo de diezmado en frecuencia dependiendo de los valores de M y L.

(d) Proporcione una estimación del ahorro en los cálculos en función de M, L y N.

8.28 *Cálculo paralelo de la DFT* Suponga que deseamos calcular una DFT de $N = 2^p 2^\nu$ puntos utilizando 2^p procesadores digitales de señales (DSP, *digital signal processors*). Para simplificar, suponemos que $p = \nu = 2$. En este caso, cada DSP realiza todos los cálculos necesarios para calcular los puntos de la DFT 2^ν.

(a) Utilizando el diagrama de flujo de diezmado en frecuencia en base 2, demuestre que para evitar la reestructuración de los datos, es preciso cargar la secuencia completa $x(n)$ en la memoria de cada DSP.

(b) Identifique y dibuje de nuevo la parte del diagrama de flujo que es ejecutada por el DSP que calcula las muestras de la DFT $X(2)$, $X(10)$, $X(6)$ y $X(14)$.

(c) Demuestre que, si utilizamos $M = 2^p$ procesadores DSP, la velocidad de cálculo S está dada por

$$S = M\frac{\log_2 N}{\log_2 N - \log_2 M + 2(M-1)}$$

8.29 Desarrolle un algoritmo FFT de diezmado temporal en base 2 basándose en la definición. Dibuje el diagrama de flujo para llevar a cabo el cálculo y compárelo con el diagrama de flujo correspondiente a la FFT directa. ¿Puede obtenerse el diagrama de flujo IFFT a partir del de la FFT directa?

8.30 Repita el Problema 8.29 para el algoritmo de diezmado en frecuencia.

8.31 Demuestre que una FFT sobre datos con simetría hermitiana puede obtenerse invirtiendo el diagrama de flujo de una FFT para datos reales.

8.32 Determine la función del sistema $H(z)$ y la ecuación en diferencias del sistema que utiliza el algoritmo de Goertzel para calcular el valor $X(N-k)$ de la DFT .

8.33 **(a)** Suponga que $x(n)$ es una secuencia de duración finita de $N = 1024$ puntos. Se desea evaluar la transformada z $X(z)$ de la secuencia en los puntos

$$z_k = e^{j(2\pi/1024)k}, \qquad k = 0, 100, 200, \ldots, 1000$$

utilizando el método o algoritmo más eficiente posible. Describa un algoritmo para realizar este cálculo de forma eficiente. Explique cómo ha llegado a su respuesta indicando las distintas opciones o algoritmos que se pueden utilizar.

(b) Repita el apartado (a) si $X(z)$ va a evaluarse en

$$z_k = 2(0.9)^k e^{j[(2\pi/5000)k+\pi/2]}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 999$$

8.34 Repita el análisis para la varianza del error de cuantificación explicado en la Sección 8.4.2, para el algoritmo FFT de diezmado en frecuencia en base 2.

8.35 La operación mariposa básica del algoritmo FFT de diezmado temporal en base 2 es

$$X_{n+1}(k) = X_n(k) + W_N^m X_n(l)$$

$$X_{n+1}(l) = X_n(k) - W_N^m X_n(l)$$

(a) Si se requiere que $|X_n(k)| < \frac{1}{2}$ y $|X_n(l)| < \frac{1}{2}$, demuestre que

$$|\mathrm{Re}[X_[X_{n+1}(k)]| < 1, \quad |\mathrm{Re}[X_{n+1}(l)]| < 1$$
$$|\mathrm{Im}[X_[X_{n+1}(k)]| < 1, \quad |\mathrm{Im}[X_{n+1}(l)]| < 1$$

Luego no se produce desbordamiento.

(b) Demuestre que

$$\max[|X_{n+1}(k)|, |X_{n+1}(l)|] \quad \geq \max[|X_n(k)|, |X_n(l)|]$$
$$\max[|X_{n+1}(k)|, |X_{n+1}(l)|] \quad \leq 2\max[|X_n(k)|, |X_n(l)|]$$

8.36 *Cálculo de la DFT* Utilice una subrutina FFT para calcular las siguientes DFT y dibuje los módulos $|X(k)|$ de las DFT.

(a) La DFT de 64 puntos de la secuencia

$$x(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, \ldots, 15 \quad (N_1 = 16) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(b) La DFT de 64 puntos de la secuencia

$$x(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, \ldots, 7 \quad (N_1 = 8) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(c) La DFT de 128 puntos de la secuencia del apartado (a).

(d) La DFT de 64 puntos de la secuencia

$$x(n) = \begin{cases} 10e^{j(\pi/8)n}, & n = 0, 1, \ldots, 63 \quad (N_1 = 64) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Responda a las siguientes cuestiones.

1. ¿Cuál es el intervalo de frecuencias entre muestras sucesivas para los diagramas de los apartados (a), (b), (c) y (d)?
2. ¿Cuál es el valor del espectro en la frecuencia cero (valor de continua) obtenido a partir de los diagramas de los apartados (a), (b), (c), (d)?
   A partir de la fórmula
   $$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j(2\pi/N)nk}$$
   calcule los valores teóricos para el valor de continua y compruébelos con los resultados proprocionados por la computadora.
3. En los diagramas (a), (b) y (c), ¿cuál es el *intervalo de frecuencias* entre nulos sucesivos del espectro? ¿Cuál es la relación entre N_1 de la secuencia $x(n)$ y el intervalo de frecuencias entre nulos sucesivos?
4. Explique la diferencia entre los diagramas obtenidos en los apartados (a) y (c).

8.37 *Identificación de las posiciones de los polos en un sistema* Considere el sistema descrito por la ecuación en diferencias

$$y(n) = -r^2 y(n-2) + x(n)$$

(a) Sea $r = 0.9$ y $x(n) = \delta(n)$. Genere la secuencia de salida $y(n)$ para $0 \leq n \leq 127$. Calcule la DFT de $N = 128$ puntos $\{Y(k)\}$ y represente $\{|Y(k)|\}$.

(b) Calcule la DFT de $N = 128$ puntos de la secuencia

$$w(n) = (0.92)^{-n} y(n)$$

donde $y(n)$ es la secuencia generada en el apartado (a). Represente los valores de la DFT $|W(k)|$. ¿Qué puede concluir de los diagramas obtenidos en los apartados (a) y (b)?

(c) Repita el apartado (a) para $r = 0.5$.

(d) Repita el apartado (b) para la secuencia

$$w(n) = (0.55)^{-n} y(n)$$

donde $y(n)$ es la secuencia generada en el apartado (c). ¿Qué puede concluir de los diagramas de los apartados (c) y (d)?

(e) Ahora la secuencia generada en el apartado (c) se ve distorsionada por un secuencia de ruido "medida" que es gaussiana de media cero y varianza $\sigma^2 = 0.1$. Repita los apartados (c) y (d) para la señal distorsionada por el ruido.

9

Implementación de sistemas discretos en el tiempo

Este capítulo se centra en la realización de los sistemas lineales discretos e invariantes en el tiempo bien por software o por hardware. Como hemos mencionado en el Capítulo 2, existen varias configuraciones o estructuras para la realización de cualquier sistema discreto en el tiempo FIR e IIR. En el Capítulo 2 hemos descrito la más sencilla de estas estructuras, las realizaciones de la forma directa. Sin embargo, existen otras estructuras más prácticas que ofrecen algunas otras ventajas, especialmente cuando se tienen en cuenta los efectos de cuantificación.

De particular importancia son las estructuras en cascada, en paralelo y en celosía, que presentan una gran robustez en implementaciones con longitud de palabra finita. En el capítulo también se describe la implementación aplicando el muestreo en frecuencia de un sistema FIR, que a menudo tiene la ventaja de ser eficiente en lo que respecta a los cálculos comparada con las realizaciones FIR alternativas. Otras estructuras de filtro se obtienen empleando una formulación de estado–espacio para sistemas lineales invariantes en el tiempo. Debido a las limitaciones de espacio, las estructuras estado–espacio no se cubren.

Además de describir las distintas estructuras para la realización de sistemas discretos en el tiempo, hemos abordado también los problemas asociados con los efectos de la cuantificación en la implementación de filtros digitales utilizando aritmética de precisión finita. Este tratamiento incluye los efectos sobre la respuesta en frecuencia del filtro que resulta de la cuantificación de los coeficientes y los efectos del ruido de redondeo inherente en la implementación digital de sistemas discretos en el tiempo.

9.1 Estructuras para la realización de sistemas discretos del tiempo

Consideremos la importante clase de sistemas discretos en el tiempo lineales e invariantes en el tiempo caracterizada por la ecuación en diferencias general y lineal de coeficientes constantes

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \tag{9.1.1}$$

Como hemos demostrado utilizando la transformada z, los sistemas discretos en el tiempo lineales e invariantes en el tiempo de esta clase también se caracterizan por la función del sistema racional.

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \tag{9.1.2}$$

que es una relación de dos polinomios en z^{-1}. A partir de la última caracterización, obtenemos los ceros y los polos de la función del sistema, que depende de la elección de los parámetros del sistema $b_k\}$ y $\{a_k\}$ y que determina la respuesta en frecuencia del mismo.

Nuestro objetivo en este capítulo se encuentra en los distintos métodos de implementar (9.1.1) o (9.1.2) bien por hardware o por software utilizando una computadora digital programable. Demostraremos que (9.1.1) o (9.1.2) pueden implementarse en una amplia variedad de formas dependiendo de la manera en que se ordenen estas dos características.

En general, podemos ver (9.1.1) como un procedimiento de cálculo (un algoritmo) que permite determinar la secuencia de salida $y(n)$ del sistema a partir de la secuencia de entrada $x(n)$. Sin embargo, los cálculos indicados en (9.1.1) pueden ordenarse en conjuntos equivalentes de ecuaciones en diferencias. Cada conjunto de ecuaciones define un procedimiento de cálculo o algoritmo para implementar el sistema. A partir de cada conjunto de ecuaciones podemos construir un diagrama de bloques que conste de una interconexión de elementos de retardo, multiplicadores y sumadores. En la Sección 2.5, establecemos que un diagrama de bloques de este tipo es una *realización* del sistema o, lo que es equivalente, una *estructura* para implementar el sistema .

Si el sistema va a implementarse por software, el diagrama de bloques o, lo que es lo mismo, el conjunto de ecuaciones que se obtiene reordenando (9.1.1), puede convertirse en un programa que se ejecute en una computadora digital. Alternativamente, la estructura de un diagrama de bloques implica una configuración hardware que permite implementar el sistema.

Quizá, hay una cuestión que puede no haber quedado clara al lector y es por qué consideramos cualquier reordenación de las Ecuaciones (9.1.1) o (9.1.2). ¿Por qué no nos limitamos simplemente a implementar directamente 9.1.1) o (9.1.2) sin hacer ninguna reordenación? Si las Ecuaciones (9.1.1) o (9.1.2) se reordenan de alguna manera, ¿qué ventajas se obtienen en la implementación correspondiente?

En este capítulo vamos a responder a estas interesantes preguntas. En el punto de desarrollo que nos encontramos, simplemente establecemos que los principales factores que influyen en la elección de una realización específica son la complejidad del cálculo, los requisitos de memoria y los efectos de la longitud de palabra finita sobre los cálculos.

La *complejidad de cálculo* hace referencia al número de operaciones aritméticas (multiplicaciones, divisiones y sumas) necesarias para calcular un valor de salida $y(n)$ para el sistema. Hace tiempo, éstos eran los únicos elementos que se empleaban para medir la complejidad de cálculo. Sin embargo, con los recientes desarrollos en el diseño y la fabricación de complejos chips programables para el tratamiento digital de señales, otros factores, como el número de veces que hay que hacer una extracción de memoria o el número de veces que se realiza una comparación entre dos números por muestra de salida, se han convertido en factores importantes en la valoración de la complejidad de cálculo de una realización dada de un sistema.

Los *requisitos de memoria* hacen referencia al número de posiciones de memoria necesario para almacenar los parámetros del sistema, las entradas pasadas, las salidas pasadas y cualquier valor calculado intermedio.

Los *efectos de la longitud de palabra finita* o efectos de la precisión finita hacen referencia a los efectos de la cuantificación que son inherentes a cualquier implementación digital del sistema, sea hardware o software. Los parámetros del sistema deben representarse necesariamente con precisión finita. Los cálculos que se realizan en

el proceso de cálculo de la salida del sistema deben redondearse o truncarse para ajustarse a las restricciones de precisión de la computadora o del hardware empleado en la implementación. Otra consideración es si los cálculos se realizan en aritmética de punto fijo o de punto flotante. Todos estos problemas que normalmente se aúnan en los efectos de longitud de palabra finita, son extremadamente importantes e influyen en la elección de la realización de un sistema. Veremos que estructuras diferentes de un sistema, que son equivalentes para precisión infinita, presentan un comportamiento diferente cuando se emplea aritmética de precisión finita en la implementación. Por tanto, en la práctica, es muy importante seleccionar una implementación que no sea demasiado sensible a los efectos de la longitud de palabra finita.

Aunque estos tres factores son los que principalmente influyen en la elección de la realización de un sistema del tipo descrito por (9.1.1) o (9.1.2), otros factores, como por ejemplo, si la estructura o la realización lleva a un procesamiento paralelo, o si los cálculos puede *pipelinizarse*, pueden desempeñar un papel en la elección de una implementación específica. Estos factores adicionales normalmente son importantes en la realización de algoritmos más complejos de tratamiento digital de señales.

Cuando abordemos estas realizaciones alternativas, nos concentraremos en los tres factores principales que acabamos de enumerar. Ocasionalmente, incluiremos algunos factores adicionales que puedan tener importancia en determinadas implementaciones.

9.2 Estructuras para sistemas FIR

En general, un sistema FIR se describe mediante la ecuación en diferencias

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k) \tag{9.2.1}$$

o, lo que es equivalente, mediante la función del sistema

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k} \tag{9.2.2}$$

Además, la respuesta al impulso unitario del sistema FIR es idéntica a los coeficientes $\{b_k\}$, es decir,

$$h(n) = \begin{cases} b_n, & 0 \le n \le M-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{9.2.3}$$

La longitud del filtro FIR se selecciona como M de acuerdo con la notación establecida en la literatura técnica. El lector debe tener en cuenta este cambio de notación en el tratamiento de los filtros FIR y en los capítulos siguientes.

Vamos a presentar varios métodos que permiten implementar un sistema FIR, y comenzaremos por la estructura más simple, la cual se conoce como forma directa. Una segunda estructura es la realización en cascada. La tercera estructura que vamos a describir es la realización basada en el muestreo de frecuencia. Por último, presentaremos una realización en celosía de un sistema FIR. En esta exposición vamos a seguir el convenio que se emplea en la literatura técnica, que consiste en emplear $\{h(n)\}$ para los parámetros del sistema FIR.

Además de mediante estas cuatro realizaciones, un sistema FIR puede realizarse empleando la DFT, como se describe en la Sección 8.2. Desde este punto de vista, la DFT puede considerarse como un procedimiento de cálculo más que como una estructura de un sistema FIR. Sin embargo, cuando el procedimiento de cálculo se implementa por hardware, existe la correspondiente estructura para el sistema FIR. En la práctica, las implementaciones hardware de la DFT se basan en el uso de los algoritmos para la transformada rápida de Fourier (FFT) descritos en el Capítulo 8.

9.2.1 Estructura de la forma directa

La realización de la forma directa se obtiene inmediatamente de la ecuación en diferencias no recursiva dada por (9.2.1) o, lo que es equivalente, por la suma de convolución,

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) \tag{9.2.4}$$

La estructura se ilustra en la Figura 9.2.1.

Observe que esta estructura requiere $M-1$ posiciones de memoria para almacenar las $M-1$ entradas anteriores y tiene una complejidad de M multiplicaciones y $M-1$ sumas por punto de salida. Puesto que la salida está formada por una combinación lineal ponderada de $M-1$ valores pasados de la entrada y el valor actual ponderado de la entrada, la estructura de la Figura 9.2.1 parece una línea de retardo con toma central o un sistema transversal. En consecuencia, la realización en la forma directa a menudo se denomina filtro transversal o de línea de retardo con toma central.

Cuando un sistema FIR tiene una fase lineal, como se describe en la Sección 10.2, la respuesta al impulso unitario del sistema satisface bien la condición de simetría o la condición de antisimetría

$$h(n) = \pm h(M-1-n) \tag{9.2.5}$$

En un sistema como éste, el número de multiplicaciones se reduce de M a $M/2$ para M par y a $(M-1)/2$ para M impar. Por ejemplo, la estructura que aprovecha esta condición de simetría se ilustra en la Figura 9.2.2 para el caso en que M es impar.

9.2.2 Estructuras en cascada

La realización en cascada se obtiene naturalmente de la función del sistema dada por (9.2.2). Es simple factorizar $H(z)$ en los sistemas FIR de segundo orden de modo que

$$H(z) = \prod_{k=1}^{K} H_k(z) \tag{9.2.6}$$

donde

$$H_k(z) = b_{k0} + b_{k1}z^{-1} + b_{k2}z^{-2}, \qquad k = 1, 2, \ldots, K \tag{9.2.7}$$

y K es la parte entera de $(M+1)/2$. El parámetro del filtro b_0 puede distribuirse igualmente entre las K secciones del filtro, tal que $b_0 = b_{10}b_{20}\cdots b_{K0}$ o puede asignarse a una sola sección del filtro. Los ceros de $H(z)$ se agrupan por parejas para generar sistemas FIR de segundo orden de la forma dada en (9.2.7). Resulta ventajoso siempre formar parejas de raíces complejas conjugadas de modo que los coeficientes $\{b_{ki}\}$ de (9.2.7) sean valores reales.

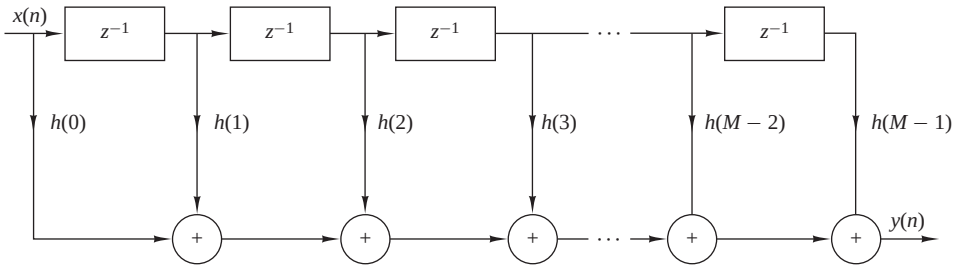


Figura 9.2.1. Realización en la forma directa de un sistema FIR.

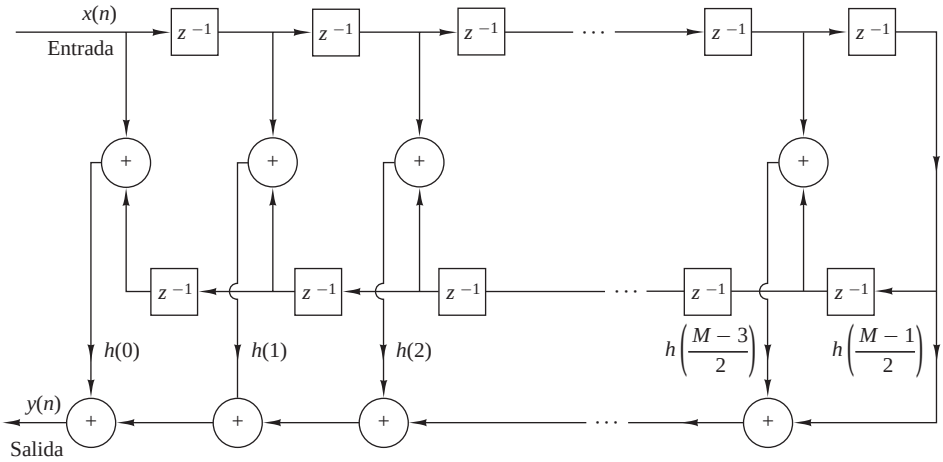


Figura 9.2.2. Realización en la forma directa de un sistema FIR de fase lineal (M impar).

Por otro lado, la raíces reales pueden emparejarse de manera arbitraria. La realización en cascada junto con la sección básica de segundo orden se muestran en la Figura 9.2.3.

En el caso de filtros FIR de fase lineal, la simetría de $h(n)$ implica que los ceros de $H(z)$ también exhiben una forma de simetría. En particular, si z_k y z_k^* son una pareja de ceros complejos conjugados, entonces $1/z_k$ y $1/z_k^*$ también son una pareja de ceros complejos conjugados (*véase* la Sección 10.2). En consecuencia, conseguimos cierta simplificación definiendo secciones de cuarto orden del sistema FIR de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} H_k(z) &= c_{k0}(1 - z_k z^{-1})(1 - z_k^* z^{-1})(1 - z^{-1}/z_k)(1 - z^{-1}/z_k^*) \\ &= c_{k0} + c_{k1}z^{-1} + c_{k2}z^{-2} + c_{k1}z^{-3} + c_{k0}z^{-4} \end{aligned} \tag{9.2.8}$$

donde los coeficientes $\{c_{k1}\}$ y $\{c_{k2}\}$ son funciones de z_k. Luego combinando las dos parejas de polos para formar una sección del filtro de cuarto orden, hemos reducido el número de multiplicaciones de seis a tres (es decir, en un factor del 50 %). La Figura 9.2.4 ilustra la estructura del filtro FIR de cuarto orden.

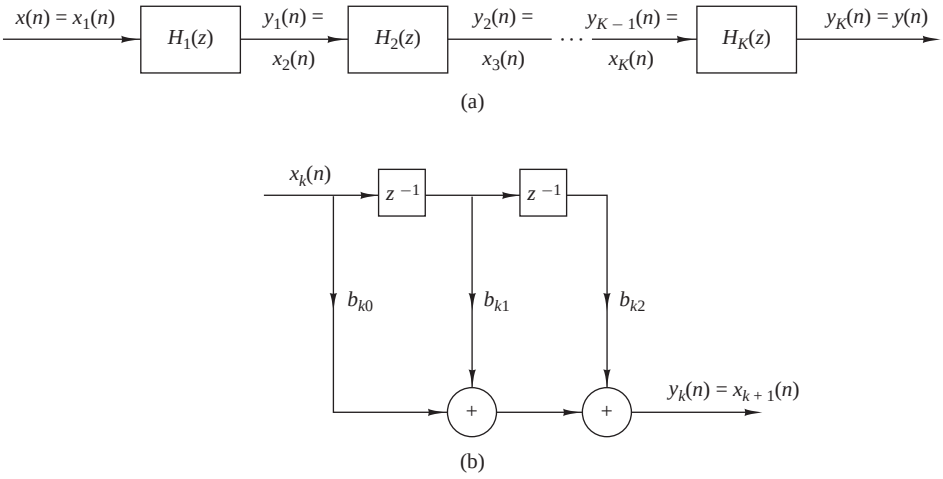


Figura 9.2.3. Realización en cascada de un sistema FIR.

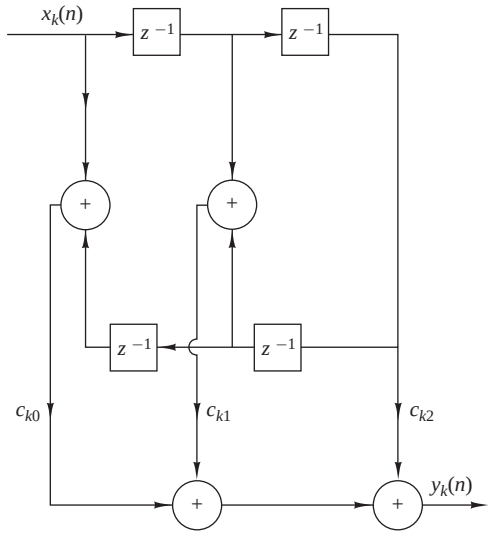


Figura 9.2.4. Sección de orden cuatro de una realización en cascada de un sistema FIR.

9.2.3 Estructuras basadas en el muestreo en frecuencia

[1]En la realización basada en el muestreo en frecuencia de un filtro FIR, los parámetros que caracterizan el filtro son los valores de la respuesta en frecuencia deseada en lugar de la respuesta al impulso $h(n)$. Para obtener la estructura basada en el muestreo en frecuencia, especificamos la respuesta en frecuencia deseada en un conjunto de frecuencias igualmente espaciadas, a saber

$$\begin{aligned}\omega_k = \frac{2\pi}{M}(k+\alpha), \quad & k = 0,1,\ldots,\frac{M-1}{2}, \quad M \text{ impar}\\ & k = 0,1,\ldots,\frac{M}{2}-1, \quad M \text{ par}\\ & \alpha = 0 \text{ o } \frac{1}{2}\end{aligned}$$

y resolvemos para obtener la respuesta al impulso $h(n)$ a partir de esta especificación de frecuencias igualmente espaciadas. Por tanto, podemos escribir la respuesta en frecuencia como

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

y los valores de $H(\omega)$ en las frecuencias $\omega_k = (2\pi/M)(k+\alpha)$ son

$$\begin{aligned}H(k+\alpha) &= H\left(\frac{2\pi}{M}(k+\alpha)\right)\\ &= \sum_{n=0}^{M-1} h(n)e^{-j2\pi(k+\alpha)n/M}, \qquad k = 0,1,\ldots,M-1\end{aligned} \tag{9.2.9}$$

[1]El lector puede consultar la Sección 10.2.3 para obtener información adicional sobre los filtros FIR basados en el muestreo en frecuencia.

El conjunto de valores $\{H(k+\alpha)\}$ son las muestras en frecuencia de $H(\omega)$. En el caso en que $\alpha = 0$, $\{H(k)\}$ se corresponde con la DFT de M puntos de $\{h(n)\}$.

Si invertimos (9.2.9) y expresamos $h(n)$ en función de las muestras en frecuencia, el resultado es

$$h(n) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} H(k+\alpha)e^{j2\pi(k+\alpha)n/M}, \qquad n = 0,1,\ldots,M-1 \tag{9.2.10}$$

Si $\alpha = 0$, (9.2.10) es simplemente la IDFT de $\{H(k)\}$. Si ahora utilizamos (9.2.10) sustituyendo $h(n)$ en la expresión de la transfomada z $H(z)$, tenemos

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{M-1} h(n)z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{M-1}\left[\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} H(k+\alpha)e^{j2\pi(k+\alpha)n/M}\right]z^{-n} \end{aligned} \tag{9.2.11}$$

Intercambiando el orden de los dos sumatorios en la Ecuación (9.2.11) y calculando el sumatorio para el índice n, obtenemos

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{k=0}^{M-1} H(k+\alpha)\left[\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}(e^{j2\pi(k+\alpha)/M}z^{-1})^n\right] \\ &= \frac{1-z^{-M}e^{j2\pi\alpha}}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\frac{H(k+\alpha)}{1-e^{j2\pi(k+\alpha)/M}z^{-1}} \end{aligned} \tag{9.2.12}$$

Por tanto, la función del sistema $H(z)$ queda caracterizada por el conjunto de muestras en frecuencia $\{H(k+\alpha)\}$ en lugar de por $\{h(n)\}$.

Podemos interpretar esta realización del filtro FIR como una conexión en cascada de dos filtros [es decir, $H(z) = H_1(z)H_2(z)$]. Uno de ellos es un filtro de todo ceros, o filtro peine, con la función del sistema

$$H_1(z) = \frac{1}{M}(1-z^{-M}e^{j2\pi\alpha}) \tag{9.2.13}$$

Sus ceros se encuentran en puntos igualmente espaciados sobre la circunferencia unidad en

$$z_k = e^{j2\pi(k+\alpha)/M}, \qquad k = 0,1,\ldots,M-1$$

El segundo filtro con la función de sistema

$$H_2(z) = \sum_{k=0}^{M-1}\frac{H(k+\alpha)}{1-e^{j2\pi(k+\alpha)/M}z^{-1}} \tag{9.2.14}$$

consta de un banco paralelo de filtros de un solo polo con frecuencia de resonancia

$$p_k = e^{j2\pi(k+\alpha)/M}, \qquad k = 0,1,\ldots,M-1$$

Observe que las posiciones de los polos son idénticas a las posiciones de los ceros y que ambas se producen en $\omega_k = 2\pi(k+\alpha)/M$, que son las frecuencias a las que se ha especificado la respuesta en frecuencia deseada. Los beneficios del paralelo de los filtros resonantes se encuentran simplemente en los parámetros complejos $\{H(k+\alpha)\}$. Esta realización en cascada se ilustra en la Figura 9.2.5.

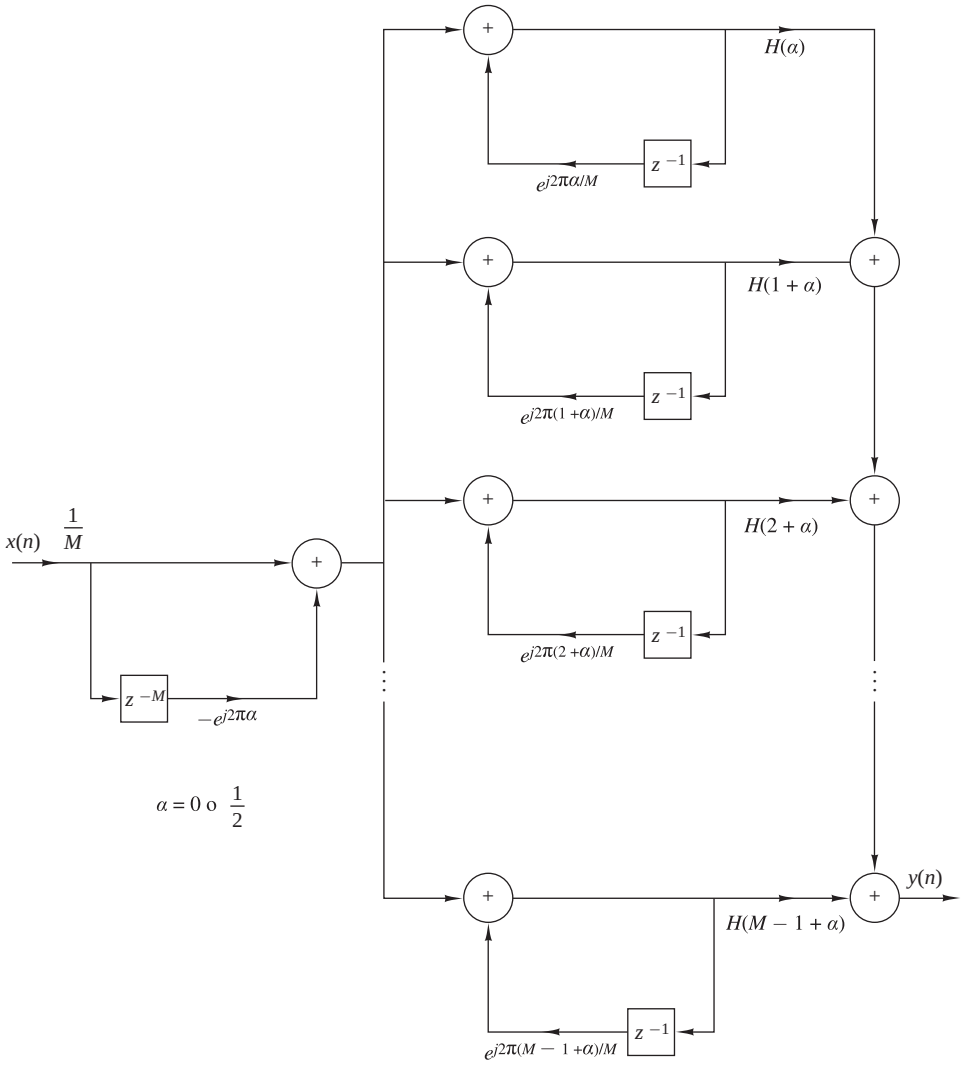


Figura 9.2.5. Realización basada en el muestreo en frecuencia del filtro FIR.

Cuando la respuesta en frecuencia deseada del filtro FIR es de banda estrecha, la mayor parte de los parámetros de ganancia $\{H(k+\alpha)\}$ son cero. En consecuencia, los correspondientes filtros resonantes pueden eliminarse y sólo los filtros con ganancias distintas de cero tienen que conservarse. El resultado neto es un filtro que requiere menos cálculos (multiplicaciones y sumas) que la correspondiente realización de la forma directa. Así, obtenemos una realización más eficiente.

La estructura del filtro basada en el muestreo en frecuencia puede simplificarse todavía más aplicando la propiedad de simetría en $H(k+\alpha)$, como sigue $H(k) = H^*(M-k)$ for $\alpha = 0$ and

$$H\left(k+\frac{1}{2}\right) = H\left(M-k-\frac{1}{2}\right), \qquad \text{para } \alpha = \frac{1}{2}$$

Estas relaciones pueden deducirse fácilmente a partir de (9.2.9). Como resultado de esta simetría, puede combinarse una pareja de filtros de un sólo polo para formar un filtro de dos polos con parámetros reales. Por tanto, para $\alpha = 0$, la función del sistema $H_2(z)$ se reduce a

$$
\begin{aligned}
H_2(z) &= \frac{H(0)}{1-z^{-1}} + \sum_{k=1}^{(M-1)/2} \frac{A(k)+B(k)z^{-1}}{1-2\cos(2\pi k/M)z^{-1}+z^{-2}}, && M \text{ impar} \\
H_2(z) &= \frac{H(0)}{1-z^{-1}} + \frac{H(M/2)}{1+z^{-1}} + \sum_{k=1}^{(M/2)-1} \frac{A(k)+B(k)z^{-1}}{1-2\cos(2\pi k/M)z^{-1}+z^{-2}}, && M \text{ par}
\end{aligned}
\tag{9.2.15}
$$

donde, por definición,

$$
\begin{aligned}
A(k) &= H(k) + H(M-k) \\
B(k) &= H(k)e^{-j2\pi k/M} + H(M-k)e^{j2\pi k/M}
\end{aligned}
\tag{9.2.16}
$$

Pueden obtenerse expresiones similares para $\alpha = \frac{1}{2}$.

EJEMPLO 9.2.1

Dibuje el diagrama de bloques para las realizaciones en forma directa y basada en el muestreo en frecuencia del filtro FIR de fase lineal (simétrico) con $M = 32$, $\alpha = 0$, que tiene las muestras en frecuencia siguientes

$$
H\left(\frac{2\pi k}{32}\right) = \begin{cases} 1, & k = 0,1,2 \\ \dfrac{1}{2}, & k = 3 \\ 0, & k = 4,5,\ldots,15 \end{cases}
$$

Compare la complejidad de cálculo de estas dos estructuras.

Solución. Puesto que el filtro es simétrico, aplicamos esta simetría para reducir el número de multiplicaciones por punto de salida en un factor de 2, de 32 a 16 en la realización de la forma directa. El número de sumas por punto de salida es 31. El diagrama de bloques de la realización directa se ilustra en la Figura 9.2.6.

Utilizamos la forma dada en (9.2.13) y (9.2.15) para la realización basada en el muestreo en frecuencia y eliminamos todos los términos que tengan coeficientes de ganancia cero {H(k)}. Los coeficientes distintos de cero son $H(k)$ y los pares

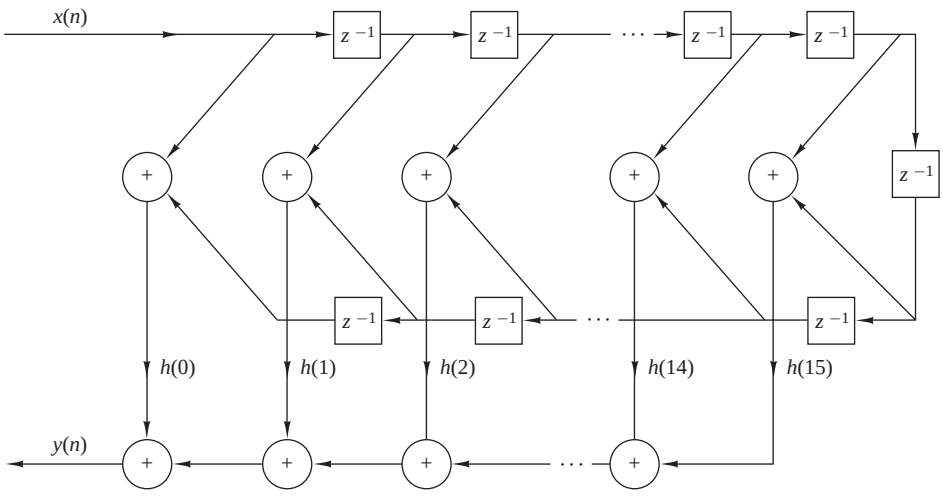


Figura 9.2.6. Realización directa de un filtro FIR con $M = 32$.

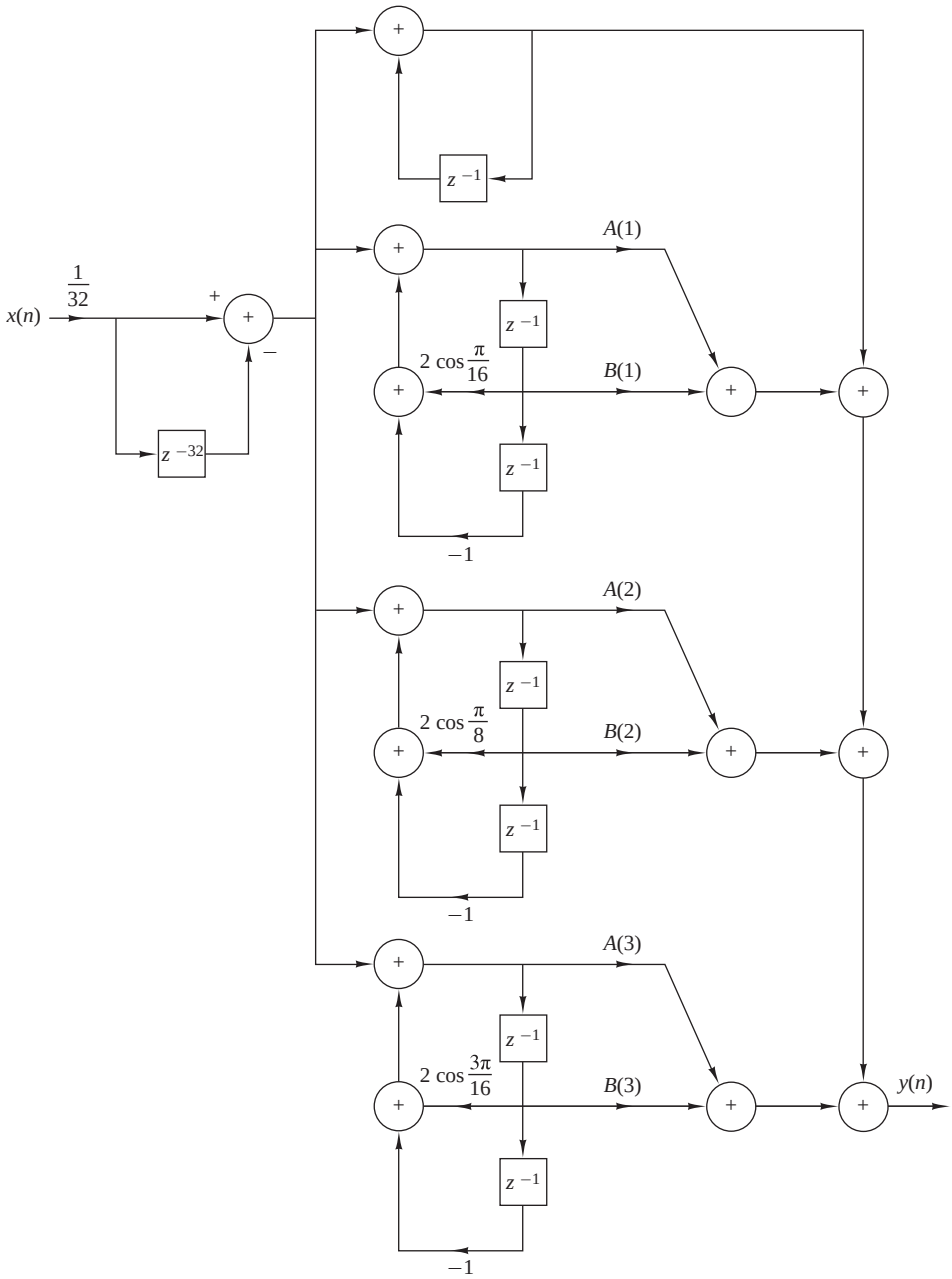


Figura 9.2.7. Realización basada en el muestreo en frecuencia para el filtro FIR del Ejemplo 9.2.1.

correspondientes son $H(M-k)$, para $k = 0, 1, 2, 3$. El diagrama de bloques de la realización resultante se muestra en la Figura 9.2.7. Dado que $H(0) = 1$, el filtro de un sólo polo no requiere ninguna multiplicación. Los tres filtros de dos polos requieren tres multiplicaciones cada uno, lo que da un total de nueve multiplicaciones. El número total de sumas es 13. Por tanto, la realización basada en el muestreo en frecuencia de este filtro FIR es más eficiente en lo que respecta a la complejidad computacional que la realización de la forma directa.

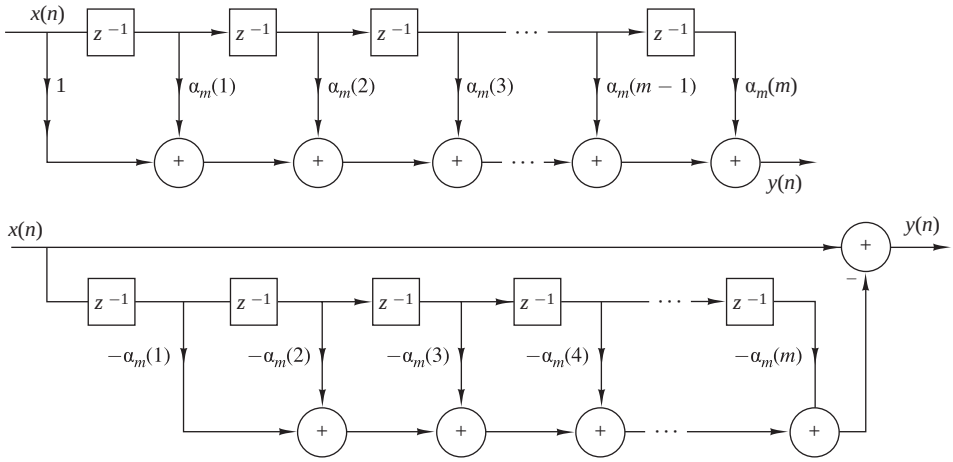


Figura 9.2.8. Realización de la forma directa del filtro FIR de predicción.

9.2.4 Estructura en celosía

En esta sección presentamos otra estructura de filtro FIR, denominada realización en celosía o filtro en celosía. El uso de los filtros en celosía está muy extendido en las aplicaciones de tratamiento de voz y en la implementación de filtros adaptativos.

Comencemos con el desarrollo considerando una secuencia de filtros FIR cuyas funciones de sistema son

$$H_m(z) = A_m(z), \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, M-1 \tag{9.2.17}$$

donde, por definición, $A_m(z)$ es el polinomio

$$A_m(z) = 1 + \sum_{k=1}^{m} \alpha_m(k) z^{-k}, \qquad m \geq 1 \tag{9.2.18}$$

y $A_0(z) = 1$. La respuesta al impulso unitario del filtro m es $h_m(0) = 1$ y $h_m(k) = \alpha_m(k)$, $k = 1, 2, \ldots, m$. El subíndice m del polinomio $A_m(z)$ indica el grado del polinomio. Por conveniencia matemática, definimos $\alpha_m(0) = 1$.

Si $\{x(n)\}$ es la secuencia de entrada al filtro $A_m(z)$ y $\{y(n)\}$ es la secuencia de salida, tenemos

$$y(n) = x(n) + \sum_{k=1}^{m} \alpha_m(k) x(n-k) \tag{9.2.19}$$

En la Figura 9.2.8 se ilustran dos estructuras de la forma directa del filtro FIR.

En el Capítulo 12, demostramos que las estructuras FIR de la Figura 9.2.8 están íntimamente relacionadas con el tema de la predicción lineal, donde

$$\hat{x}(n) = -\sum_{k=1}^{m} \alpha_m(k) x(n-k) \tag{9.2.20}$$

es el valor directo predicho de un escalón de $x(n)$, basado en las m entradas pasadas e $y(n) = x(n) - \hat{x}(n)$, dada por (9.2.19), representa la secuencia del error de predicción. En este contexto, la estructura del filtro superior de la Figura 9.2.8 se conoce como *filtro de predicción de error*.

Suponga ahora que tenemos un filtro de orden $m = 1$. La salida de tal filtro es

$$y(n) = x(n) + \alpha_1(1)x(n-1) \tag{9.2.21}$$

Esta salida también puede obtenerse a partir del filtro en celosía de primer orden o de una sola etapa, mostrado en la Figura 9.2.9, excitando ambas entradas con $x(n)$ y seleccionando la salida de la rama superior. Así, la salida es exactamente (9.2.21), si seleccionamos $K_1 = \alpha_1(1)$. El parámetro K_1 de la celosía se denomina coeficiente de reflexión.

A continuación, considere un filtro FIR para el que $m = 2$. En este caso, la salida de una estructura en forma directa es

$$y(n) = x(n) + \alpha_2(1)x(n-1) + \alpha_2(2)x(n-2) \tag{9.2.22}$$

Conectando en cascada dos etapas en celosía como se muestra en la Figura 9.2.10, es posible obtener la misma salida que la dada por (9.2.22). Por tanto, la salida de la primera etapa es

$$\begin{aligned} f_1(n) &= x(n) + K_1 x(n-1) \\ g_1(n) &= K_1 x(n) + x(n-1) \end{aligned} \tag{9.2.23}$$

La salida de la segunda etapa es

$$\begin{aligned} f_2(n) &= f_1(n) + K_2 g_1(n-1) \\ g_2(n) &= K_2 f_1(n) + g_1(n-1) \end{aligned} \tag{9.2.24}$$

Si centramos nuestra atención en $f_2(n)$ y sustituimos $f_1(n)$ y $g_1(n-1)$ dadas por (9.2.23) en (9.2.24), obtenemos

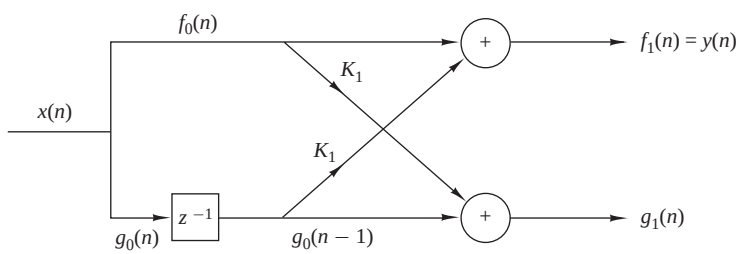
$$\begin{aligned} f_2(n) &= x(n) + K_1 x(n-1) + K_2[K_1 x(n-1) + x(n-2)] \\ &= x(n) + K_1(1+K_2)x(n-1) + K_2 x(n-2) \end{aligned} \tag{9.2.25}$$

Ahora la Ecuación (9.2.25) es idéntica a la salida de la realización de la forma directa del filtro FIR dada por (9.2.22), si igualamos los coeficientes, es decir,

$$\alpha_2(2) = K_2, \qquad \alpha_2(1) = K_1(1+K_2) \tag{9.2.26}$$

o, lo que es equivalente,

$$K_2 = \alpha_2(2), \qquad K_1 = \frac{\alpha_2(1)}{1+\alpha_2(2)} \tag{9.2.27}$$



$$f_0(n) = g_0(n) = x(n)$$
$$f_1(n) = f_0(n) + K_1 g_0(n-1) = x(n) + K_1 x(n-1)$$
$$g_1(n) = K_1 f_0(n) + g_0(n-1) = K_1 x(n) + x(n-1)$$

Figura 9.2.9. Filtro en celosía de una sola etapa.

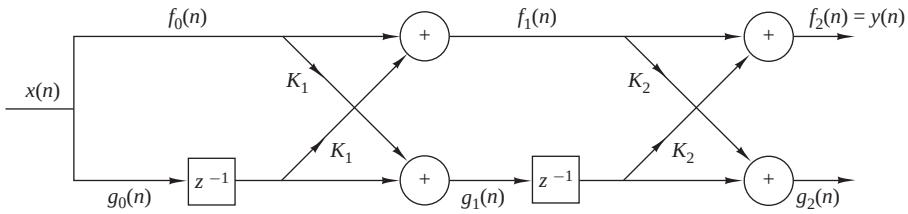


Figura 9.2.10. Filtro en celosía de dos etapas.

Los coeficientes de reflexión K_1 y K_2 del filtro en celosía pueden obtenerse a partir de los coeficientes $\{\alpha_m(k)\}$ de la realización de la forma directa.

Continuando con este proceso, podemos demostrar fácilmente, por inducción, la equivalencia entre un filtro FIR de orden m en la forma directa y un filtro en celosía de orden m o, de m etapas. Generalmente, el filtro en celosía se describe mediante el siguiente conjunto de ecuaciones de orden recursivo:

$$f_0(n) = g_0(n) = x(n) \tag{9.2.28}$$

$$f_m(n) = f_{m-1}(n) + K_m g_{m-1}(n-1), \qquad m = 1, 2, \ldots, M-1 \tag{9.2.29}$$

$$g_m(n) = K_m f_{m-1}(n) + g_{m-1}(n-1), \qquad m = 1, 2, \ldots, M-1 \tag{9.2.30}$$

Entonces la salida del filtro de $(M-1)$ etapas se corresponde con la salida de un filtro FIR de orden $(M-1)$, es decir,

$$y(n) = f_{M-1}(n)$$

La Figura 9.2.11 ilustra un filtro en celosía de $(M-1)$ etapas en forma de diagrama de bloques junto con una etapa típica que muestra los cálculos especificados por (9.2.29) y (9.2.30).

Como consecuencia de la equivalencia entre un filtro FIR y un filtro en celosía, la salida $f_m(n)$ de un filtro en celosía de m etapas se puede expresar como

$$f_m(n) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_m(k) x(n-k), \qquad \alpha_m(0) = 1 \tag{9.2.31}$$

Puesto que (9.2.31) es una suma de convolución, se sabe que la transformada z es

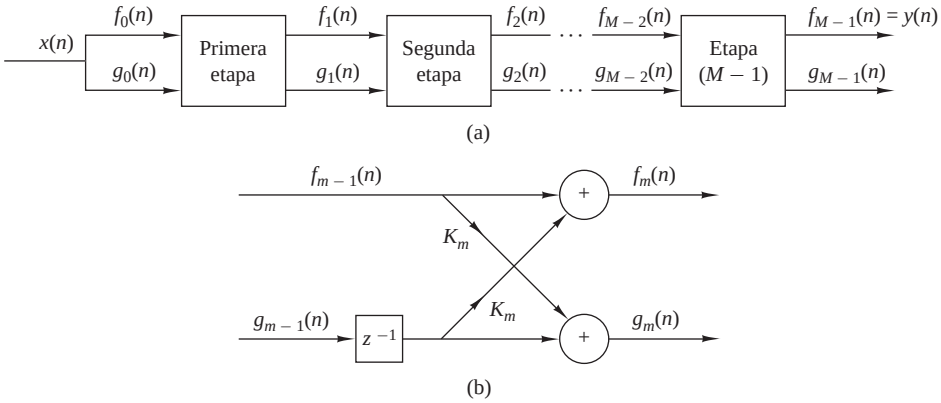


Figura 9.2.11. Filtro en celosía de $(M-1)$ etapas.

$$F_m(z) = A_m(z)X(z)$$

o, lo que es equivalente,

$$A_m(z) = \frac{F_m(z)}{X(z)} = \frac{F_m(z)}{F_0(z)} \tag{9.2.32}$$

La otra componente de salida de la celosía, $g_m(n)$, también se puede expresar en forma de una suma de convolución como en la Ecuación (9.2.31), utilizando otro conjunto de coeficientes, por ejemplo $\{\beta_m(k)\}$. En realidad, este caso es evidente si observamos (9.2.23) y (9.2.24). En (9.2.23), vemos que los coeficientes del filtro para el filtro en celosía que produce $f_1(n)$ son $\{1, K_1\} = \{1, \alpha_1(1)\}$, mientras que los coeficientes para el filtro que tiene la salida $g_1(n)$ son $\{K_1, 1\} = \{\alpha_1(1), 1\}$. Fíjese en que estos dos conjuntos de coeficientes están en orden inverso. Si consideramos el filtro en celosía de dos etapas, con la salida dada por (9.2.24), comprobamos que $g_2(n)$ puede expresarse en la forma

$$\begin{aligned} g_2(n) &= K_2 f_1(n) + g_1(n-1) \\ &= K_2[x(n) + K_1 x(n-1)] + K_1 x(n-1) + x(n-2) \\ &= K_2 x(n) + K_1(1+K_2)x(n-1) + x(n-2) \\ &= \alpha_2(2)x(n) + \alpha_2(1)x(n-1) + x(n-2) \end{aligned}$$

En consecuencia, los coeficientes del filtro son $\{\alpha_2(2), \alpha_2(1), 1\}$, mientras que los coeficientes del filtro que generan la salida $f_2(n)$ son $\{1, \alpha_2(1), \alpha_2(2)\}$. De nuevo, los dos conjuntos de coeficientes del filtro están en orden inverso.

A partir de este desarrollo se deduce que la salida $g_m(n)$ de un filtro en celosía de m etapas puede expresarse mediante la suma de convolución de la forma

$$g_m(n) = \sum_{k=0}^{m} \beta_m(k)x(n-k) \tag{9.2.33}$$

donde los coeficientes del filtro $\{\beta_m(k)\}$ están asociados con un filtro que produce $f_m(n) = y(n)$ pero en orden inverso. En consecuencia,

$$\beta_m(k) = \alpha_m(m-k), \qquad k = 0, 1, \ldots, m \tag{9.2.34}$$

con $\beta_m(m) = 1$.

En el contexto de la predicción lineal, suponga que los datos $x(n)$, $x(n-1)$, $\ldots$, $x(n-m+1)$ se utilizan para predecir linealmente el valor de la señal $x(n-m)$ utilizando un filtro lineal con coeficientes $\{-\beta_m(k)\}$. Luego el valor predicho es

$$\hat{x}(n-m) = -\sum_{k=0}^{m-1} \beta_m(k)x(n-k) \tag{9.2.35}$$

Dado que los datos se procesan en orden inverso a través del predictor, la predicción especificada por (9.2.35) se conoce como *predicción inversa*. Por el contrario, el filtro FIR con la función del sistema $A_m(z)$ se denomina *predictor directo*.

En el dominio de la transformada z, (9.2.33) se convierte en

$$G_m(z) = B_m(z)X(z) \tag{9.2.36}$$

o, lo que es equivalente,

$$B_m(z) = \frac{G_m(z)}{X(z)} \tag{9.2.37}$$

donde $B_m(z)$ representa la función del sistema del filtro FIR con coeficientes $\{\beta_m(k)\}$, es decir,

$$B_m(z) = \sum_{k=0}^{m} \beta_m(k) z^{-k} \tag{9.2.38}$$

Como $\beta_m(k) = \alpha_m(m-k)$, (9.2.38) puede escribirse como sigue

$$\begin{aligned} B_m(z) &= \sum_{k=0}^{m} \alpha_m(m-k) z^{-k} \\ &= \sum_{l=0}^{m} \alpha_m(l) z^{l-m} \\ &= z^{-m} \sum_{l=0}^{m} \alpha_m(l) z^{l} \\ &= z^{-m} A_m(z^{-1}) \end{aligned} \tag{9.2.39}$$

La relación dada en (9.2.39) implica que los ceros del filtro FIR cuya función de sistema es $B_m(z)$ son simplemente los recíprocos de los ceros de $A_m(z)$. Por tanto, $B_m(z)$ es el polinomio recíproco o *inverso* de $A_m(z)$.

Ahora que hemos establecido estas interesantes relaciones entre el filtro FIR en forma directa y la estructura en celosía, volvamos a las ecuaciones recursivas del filtro en celosía dadas por las expresiones (9.2.28) hasta (9.2.30) y pasémoslas al dominio z. Así, tenemos

$$F_0(z) = G_0(z) = X(z) \tag{9.2.40}$$

$$F_m(z) = F_{m-1}(z) + K_m z^{-1} G_{m-1}(z), \qquad m = 1, 2, \ldots, M-1 \tag{9.2.41}$$

$$G_m(z) = K_m F_{m-1}(z) + z^{-1} G_{m-1}(z), \qquad m = 1, 2, \ldots, M-1 \tag{9.2.42}$$

Si dividimos cada ecuación entre $X(z)$, obtenemos los resultados deseados en la forma

$$A_0(z) = B_0(z) = 1 \tag{9.2.43}$$

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z), \qquad m = 1, 2, \ldots, M-1 \tag{9.2.44}$$

$$B_m(z) = K_m A_{m-1}(z) + z^{-1} B_{m-1}(z), \qquad m = 1, 2, \ldots, M-1 \tag{9.2.45}$$

Luego una etapa en celosía se describe en el dominio z mediante la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} A_m(z) \\ B_m(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & K_m \\ K_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{m-1}(z) \\ z^{-1} B_{m-1}(z) \end{bmatrix} \tag{9.2.46}$$

Antes de terminar con esta exposición, es aconsejable desarrollar la relación para convertir los parámetros de la estructura en celosía $\{K_i\}$, es decir, los coeficientes de reflexión, en los coeficientes del filtro en forma directa $\{\alpha_m(k)\}$, y viceversa.

Conversión de los coeficientes de la estructura en celosía en los coeficientes del filtro en forma directa. Los coeficientes del filtro FIR en forma directa $\{\alpha_m(k)\}$ se pueden obtener a partir de los coeficientes en celosía $\{K_i\}$ utilizando las siguientes relaciones:

$$A_0(z) = B_0(z) = 1 \tag{9.2.47}$$

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z), \qquad m = 1, 2, \ldots, M-1 \tag{9.2.48}$$

$$B_m(z) = z^{-m} A_m(z^{-1}), \qquad m = 1, 2, \ldots, M-1 \tag{9.2.49}$$

La solución se obtiene recursivamente, comenzando con $m = 1$. A continuación se obtiene una secuencia de $(M-1)$ filtros FIR, uno para cada valor de m. El procedimiento se ilustra mejor mediante un ejemplo.

EJEMPLO 9.2.2

Dado un filtro en celosía de tres etapas con coeficientes $K_1 = \frac{1}{4}$, $K_2 = \frac{1}{4}$, $K_3 = \frac{1}{3}$, determine los coeficientes del filtro FIR para la estructura en forma directa.

Solución. Resolvemos el problema recursivamente, partiendo de (9.2.48) con $m = 1$. Así, tenemos

$$\begin{aligned} A_1(z) &= A_0(z) + K_1 z^{-1} B_0(z) \\ &= 1 + K_1 z^{-1} = 1 + \tfrac{1}{4} z^{-1} \end{aligned}$$

Por tanto, los coeficientes de un filtro FIR correspondientes al filtro en celosía de una sola etapa son $\alpha_1(0) = 1$, $\alpha_1(1) = K_1 = \frac{1}{4}$. Dado que $B_m(z)$ es el polinomio inverso de $A_m(z)$, tenemos

$$B_1(z) = \frac{1}{4} + z^{-1}$$

A continuación, sumamos la segunda etapa a la celosía. Para $m = 2$, (9.2.48) queda

$$\begin{aligned} A_2(z) &= A_1(z) + K_2 z^{-1} B_1(z) \\ &= 1 + \tfrac{3}{8} z^{-1} + \tfrac{1}{2} z^{-2} \end{aligned}$$

Por tanto, los parámetros FIR correspondientes al filtro en celosía de dos etapas son $\alpha_2(0) = 1$, $\alpha_2(1) = \frac{3}{8}$, $\alpha_2(2) = \frac{1}{2}$. También,

$$B_2(z) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} z^{-1} + z^{-2}$$

Por último, la adición de la tercera etapa a la celosía da lugar al polinomio

$$\begin{aligned} A_3(z) &= A_2(z) + K_3 z^{-1} B_2(z) \\ &= 1 + \tfrac{13}{24} z^{-1} + \tfrac{5}{8} z^{-2} + \tfrac{1}{3} z^{-3} \end{aligned}$$

En consecuencia, la realización de la forma directa del filtro FIR deseado queda caracterizada por los coeficientes

$$\alpha_3(0) = 1, \qquad \alpha_3(1) = \frac{13}{24}, \qquad \alpha_3(2) = \frac{5}{8}, \qquad \alpha_3(3) = \frac{1}{3}$$

Como ilustra este ejemplo, la estructura en celosía con parámetros $K_1, K_2, \ldots, K_m$, corresponde a m filtros FIR en su forma directa, cuyas funciones de sistema son $A_1(z), A_2(z), \ldots, A_m(z)$. Es interesante destacar que una caracterización de estos m filtros FIR en su forma directa requiere $m(m+1)/2$ coeficientes del filtro. En contraste, la caracterización en la forma de celosía requiere sólo los m coeficientes de reflexión $\{K_i\}$. La razón de que la estructura en celosía proporcione una representación más compacta para los m filtros FIR es simplemente que la adición de etapas a la celosía no altera los parámetros de las etapas anteriores. Por otro lado, la adición de la etapa m a la celosiá con $(m-1)$ etapas da lugar a un filtro FIR con la función de sistema $A_m(z)$ que tiene coeficientes completamente diferentes de los componentes del filtro FIR de orden más bajo con la función de sistema $A_{m-1}(z)$.

Puede obtenerse fácilmente una fórmula para determinar los coeficientes del filtro $\{\alpha_m(k)\}$ recursivamente a partir de las relaciones polinómicas dadas en (9.2.47) hasta (9.2.49). A partir de la relación (9.2.48), tenemos

$$\begin{aligned} A_m(z) &= A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z) \\ \sum_{k=0}^{m} \alpha_m(k) z^{-k} &= \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{m-1}(k) z^{-k} + K_m \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{m-1}(m-1-k) z^{-(k+1)} \end{aligned} \tag{9.2.50}$$

Igualando los coeficientes correspondientes a los términos de la misma potencia de z^{-1} y teniendo en cuenta que $\alpha_m(0) = 1$ para $m = 1, 2, \ldots, M-1$, obtenemos la ecuación recursiva deseada para los coeficientes del filtro FIR en la forma

$$\alpha_m(0) = 1 \tag{9.2.51}$$

$$\alpha_m(m) = K_m \tag{9.2.52}$$

$$\begin{aligned} \alpha_m(k) &= \alpha_{m-1}(k) + K_m \alpha_{m-1}(m-k) \\ &= \alpha_{m-1}(k) + \alpha_m(m)\alpha_{m-1}(m-k), \qquad \begin{matrix} 1 \le k \le m-1 \\ m = 1, 2, \ldots, M-1 \end{matrix} \end{aligned} \tag{9.2.53}$$

Observe que (9.2.51) hasta (9.2.53) son simplemente las ecuaciones recursivas de Levinson–Durbin que se proporcionan en el Capítulo 12.

Conversión de los coeficientes del filtro FIR en su forma directa en los coeficientes de la estructura en celosía. Suponga que disponemos de los coeficientes FIR para la realización en forma directa o, lo que es equivalente, del polinomio $A_m(z)$, y que deseamos determinar los parámetros del filtro en celosía correspondientes $\{K_i\}$. Para la celosía de m etapas obtenemos de forma inmediata el parámetro $K_m = \alpha_m(m)$. Para obtener K_{m-1}, necesitamos los polinomios $A_{m-1}(z)$ ya que, en general, K_m se obtiene a partir del polinomio $A_m(z)$ para $m = M-1, M-2, \ldots, 1$. En consecuencia, tenemos que calcular los polinomios $A_m(z)$ comenzando en $m = M-1$ y "descendiendo escalón a escalón" sucesivamente hasta $m = 1$.

La relación recursiva deseada para los polinomios se determina fácilmente a partir de (9.2.44) y (9.2.45). Tenemos

$$\begin{aligned} A_m(z) &= A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z) \\ &= A_{m-1}(z) + K_m [B_m(z) - K_m A_{m-1}(z)] \end{aligned}$$

Si despejamos para obtener $A_{m-1}(z)$

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m B_m(z)}{1 - K_m^2}, \qquad m = M-1, M-2, \ldots, 1 \tag{9.2.54}$$

Así calculamos todos los polinomios de menor grado que $A_m(z)$ comenzando por $A_{M-1}(z)$ y obtenemos los coeficientes de la estructura en celosía a partir de la relación $K_m = \alpha_m(m)$. Observe que el procedimiento es válido siempre que $|K_m| \neq 1$ para $m = 1, 2, \ldots, M-1$.

EJEMPLO 9.2.3

Determine los coeficientes de la estructura en celosía correspondientes al filtro FIR cuya función de sistema es

$$H(z) = A_3(z) = 1 + \frac{13}{24} z^{-1} + \frac{5}{8} z^{-2} + \frac{1}{3} z^{-3}$$

Solución. En primer lugar, observe que $K_3 = \alpha_3(3) = \frac{1}{3}$. Además,

$$B_3(z) = \frac{1}{3} + \frac{5}{8}z^{-1} + \frac{13}{24}z^{-2} + z^{-3}$$

La relación (9.2.54) para $m = 3$ proporciona

$$\begin{aligned} A_2(z) &= \frac{A_3(z) - K_3 B_3(z)}{1 - K_3^2} \\ &= 1 + \frac{3}{8}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} \end{aligned}$$

Por tanto, $K_2 = \alpha_2(2) = \frac{1}{2}$ y $B_2(z) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}z^{-1} + z^{-1}$. Repitiendo la operación de recursión dada por (9.2.51), obtenemos

$$\begin{aligned} A_1(z) &= \frac{A_2(z) - K_2 B_2(z)}{1 - K_2^2} \\ &= 1 + \frac{1}{4}z^{-1} \end{aligned}$$

Luego $K_1 = \alpha_1(1) = \frac{1}{4}$.

A partir de la ecuación recursiva descendente dada por (9.2.54), es relativamente fácil obtener una fórmula para calcular de forma recursiva K_m, comenzando por $m = M - 1$ y descendiendo hasta $m = 1$. Para $m = M - 1$, $M - 2, \ldots, 1$, tenemos

$$K_m = \alpha_m(m), \qquad \alpha_{m-1}(0) = 1 \tag{9.2.55}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{m-1}(k) &= \frac{\alpha_m(k) - K_m \beta_m(k)}{1 - K_m^2} \\ &= \frac{\alpha_m(k) - \alpha_m(m)\alpha_m(m-k)}{1 - \alpha_m^2(m)}, \qquad 1 \le k \le m-1 \end{aligned} \tag{9.2.56}$$

Como hemos mencionado anteriormente, la ecuación recursiva dada por (9.2.56) deja de ser válida si resulta que cualquiera de los parámetros de la estructura en celosía cumple que $|K_m| = 1$. Si esto ocurre, quiere decir que el polinomio $A_{m-1}(z)$ tiene una raíz sobre la circunferencia unidad. Esta raíz se puede extraer de $A_{m-1}(z)$ y el proceso iterativo dado por (9.2.56) se aplica al sistema de orden reducido.

9.3 Estructuras para sistemas IIR

En esta sección, vamos a considerar las diferentes estructuras de sistemas IIR descritas por la ecuación en diferencias dada por (9.1.1) o, lo que es equivalente, por la función de sistema dada en (9.1.2). Al igual que en el caso de los sistemas FIR, existen varios tipos de estructuras o realizaciones, entre las que se incluyen las estructuras en forma directa, en cascada, en celosía y en celosía-escalera. Además, los sistemas IIR disponen de una realización en paralelo. Comenzaremos describiendo dos realizaciones en su forma directa.

9.3.1 Estructuras en forma directa

La función de sistema racional dada por (9.1.2) que caracteriza un sistema IIR puede interpretarse como dos sistemas conectados en cascada, es decir,

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) \tag{9.3.1}$$

donde $H_1(z)$ consta de los ceros de $H(z)$ y $H_2(z)$ consta de los polos de $H(z)$,

$$H_1(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} \tag{9.3.2}$$

y

$$H_2(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \tag{9.3.3}$$

En la Sección 2.5 hemos descrito dos realizaciones de la forma directa caracterizadas por si $H_1(z)$ precede a $H_2(z)$, o viceversa. Dado que $H_1(z)$ es un sistema FIR, su realización en la forma directa es la mostrada en la Figura 9.2.1. Conectando el sistema de sólo polos en cascada con $H_1(z)$, obtenemos la forma directa I de la Figura 9.3.1. Esta realización requiere $M+N+1$ multiplicaciones, $M+N$ sumas y $M+N+1$ posiciones de memoria.

Si el filtro de sólo polos $H_2(z)$ se coloca antes que el filtro de sólo ceros $H_1(z)$, se consigue una estructura más compacta, como se ha visto en la Sección 2.5. Recuerde que la ecuación en diferencias del filtro de sólo polos es

$$w(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k w(n-k) + x(n) \tag{9.3.4}$$

Dado que $w(n)$ es la entrada al sistema de sólo ceros, su salida es

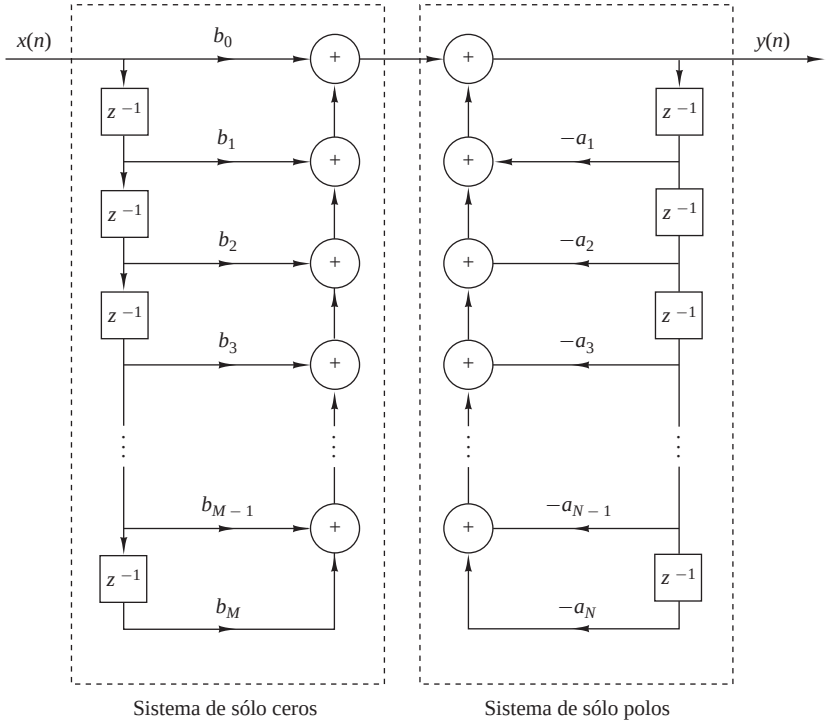


Figura 9.3.1. Realización de la forma directa I.

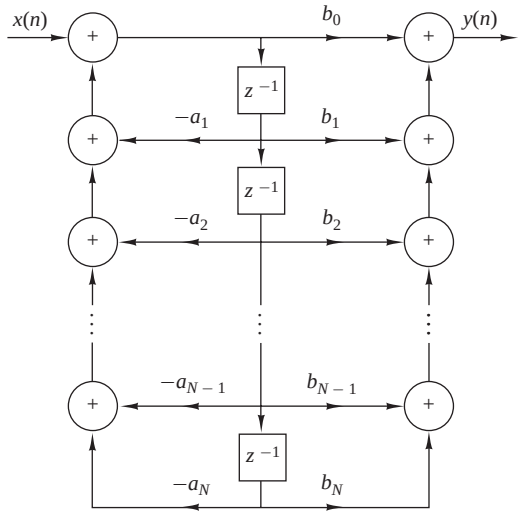


Figura 9.3.2. Realización de la forma directa II $(N = M)$.

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k w(n-k) \tag{9.3.5}$$

Observe que tanto (9.3.4) como (9.3.5) implican versiones retardadas de la secuencia $\{w(n)\}$. En consecuencia, sólo se necesita una única línea de retardo o un único conjunto de posiciones de memoria para almacenar los valores pasados de $\{w(n)\}$. La estructura resultante que implementa (9.3.4) y (9.3.5) es la realización de la forma directa II y se muestra en la Figura 9.3.2. Esta estructura requiere $M+N+1$ multiplicaciones, $M+N$ sumas y un máximo de $\{M,N\}$ posiciones de memoria. Dado que la realización de la forma directa II minimiza el número de posiciones de memoria, se dice que está en forma *canónica*. Sin embargo, debemos indicar que otras estructuras IIR también poseen esta propiedad, de modo que esta terminología quizá no sea muy adecuada.

Las estructuras de las Figuras 9.3.1 y 9.3.2 corresponden a las realizaciones de la "forma directa" porque se obtienen directamente a partir de la función de sistema $H(z)$ sin aplicarla ningún tipo de reordenación. Lamentablemente, en general, ambas estructuras son extremadamente sensibles a los parámetros de cuantificación, por lo que no se recomienda su uso. Este tema se trata en detalle en la Sección 9.6, donde demostraremos que cuando N es grande, un pequeño cambio en un coeficiente del filtro debido a la cuantificación de los parámetros da lugar a una variación importante en la posición de los polos y los ceros del sistema.

9.3.2 Diagramas de flujo de señales y estructuras transpuestas

Un diagrama de flujo de señal proporciona una representación gráfica alternativa y equivalente a los diagramas de bloques que hemos empleado para ilustrar las distintas realizaciones de sistemas. Los elementos básicos de un diagrama de flujo son las ramas y los nodos. Un diagrama de flujo de señal es básicamente un conjunto de ramas dirigidas que se conectan en los nodos. Por definición, la señal que sale de una rama es igual a la ganancia de la rama (función de sistema) por la señal de entrada en la rama. Además, la señal en un nodo del diagrama de flujo es igual a la suma de las señales de todas las ramas que se conectan al nodo.

Para ilustrar estas nociones básicas, considere el sistema IIR de dos polos y dos ceros representado en el diagrama de bloques de la Figura 9.3.3(a). El diagrama de bloques del sistema puede convertirse en el diagrama de flujo de la señal mostrado en la Figura 9.3.3(b). Observe que el diagrama de flujo contiene cinco nodos etiquetados de 1 hasta 5. Dos de los nodos $(1,3)$ son nodos suma (es decir, contienen sumadores), mientras

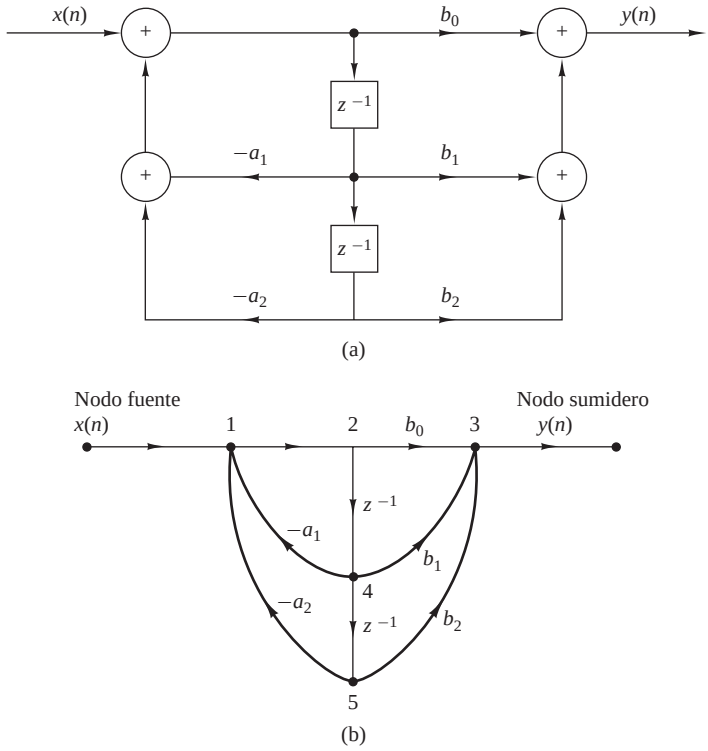


Figura 9.3.3. (a) Estructura de un filtro de segundo orden y (b) su diagrama de flujo de señal.

que los otros tres nodos representan los puntos de rama. Las transmitancias de rama se indican en las ramas del diagrama de flujo. Observe que un retardo se indica mediante la transmitancia de rama z^{-1}. Cuando la transmitancia de rama es igual a la unidad, no se etiqueta. La entrada al sistema se aplica a un *nodo fuente* y la señal de salida se toma en un *nodo sumidero*.

Observe que el diagrama de flujo de señal contiene la misma información básica que el diagrama de bloques del sistema. La única diferencia aparente es que los puntos de rama y los sumadores del diagrama de bloques se representan mediante nodos en el diagrama de flujo de la señal.

Los diagramas de flujo de señal lineales son importantes en el tratamiento de redes y proporcionan resultados muy interesantes. Un punto básico es la transformación de un diagrama de flujo en otro sin modificar la relación de entrada–salida básica. Específicamente, una técnica que resulta útil para obtener estructuras nuevas para sistemas FIR e IIR resulta del *teorema de trasposición* o *teorema del diagrama de flujo inverso*. Este teorema simplemente establece que si invertimos las direcciones de todas las transmitancias de rama e intercambiamos la entrada y la salida en el diagrama de flujo, la función del sistema no varía. La estructura resultante se denomina *estructura transpuesta* o *forma transpuesta*.

Por ejemplo, la transposición del diagrama de flujo de la señal de la Figura 9.3.3(b) se ilustra en la Figura 9.3.4(a). La realización del diagrama de bloques correspondiente a la forma transpuesta se muestra en la Figura 9.3.4(b). Es interesante observar que la transposición del diagrama de flujo original hace que los nodos de rama se conviertan en nodos sumadores, y viceversa.

Aplicamos el teorema de transposición a la estructura de la forma directa II. En primer lugar, en la Figura 9.3.2 invertimos todas las direcciones del diagrama de la señal. A continuación, cambiamos los nodos por sumadores y los sumadores por nodos y, por último, intercambiamos la entrada y la salida. Estas operaciones dan lugar a la estructura transpuesta de la forma directa II mostrada en la Figura 9.3.5. Esta estructura puede

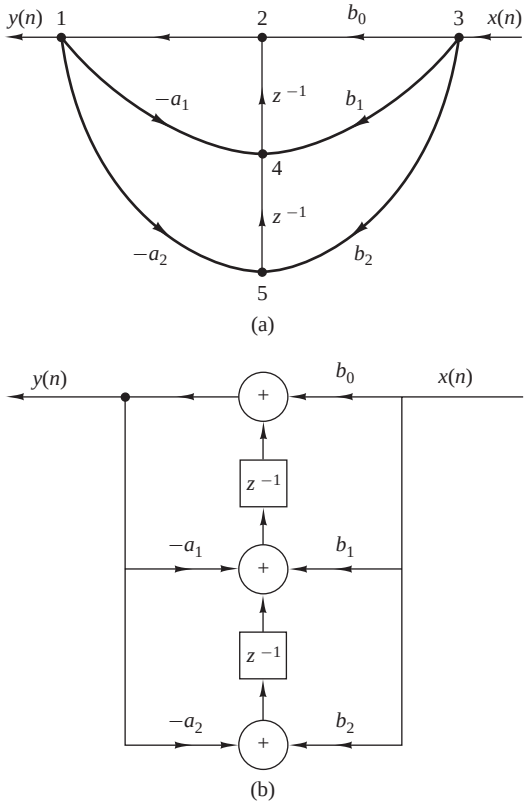


Figura 9.3.4. (a) Diagrama de flujo de señal de la estructura transpuesta y (b) su realización.

volver a dibujarse como se muestra en la Figura 9.3.6, donde se coloca la entrada a la izquierda y la salida a la derecha.

La realización transpuesta de la forma directa II que hemos obtenido puede describirse mediante el conjunto de ecuaciones en diferencias

$$y(n) = w_1(n-1) + b_0 x(n) \tag{9.3.6}$$

$$w_k(n) = w_{k+1}(n-1) - a_k y(n) + b_k x(n), \qquad k = 1, 2, \ldots, N-1 \tag{9.3.7}$$

$$w_N(n) = b_N x(n) - a_N y(n) \tag{9.3.8}$$

Sin perder generalidad, hemos supuesto que $M = N$ al escribir las ecuaciones. También queda claro al observar la Figura 9.3.6 que este conjunto de ecuaciones en diferencias es equivalente a la ecuación en diferencias

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \tag{9.3.9}$$

Por último, fíjese en que la estructura transpuesta en la forma II requiere el mismo número de multiplicaciones, sumas y posiciones de memoria que la estructura original en la forma directa II.

Aunque esta explicación sobre las estructuras transpuestas esta relacionada con la forma general de un sistema IIR, es interesante observar que un sistema FIR, obtenido a partir de (9.3.9) haciendo $a_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, N$,, también es una forma directa transpuesta, como se puede ver en la Figura 9.3.7. Esta estructura se

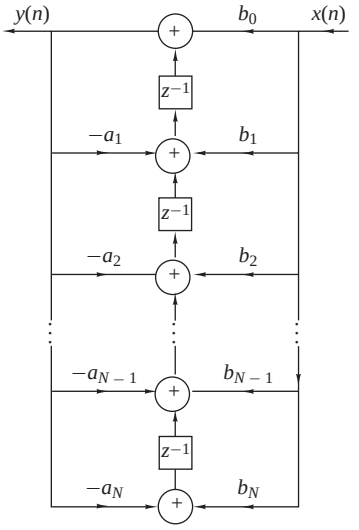


Figura 9.3.5. Estructura transpuesta de la forma directa II.

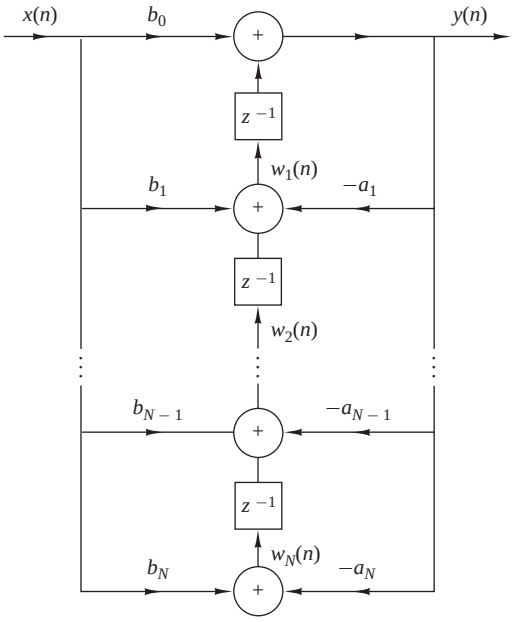


Figura 9.3.6. Estructura transpuesta de la forma directa II.

obtiene simplemente a partir de la Figura 9.3.6 haciendo $a_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, N$. Esta realización de la forma transpuesta puede describirse mediante el conjunto de ecuaciones en diferencias

$$w_M(n) = b_M x(n) \tag{9.3.10}$$

$$w_k(n) = w_{k+1}(n-1) + b_k x(n), \qquad k = M-1, M-2, \ldots, 1 \tag{9.3.11}$$

$$y(n) = w_1(n-1) + b_0 x(n) \tag{9.3.12}$$

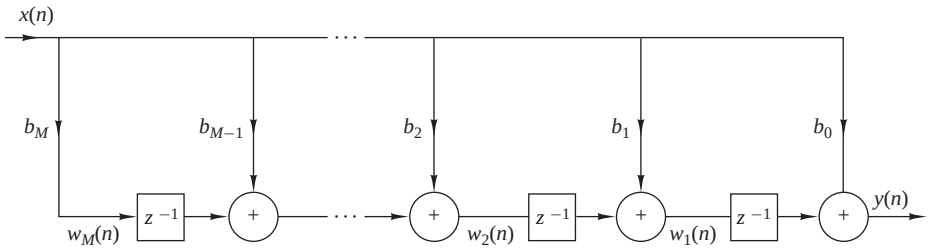


Figura 9.3.7. Estructura FIR transpuesta.

En resumen, la Tabla 9.1 ilustra las estructuras de la forma directa y las correspondientes ecuaciones en diferencias para un sistema IIR básico de dos polos y dos ceros con la función de sistema

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \tag{9.3.13}$$

Éste es el bloque básico de construcción de la realización en cascada de los sistemas IIR de orden superior, la cual se describe en la siguiente sección. De las tres estructuras de la forma directa dadas en la Tabla 9.1, son

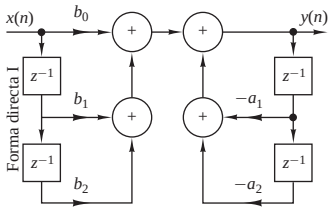
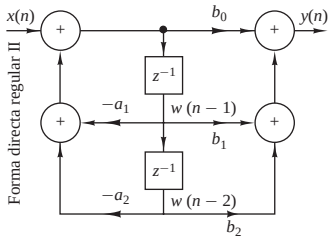
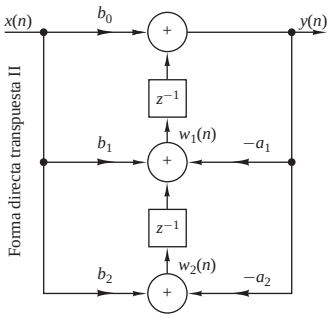
Estructura	Ecuaciones de implementación	Función del sistema
	$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1)$ $+ b_2 x(n-2)$ $- a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2)$	$\dfrac{H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$
	$w(n) = -a_1 w(n-1) - a_2 w(n-2)$ $+x(n)$ $y(n) = b_0 w(n) + b_1 w(n-1)$ $+b_2 w(n-2)$	$\dfrac{H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$
	$y(n) = b_0 x(n) + w_1(n-1)$ $w_1(n) = b_1 x(n) - a_1 y(n)$ $+w_2(n-1)$ $w_2(n) = b_2 x(n) - a_2 y(n)$	$\dfrac{H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$

Tabla 9.1. Módulos de segundo orden para sistemas discretos en el tiempo.

preferibles las estructuras de la forma directa II debido al menor número de posiciones de memoria necesario para su implementación.

Por último, observe que en el dominio z, el conjunto de ecuaciones en diferencias que describe el diagrama de flujo lineal de la señal constituye un conjunto lineal de ecuaciones. Cualquier reordenación de dicho conjunto de ecuaciones es equivalente a una reordenación del diagrama de flujo de la señal, para obtener una nueva estructura, y viceversa.

9.3.3 Estructuras en cascada

Considere un sistema IIR de orden superior cuya función del sistema es la dada por (9.1.2). Sin perder generalidad, podemos suponer que $N \geq M$. El sistema puede descomponerse en factores de una conexión en cascada de subsistemas de segundo orden, tal que $H(z)$ puede expresarse como

$$H(z) = \prod_{k=1}^{K} H_k(z) \tag{9.3.14}$$

donde K es la parte entera de $(N+1)/2$. $H_k(z)$ tiene la forma general

$$H_k(z) = \frac{b_{k0} + b_{k1}z^{-1} + b_{k2}z^{-2}}{1 + a_{k1}z^{-1} + a_{k2}z^{-2}} \tag{9.3.15}$$

Como en el caso de los sistemas FIR basados en la realización en cascada, el parámetro b_0 puede distribuirse igualmente entre las K secciones del filtro, de modo que $b_0 = b_{10}b_{20}\ldots b_{K0}$.

Los coeficientes $\{a_{ki}\}$ y $\{b_{ki}\}$ de los subsistemas de segundo orden son reales. Esto implica que al configurar los subsistemas de segundo orden o factores cuadráticos de la Ecuación (9.3.15), tendremos que agrupar una pareja de polos complejos conjugados y agrupar una pareja de ceros complejos conjugados. El emparejamiento de dos polos complejos conjugados con dos ceros complejos conjugados o con ceros reales para formar un subsistema del tipo dado por (9.3.15) puede hacerse de forma arbitraria. Además, cualesquiera dos ceros reales pueden emparejarse para formar un factor cuadrático y, de la misma forma, cualesquiera dos polos reales pueden emparejarse para dar lugar a un factor cuadrático. En consecuencia, el factor cuadrático del numerador de (9.3.15) puede estar formado por una pareja de raíces reales o por una pareja de raíces complejas conjugadas. Esta misma afirmación se aplica también al denominador de la Ecuación (9.3.15).

Si $N > M$, algunos de los subsistemas de segundo orden tendrán coeficientes del numerador iguales a cero, es decir, $b_{k2} = 0$ o $b_{k1} = 0$, o ambos $b_{k2} = b_{k1} = 0$ para algún valor de k. Además, si N es impar, en uno de los subsistemas, por ejemplo $H_k(z)$, se cumplirá que $a_{k2} = 0$, de modo que el subsistema será un subsistema de primer orden. Para conservar la modularidad de la implementación de $H(z)$, a menudo es preferible utilizar los subsistemas de segundo orden básicos en la estructura en cascada y tener algunos coeficientes iguales a cero en algunos de los subsistemas.

Cada uno de los subsistemas de segundo orden cuya función de sistema es la dada por la Ecuación (9.3.15) puede implementarse según la forma directa I, la forma directa II o la forma directa transpuesta II. Puesto que existen muchas formas de emparejar los polos y los ceros de $H(z)$ en una conexión en cascada de secciones de segundo orden, y diversas maneras de ordenar los subsistemas resultantes, se pueden obtener distintas realizaciones en cascada. Aunque todas las realizaciones en cascada son equivalentes cuando se emplea aritmética de precisión infinita, estas diversas realizaciones pueden diferir significativamente cuando se implementan utilizando aritmética de precisión finita.

La forma general de la estructura en cascada se muestra en la Figura 9.3.8. Si utilizamos la estructura en la forma directa II para cada uno de los subsistemas, el algoritmo de cálculo para implementar el sistema IIR con la función de sistema $H(z)$ se describe mediante el siguiente conjunto de ecuaciones.

$$y_0(n) = x(n) \tag{9.3.16}$$

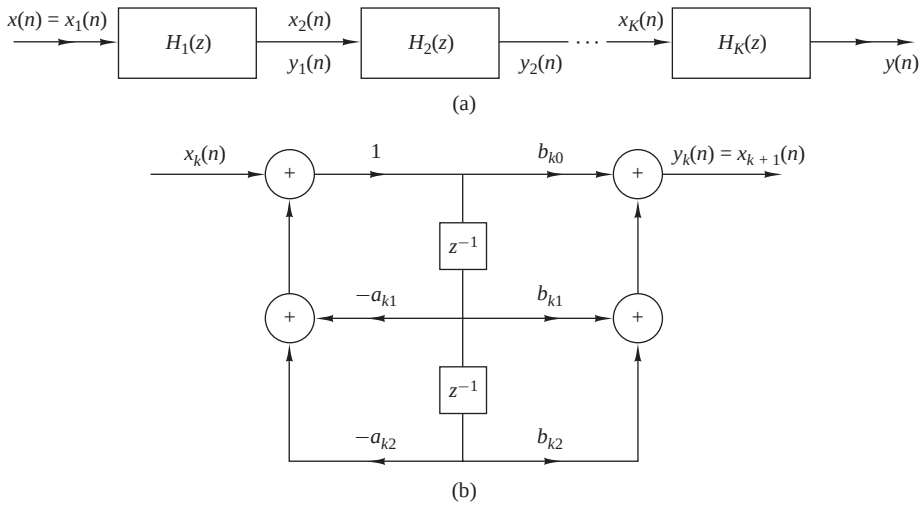


Figura 9.3.8. Estructura en cascada de los sistemas de segundo orden y una realización de cada sección de segundo orden.

$$w_k(n) = -a_{k1}w_k(n-1) - a_{k2}w_k(n-2) + y_{k-1}(n), \qquad k = 1,2,\ldots,K \tag{9.3.17}$$

$$y_k(n) = b_{k0}w_k(n) + b_{k1}w_k(n-1) + b_{k2}w_k(n-2), \qquad k = 1,2,\ldots,K \tag{9.3.18}$$

$$y(n) = y_K(n) \tag{9.3.19}$$

Así, este conjunto de ecuaciones proporciona una descripción completa de la estructura en cascada basada en las secciones de la forma directa II.

9.3.4 Estructuras en paralelo

Puede obtenerse una realización en paralelo de un sistema IIR realizando una expansión en fracciones parciales de $H(z)$. Sin perder generalidad, suponemos de nuevo que $N \geq M$ y que los polos son distintos. Llevando a cabo una expansión en fracciones parciales de $H(z)$, obtenemos

$$H(z) = C + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} \tag{9.3.20}$$

donde $\{p_k\}$ son los polos, $\{A_k\}$ son los coeficientes (residuos) de la expansión en fracciones parciales y la constante C se define como $C = b_N/a_N$. La estructura que implica (9.3.20) se muestra en la Figura 9.3.9, la cual es una estructura en paralelo de filtros de un único polo.

En general, algunos de los polos de $H(z)$ pueden ser complejos. En tal caso, los coeficientes correspondientes A_k también son valores complejos. Para evitar multiplicaciones por números complejos, podemos combinar parejas de polos complejos conjugados para formar subsistemas de dos polos. Además, podemos combinar, de forma arbitraria, parejas de polos reales para formar subsistemas de dos polos. Cada uno de estos subsistemas tiene la forma

$$H_k(z) = \frac{b_{k0} + b_{k1}z^{-1}}{1 + a_{k1}z^{-1} + a_{k2}z^{-2}} \tag{9.3.21}$$

donde los coeficientes $\{b_{ki}\}$ y $\{a_{ki}]$ son los parámetros reales del sistema. La función global puede expresarse ahora como

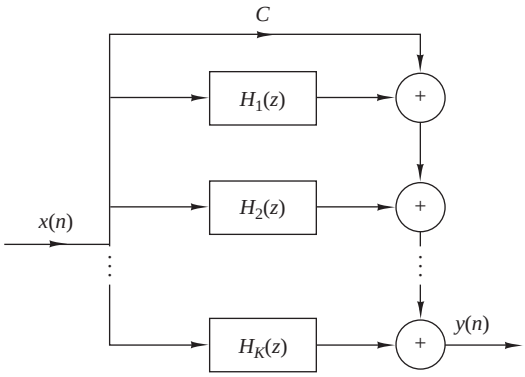


Figura 9.3.9. Estructura paralelo de un sistema IIR.

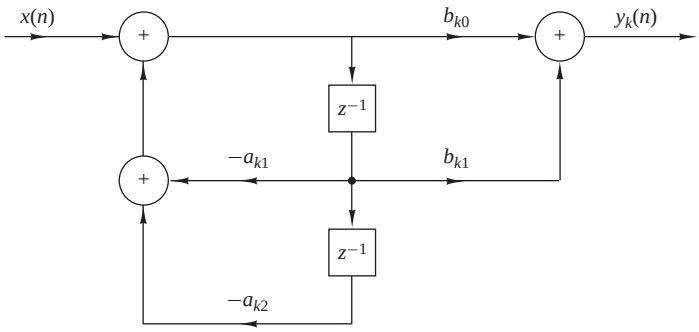


Figura 9.3.10. Estructura de una sección de segundo orden de una realización en paralelo de un sistema IIR.

$$H(z) = C + \sum_{k=1}^{K} H_k(z) \tag{9.3.22}$$

donde K es la parte entera de $(N+1)/2$. Si N es impar, una de las $H_k(z)$ es un sistema de un único polo (es decir, $b_{k1} = a_{k2} = 0$).

Las secciones de segundo orden individuales, que son los bloques básicos de construcción para $H(z)$, se pueden implementar bien aplicando las formas directas o la forma directa transpuesta. La estructura en la forma directa II se ilustra en la Figura 9.3.10. Empleando esta estructura como un bloque básico de construcción, la realización en paralelo del sistema FIR se describe mediante el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$w_k(n) = -a_{k1}w_k(n-1) - a_{k2}w_k(n-2) + x(n), \qquad k = 1,2,\ldots,K \tag{9.3.23}$$

$$y_k(n) = b_{k0}w_k(n) + b_{k1}w_k(n-1), \qquad k = 1,2,\ldots,K \tag{9.3.24}$$

$$y(n) = Cx(n) + \sum_{k=1}^{K} y_k(n) \tag{9.3.25}$$

EJEMPLO 9.3.1

Determine las realizaciones en cascada y en paralelo para el sistema descrito por la función de sistema

$$H(z) = \frac{10(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{2}{3}z^{-1})(1+2z^{-1})}{(1-\frac{3}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{8}z^{-1})[1-(\frac{1}{2}+j\frac{1}{2})z^{-1}][1-(\frac{1}{2}-j\frac{1}{2})z^{-1}]}$$

Solución. La realización en cascada se obtiene fácilmente a partir de esta forma. Un posible emparejamiento de polos y ceros es

$$H_1(z) = \frac{1-\frac{2}{3}z^{-1}}{1-\frac{7}{8}z^{-1}+\frac{3}{32}z^{-2}}$$

$$H_2(z) = \frac{1+\frac{3}{2}z^{-1}-z^{-2}}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$$

y por tanto

$$H(z) = 10H_1(z)H_2(z)$$

La realización en cascada se muestra en la Figura 9.3.11(a).

Para obtener la realización en paralelo, hay que expandir $H(z)$ en fracciones parciales. Así, tenemos

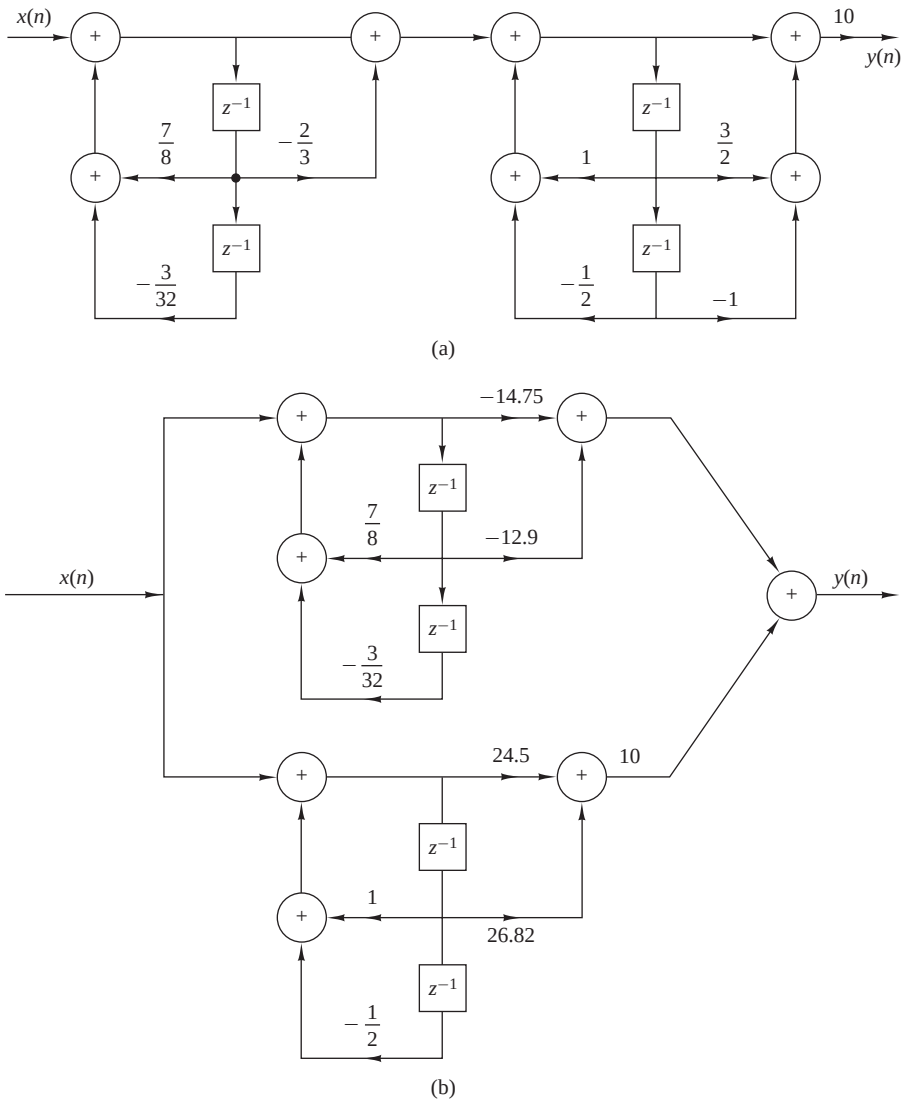


Figura 9.3.11. Realizaciones en cascada y en paralelo para el sistema del Ejemplo 9.3.1.

$$H(z) = \frac{A_1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}} + \frac{A_2}{1-\frac{1}{8}z^{-1}} + \frac{A_3}{1-(\frac{1}{2}+j\frac{1}{2})z^{-1}} + \frac{A_3^*}{1-(\frac{1}{2}-j\frac{1}{2})z^{-1}}$$

donde hay que determinar los coeficientes A_1, A_2, A_3 y A_3^*. Efectuando algunos cálculos aritméticos, obtenemos

$$A_1 = 2.93, \quad A_2 = -17.68, \quad A_3 = 12.25 - j14.57, \quad A_3^* = 12.25 + j14.57$$

Recombinando parejas de polos, tenemos

$$H(z) = \frac{-14.75 - 12.90z^{-1}}{1-\frac{7}{8}z^{-1}+\frac{3}{32}z^{-2}} + \frac{24.50 + 26.82z^{-1}}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$$

La realización en paralelo se ilustra en la Figura 9.3.11(b).

9.3.5 Estructuras en celosía y en celosía–escalera para sistemas IIR

En la Sección 9.2.4 hemos desarrollado una estructura de filtro en celosía que es equivalente a un sistema FIR. En esta sección, vamos a extender el desarrollo a los sistemas IIR.

Partimos de un sistema de sólo polos cuya función de sistema es

$$H(z) = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{N} a_N(k)z^{-k}} = \frac{1}{A_N(z)} \tag{9.3.26}$$

La realización en la forma directa de este sistema se ilustra en la Figura 9.3.12. La ecuación en diferencias para este sistema IIR es

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_N(k)y(n-k) + x(n) \tag{9.3.27}$$

Es interesante destacar que si intercambiamos los papeles de la entrada y de la salida [es decir, intecambiamos $x(n)$ e $y(n)$ en la Ecuación (9.3.27)], obtenemos

$$x(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_N(k)x(n-k) + y(n)$$

o, lo que es equivalente,

$$y(n) = x(n) + \sum_{k=1}^{N} a_N(k)x(n-k) \tag{9.3.28}$$

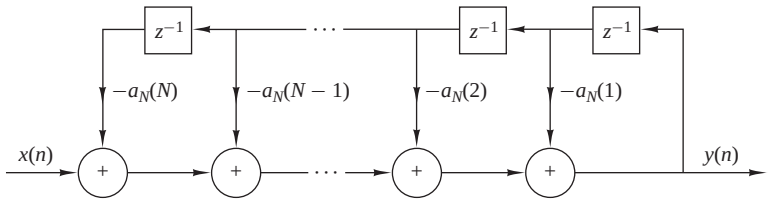


Figura 9.3.12. Realización en la forma directa de un sistema de sólo polos.

Observe que la Ecuación (9.3.28) describe un sistema FIR que tiene la función de sistema $H(z) = A_N(z)$, mientras que el sistema descrito por la ecuación en diferencias (9.3.27) representa un sistema IIR cuya función de sistema es $H(z) = 1/A_N(z)$. Puede obtenerse un sistema a partir del otro simplemente intercambiando los papeles de la entrada y de la salida.

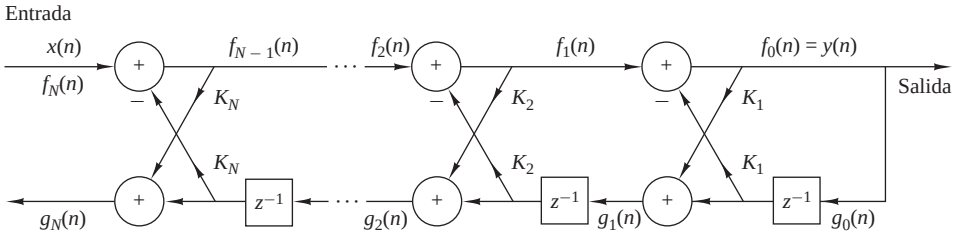


Figura 9.3.13. Estructura en celosía para un sistema IIR de sólo polos.

Basándonos en esta observación, utilizaremos el sistema FIR en celosía de sólo ceros descrito en la Sección 9.2.4 para obtener una estructura en celosía para un sistema IIR de sólo polos intercambiando los papeles de la entrada y de la salida. En primer lugar, tomamos el filtro en celosía de sólo ceros de la Figura 9.2.11 y redefinimos la entrada como

$$x(n) = f_N(n) \tag{9.3.29}$$

y la salida como

$$y(n) = f_0(n) \tag{9.3.30}$$

Éstas son exactamente las definiciones opuestas del filtro de sólo ceros. Estas definiciones imponen que los valores $\{f_m(n)\}$ se calculen en orden descendente [es decir, $f_N(n)$, $f_{N-1}(n), \ldots$]. Este cálculo puede llevarse a cabo reordenando la ecuación recursiva dada en (9.2.29) y expresando a continuación $f_{m-1}(n)$ en función de $f_m(n)$, es decir,

$$f_{m-1}(n) = f_m(n) - K_m g_{m-1}(n-1), \qquad m = N, N-1, \ldots, 1$$

La Ecuación (9.2.30) para $g_m(n)$ no varía.

El resultado de estos cambios es el conjunto de ecuaciones

$$f_N(n) = x(n) \tag{9.3.31}$$

$$f_{m-1}(n) = f_m(n) - K_m g_{m-1}(n-1), \qquad m = N, N-1, \ldots, 1 \tag{9.3.32}$$

$$g_m(n) = K_m f_{m-1}(n) + g_{m-1}(n-1), \qquad m = N, N-1, \ldots, 1 \tag{9.3.33}$$

$$y(n) = f_0(n) = g_0(n) \tag{9.3.34}$$

que corresponde con la estructura mostrada en la Figura 9.3.13.

Para demostrar que el conjunto de ecuaciones dado por (9.3.31) hasta (9.3.34) representa un sistema IIR de sólo polos, consideremos el caso en que $N = 1$. Las ecuaciones se reducen a

$$\begin{aligned} x(n) &= f_1(n) \\ f_0(n) &= f_1(n) - K_1 g_0(n-1) \\ g_1(n) &= K_1 f_0(n) + g_0(n-1) \\ y(n) &= f_0(n) \\ &= x(n) - K_1 y(n-1) \end{aligned} \tag{9.3.35}$$

Además, la ecuación para $g_1(n)$ se puede expresar como

$$g_1(n) = K_1 y(n) + y(n-1) \tag{9.3.36}$$

Observe que (9.3.35) representa un sistema IIR de sólo polos de primer orden mientras que la Ecuación (9.3.36) representa un sistema FIR de primer orden. El polo es el resultado de la realimentación introducida por la solución de $\{f_m(n)\}$ en orden descendente. Esta realimentación se representa en la Figura 9.3.14(a).

A continuación, considere el caso en que $N = 2$, el cual corresponde a la estructura mostrada en la Figura 9.3.14(b). Las ecuaciones correspondientes a esta estructura son

$$\begin{aligned} f_2(n) &= x(n) \\ f_1(n) &= f_2(n) - K_2 g_1(n-1) \\ g_2(n) &= K_2 f_1(n) + g_1(n-1) \\ f_0(n) &= f_1(n) - K_1 g_0(n-1) \\ g_1(n) &= K_1 f_0(n) + g_0(n-1) \\ y(n) &= f_0(n) = g_0(n) \end{aligned} \tag{9.3.37}$$

Después de llevar a cabo algunas sustituciones y manipulaciones obtenemos

$$y(n) = -K_1(1+K_2)y(n-1) - K_2 y(n-2) + x(n) \tag{9.3.38}$$

$$g_2(n) = K_2 y(n) + K_1(1+K_2)y(n-1) + y(n-2) \tag{9.3.39}$$

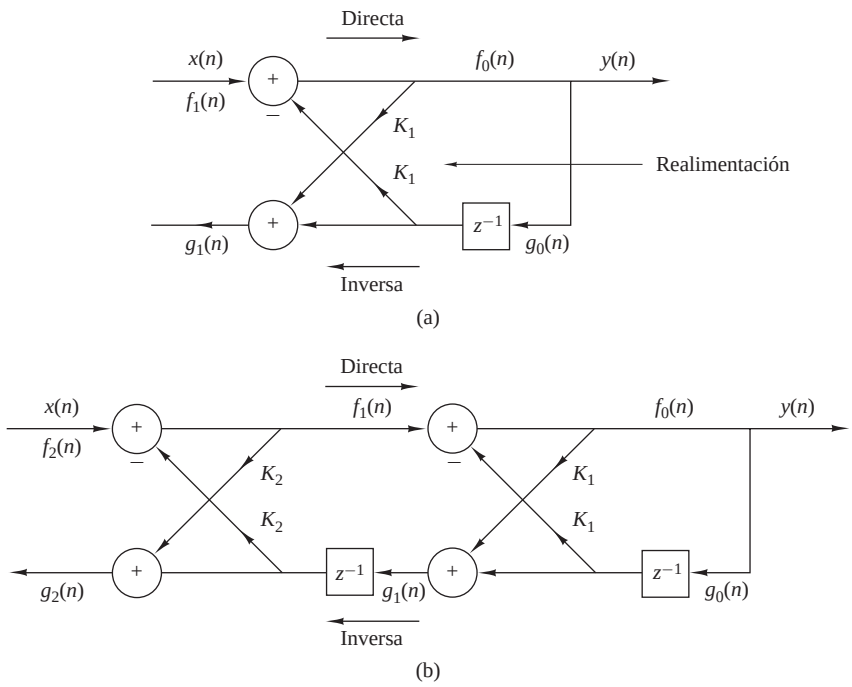


Figura 9.3.14. Sistemas en celosía de un único polo y de dos polos.

Evidentemente, la ecuación en diferencias dada por (9.3.38) representa un sistema IIR de dos polos y la relación (9.3.39) es la ecuación de entrada–salida de un sistema FIR de dos ceros. Observe que los coeficientes del sistema FIR son idénticos a los del sistema IIR, excepto en que se producen en orden inverso.

En general, estas conclusiones son aplicables para cualquier N. Así, con la definición de $A_m(z)$ dada por (9.2.32), la función del sistema para el sistema IIR de sólo polos es

$$H_a(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{F_0(z)}{F_m(z)} = \frac{1}{A_m(z)} \tag{9.3.40}$$

Del mismo modo, la función del sistema FIR de sólo polos es

$$H_b(z) = \frac{G_m(z)}{Y(z)} = \frac{G_m(z)}{G_0(z)} = B_m(z) = z^{-m}A_m(z^{-1}) \tag{9.3.41}$$

donde hemos empleado las relaciones establecidas anteriormente en las expresiones (9.2.36) hasta (9.2.42). Luego los coeficientes del sistema FIR $H_b(z)$ son idénticos a los coeficientes de $A_m(z)$, excepto en que aparecen en orden inverso.

Es interesante destacar que la estructura en celosía de sólo polos dispone de un camino de sólo ceros con entrada $g_0(n)$ y salida $g_N(n)$, que es idéntico a su contrapartida en la estructura en celosía de sólo ceros. El polinomio $B_m(z)$, que representa la función del sistema del camino de sólo ceros para ambas estructuras en celosía, normalmente se denomina *función de sistema inversa*, porque proporciona un camino inverso en la estructura en celosía de sólo ceros.

El lector debe darse cuenta de que las estructuras en celosía de sólo ceros y de sólo polos quedan caracterizadas por el mismo conjunto de parámetros de la celosía, es decir, por $K_1, K_2, \ldots, K_N$. Las dos estructuras en celosía difieren sólo en las interconexiones de sus diagramas de flujo de la señal. En consecuencia, los algoritmos para efectuar la conversión entre los parámetros del sistema $\{\alpha_m(k)\}$ de la realización en la forma directa de un sistema FIR y los parámetros de su contrapartida en celosía se aplican también a la estructura de sólo polos.

Recuerde que las raíces del polinomio $A_N(z)$ se encuentran dentro de la circunferencia unidad si y sólo si los parámetros de la estructura en celosía cumplen que $|K_m| < 1$ para todo $m = 1, 2, \ldots, N$. Por tanto, la estructura en celosía es un sistema estable si y sólo si sus parámetros cumplen que $|K_m| < 1$ para todo m.

En las aplicaciones prácticas, la estructura en celosía de sólo polos se ha empleado para modelar el tracto bucal humano y la estratificación del terreno. En tales casos, los parámetros de la estructura en celosía, $\{K_m\}$, tienen el significado físico de ser idénticos a los coeficientes de reflexión en el medio físico. Ésta es la razón por la que los parámetros de la estructura en celosía se denominan a menudo *coeficientes de reflexión*. En tales aplicaciones, un modelo estable del medio requiere que los coeficientes de reflexión, obtenidos a partir de medidas realizadas sobre las señales de salida del medio, sean menores que la unidad.

La estructura en celosía de sólo polos proporciona el bloque de construcción básico para estructuras de tipo celosía que implementan sistemas IIR que contengan tanto polos como ceros. Para desarrollar la estructura apropiada, consideremos un sistema IIR cuya función de sistema es

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} c_M(k)z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_N(k)z^{-k}} = \frac{C_M(z)}{A_N(z)} \tag{9.3.42}$$

donde la notación empleada en el polinomio del numerador se ha cambiado para evitar la confusión con el desarrollo anterior. Sin perder generalidad, supongamos que $N \geq M$.

En la estructura de la forma directa II, el sistema dado por (9.3.42) queda descrito por las ecuaciones en diferencias

$$w(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_N(k)w(n-k) + x(n) \tag{9.3.43}$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} c_M(k)w(n-k) \tag{9.3.44}$$

Observe que (9.3.43) es la relación entrada–salida de un sistema IIR de sólo polos y que (9.3.44) es la relación entrada–salida de un sistema de sólo ceros. Además, observe que la salida del sistema de sólo ceros es simplemente una combinación lineal de las salidas retardadas del sistema de sólo polos. Esto puede comprobarse fácilmente fijándose en la estructura de la forma directa II representada como se muestra en la Figura 9.3.15.

Dado que los ceros son el resultado de formar una combinación lineal de las salidas anteriores, podemos trasladar esta observación a la construcción de un sistema IIR de polos y ceros utilizando la estructura en celosía de sólo polos como el bloque básico de construcción. Ya hemos mencionado que $g_m(n)$ es una combinacíón lineal de las salidas actual y pasadas. En realidad, el sistema

$$H_b(z) = \frac{G_m(z)}{Y(z)} = B_m(z)$$

es un sistema de sólo ceros. Por tanto, cualquier combinación lineal de $\{g_m(n)\}$ también es un sistema de sólo ceros.

Así, partimos de una estructura en celosía de sólo polos con parámetros K_m, $1 \le m \le N$, y añadimos una estructura en *escalera* tomando como salida una combinación lineal ponderada de $\{g_m(n)\}$. El resultado es un sistema IIR de polos y ceros que tiene la estructura en *celosía–escalera* mostrada en la Figura 9.3.16 para $M = N$. Su salida es

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M} v_m g_m(n) \tag{9.3.45}$$

donde $\{v_m\}$ son los parámetros que determinan los ceros del sistema. La función del sistema correspondiente a (9.3.45) es

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{m=0}^{M} v_m \frac{G_m(z)}{X(z)} \tag{9.3.46}$$

Puesto que $X(z) = F_N(z)$ y $F_0(z) = G_0(z)$, la expresión (9.3.46) puede escribirse como

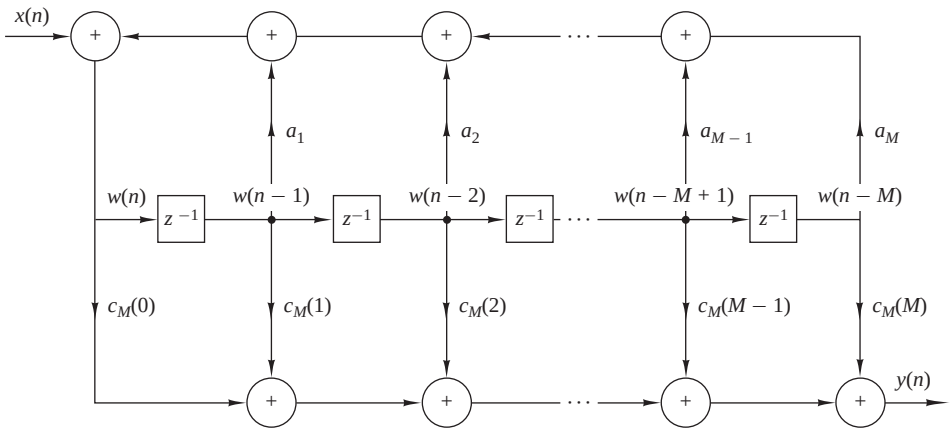


Figura 9.3.15. Realización de la forma directa II del sistema IIR.

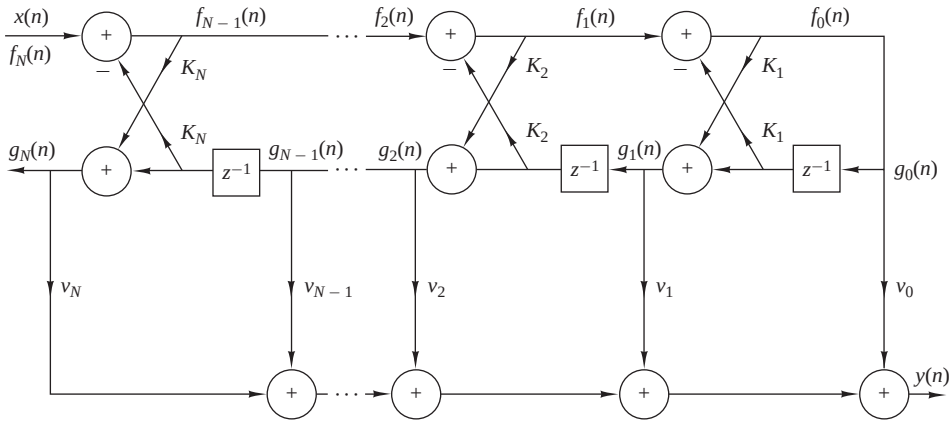


Figura 9.3.16. Estructura en celosía-escalera para la realización de un sistema de polos y ceros.

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{m=0}^{M} v_m \frac{G_m(z)}{G_0(z)} \frac{F_0(z)}{F_N(z)} \\
&= \sum_{m=0}^{M} v_m \frac{B_m(z)}{A_N(z)} \\
&= \frac{\sum_{m=0}^{M} v_m B_m(z)}{A_N(z)}
\end{aligned}
\tag{9.3.47}
$$

Si comparamos (9.3.41) con (9.3.47), concluimos que

$$
C_M(z) = \sum_{m=0}^{M} v_m B_m(z) \tag{9.3.48}
$$

Ésta es la relación que podemos utilizar para determinar los coeficientes de ponderación $\{v_m\}$. Así, hemos demostrado que los coeficientes del polinomio del numerador $C_M(z)$ determinan los parámetros de la estructura en escalera $\{v_m\}$, mientras que el polinomio del denominador $A_N(z)$ determina los parámetros de la celosía $\{K_m\}$.

Dados los polinomios $C_M(z)$ y $A_N(z)$, donde $N \geq M$, primero se determinan los parámetros de la estructura en celosía de sólo polos, como se ha descrito anteriormente, mediante el algoritmo de conversión dado en la Sección 9.2.4, que convierte los coeficientes de la forma directa en los parámetros de la estructura en celosía. Por medio de las relaciones recursivas reductoras dadas por (9.2.54), obtenemos los parámetros de la celosía $\{K_m\}$ y los polinomios $B_m(z)$, $m = 1, 2, \ldots, N$.

Los parámetros de la estructura en escalera se determinan a partir de la Ecuación (9.3.48), que se puede escribir como sigue

$$
C_m(z) = \sum_{k=0}^{m-1} v_k B_k(z) + v_m B_m(z) \tag{9.3.49}
$$

o, lo que es equivalente,

$$
C_m(z) = C_{m-1}(z) + v_m B_m(z) \tag{9.3.50}
$$

Luego $C_m(z)$ puede calcularse de forma recursiva a partir de los polinomios inversos $B_m(z)$, $m = 1, 2, \ldots, M$. Puesto que $\beta_m(m) = 1$ para todo m, los parámetros v_m, $m = 0, 1, \ldots, M$ se pueden determinar teniendo en cuenta en primer lugar, que

$$v_m = c_m(m), \qquad m = 0, 1, \ldots, M \tag{9.3.51}$$

Luego, reescribiendo (9.3.50) como

$$C_{m-1}(z) = C_m(z) - v_m B_m(z) \tag{9.3.52}$$

y calculando esta relación recursiva en sentido descendente de m (es decir, $m = M, M-1, \ldots, 2$), obtenemos $c_m(m)$ y, por tanto, los parámetros de la estructura en escalera de acuerdo con (9.3.51).

Las estructuras del filtro en celosía-escalera que hemos presentado requieren la cantidad de memoria mínima, pero no el número mínimo de multiplicaciones. Aunque existen las estructuras en celosía con sólo un multiplicador por etapa en celosía, el uso de las estructuras en celosía con dos multiplicadores por etapa que hemos descrito es con mucho el más extendido en las aplicaciones prácticas. En conclusión, las características de modularidad y estabilidad implícitas en los coeficientes $\{K_m\}$, y su robustez frente a los efectos de la longitud de palabra finita hacen a la estructura en celosía muy atractiva en muchas aplicaciones prácticas, entre las que se incluyen los sistemas de tratamiento de voz, los filtros adaptativos y el tratamiento de señales geofísicas.

9.4 Representación de números

Hasta aquí hemos considerado la implementación de sistemas discretos en el tiempo sin tener en cuenta los efectos de la longitud de palabra finita que son inherentes a la implementación de cualquier sistema digital, sea hardware o software. De hecho, hemos analizado sistemas modelados como lineales cuando, en realidad, las implementaciones digitales de tales sistemas son inherentemente no lineales.

En esta sección y en las dos siguientes, hemos considerado las diversas formas de los efectos de cuantificación que aparecen en el tratamiento digital de señales. Aunque describimos brevemente las operaciones aritméticas en punto flotante, el objetivo principal son las realizaciones en punto fijo de los filtros digitales.

En esta sección vamos a ver cómo se representan los números en los cálculos digitales. La principal característica de la aritmética digital es el número limitado (normalmente fijo) de dígitos utilizado para representar los números. Esta restricción lleva a una precisión numérica finita en los cálculos, lo que da lugar a errores de redondeo y efectos no lineales en el funcionamiento de los filtros digitales. A continuación, proporcionamos una breve introducción a la aritmética digital.

9.4.1 Representación de números en punto fijo

La representación de un número en formato de punto fijo es una generalización de la familiar reprentación decimal de un número como una cadena de dígitos con un punto decimal. En esta notación, los dígitos situados a la izquierda del punto decimal representan la parte entera del número y los dígitos situados a la derecha del punto decimal representan la parte fraccionaria del número. Así, un número real X puede representarse como

$$\begin{aligned} X &= (b_{-A}, \ldots, b_{-1}, b_0, b_1, \ldots, b_B)_r \\ &= \sum_{i=-A}^{B} b_i r^{-i}, \qquad 0 \le b_i \le (r-1) \end{aligned} \tag{9.4.1}$$

donde b_i representa el dígito, r es la base, A es el número de dígitos enteros y B es el número de dígitos fraccionarios. Por ejemplo, el número decimal $(123.45)_{10}$ y el número binario $(101.0)_2$ representan las sumas siguientes:

$$(123.45)_{10} = 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$$
$$(101.01)_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2}$$

Vamos a centrar nuestra atención en la representación binaria, ya que es la más importante en el tratamiento digital de señales. En este caso, $r = 2$ y los dígitos $\{b_i\}$ son los dígitos binarios o bits y toman los valores $\{0, 1\}$. El dígito binario b_{-A} es el bit más significativo (MSB, *most significant bit*) del número, y el dígito binario b_B es el bit menos significativo (LSB, *least significant bit*). El "punto binario" entre los dígitos b_0 y b_1 no existe físicamente en la computadora. Simplemente, los circuitos lógicos de la computadora se diseñan de manera que los cálculos den lugar a números que correspondan con la supuesta posición del punto decimal.

Utilizando un formato entero de n bits ($A = n-1$, $B = 0$), podemos representar enteros sin signo cuyo módulo esté dentro del intervalo de 0 a $2^n - 1$. Normalmente, utilizamos el formato fraccionario ($A = 0$, $B = n-1$), con un punto binario entre b_0 y b_1, que proporciona números en el intervalo de 0 a $1 - 2^{-n}$. Observe que cualquier número entero o mixto puede representarse en formato fraccionario sacando como factor el término r^A en (9.4.1). Vamos a centrarnos en el formato fraccionario binario porque los números mixtos son difíciles de multiplicar y el número de bits que representa un entero no puede reducirse por truncamiento o redondeo.

Existen tres formas de representar los números negativos, lo que nos lleva a tres formatos para representar números fraccionarios binarios con signo. El formato de las fracciones positivas es el mismo en las tres representaciones, es decir,

$$X = 0.b_1 b_2 \cdots b_B = \sum_{i=1}^{B} b_i \cdot 2^{-i}, \qquad X \geq 0 \tag{9.4.2}$$

Observe que el MSB b_0 se pone a cero para representar el signo positivo. Considere ahora la fracción negativa

$$X = -0.b_1 b_2 \cdots b_B = -\sum_{i=1}^{B} b_i \cdot 2^{-i} \tag{9.4.3}$$

Este número puede representarse utilizando uno de los tres formatos siguientes.

Formato signo magnitud. En este formato, el MSB se pone a 1 para representar el signo negativo,

$$X_{\mathrm{SM}} = 1.b_1 b_2 \cdots b_B, \qquad \text{para} \quad X \leq 0 \tag{9.4.4}$$

Formato en complemento a uno. En este formato, los números negativos se representan como

$$X_{1\mathrm{C}} = 1.\overline{b}_1 \overline{b}_2 \cdots \overline{b}_B, \qquad X \leq 0 \tag{9.4.5}$$

donde $\overline{b}_i = 1 - b_i$ es el complemento a uno de b_i. Por tanto, si X es un número positivo, el número negativo correspondiente se determina complementando (cambiando los 1s por 0s y los 0s por 1s) todos los bits. Una definición alternativa para $X_{1\mathrm{C}}$ puede obtenerse teniendo en cuenta que

$$X_{1\mathrm{C}} = 1 \times 2^0 + \sum_{i=1}^{B} (1 - b_i) \cdot 2^{-i} = 2 - 2^{-B}|X| \tag{9.4.6}$$

Formato en complemento a dos. En este formato, un número negativo se representa formando el complemento a dos del correspondiente número positivo. En otras palabras, el número negativo se obtiene sustrayendo el número positivo de 2.0. Más sencillo, el complemento a dos se obtiene complementando el número positivo y sumándole uno. Así

$$X_{2\mathrm{C}} = 1.\overline{b}_1 \overline{b}_2 \cdots \overline{b}_B + 00 \cdots 01, \qquad X < 0 \tag{9.4.7}$$

donde $+$ representa la suma en módulo 2 que ignora cualquier acarreo generado por el bit de signo. Por ejemplo, el número $-\frac{3}{8}$ se obtiene hallando el complemento de 0011 $(\frac{3}{8})$ para obtener 1100 y sumando luego 0001, lo que da como resultado 1101, que representa $-\frac{3}{8}$ en complemento a dos.

A partir de (9.4.6) y (9.4.7), podemos ver fácilmente que

$$X_{2C} = X_{1C} + 2^{-B} = 2 - |X| \tag{9.4.8}$$

Para demostrar que (9.4.7) realmente representa un número negativo, utilizamos la identidad

$$1 = \sum_{i=1}^{B} 2^{-i} + 2^{-B} \tag{9.4.9}$$

El número negativo X de (9.4.3) puede expresarse como

$$\begin{aligned} X_{2C} &= -\sum_{i=1}^{B} b_i \cdot 2^{-i} + 1 - 1 \\ &= -1 + \sum_{i=1}^{B} (1 - b_i) 2^{-i} + 2^{-B} \\ &= -1 + \sum_{i=1}^{B} \overline{b}_i \cdot 2^{-1} + 2^{-B} \end{aligned}$$

que es exactamente la representación en complemento a dos de (9.4.7).

En resumen, el valor de una cadena binaria $b_0 b_1 \cdots b_B$ depende del formato utilizado. Para números positivos, $b_0 = 0$, y el número está dado por (9.4.2). Para números negativos, utilizamos las fórmulas correspondientes para los tres formatos.

EJEMPLO 9.4.1

Exprese las fracciones $\frac{7}{8}$ y $-\frac{7}{8}$ en los formatos signo–magnitud, complemento a dos y complemento a uno.

Solución. $X = \frac{7}{8}$ se representa como $2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3}$, de modo que $X = 0.111$. En el formato signo–magnitud, $X = -\frac{7}{8}$ se representa como 1.111. En complemento a uno, tenemos

$$X_{1C} = 1.000$$

En complemento a dos, el resultado es

$$X_{2C} = 1.000 + 0.001 = 1.001$$

Las operaciones aritméticas básicas de suma y multiplicación dependen del formato utilizado. En complemento a uno y complemento a dos, la suma se realiza sumando los números bit a bit. Los formatos sólo difieren en la forma en que un bit de acarreo afecta al MSB. Por ejemplo, $\frac{4}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$. En complemento a dos, tenemos

$$0100 \oplus 1101 = 0001$$

donde $\oplus$ indica la suma en módulo 2. Observe que el bit de acarreo, si está presente en el MSB, se elimina. Por otro lado, en la aritmética en complemento a uno, el acarreo en el MSB, si está presente, se lleva al LSB. Por tanto, el cálculo $\frac{4}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$ se convierte en

$$0100 \oplus 1100 = 0000 \oplus 0001 = 0001$$

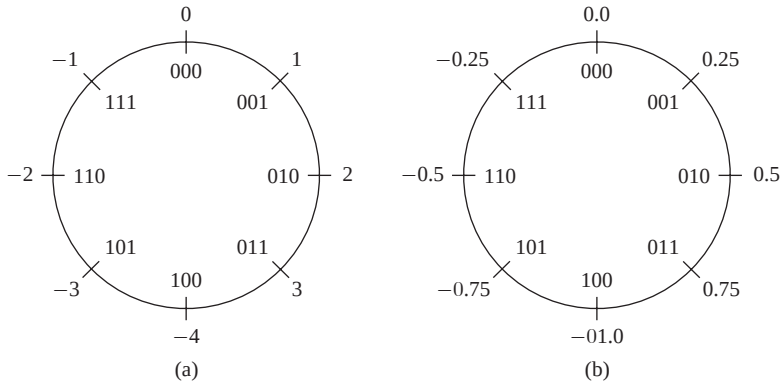


Figura 9.4.1. Rueda de recuento para números en complemento a dos de 3 bits: (a) enteros y (b) fraccionarios.

La suma en el formato signo-magnitud es más compleja y puede implicar comprobaciones de signo, operaciones de complemento y de generación de un acarreo. Por otro lado, la multiplicación directa de dos números en formato de signo-magnitud es relativamente sencilla, mientras que se suele emplear un algoritmo especial para la multiplicación en complemento a uno y en complemento a dos.

La mayoría de los procesadores digitales de señal de punto fijo utilizan la aritmética en complemento a dos. Por tanto, el intervalo para números de $(B+1)$ bits va desde -1 a $1-2^{-B}$. Estos números pueden visualizarse en forma de rueda como se muestra en la Figura 9.4.1 para $B=2$. La aritmética en complemento a dos es básicamente aritmética módulo 2^{B+1} [es decir, cualquier número que caiga fuera del rango (desbordamiento por encima o por debajo) se reduce a este rango restando un múltiplo apropiado de 2^{B+1}]. Este tipo de aritmética puede interpretarse como un contador utilizando la rueda de la Figura 9.4.1. Una propiedad muy importante de la suma en complemento a dos es que si la suma final de una cadena de números $X_1, X_2, \ldots, X_N$ se encuentra dentro del rango, el resultado será correcto, incluso aunque las sumas parciales individuales den lugar a desbordamiento. Ésta y otras características de la aritmética en complemento a dos se tratan en el Problema 9.29.

En general, la multiplicación de dos números en punto fijo de b bits cada uno de longitud da lugar a un producto de $2b$ bits de longitud. En la aritmética de punto fijo, el producto se trunca o se redondea a b bits. Como resultado, obtenemos un resultado que tiene un error de truncamiento o de redondeo en los b bits menos significativos. La caracterización de tales errores se aborda más adelante.

9.4.2 Representación de números en punto flotante binario

La representación en punto fijo de números nos permite cubrir un intervalo de números, como por ejemplo, $x_{\max} - x_{\min}$ con una resolución

$$\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{m-1}$$

donde $m = 2^b$ es el número de niveles y b es el número de bits. Una característica básica de la representación en punto fijo es que la resolución es fija. Además, Δ aumenta en proporción directa ante un incremento del rango dinámico.

Puede emplearse una representación en punto flotante como medio para cubrir un rango dinámico más grande. La representación en punto flotante binario utilizada habitualmente en la práctica consta de una mantisa M, que es la parte fraccionaria del número y cae dentro del intervalo $\frac{1}{2} \leq M < 1$, multiplicada por el factor exponencial 2^E, donde el exponente E es un entero positivo o negativo. Por tanto, un número X se representa como

$$X = M \cdot 2^E$$

La mantisa necesita un bit de signo para poder representar números positivos y negativos, y el exponente precisa un bit de signo adicional. Puesto que la mantisa es una fracción con signo, podemos emplear cualquiera de las cuatro representaciones en punto fijo que acabamos de describir.

Por ejemplo, el número $X_1 = 5$ se representa mediante la mantisa y el exponente siguientes:

$$\begin{aligned} M_1 &= 0.101000 \\ E_1 &= 011 \end{aligned}$$

mientras que el número $X_2 = \frac{3}{8}$ se representa mediante la mantisa y el exponente siguientes

$$\begin{aligned} M_2 &= 0.110000 \\ E_2 &= 101 \end{aligned}$$

donde el bit más a la izquierda del exponente representa el bit de signo.

Para multiplicar los dos números, se multiplican las mantisas y se suman los exponentes. Luego el producto de estos dos números es

$$\begin{aligned} X_1X_2 &= M_1M_2 \cdot 2^{E_1+E_2} \\ &= (0.011110) \cdot 2^{010} \\ &= (0.111100) \cdot 2^{001} \end{aligned}$$

Por otro lado, la suma de dos números en punto flotante requiere que los exponentes sean iguales. Esto puede conseguirse desplazando la mantisa del número más pequeño hacia la derecha y compensando mediante el incremento del exponente correspondiente. Luego el número X_2 puede expresarse como

$$\begin{aligned} M_2 &= 0.000011 \\ E_2 &= 011 \end{aligned}$$

Con $E_2 = E_1$, podemos sumar los dos números X_1 y X_2. El resultado es

$$X_1 + X_2 = (0.101011) \cdot 2^{011}$$

Fíjese en que, en general, la operación de desplazamiento requerida para igualar el exponente de X_2 con el de X_1 da lugar a una pérdida de precisión. En este ejemplo, la mantisa de seis bits era lo suficientemente larga como para acomodar un desplazamiento de cuatro bits hacia la derecha en M_2 sin perder ninguno de ellos. Sin embargo, un desplazamiento de cinco bits causaría la pérdida de un bit y un desplazamiento de seis bits hacia la derecha daría como resultado $M_2 = 0.000000$, a menos que apliquemos un redondeo después del desplazamiento de modo que $M_2 = 0.000001$.

Se produce desbordamiento en la multiplicación de dos números en punto flotante cuando la suma de los exponentes excede el rango dinámico de la representación en punto fijo del exponente.

Si comparamos una representación en punto fijo con una representación en punto flotante, teniendo ambos el mismo número total de bits, es evidente que la representación en punto flotante nos permite cubrir un intervalo dinámico mayor variando la resolución a lo largo del intervalo. La resolución disminuye cuando aumenta el tamaño de números sucesivos. En otras palabras, la distancia entre dos números sucesivos en punto flotante sucesivos aumenta cuando los números aumentan de tamaño. Esta resolución variable da lugar a un rango dinámico mayor. Alternativamente, si deseamos cubrir el mismo rango dinámico tanto con la representación en punto fijo como con la representación en punto flotante, ésta última proporciona una resolución más precisa para números pequeños y una resolución menos precisa para números grandes. Por el contrario, la representación en punto fijo proporciona una resolución uniforme en el rango de números.

Por ejemplo, si tenemos una computadora que emplea un tamaño de palabra de 32 bits, es posible representar 2^{32} números. Si deseamos representar los enteros positivos a partir de cero, el posible entero más grande que podremos escribir será

$$2^{32} - 1 = 4{,}294{,}967{,}295$$

La distancia entre números sucesivos (la resolución) es 1. Alternativamente, podemos designar el bit más a la izquierda como el bit de signo y utilizar los 31 bits restantes para el módulo. En tal caso, una representación en punto fijo nos permite cubrir el rango

$$-(2^{31} - 1) = -2{,}147{,}483{,}647 \quad \text{a} \quad (2^{31} - 1) = 2{,}147{,}483{,}647$$

de nuevo con una resolución de 1.

Por otro lado, suponga que aumentamos la resolución asignando 10 bits para la parte fraccionaria, 21 bits para la parte entera y 1 bit para el signo. Luego esta representación nos permite cubrir el rango dinámico

$$-(2^{31} - 1) \cdot 2^{-10} = -(2^{21} - 2^{-10}) \quad \text{a} \quad (2^{31} - 1) \cdot 2^{-10} = 2^{21} - 2^{-10}$$

o, o lo que es equivalente,

$$-2{,}097{,}151.999 \quad \text{a} \quad 2{,}097{,}151.999$$

En este caso, la resolución es 2^{-10}. Por tanto, el rango dinámico se ha reducido en un factor de aproximadamente 1000 (en realidad, 2^{10}), mientras que la resolución se ha incrementado en el mismo factor.

Con fines comparativos, suponga que se utiliza una palabra de 32 bits para representar números en punto flotante. En particular, la mantisa se representa mediante 23 bits más un bit de signo y el exponente mediante 7 bits más un bit de signo. Ahora, el número más pequeño en módulo tendrá la representación,

$$\begin{array}{cccc} \text{signo} & \text{23 bits} & \text{signo} & \text{7 bits} \\ 0. & 100\cdots0 & 1 & 1111111 = \frac{1}{2} \times 2^{-127} \approx 0.3 \times 10^{-38} \end{array}$$

En el otro extremo, el número más grande que puede representarse con esta representación en punto flotante es

$$\begin{array}{cccc} \text{signo} & \text{23 bits} & \text{signo} & \text{7 bits} \\ 0 & 111\cdots1 & 0 & 1111111 = (1 - 2^{-23}) \times 2^{127} \approx 1.7 \times 10^{38} \end{array}$$

Luego, hemos conseguido un rango dinámico de aproximadamente 10^{76}, pero con resolución variable. En particular, disponemos de una resolución precisa para números pequeños y de una resolución más basta para números grandes.

La representación del cero plantea algunos problemas especiales. En general, sólo la mantisa tiene que ser cero, pero no el exponente. La elección de M y E, la representación del cero, el manejo de los desbordamientos y otras cuestiones relacionadas han dado lugar a las diversas representaciones en punto flotante en las diferentes computadoras digitales. En un esfuerzo por definir un formato en punto flotante común, el IEEE (*Institute of Electrical and Electronic Engineers*) presentó el estándar IEEE 754, el cual es ampliamente utilizado en la práctica. En una máquina de 32 bits, un número en punto flotante de simple precisión que cumpla el estándar IEEE 754, se representa como $X = (-1)^s \cdot 2^{E-127}(M)$, donde

0	1 … 8	9 … 31
S	E	M

Este número tiene las siguientes interpretaciones:

Si $E = 255$ y $M \neq 0$, entonces X no es un número

Si $E = 255$ y $M = 0$, entonces $X = (-1)^S \cdot \infty$

Si $0 < E < 255$, entonces $X = (-1)^S \cdot 2^{E-127}(1.M)$

Si $E = 0$ y $M \neq 0$, entonces $X = (-1)^S \cdot 2^{-126}(0.M)$

Si $E = 0$ y $M = 0$, entonces $X = (-1)^S \cdot 0$

donde $0.M$ es una fracción y $1.M$ es un número mixto con un bit entero y 23 bits fraccionarios. Por ejemplo, el número

0	1 0 0 0 0 0 1 0	1 0 1 0 $\cdots$ 00
S	E	M

tiene el valor $X = -1^0 \times 2^{130-127} \times 1.1010\ldots0 = 2^3 \times \frac{13}{8} = 13$. El rango del módulo de los números en punto flotante de 32 bits que cumplen el estándar IEEE 754 va desde $2^{-126} \times 2^{-23}$ a $(2 - 2^{-23}) \times 2^{127}$ (es decir, desde 1.18×10^{-38} a 3.40×10^{38}). Los cálculos con números fuera de este rango darán lugar a desbordamientos.

9.4.3 Errores debidos al redondeo y el truncamiento

Cuando efectúamos cálculos, tales como multiplicaciones, utilizando aritmética en punto fijo o en punto flotante, normalmente nos enfrentamos al problema de cuantificar un número mediante truncamiento o redondeo, de un nivel de precisión dado a un nivel de precisión menor. El efecto del redondeo y el truncamiento es el de introducir un error cuyo valor depende del número de bits del número original y el número de bits después de la cuantificación. Las características de los errores introducidos por el truncamiento o el redondeo dependen de la forma concreta de la representación del número.

Más específicamente, considere una representación en punto fijo en la que un número x se cuantifica pasando de utilizar b_u bits a b bits. Luego el número

$$x = \overbrace{0.1011\cdots01}^{b_u}$$

que consta de b_u bits antes de la cuantificación se representa como

$$x = \overbrace{0.101\cdots1}^{b}$$

después de la cuantificación, donde $b < b_u$. Por ejemplo, si x representa la muestra de una señal analógica, entonces b_u puede considerarse como infinito. En cualquier caso, si el cuantificador trunca el valor de x, el error de truncamiento se define como

$$E_t = Q_t(x) - x \tag{9.4.10}$$

En primer lugar, consideramos el rango de valores del error para las representaciones signo–magnitud y en complemento a dos. En ambas representaciones, los números positivos tienen representaciones idénticas. Para números positivos, el truncamiento da lugar a un número que es más pequeño que el número no cuantificado. En consecuencia, el error de truncamiento que resulta de reducir el número de bits significativos de b_u a b es

$$-(2^{-b} - 2^{-b_u}) \leq E_t \leq 0 \tag{9.4.11}$$

donde el error más grande se produce al descartar $b_u - b$ bits, que son todos uno.

En el caso de números de punto fijo negativos en la representación signo–magnitud, el error de truncamiento es positivo, ya que el truncamiento básicamente reduce el módulo de los números. En consecuencia, para números negativos, tenemos

$$0 \leq E_t \leq (2^{-b} - 2^{-b_u}) \tag{9.4.12}$$

En la representación en complemento a dos, el negativo de un número se obtiene sustrayendo el número positivo correspondiente de 2. En consecuencia, el efecto de truncamiento de un número negativo es el de aumentar el módulo de dicho número negativo. En consecuencia, $x > Q_t(x)$ y por tanto

$$-(2^{-b} - 2^{-b_u}) \leq E_t \leq 0 \tag{9.4.13}$$

Luego concluimos que *el error de truncamiento en la representación signo–magnitud es simétrico respecto de cero y cae dentro del rango.*

$$-(2^{-b} - 2^{-b_u}) \leq E_t \leq (2^{-b} - 2^{-b_u}) \tag{9.4.14}$$

Por otro lado, *en la representación en complemento a dos, el error de truncamiento siempre es negativo y se encuentra dentro del rango*

$$-(2^{-b} - 2^{-b_u}) \leq E_t \leq 0 \tag{9.4.15}$$

A continuación, consideramos los errores de cuantificación debidos al redondeo de un número. Un número x, representado por b_u bits antes de la cuantificación y b bits después de la cuantificación, da lugar a un error de cuantificación que es

$$E_r = Q_r(x) - x \tag{9.4.16}$$

Básicamente, el redondeo implica sólo al módulo del número y, en consecuencia, el error de redondeo es independiente del tipo de reprentación en punto fijo que se emplee. El error máximo que puede aparecer debido al redondeo es $(2^{-b} - 2^{-b_u})/2$ y éste puede ser positivo o negativo, dependiendo del valor de x. Por tanto, *el error de redondeo es simétrico respecto a cero y se encuentra dentro del rango*

$$-\frac{1}{2}(2^{-b} - 2^{-b_u}) \leq E_r \leq \frac{1}{2}(2^{-b} - 2^{-b_u}) \tag{9.4.17}$$

Estas relaciones se resumen en la Figura 9.4.2 cuando x es una amplitud de la señal continua $(b_u = \infty)$.

En una representación en punto flotante, la mantisa se redondea o se trunca. A causa de la resolución no uniforme, el error correspondiente en la representación en punto flotante es proporcional al número que se va a cuantificar. Una representación apropiada para el valor cuantificado es

$$Q(x) = x + ex \tag{9.4.18}$$

donde e es el error relativo. Luego

$$Q(x) - x = ex \tag{9.4.19}$$

En el caso de truncamiento basado en la representación en complemento a dos de la mantisa, tenemos

$$-2^E 2^{-b} < e_t x < 0 \tag{9.4.20}$$

para números positivos. Puesto que $2^{E-1} \leq x < 2^E$, se tiene que

$$-2^{-b+1} < e_t \leq 0, \qquad x > 0 \tag{9.4.21}$$

Por el contrario, para un número negativo en complemento a dos, el error es

$$0 \leq e_t x < 2^E 2^{-b}$$

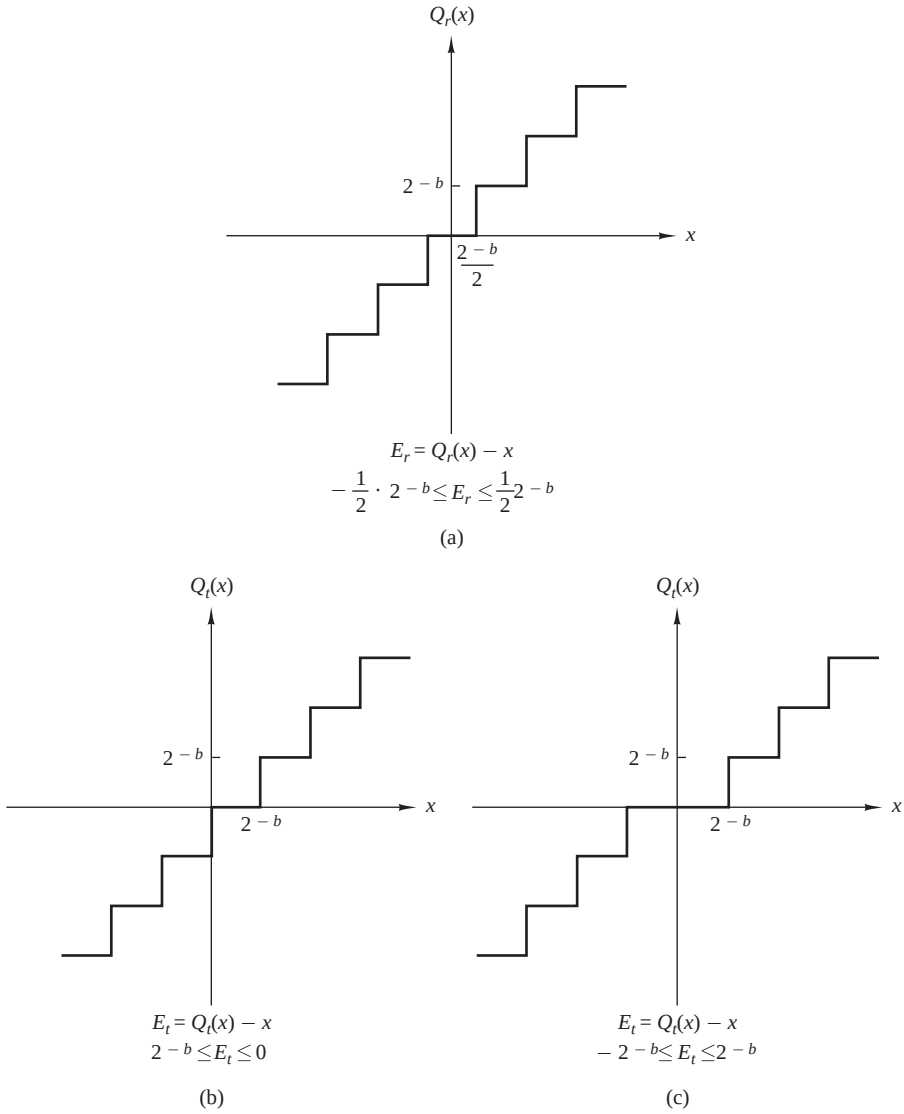


Figura 9.4.2. Errores de cuantificación debidos al redondeo y el truncamiento: (a) redondeo; (b) truncamiento en complemento a dos; (c) truncamiento para el formato signo–magnitud.

y, por tanto,

$$0 \leq e_t < 2^{-b+1}, \qquad x < 0 \tag{9.4.22}$$

En el caso en el que la matisa se redondea, el error resultante es simétrico respecto a cero y tiene un valor máximo de $\pm 2^{-b}/2$. En consecuencia, el error de redondeo es

$$-2^E \cdot 2^{-b}/2 < e_r x \leq 2^E \cdot 2^{-b}/2 \tag{9.4.23}$$

De nuevo, dado que x se encuentra dentro del intervalo $2^{E-1} \leq x < 2^E$, dividimos entre 2^{E-1} de modo que

$$-2^{-b} < e_r \leq 2^{-b} \tag{9.4.24}$$

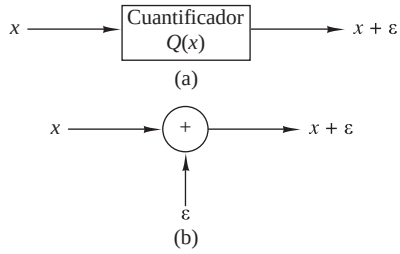


Figura 9.4.3. Modelo del ruido aditivo para el proceso de cuantificación no lineal: (a) sistema real; (b) modelo para la cuantificación.

En cálculos aritméticos que implican cuantificación a través del truncamiento y el redondeo, es conveniente adoptar un método estadístico para caracterizar tales errores. El cuantificador puede modelarse introduciendo un ruido aditivo al valor cuantificado x. Luego podemos escribir

$$Q(x) = x + \varepsilon$$

donde $\varepsilon = E_r$ para el caso de redondeo y $\varepsilon = E_t$ para el caso de truncamiento. Este modelo se ilustra en la Figura 9.4.3.

Dado que x puede ser cualquier número que se encuentre dentro de cualquiera de los niveles del cuantificador, el error de cuantificación normalmente se modela como una variable aleatoria definida dentro de los límites especificados. Suponemos que esta variable aleatoria está uniformemente distribuida dentro de los rangos especificados para las representaciones en punto fijo. Además, en la práctica, $b_u >> b$, por lo que podemos despreciar el factor 2^{-b_u} en las fórmulas que se propocionan más adelante. Bajo estas condiciones, las funciones de densidad de probabilidad para los errores de redondeo y truncamiento en las dos representaciones en punto fijo se ilustran en la Figura 9.4.4. Observe que en el caso de truncamiento de la representación en complemento a dos del número, el valor medio del error presenta una desviación de $2^{-b}/2$, mientras que en todos los demás casos, como hemos ilustrado, el error tiene un valor medio de cero.

Utilizaremos esta caracterización estadística de los errores de cuantificación para tratar tales errores en las operaciones de filtrado digital y para el cálculo de la DFT en implementaciones que usen aritmética de punto fijo.

9.5 Cuantificación de los coeficientes del filtro

En la realización hardware o software de los filtros FIR e IIR empleando una computadora de propósito general, la precisión con la que pueden especificarse los coeficientes del filtro está limitada por la longitud de palabra de la computadora o el registro proporcionado para almacenar los coeficientes. Puesto que los coeficientes utilizados en la implementación de un determinado filtro no son exactos, los polos y los ceros de la función del sistema, en general, serán diferentes de los polos y ceros deseados. En consecuencia, obtenemos un filtro que tiene una respuesta en frecuencia que es diferente de la respuesta en frecuencia del filtro con coeficientes no cuantificados.

En la Sección 9.5.1, hemos demostrado que la sensibilidad de la respuesta en frecuencia del filtro, al cuantificar los coeficientes del mismo, se minimiza implementando un filtro que tenga un número grande de polos y ceros como una interconexión de secciones de filtros de segundo orden. Esto nos lleva a las realizaciones en paralelo y en cascada en las que los bloques básicos de construcción son filtros de segundo orden.

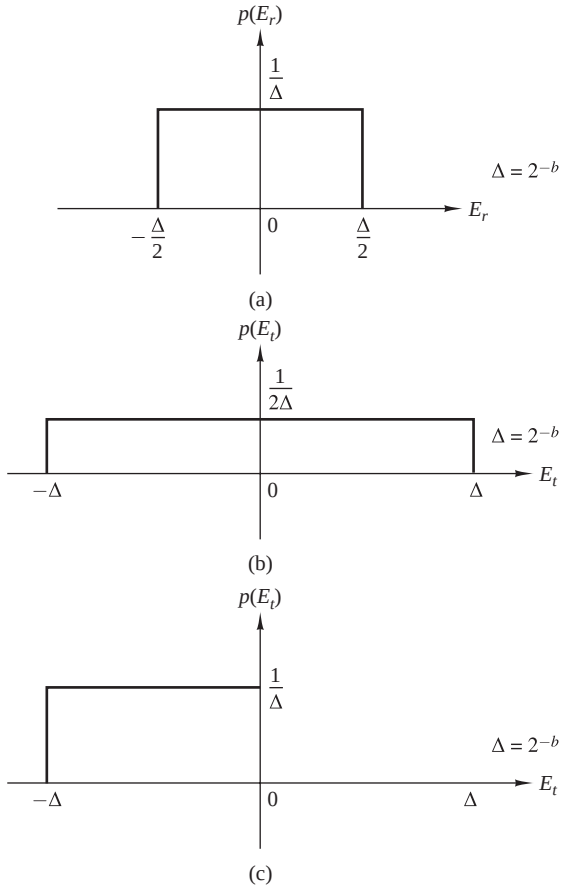


Figura 9.4.4. Caracterización estadística de los errores de cuantificación. (a) Error de redondeo. (b) Error de truncamiento para el formato signo–magnitud. (c) Error de truncamiento para el formato en complemento a dos.

9.5.1 Análisis de la sensibilidad en la cuantificación de los coeficientes del filtro

Para ilustrar el efecto de la cuantificación en los coeficientes del filtro en una realización en forma directa de un filtro IIR, consideremos un filtro IIR general con la función de sistema

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \tag{9.5.1}$$

La realización de la forma directa del filtro IIR con coeficientes cuantificados tiene la función de sistema

$$\overline{H}(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} \overline{b}_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} \overline{a}_k z^{-k}} \tag{9.5.2}$$

donde los coeficientes cuantificados $\{\overline{b}_k\}$ y $\{\overline{a}_k\}$ pueden relacionarse con los coeficientes no cuantificados $\{b_k\}$ y $\{a_k\}$ mediante las relaciones

$$\begin{aligned} \overline{a}_k &= a_k + \Delta a_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, N \\ \overline{b}_k &= b_k + \Delta b_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, M \end{aligned} \tag{9.5.3}$$

donde $\{\Delta a_k\}$ y $\{\Delta b_k\}$ representan los errores de cuantificación.

El denominador de $H(z)$ puede expresarse de la forma

$$D(z) = 1 + \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = \prod_{k=1}^{N} (1 - p_k z^{-1}) \tag{9.5.4}$$

donde $\{p_k\}$ son los polos de $H(z)$. De forma similar, podemos expresar el denominador de $\overline{H}(z)$ como

$$\overline{D}(z) = \prod_{k=1}^{N} (1 - \overline{p}_k z^{-1}) \tag{9.5.5}$$

donde $\overline{p}_k = p_k + \Delta p_k$, $k = 1, 2, \ldots, N$, y Δp_k es el error o perturbación resultante de la cuantificación de los coeficientes del filtro.

Ahora relacionaremos la perturbación Δp_k con los errores de cuantificación en $\{a_k\}$.

El error de perturbación Δp_i puede expresarse como

$$\Delta p_i = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial p_i}{\partial a_k} \Delta a_k \tag{9.5.6}$$

donde $\partial p_i / \partial a_k$, la derivada parcial de p_i con respecto a a_k, representa la variación incremental en el polo p_i debida a la variación en el coeficiente a_k. Por tanto, el error total Δp_i se expresa como la suma de los errores incrementales debidos a las variaciones en cada uno de los coeficientes $\{a_k\}$.

Las derivadas parciales $\partial p_i / \partial a_k$, $k = 1, 2, \ldots, N$, pueden obtenerse diferenciando $D(z)$ con respecto a cada uno de los $\{a_k\}$. En primer lugar, tenemos

$$\left(\frac{\partial D(z)}{\partial a_k} \right)_{z=p_i} = \left(\frac{\partial D(z)}{\partial z} \right)_{z=p_i} \left(\frac{\partial p_i}{\partial a_k} \right) \tag{9.5.7}$$

Entonces,

$$\frac{\partial p_i}{\partial a_k} = \frac{(\partial D(z)/\partial a_k)_{z=p_i}}{(\partial D(z)/\partial z)_{z=p_i}} \tag{9.5.8}$$

El numerador de (9.5.8) es

$$\left(\frac{\partial D(z)}{\partial a_k} \right)_{z=p_i} = -z^{-k}|_{z=p_i} = -p_i^{-k} \tag{9.5.9}$$

El denominador de (9.5.8) es

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial D(z)}{\partial z} \right)_{z=p_i} &= \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[\prod_{l=1}^{N} (1 - p_l z^{-1}) \right] \right\}_{z=pi} \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^{N} \frac{p_k}{z^2} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{N} (1 - p_l z^{-1}) \right\}_{z=p_i} \\ &= \frac{1}{p_i^N} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{N} (p_i - p_l) \end{aligned} \tag{9.5.10}$$

Por tanto, (9.5.8) puede escribirse como

$$\frac{\partial p_i}{\partial a_k} = \frac{-p_i^{N-k}}{\prod\limits_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{N}(p_i - p_l)} \tag{9.5.11}$$

Sustituyendo el resultado de (9.5.11) en (9.5.6) obtenemos el error de perturbación total Δp_i en la forma

$$\Delta p_i = -\sum_{k=1}^{N} \frac{p_i^{N-k}}{\prod\limits_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{N}(p_i - p_l)} \Delta a_k \tag{9.5.12}$$

Esta expresión proporciona una medida de la sensibilidad del polo i-ésimo a las variaciones de los coeficientes $\{a_k\}$. Puede obtenerse un resultado análogo para la sensibilidad de los ceros con los errores de los parámetros $\{b_k\}$.

Los términos $(p_i - p_l)$ en el denominador de la Ecuación (9.5.12) representan los vectores en el plano z de los polos $\{p_l\}$ al polo p_i. Si los polos están muy próximos entre sí, como en el caso de un filtro de banda estrecha, como el mostrado en la Figura 9.5.1, las longitudes $|p_i - p_l|$ son pequeñas para los polos en las vecindades de p_i. Estas longitudes pequeñas contribuirán a aumentar los errores y, por tanto, se obtiene un error de pertubación Δp_i mayor.

El error Δp_i puede minimizarse maximizando las longitudes $|p_i - p_l|$. Esto puede conseguirse implementando el filtro de orden más alto mediante filtros de un sólo polo o de doble polo. Sin embargo, en general, las secciones de filtros de un sólo polo (y de un sólo cero) tienen polos complejos y requieren operaciones aritméticas complejas para sus realizaciones. Este problema se puede evitar combinando polos complejos (y ceros) para formar secciones de filtros de segundo orden. Dado que los polos complejos suelen estar lo suficientemente separados, los errores de perturbación $\{\Delta p_i\}$ están minimizados. En consecuencia, el filtro resultante con coeficientes cuantificados tiene una respuesta en frecuencia que es una muy buena aproximación a la respuesta en frecuencia del filtro con coeficientes no cuantificados.

Es interesante destacar que incluso en el caso de una sección de un filtro de dos polos, la estructura empleada para implementar la sección del filtro desempeña un papel importante en los errores causados por la cuantificación de los coeficientes. Más específicamente, consideremos un filtro de dos polos con una función de sistema

$$H(z) = \frac{1}{1 - (2r\cos\theta)z^{-1} + r^2 z^{-2}} \tag{9.5.13}$$

Este filtro tiene polos en $z = re^{\pm j\theta}$. Cuando se implementa como se muestra en la Figura 9.5.2, tiene dos coeficientes, $a_1 = 2r\cos\theta$ y $a_2 = -r^2$. Con precisión infinita, es posible obtener un número infinito de posiciones de polos. Evidentemente, con precisión finita (es decir, con coeficientes cuantificados a_1 y a_2), las posiciones de los polos son también finitas. De hecho, cuando se emplean b bits para representar los módulos de a_1 y a_2, existen como máximo $(2^b - 1)^2$ posibles posiciones para los polos en cada cuadrante, excluyendo el caso $a_1 = 0$ y $a_2 = 0$.

Por ejemplo, supongamos que $b = 4$. En este caso, existen 15 posibles valores distintos de cero para a_1. También, existen 15 posibles valores para r^2. Estos posibles valores se ilustran en la Figura 9.5.3 sólo para el primer cuadrante del plano z. En este caso, existen 169 posibles posiciones para los polos. La no uniformidad en sus posiciones se debe al hecho de que estamos cuantificando r^2, mientras que las posiciones de los polos caen en un arco circular de radio r. De particular importancia es el conjunto disperso de polos para los valores de θ próximos a cero y, debido a la simetría, próximos a $\theta = \pi$. Esta situación es muy desfavorable para filtros paso bajo y paso alto que normalmente presentan polos agrupados en las proximidades de $\theta = 0$ y $\theta = \pi$.

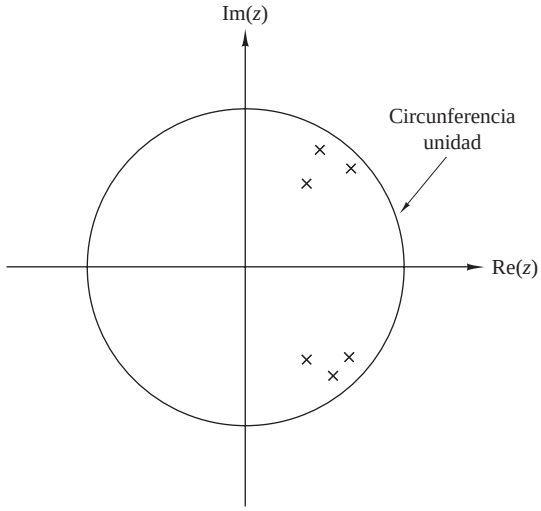


Figura 9.5.1. Posiciones de los polos para un filtro IIR paso banda.

Una realización alternativa del filtro de polos es la estructura acoplada mostrada en la Figura 9.5.4. Las dos ecuaciones de la realización acoplada son

$$\begin{aligned} y_1(n) &= x(n) + r\cos\theta\, y_1(n-1) - r\,\mathrm{sen}\,\theta\, y(n-1) \\ y(n) &= r\,\mathrm{sen}\,\theta\, y_1(n-1) + r\cos\theta\, y(n-1) \end{aligned} \tag{9.5.14}$$

Transformando estas dos ecuaciones en el dominio z, es sencillo demostrar que

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{(r\,\mathrm{sen}\,\theta)z^{-1}}{1-(2r\cos\theta)z^{-1}+r^2z^{-2}} \tag{9.5.15}$$

En la realización acoplada podemos observar que existen también dos coeficientes, $\alpha_1 = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ y $\alpha_2 = r\cos\theta$. Dado que ambos son lineales en r, ahora las posibles posiciones de los polos se encuentran en puntos igualmente espaciados sobre una cuadrícula rectangular, como se muestra en la Figura 9.5.5. En consecuencia, las posiciones de los polos ahora están uniformemente distribuidas dentro de la circunferencia unidad, la cual es una situación más deseable que la realización anterior, especialmente para filtros paso bajo (en este caso,

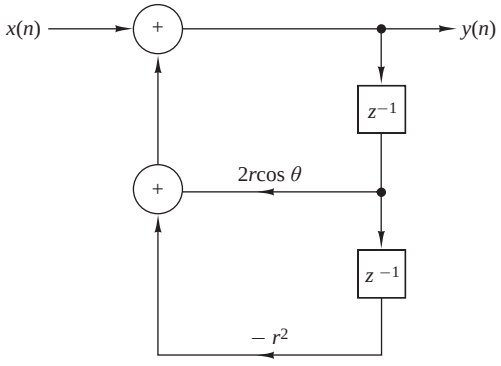


Figura 9.5.2. Realización del filtro IIR de dos polos.

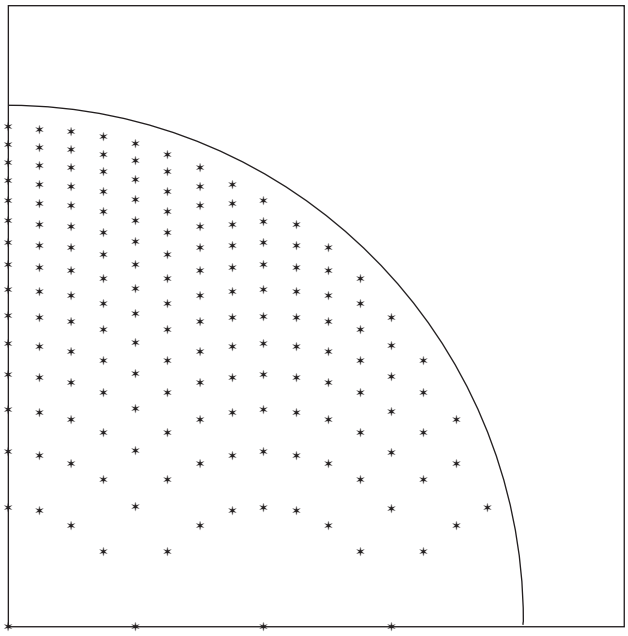


Figura 9.5.3. Posibles posiciones de los polos para la realización del filtro IIR de dos polos de la Figura 9.5.2.

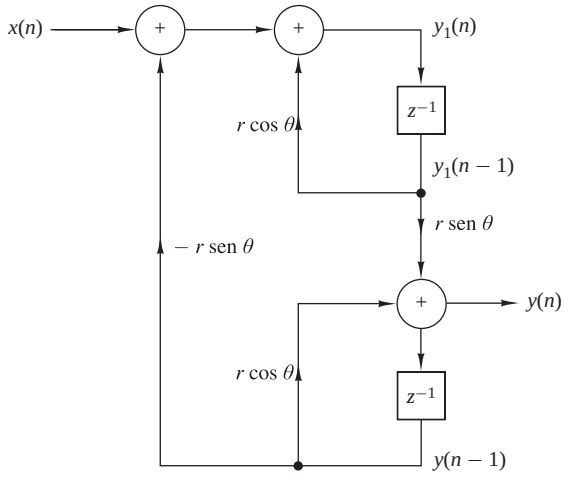


Figura 9.5.4. Realización acoplada de un filtro IIR de dos polos.

existen 198 posibles posiciones para los polos). Sin embargo, el precio que hay que pagar por esta distribución uniforme de las posiciones de los polos es un incremento de los cálculos. La realización acoplada requiere cuatro multiplicaciones por punto de salida, mientras que la realización de la Figura 9.5.2 sólo requiere dos multiplicaciones por punto de salida.

Dado que existen varias formas en las que se puede realizar una sección de filtro de segundo orden, obviamente existen muchas posibilidades para las distintas posiciones de los polos con coeficienets cuantificados. Idealmente, seleccionaremos una estructura que nos proporcione un conjunto denso de puntos en las regiones donde caen los polos. Sin embargo, lamentablemente, no existe un método simple y sistemático para determinar la realización del filtro que proporciona el resultado deseado.

Dado que un filtro IIR de orden superior debería implementarse como una combinación de secciones de segundo orden, es preciso decidir si emplear una configuración paralelo o una configuración en cascada. En otras palabras, debemos decidir entre la realización

$$H(z) = \prod_{k=1}^{K} \frac{b_{k0} + b_{k1}z^{-1} + b_{k2}z^{-2}}{1 + a_{k1}z^{-1} + a_{k2}z^{-2}} \tag{9.5.16}$$

y la realización

$$H(z) = \sum_{k=1}^{K} \frac{c_{k0} + c_{k1}z^{-1}}{1 + a_{k1}z^{-1} + a_{k2}z^{-2}} \tag{9.5.17}$$

Si el filtro IIR tiene ceros sobre la circunferencia unidad, como ocurre generalmente en el caso de los filtros elíptico y de Chebyshev de tipo II, cada sección de segundo orden de la configuración en cascada de (9.5.16) contiene un par de ceros complejos conjugados. Los coeficientes $\{b_k\}$ determinan directamente la posición de estos ceros. Si los coeficientes $\{b_k\}$ están cuantificados, la sensibilidad de la respuesta del sistema a los errores de cuantificación se controla fácil y directamente asignando un número lo suficientemente grande de bits para la representación de los $\{b_{ki}\}$. De hecho, podemos evaluar fácilmente el efecto de la perturbación resultante de la cuantificación de los coeficientes $\{b_{ki}\}$ con una determinada precisión. Luego tenemos un control directo tanto de los polos como de los ceros que resultan del proceso de cuantificación.

Por otro lado, la realización en paralelo de $H(z)$ sólo proporciona un control directo de los polos del sistema. Los coeficientes del numerador $\{c_{k0}\}$ y $\{c_{k1}\}$ no especifican la posición de los ceros directamente. De hecho, $\{c_{k0}\}$ y $\{c_{k1}\}$ se obtienen mediante una expansión en fracciones parciales de $H(z)$. Por tanto, no influyen directamente en la posición de los ceros, aunque sí indirectamente a través de la combinación de todos los factores de $H(z)$. En consecuencia, es más difícil determinar el efecto de los errores de cuantificación en los coeficientes $\{c_{ki}\}$ sobre la posición de los ceros del sistema.

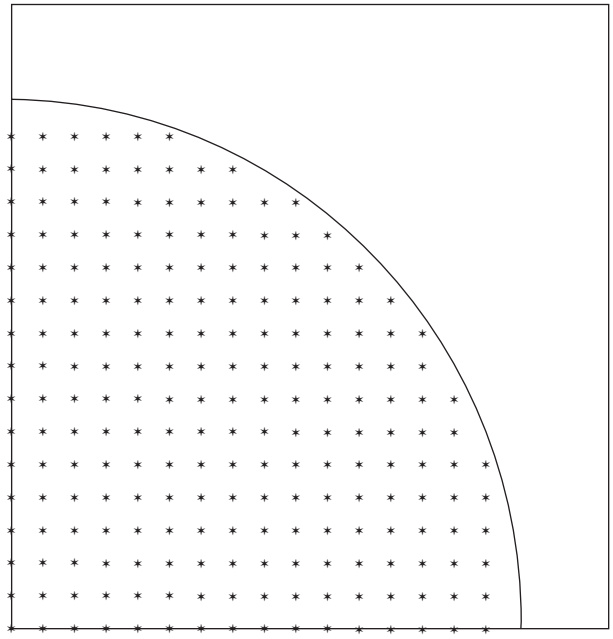


Figura 9.5.5. Posibles posiciones de los polos para el filtro acoplado de dos polos de la Figura 9.5.4.

Es evidente que la cuantificación de los parámetros $\{c_{ki}\}$ probablemente produce una perturbación importante en las posiciones de los ceros y, normalmente, es lo suficientemente grande en implementaciones de punto fijo como para eliminar los ceros de la circunferencia unidad. Ésta es una situación bastante indeseable, que se puede solucionar fácilmente utilizando una representación en punto flotante. En cualquier caso, la realización en cascada es más robusta frente a la cuantificación de coeficientes y será la opción preferible en las aplicaciones prácticas, especialmente donde se emplee la representación en punto fijo.

EJEMPLO 9.5.1

Determine el efecto de la cuantificación de parámetros en la respuesta en frecuencia del filtro elíptico de orden siete dado en la Tabla 10.6, si se implementa conectando en cascada secciones de segundo orden.

Solución. Los coeficientes del filtro elíptico dado en la Tabla 10.6 están especificados para la conexión en cascada que proporciona seis dígitos significativos. Cuantificamos estos coeficientes (mediante redondeo) a cuatro y luego a tres dígitos significativos y representamos gráficamente el módulo (en decibelios) y la fase de la respuesta en frecuencia. Los resultados se muestran en la Figura 9.5.6 junto con la respuesta en frecuencia del filtro con coeficientes no cuantificados (seis dígitos significativos). Observe que existe una degradación insignificante debida a la cuantificación de coeficientes en la realización en cascada.

EJEMPLO 9.5.2

Repita el cálculo de la respuesta en frecuencia para el filtro elíptico considerado en el Ejemplo 9.5.1 cuando se implementa conectando en paralelo secciones de segundo orden.

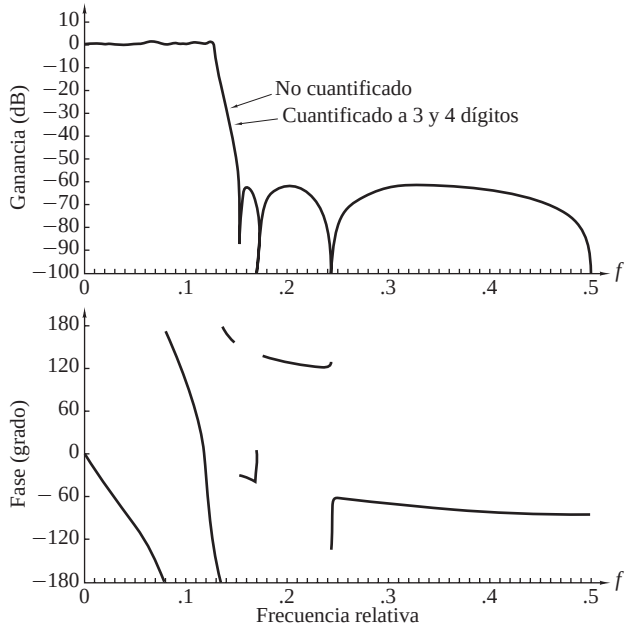


Figura 9.5.6. Efecto de la cuantificación de los coeficientes del módulo y la fase de la respuesta de un filtro elíptico de orden $N = 7$ implementado en cascada.

Solución. La función del sistema para el filtro elíptico de orden siete dado en la Tabla 10.6 es

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{0.2781304 + 0.0054373108z^{-1}}{1 - 0.790103z^{-1}} \\ &+ \frac{-0.3867805 + 0.3322229z^{-1}}{1 - 1.517223z^{-1} + 0.714088z^{-2}} \\ &+ \frac{0.1277036 - 0.1558696z^{-1}}{1 - 1.421773z^{-1} + 0.861895z^{-2}} \\ &+ \frac{-0.015824186 + 0.38377356z^{-1}}{1 - 1.387447z^{-1} + 0.962242z^{-2}} \end{aligned}$$

La respuesta en frecuencia de este filtro con coeficientes cuantificados a cuatro dígitos se muestra en la Figura 9.5.7(a). Cuando este resultado se compara con la respuesta en frecuencia de la Figura 9.5.6, puede observarse que los ceros de la realización en paralelo han sido lo suficientemente perturbados como para que los nulos del módulo de la respuesta se encuentren ahora en -80, -85 y -92 dB. La fase de la respuesta también se ha visto perturbada aunque en un grado mucho menor.

Cuando los coeficientes se cuantifican a tres dígitos significativos, la respuesta en frecuencia se deteriora de forma significativa, tanto en módulo como en fase, como se ilustra en la Figura 9.5.7(b). Es evidente a partir del módulo de la respuesta que los ceros ya no se encuentran sobre la circunferencia unidad como resultado de la cuantificación de los coeficientes. Este resultado ilustra claramente la sensibilidad de los ceros a la cuantificación de los coeficientes en la realización en paralelo.

Si comparamos con los resultados del Ejemplo 9.5.1, también es evidente que la realización en cascada es defintivamente más robusta en lo que se refiere a la cuantificación de parámetros que la realización en paralelo.

9.5.2 Cuantificación de los filtros FIR

Como hemos visto en la sección anterior, el análisis de sensibilidad realizado sobre los polos de un sistema también se aplica directamente a los ceros de los filtros IIR. En consecuencia, una expresión análoga a (9.5.12) puede obtenerse para los ceros de un filtro FIR. En efecto, generalmente, implementaremos los filtros FIR con un número grande de ceros como una cascada de filtros de primer orden y de segundo orden para minimizar la sensibilidad a la cuantificación de coeficientes.

En la práctica, tiene un especial interés la realización de los filtros FIR de fase lineal. Las realizaciones en la forma directa mostradas en las Figuras 9.2.1 y 9.2.2 mantienen la propiedad de fase lineal incluso cuando se cuantifican los coeficientes. Esto puede deducirse fácilmente teniendo en cuenta que la función de sistema de un filtro FIR de fase lineal satisface la propiedad

$$H(z) = \pm z^{-(M-1)} H(z^{-1})$$

independientemente de si los coeficientes se cuantifican o no (*véase* la Sección 10.2). En consecuencia, la cuantificación de coeficientes no afecta a la fase del filtro FIR, sino sólo al módulo. Por tanto, los efectos de cuantificación no son tan severos en un filtro FIR de fase lineal, ya que sólo influyen sobre el módulo.

EJEMPLO 9.5.3

Determine el efecto de la cuantificación de parámetros sobre la respuesta en frecuencia de un filtro FIR paso banda de fase lineal de orden $M = 32$. El filtro se implementa en su forma directa.

Solución. La respuesta en frecuencia de un filtro FIR paso banda de fase lineal con coeficientes sin cuantificar se muestra en la Figura 9.5.8(a). Cuando los coeficientes se cuantifican a cuatro dígitos significativos, el efecto sobre la respuesta en

frecuencia es insignificante. Sin embargo, cuando los coeficientes se cuantifican a tres dígitos significativos, los lóbulos secundarios aumentan en varios decibelios, como se muestra en la Figura 9.5.8(b). Este resultado indica que deberíamos utilizar un mínimo de 10 bits para representar los coeficientes de este filtro FIR y, preferiblemente, de 12 a 14 bits, si es posible.

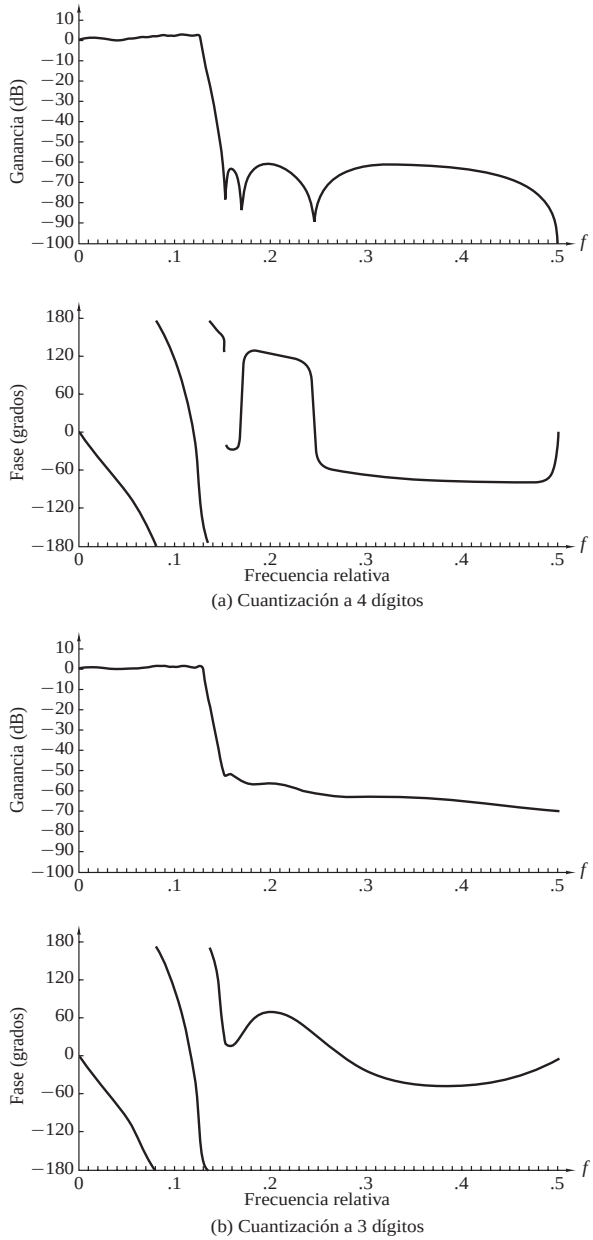
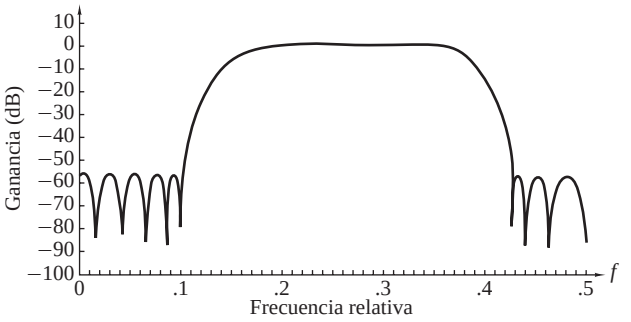
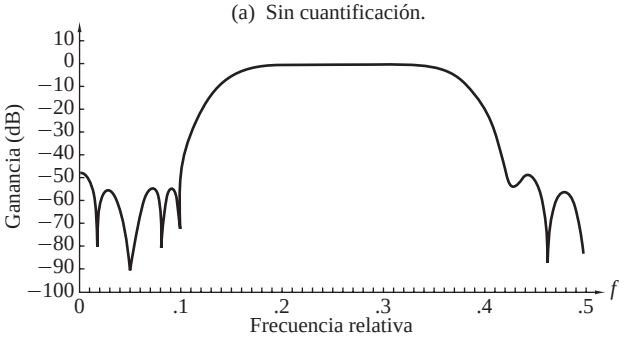


Figura 9.5.7. Efecto de la cuantificación de coeficientes en el módulo y la fase de la respuesta de un filtro elíptico de orden $N = 7$ implementando en paralelo: (a) cuantificación a cuatro dígitos; (b) cuantificación a tres dígitos.



(a) Sin cuantificación.



(b) Cuantificación a 3 dígitos.

Figura 9.5.8. Efecto de la cuantificación de coeficientes en el módulo del filtro FIR de fase lineal y orden $M = 32$ implementado en forma directa: (a) sin cuantificación; (b) cuantificación a tres dígitos.

A partir de este ejemplo, podemos concluir que se necesita un mínimo de 10 bits para representar los coeficientes de una realización en la forma directa de un filtro FIR de longitud media. Cuando la longitud del filtro aumente, el número de bits por coeficiente tendrá que incrementarse para mantener el mismo error en la respuesta en frecuencia del filtro.

Por ejemplo, suponga que cada coeficiente del filtro se redondea a $(b+1)$ bits. Así, el error máximo del valor de un coeficiente queda limitado en el intervalo

$$-2^{-(b+1)} < e_h(n) < 2^{-(b+1)}$$

Dado que los valores cuantificados pueden representarse como $\overline{h}(n) = h(n) + e_h(n)$, el error en la respuesta en frecuencia es

$$E_M(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} e_h(n) e^{-j\omega n}$$

Puesto que $e_h(n)$ tiene media cero, se deduce que $E_M(\omega)$ también tiene media cero. Suponiendo que la secuencia del error de los coeficientes, $e_h(n)$, $0 \le n \le M-1$, no está correlada, la varianza del error $E_M(\omega)$ de la respuesta en frecuencia es simplemente la suma de las varianzas de los M términos. Así, tenemos

$$\sigma_E^2 = \frac{2^{-2(b+1)}}{12} M = \frac{2^{-2(b+2)}}{3} M$$

Observe que la varianza del error en $H(\omega)$ aumenta linealmente con M. Por tanto, la desviación estándar del error en $H(\omega)$ es

$$\sigma_E = \frac{2^{-(b+2)}}{\sqrt{3}} \sqrt{M}$$

En consecuencia, por cada incremento de M en un factor de 4, la precisión de los coeficientes del filtro debe incrementarse en un bit adicional para así mantener la desviación estándar fijada. Este resultado, junto con los obtenidos en el Ejemplo 9.5.3, implica que el error en frecuencia es tolerable para longitudes de filtro de hasta 256, siempre que los coeficientes del filtro se presenten mediante 12 o 13 bits. Si la longitud de palabra del procesador digital de señales es menor que 12 bits o si excede el valor de 256, el filtro debería implementarse como una cascada de filtros de longitudes más pequeñas con el fin de reducir los requisitos de precisión.

En una realización en cascada de la forma

$$H(z) = G\prod_{k=1}^{K} H_k(z) \tag{9.5.18}$$

donde las secciones de segundo orden están dadas por

$$H_k(z) = 1 + b_{k1}z^{-1} + b_{k2}z^{-2} \tag{9.5.19}$$

Los coeficientes de los ceros complejos se expresan como $b_{k1} = -2r_k\cos\theta_k$ y $b_{k2} = r_k^2$. La cuantificación de b_{k1} y b_{k2} da lugar a las posiciones de los ceros que se muestran en la Figura 9.5.3, salvo que la cuadrícula se amplía a puntos exteriores a la circunferencia unidad.

En este caso, puede surgir un problema al mantener la propiedad de fase lineal, ya que la pareja cuantificada de ceros en $z = (1/r_k)e^{\pm j\theta_k}$ puede no ser la imagen reflejada de los ceros cuantificados en $z = r_k e^{\pm j\theta_k}$. Este problema puede evitarse reordenando los factores correspondientes al cero reflejado. Es decir, podemos escribir el factor de la imagen reflejada como

$$\left(1 - \frac{2}{r_k}\cos\theta_k z^{-1} + \frac{1}{r_k^2}z^{-2}\right) = \frac{1}{r_k^2}(r_k^2 - 2r_k\cos\theta_k z^{-1} + z^{-2}) \tag{9.5.20}$$

Los factores $\{1/r_k^2\}$ pueden combinarse con el factor de ganancia total G, o pueden distribuirse en cada uno de los filtros de segundo orden. El factor de (9.5.20) contiene exactamente los mismos parámetros que el factor $(1 - 2r_k\cos\theta_k z^{-1} + r_k^2 z^{-2})$ y, en consecuencia, ahora los ceros se producen como parejas reflejas incluso cuando se cuantifican los parámetros.

En esta breve exposición hemos proporcionado al lector una introducción a los problemas de la cuantificación de los coeficientes en los filtros IIR y FIR. Hemos demostrado que un filtro de orden superior tiene que reducirse a una realización en cascada (en el caso de los filtros FIR o IIR) o en paralelo (para los filtrso IIR), para minimizar los efectos de los errores de cuantificación en los coeficientes. Esto es especialmente importante en las realizaciones en punto fijo en las que los coeficientes se representan mediante un número relativamemte pequeño de bits.

9.6 Efectos del redondeo en los filtros digitales

En la Sección 9.4 hemos caracterizado los errores de cuantificación que se producen en las operaciones aritméticas realizadas por un filtro digital. La presencia de uno o más cuantificadores en la realización de un filtro digital da lugar a un dispositivo no lineal cuyas características pueden ser significativamente diferentes del filtro lineal ideal. Por ejemplo, un filtro digital recursivo puede presentar oscilaciones no deseadas en su salida, como veremos en la siguiente sección, incluso en ausencia de una señal de entrada.

Como resultado de las operaciones aritméticas de precisión finita realizadas en el filtro digital, algunos registros pueden desbordarse si el nivel de la señal de entrada se hace muy grande. El desbordamiento representa otra forma de distorsión no lineal no deseable sobre la señal deseada de la salida del filtro. En consecuencia, debe

tenerse especial cuidado al escalar la señal de entrada, con el fin de evitar completamente el desbordamiento o, al menos, para minimizar su tasa de aparición.

Los efectos no lineales debidos al uso de una aritmética de precisión finita hace extremadamente complicado analizar de forma precisa el funcionamiento de un filtro digital. Para llevar a cabo un análisis de los efectos de cuantificación, adoptamos una caracterización estadística de los errores de cuantificación, que da lugar a un modelo lineal del filtro. De este modo, podemos cuantificar los efectos de los errores de cuantificación en la implementación de los filtros digitales. Nuestra exposición está limitada a las realizaciones en punto fijo, donde los efectos de cuantificación son muy importantes.

9.6.1 Oscilaciones de ciclo límite en sistemas recursivos

En la realización de un filtro digital, por hardware o software empleando una computadora digital, la cuantificación inherente de las operaciones aritméticas de precisión finita representan al sistema no lineal. En los sistemas recursivos, las no linealidades debidas a las operaciones aritméticas de precisión finita a menudo producen oscilaciones periódicas en la salida, incluso si la secuencia de entrada es cero o un valor constante distinto de cero. Tales oscilaciones que se producen en los sistemas recursivos se denominan oscilaciones de *ciclo límite* y se atribuyen directamente a los errores de redondeo de las multiplicaciones y a los errores de desbordamiento de las sumas.

Para ilustrar las características de una oscilación de ciclo límite, consideremos el sistema de un sólo polo descrito por la ecuación en diferencias lineal

$$y(n) = ay(n-1) + x(n) \tag{9.6.1}$$

donde el polo está en $z = a$. El sistema ideal se implementa como se muestra en la Figura 9.6.1. Por el contrario, el sistema real, que se describe mediante la ecuación en diferencias no lineal

$$v(n) = Q[av(n-1)] + x(n) \tag{9.6.2}$$

se implementa como se muestra en la Figura 9.6.2.

Suponga que el sistema real de la Figura 9.6.2 se implementa utilizando aritmética de punto fijo basada en cuatro bits para el módulo más un bit de signo. La cuantificación que tiene lugar después de la multiplicación se hace por redondeo al producto resultante superior.

En la Tabla 9.2 enumeramos la respuesta del sistema real para cuatro posiciones diferentes del polo $z = a$ y una entrada $x(n) = \beta\delta(n)$, donde $\beta = 15/16$, que tiene la representación binaria 0.1111. Idealmente, la respuesta del sistema tenderá a cero exponencialmente [es decir, $y(n) = a^n \to 0$ cuando $n \to \infty$]. Sin embargo, en el sistema real, la respuesta $v(n)$ proporciona una secuencia de salida periódica en estado permanente con un período que depende del valor del polo. Cuando el polo es positivo, las oscilaciones se producen con un período $N_p = 1$, de manera que la salida alcanza un valor constante igual a $\frac{1}{16}$ para $a = \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{8}$ para $a = \frac{3}{4}$. Por el contrario, cuando el polo es negativo, la secuencia de salida oscila entre los valores positivo y negativo ($\pm\frac{1}{16}$ para $a = -\frac{1}{2}$ y $\pm\frac{1}{8}$ para $a = -\frac{3}{4}$). Luego el período es $N_p = 2$.

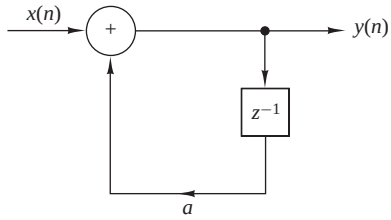


Figura 9.6.1. Sistema recursivo ideal de un sólo polo.

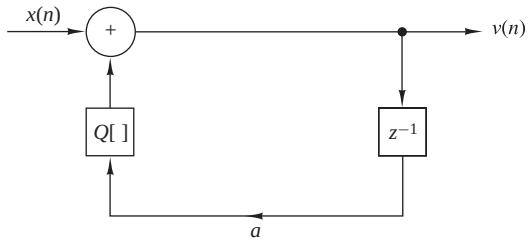


Figura 9.6.2. Sistema no lineal real.

n	$a = 0.1000 = \frac{1}{2}$		$a = 1.1000 = -\frac{1}{2}$		$a = 0.1100 = \frac{3}{4}$		$a = 1.1100 = -\frac{3}{4}$	
0	0.1111	$\left(\frac{15}{16}\right)$	0.1111	$\left(\frac{15}{16}\right)$	0.1011	$\left(\frac{11}{16}\right)$	0.1011	$\left(\frac{11}{16}\right)$
1	0.1000	$\left(\frac{8}{16}\right)$	1.1000	$\left(-\frac{8}{16}\right)$	0.1000	$\left(\frac{8}{16}\right)$	1.1000	$\left(-\frac{8}{16}\right)$
2	0.0100	$\left(\frac{4}{16}\right)$	0.0100	$\left(\frac{4}{16}\right)$	0.0110	$\left(\frac{6}{16}\right)$	0.0110	$\left(\frac{6}{16}\right)$
3	0.0010	$\left(\frac{2}{16}\right)$	1.0010	$\left(-\frac{2}{16}\right)$	0.0101	$\left(\frac{5}{16}\right)$	1.0101	$\left(-\frac{5}{16}\right)$
4	0.0001	$\left(\frac{1}{16}\right)$	0.0001	$\left(\frac{1}{16}\right)$	0.0100	$\left(\frac{4}{16}\right)$	0.0100	$\left(\frac{4}{16}\right)$
5	0.0001	$\left(\frac{1}{16}\right)$	1.0001	$\left(-\frac{1}{16}\right)$	0.0011	$\left(\frac{3}{16}\right)$	1.0011	$\left(-\frac{3}{16}\right)$
6	0.0001	$\left(\frac{1}{16}\right)$	0.0001	$\left(\frac{1}{16}\right)$	0.0010	$\left(\frac{2}{16}\right)$	0.0010	$\left(\frac{2}{16}\right)$
7	0.0001	$\left(\frac{1}{16}\right)$	1.0001	$\left(-\frac{1}{16}\right)$	0.0010	$\left(\frac{2}{16}\right)$	1.0010	$\left(-\frac{2}{16}\right)$
8	0.0001	$\left(\frac{1}{16}\right)$	0.0001	$\left(\frac{1}{16}\right)$	0.0010	$\left(\frac{2}{16}\right)$	0.0010	$\left(\frac{2}{16}\right)$

Tabla 9.2. Ciclos límite para el filtro paso bajo de un sólo polo.

Estos ciclos límite se producen como resultado de los efectos de cuantificación de las multiplicaciones. Cuando la secuencia de entrada $x(n)$ al filtro se hace igual a cero, la salida del mismo, después de una serie de iteraciones, entra en un ciclo límite. La salida permanece dentro del ciclo límite hasta que se aplica otra entrada del tamaño suficiente como para hacer que el sistema salga de dicho ciclo. Del mismo modo, se producen ciclos límite para la entrada nula a partir de las condiciones iniciales para la entrada $x(n) = 0$. Las amplitudes de la salida durante un ciclo límite están confinadas dentro de un rango de valores que se denomina *banda muerta* del filtro.

Es interesante destacar que cuando la respuesta de un filtro de un sólo polo se encuentra en el ciclo límite, el sistema no lineal real funciona como un sistema lineal equivalente con un polo en $z = 1$ cuando el polo es positivo y en $z = -1$ cuando el polo es negativo. Es decir,

$$Q_r[av(n-1)] = \begin{cases} v(n-1), & a > 0 \\ -v(n-1), & a < 0 \end{cases} \tag{9.6.3}$$

Puesto que el producto cuantificado $av(n-1)$ se obtiene por redondeo, se deduce que el error de cuantificación queda limitado como sigue

$$|Q_r[av(n-1)] - av(n-1)| \leq \frac{1}{2} \cdot 2^{-b} \tag{9.6.4}$$

donde b es el número de bits (excluido el signo) utilizado en la representación del polo a y $v(n)$. En consecuencia, (9.6.4) y (9.6.3) llevan a

$$|v(n-1)| - |av(n-1)| \leq \frac{1}{2} \cdot 2^{-b}$$

y por tanto

$$|v(n-1)| \leq \frac{\frac{1}{2}\cdot 2^{-b}}{1-|a|} \tag{9.6.5}$$

La expresión dada en (9.6.5) define la banda muerta para un filtro de un sólo polo. Por ejemplo, cuando $b=4$ y $|a|=\frac{1}{2}$, tenemos una banda muerta con un intervalo de amplitudes $(-\frac{1}{16},\frac{1}{16})$. Si $b=4$ y $|a|=\frac{3}{4}$, la banda muerta aumenta a $(-\frac{1}{8},\frac{1}{8})$.

El comportamiento del ciclo límite en un filtro de dos polos es mucho más complejo y puede producir una amplia variedad de oscilaciones. En este caso, el sistema ideal de dos polos está descrito por la ecuación en diferencias lineal,

$$y(n) = a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + x(n) \tag{9.6.6}$$

mientras que el sistema real está descrito por la ecuación en diferencias no lineal

$$v(n) = Q_r[a_1 v(n-1)] + Q_r[a_2 v(n-2)] + x(n) \tag{9.6.7}$$

Cuando los coeficientes del filtro satisfacen la condición $a_1^2 < -4a_2$, los polos del sistema se producen en

$$z = re^{\pm j\theta}$$

donde $a_2 = -r^2$ y $a_1 = 2r\cos\theta$. Como en el caso del filtro de un sólo polo, si el sistema se encuentra en un ciclo límite de la entrada nula o del estado nulo,

$$Q_r[a_2 v(n-2)] = -v(n-2) \tag{9.6.8}$$

En otras palabras, el sistema se comporta como un oscilador con polos complejos conjugados sobre la circunferencia unidad (es decir, $a_2 = -r^2 = -1$). Redondear el producto $a_2 v(n-2)$ implica que

$$|Q_r[a_2 v(n-2)] - a_2 v(n-2)| \leq \frac{1}{2}\cdot 2^{-b} \tag{9.6.9}$$

Sustituyendo (9.6.8) en (9.6.9), obtenemos el resultado

$$|v(n-2)| - |a_2 v(n-2)| \leq \frac{1}{2}\cdot 2^{-b}$$

o lo que es equivalente,

$$|v(n-2)| \leq \frac{\frac{1}{2}\cdot 2^{-b}}{1-|a_2|} \tag{9.6.10}$$

La expresión dada en (9.6.10) define la banda muerta del filtro de dos polos siendo éstos polos complejos conjugados. Observe que los límites de la banda muerta sólo dependen de $|a_2|$. El parámetro $a_1 = 2r\cos\theta$ determina la frecuencia de oscilación.

Otro posible modo de ciclo límite con la entrada nula, que se produce como resultado del redondeo de las multiplicaciones, se corresponde con un sistema de segundo orden equivalente cuyos polos se encuentran en $z=\pm 1$. En este caso, Jackson (1969) demostró que el filtro de dos polos presenta oscilaciones con una amplitud que cae dentro de la banda muerta limitada por $2^{-b}/(1-|a_1|-a_2)$.

Es interesante destacar que estos ciclos límite resultan del redondeo del producto de los coeficientes del filtro por las salidas anteriores $v(n-1)$ y $v(n-2)$. En lugar de redondear, podemos elegir truncar los productos a b bits. Con el truncamiento, podemos eliminar muchos, aunque no todos, los ciclos límite como demuestra Claasen *et al* (1973). Sin embargo, recuerde que el truncamiento da lugar a un error de desviación a menos que

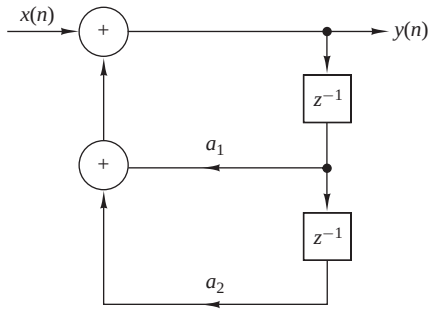


Figura 9.6.3. Realización de un filtro de dos polos.

se emplee la representación de signo-magnitud, en cuyo caso el error de truncamiento es simétrico respecto de cero. En general, esta desviación no es deseable en la implementación de un filtro digital.

En una realización en paralelo de un sistema IIR de orden superior, cada filtro de segundo orden presenta su propio comportamiento de ciclo límite, sin que se produzca ninguna interacción entre los distintos filtros de segundo orden. En consecuencia, la salida es la suma de los ciclos límite de la entrada nula de cada una de las secciones individuales. En el caso de una realización en cascada para un sistema IIR de orden superior, los ciclos límite son mucho más difíciles de analizar. En particular, cuando la primera sección de filtro presenta un ciclo límite para la entrada nula, el ciclo límite de salida se filtra en las secciones subsiguientes. Si la frecuencia del ciclo límite cae cerca de una frecuencia de resonancia de una sección posterior, la amplitud de la secuencia se ve mejorada por la característica de resonancia. En general, hay que tener cuidado para evitar estas situaciones.

Además de los ciclos límite debidos al redondeo de las multiplicaciones, existen ciclos límite causados por los desbordamientos de las sumas. Al sumar dos o más números binarios se produce un desbordamiento cuando la suma excede el tamaño de palabra disponible en la implementación digital del sistema. Por ejemplo, consideremos la sección de filtro de segundo orden ilustrada en la Figura 9.6.3, en la que la suma se realiza utilizando aritmética en complemento a dos. Podemos entonces escribir la salida $y(n)$ como

$$y(n) = g[a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + x(n)] \tag{9.6.11}$$

donde la función $g[\cdot]$ representa la suma en complemento a dos. Puede verificarse fácilmente que la función $g(v)$ en función de v se describe mediante la gráfica de la Figura 9.6.4.

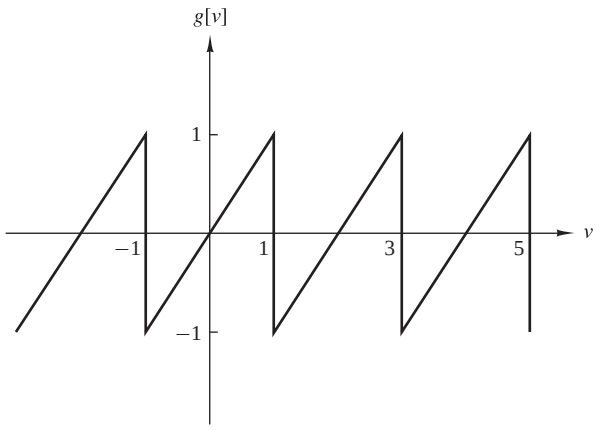


Figura 9.6.4. Relación funcional característica de la suma en complemento a dos de dos o más números.

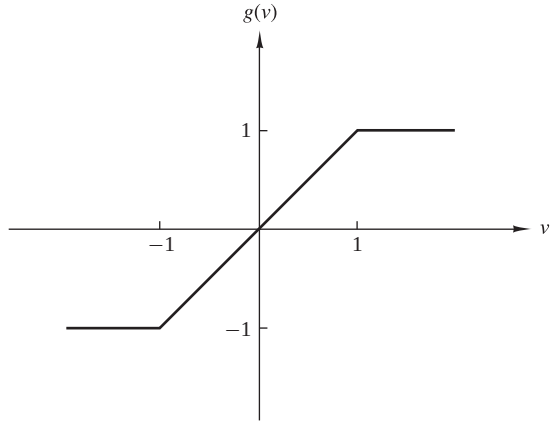


Figura 9.6.5. Relación funcional característica de la suma con recorte en ± 1.

Recuerde que el rango de valores de los parámetros (a_1, a_2) para un filtro estable quedan determinados por el triángulo de estabilidad de la Figura 3.5.1. Sin embargo, estas condiciones ya no son suficientes para evitar las oscilaciones por desbordamiento cuando se emplea la aritmética en complemento a dos. De hecho, puede demostrarse fácilmente que una condición necesaria y suficiente para asegurar que no se produzcan ciclos límite por debordamiento para la entrada nula es

$$|a_1| + |a_2| < 1 \tag{9.6.12}$$

que es extremadamente restrictiva y, por tanto, una restricción poco razonable que imponer a cualquier sección de segundo orden.

Una solución efectiva a este problema de las oscilaciones debidas al desbordamiento consiste en modificar la característica del sumador, como se ilustra en la Figura 9.6.5, de modo que realice la aritmética de saturación. Así, cuando se detecta un desbordamiento, la salida del sumador tomará el valor a fondo de escala de ± 1. La distorsión causada por esta no linealidad en el sumador normalmente es pequeña, siempre que la saturación se produzca de manera infrecuente. El uso de una no linealidad así no excluye la necesidad de aplicar un cambio de escala a las señales y a los parámetros del sistema, como se describe en la siguiente sección.

9.6.2 Cambio de escala para impedir el desbordamiento

Como acabamos de explicar, la aritmética de saturación elimina los ciclos límite debidos al desbordamiento, pero produce una distorsión no deseada en la señal debida a la no linealidad del recortador. Para limitar la cantidad de distorsión no lineal, es importante aplicar un cambio de escala a la señal de entrada y a la respuesta al impulso unidad, entre la entrada y cualquier nodo suma interno, de tal manera que el desbordamiento pase a ser un suceso raro.

En el caso de aritmética de punto fijo, consideremos en primer lugar la condición extrema de que no está permitido el desbordamiento en ningún nodo del sistema. Sea $y_k(n)$ la respuesta del sistema en el nodo k cuando la secuencia de entrada es $x(n)$ y sea $h_k(n)$ la respuesta al impulso unidad entre el nodo y la entrada. Luego

$$|y_k(n)| = \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_k(m)x(n-m) \right| \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_k(m)||x(n-m)|$$

Suponga que A_x es el límite superior de $x(n)$. Así,

$$|y_k(n)| \leq A_x \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_k(m)|, \qquad \text{para todo } n \tag{9.6.13}$$

Ahora, si el rango dinámico de la computadora está limitado a $(-1,1)$, la condición

$$|y_k(n)| < 1$$

puede satisfacerse requiriendo un cambio de escala de la entrada $x(n)$ tal que

$$A_x < \frac{1}{\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_k(m)|} \tag{9.6.14}$$

para todos los posibles nodos del sistema. La condición dada en (9.6.14) es necesaria y suficiente para impedir el desbordamiento.

Sin embargo, la condición dada en (9.6.14) es demasiado conservadora hasta el punto que la señal de entrada puede haberse escalado demasiado. En tal caso, gran parte de la precisión utilizada para representar $x(n)$ se pierde. Esto es especialmente cierto en secuencias de banda estrecha, como por ejemplo sinusoides, donde el cambio de escala que implica la Ecuación (9.6.14) es demasiado severo. Para señales de banda estrecha podemos emplear la respuesta en frecuencia del sistema para determinar el cambio de escala apropiado. Puesto que $|H(\omega)|$ representa la ganancia del sistema en la frecuencia ω, un cambio de escala menos severo y razonablemente adecuado sería requerir que

$$A_x < \frac{1}{\max_{0\le\omega\le\pi} |H_k(\omega)|} \tag{9.6.15}$$

donde $H_k(\omega)$ es la transformada de Fourier de $\{h_k(n)\}$.

En el caso de un filtro FIR, la condición dada en (9.6.14) se reduce a

$$A_x < \frac{1}{\sum_{m=0}^{M-1} |h_k(m)|} \tag{9.6.16}$$

que es la suma de los M términos distintos de cero de la respuesta al impulso unitario del filtro.

Otro método de escalado consiste en aplicar un cambio de escala a la entrada tal que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y_k(n)|^2 \le C^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = C^2 E_x \tag{9.6.17}$$

A partir del teorema de Parseval, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y_k(n)|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)X(\omega)|^2 d\omega \\ &\le E_x \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \tag{9.6.18}$$

Combinando (9.6.17) con (9.6.18), obtenemos

$$C^2 \le \frac{1}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_k(n)|^2} = \frac{1}{(1/2\pi)\int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^2 d\omega} \tag{9.6.19}$$

Si comparamos los diferentes factores de escala dados anteriormente, comprobamos que

$$\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_k(n)|^2\right]^{1/2} \le \max_{\omega} |H_k(\omega)| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_k(n)| \tag{9.6.20}$$

Evidentemente, (9.6.14) establece la restricción más pesimista.

En la siguiente sección vamos a ver las consecuencias de aplicar este cambio de escala sobre la relación señal–ruido (potencia) de salida (SNR) de una sección de filtro de primer orden y de una de segundo orden.

9.6.3 Caracterización estadística de los efectos de cuantificación en las realizaciones de punto fijo de filtros digitales

Queda claro a partir de la exposición de la sección anterior que un análisis de los errores de cuantificación en los filtros digitales basado en modelos determinísticos de los efectos de la cuantificación, no es un método muy útil. El problema fundamental es que los efectos no lineales debidos a la cuantificación de los productos de dos números y al recorte de la suma de dos números para evitar los desbordamiento no son fáciles de modelar en sistemas grandes que contengan muchos multiplicadores y muchos nodos suma.

Para obtener unos resultados más generales sobre los efectos de la cuantificación en los filtros digitales, modelamos los errores de cuantificación de las multiplicaciones como una secuencia de ruido aditivo $e(n)$, al igual que hemos hecho para caracterizar los errores de cuantificación en la conversión A/D de una señal analógica. Además, consideramos el efecto de cambio de escala aplicado a la señal de entrada para impedir el desbordamiento.

En primer lugar, caracterizamos el ruido de redondeo de un filtro de un sólo polo, el cual se ha implementado utilizando aritmética de punto fijo y se describe mediante la siguiente ecuación en diferencias no lineal

$$v(n) = Q_r[av(n-1)] + x(n) \tag{9.6.21}$$

El efecto de redondear el producto $av(n-1)$ se modela como una secuencia de ruido $e(n)$ sumada al produto real $av(n-1)$, es decir,

$$Q_r[av(n-1)] = av(n-1) + e(n) \tag{9.6.22}$$

Con este modelo para el error de cuantificación, el sistema que estamos considerando se describe mediante la *ecuación en diferencias lineal*

$$v(n) = av(n-1) + x(n) + e(n) \tag{9.6.23}$$

El sistema correspondiente se ilustra en el diagrama de bloques de la Figura 9.6.6.

Es evidente a partir de (9.6.23) que la secuencia de salida $v(n)$ del filtro puede separarse en dos componentes. Uno de ellos es la respuesta del sistema a la secuencia de entrada $x(n)$. El segundo es la respuesta del sistema al ruido de cuantificación aditivo $e(n)$. En realidad, podemos expresar la secuencia de salida $v(n)$ como la suma de estos dos componentes, es decir,

$$v(n) = y(n) + q(n) \tag{9.6.24}$$

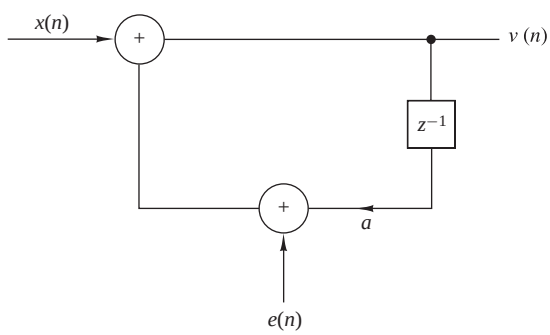


Figura 9.6.6. Modelo de ruido aditivo para el error de cuantificación en un filtro de un sólo polo.

donde $y(n)$ representa la respuesta del sistema a $x(n)$ y $q(n)$ representa la respuesta del sistena al error de cuantificación $e(n)$. Sustituyendo la expresión de $v(n)$ dada por (9.6.24) en (9.6.23), obtenemos

$$y(n)+q(n)=ay(n-1)+aq(n-1)+x(n)+e(n) \tag{9.6.25}$$

Para simplificar el análisis, realizamos las siguientes suposiciones acerca de la secuencia de error $e(n)$.

1. Para cualquier n, la secuencia de error $\{e(n)\}$ está uniformemente distribuida en el intervalo $(-\frac{1}{2}\cdot 2^{-b}, \frac{1}{2}\cdot 2^{-b})$. Esto implica que el valor medio de $e(n)$ es cero y su varianza es

$$\sigma_e^2=\frac{2^{-2b}}{12} \tag{9.6.26}$$

2. El error $\{e(n)\}$ es una secuencia de ruido blanco estacionario. En otras palabras, el error $e(n)$ y el error $e(m)$ son incorrelados para $n\neq m$.
3. La secuencia de error $\{e(n)\}$ no está correlada con la señal $\{x(n)\}$.

La última suposición nos permite separar la ecuación en diferencias dada en (9.6.25) en dos ecuaciones en diferencias desacopladas, como

$$y(n)=ay(n-1)+x(n) \tag{9.6.27}$$

$$q(n)=aq(n-1)+e(n) \tag{9.6.28}$$

La ecuación en diferencias dada por (9.6.27) representa la relación de entrada–salida del sistema deseado y la ecuación en diferencias dada por (9.6.28) representa la relación para el error de cuantificación en la salida del sistema.

Para completar el análisis, vamos a utilizar dos importantes relaciones desarrolladas en la Sección 12.1. La primera relación define el valor medio de la salida $q(n)$ de un filtro lineal invariante en desplazamiento con respuesta al impulso $h(n)$ cuando se excita mediante una secuencia aleatoria $e(n)$ que tiene un valor medio m_e. El resultado es

$$m_q=m_e\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n) \tag{9.6.29}$$

o, lo que es equivalente,

$$m_q=m_eH(0) \tag{9.6.30}$$

donde $H(0)$ es el valor de la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ del filtro evaluado en $\omega=0$.

La segunda relación importante es la expresión de la autocorrelación de la salida $q(n)$ del filtro con la respuesta al impulso $h(n)$ cuando la secuencia aleatoria de entrada $e(n)$ tiene una autocorrelación $\gamma_{ee}(n)$. Este resultado es

$$\gamma_{qq}(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(k)h(l)\gamma_{ee}(k-l+n) \tag{9.6.31}$$

En el importante caso especial en el que la secuencia aleatoria es ruido blanco (espectralmente plano), la autocorrelación $\gamma_{ee}(n)$ es un impulso unidad al que se le ha aplicado un factor de escala igual a la varianza σ_e^2, es decir,

$$\gamma_{ee}(n)=\sigma_e^2\delta(n) \tag{9.6.32}$$

Sustituyendo (9.6.32) en (9.6.31), obtenemos el resultado deseado para la autocorrelación en la salida de un filtro excitado por ruido blanco, es decir,

$$\gamma_{qq}(n) = \sigma_e^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)h(k+n) \tag{9.6.33}$$

La varianza σ_q^2 del ruido de salida se obtiene simplemente evaluando $\gamma_{qq}(n)$ en $n = 0$. Por tanto,

$$\sigma_q^2 = \sigma_e^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} h^2(k) \tag{9.6.34}$$

y con la ayuda del teorema de Parseval, obtenemos la expresión alternativa

$$\sigma_q^2 = \frac{\sigma_e^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^2 d\omega \tag{9.6.35}$$

En el caso del filtro de un sólo polo que estamos considerando, la respuesta al impulso unidad es

$$h(n) = a^n u(n) \tag{9.6.36}$$

Ya que el error de cuantificación debido al redondeo tiene valor medio cero, el valor medio del error en la salida del filtro es $m_q = 0$. La varianza del error en la salida del filtro es

$$\begin{aligned} \sigma_q^2 &= \sigma_e^2 \sum_{k=0}^{\infty} a^{2k} \\ &= \frac{\sigma_e^2}{1-a^2} \end{aligned} \tag{9.6.37}$$

Observe que la potencia de ruido σ_q^2 en la salida del filtro ha mejorado respecto a la potencia de ruido de entrada σ_e^2 según el factor $1/(1-a^2)$. Este factor aumenta cuando el polo se mueve aproximándose a la circunferencia unidad.

Para obtener una imagen más clara del efecto del error de cuantificación, también tenemos que considerar el efecto del cambio de escala en la entrada. Supongamos que la secuencia de entrada $\{x(n)\}$ es ruido blanco (señal de banda ancha), cuya amplitud se ha escalado de acuerdo con (9.6.14) para impedir que se produzcan desbordamientos en las operaciones de suma. Luego,

$$A_x < 1 - |a|$$

Si suponemos que $x(n)$ está uniformemente distribuida en el intervalo $(-A_x, A_x)$, entonces, según (9.6.31) y (9.6.34), la potencia de señal a la salida del filtro es

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \sigma_x^2 \sum_{k=0}^{\infty} a^{2k} \\ &= \frac{\sigma_x^2}{1-a^2} \end{aligned} \tag{9.6.38}$$

donde $\sigma_x^2 = (1-|a|)^2/3$ es la varianza de la señal de entrada. La relación de la potencia de señal σ_y^2 respecto a la potencia del error de cuantificación σ_q^2, que se conoce como relación señal–ruido (SNR), es simplemente

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_y^2}{\sigma_q^2} &= \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} \\ &= (1-|a|)^2 \cdot 2^{2(b+1)} \end{aligned} \tag{9.6.39}$$

Esta expresión para la relación SNR de salida ilustra claramente la fuerte penalización que se paga como consecuencia del escalado de la entrada, especialmente cuando el polo se encuentra próximo a la circunferencia unidad. Comparando, si la entrada no se escala y el sumador tiene el número suficiente de bits para evitar el desbordamiento, entonces la amplitud de la señal se puede confinar en el intervalo $(-1,1)$. En este caso, $\sigma_x^2 = \frac{1}{3}$, lo que es independiente de la posición del polo. Luego

$$\frac{\sigma_y^2}{\sigma_q^2} = 2^{2(b+1)} \tag{9.6.40}$$

La diferencia entre las realciones SNR dadas en (9.6.40) y (9.6.39) demuestra claramente la necesidad de utilizar más bits en la suma que en la multiplicación. El número adicional de bits depende de la posición del polo y debería incrementarse cuando el polo se aproxime a la circunferencia unidad.

A continuación, consideremos un filtro de dos polos con precisión infinita, el cual se describe mediante la ecuación en diferencias lineal

$$y(n) = a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + x(n) \tag{9.6.41}$$

donde $a_1 = 2r\cos\theta$ y $a_2 = -r^2$. Cuando los dos productos se redondean, tenemos el sistema descrito por la ecuación en diferencias no lineal

$$v(n) = Q_r[a_1 v(n-1)] + Q_r[a_2 v(n-2)] + x(n) \tag{9.6.42}$$

Este sistema se ilustra en el diagrama de bloques de la Figura 9.6.7.

Ahora se tienen dos multiplicaciones y, por tanto, dos errores de cuantificación para cada salida. En consecuencia, debemos utilizar dos secuencias de ruido $e_1(n)$ y $e_2(n)$, que corresponden a las salidas de cuantificador

$$\begin{aligned} Q_r[a_1 v(n-1)] &= a_1 v(n-1) + e_1(n) \\ Q_r[a_2 v(n-2)] &= a_2 v(n-2) + e_2(n) \end{aligned} \tag{9.6.43}$$

Un diagrama de bloques para el modelo correspondiente se muestra en la Figura 9.6.8. Observe que las secuencias de error $e_1(n)$ y $e_2(n)$ pueden desplazarse directamente a la entrada del filtro.

Como en el caso del filtro de primer orden, la salida del filtro de segundo orden puede separarse en dos componentes, la señal deseada y el error de cuantificación. La primera se describe mediante la ecuación en diferencias

$$y(n) = a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + x(n) \tag{9.6.44}$$

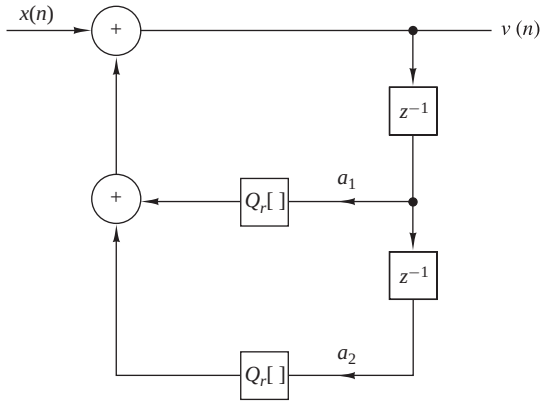


Figura 9.6.7. Filtro digital de dos polos con cuantificadores de redondeo.

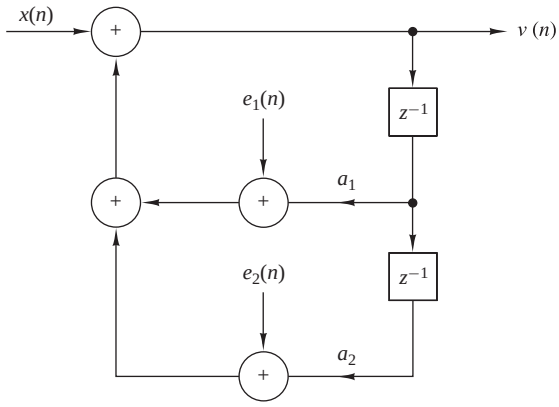


Figura 9.6.8. Modelo de ruido aditivo para los errores de cuantificación en una realización de un filtro de dos polos.

mientras que la segunda satisface la ecuación en diferencias

$$q(n) = a_1 q(n-1) + a_2 q(n-2) + e_1(n) + e_2(n) \tag{9.6.45}$$

Es razonable suponer que las dos secuencias $e_1(n)$ y $e_2(n)$ son incorreladas.

Ahora el filtro de segundo orden tiene una respuesta al impulso unidad

$$h(n) = \frac{r^n}{\operatorname{sen}\theta} \operatorname{sen}(n+1)\theta u(n) \tag{9.6.46}$$

Por tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) = \frac{1+r^2}{1-r^2} \frac{1}{r^4+1-2r^2\cos 2\theta} \tag{9.6.47}$$

Aplicando (9.6.34), obtenemos la varianza de los errores de cuantificación en la salida del filtro en la forma

$$\sigma_q^2 = \sigma_e^2 \left(\frac{1+r^2}{1-r^2} \frac{1}{r^4+1-2r^2\cos 2\theta} \right) \tag{9.6.48}$$

En el caso de la componente de señal, si aplicamos un cambio de escala a la entrada de acuerdo con (9.6.14) para evitar el desbordamiento, la potencia en la señal de salida es

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) \tag{9.6.49}$$

donde la potencia de la señal de entrada $x(n)$ está dada por la varianza

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{3\left[\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)|\right]^2} \tag{9.6.50}$$

En consecuencia, la relación SNR en la salida del filtro de dos polos es

$$\frac{\sigma_y^2}{\sigma_q^2} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = \frac{2^{2(b+1)}}{\left[\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)|\right]^2} \tag{9.6.51}$$

Aunque es difícil determinar el valor exacto del término del denominador de (9.6.51), es fácil obtener un límite superior y un límite inferior. En particular, $|h(n)|$ está limitado por arriba por

$$|h(n)| \leq \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} r^n, \qquad n \geq 0 \tag{9.6.52}$$

de modo que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| \leq \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{(1-r)\operatorname{sen}\theta} \tag{9.6.53}$$

El límite inferior puede obtenerse fijándose en que

$$|H(\omega)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)|$$

Pero

$$H(\omega) = \frac{1}{(1 - re^{j\theta}e^{-j\omega})(1 - re^{-j\theta}e^{-j\omega})}$$

En $\omega = \theta$, que es la frecuencia de resonancia del filtro, obtenemos el valor máximo de $|H(\omega)|$. Luego,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| \geq |H(\theta)| = \frac{1}{(1-r)\sqrt{1 + r^2 - 2r\cos 2\theta}} \tag{9.6.54}$$

Por tanto, la relación SNR está limitada por encima y por debajo de acuerdo con la relación

$$2^{2(b+1)}(1-r)^2 \operatorname{sen}^2\theta \leq \frac{\sigma_y^2}{\sigma_q^2} \leq 2^{2(b+1)}(1-r)^2(1 + r^2 - 2r\cos 2\theta) \tag{9.6.55}$$

Por ejemplo, cuando $\theta = \pi/2$, la expresión dada por (9.6.55) se reduce a

$$2^{2(b+1)}(1-r)^2 \leq \frac{\sigma_y^2}{\sigma_q^2} \leq 2^{2(b+1)}(1-r)^2(1+r)^2 \tag{9.6.56}$$

El término dominante en este límite es $(1-r)^2$, que actúa para reducir la relación SNR dramáticamente cuando los polos se desplazan hacia la circunferencia unidad. Por tanto, el efecto del cambio de escala en el filtro de segundo orden es más severo que en el filtro de un sólo polo. Observe que si $d = 1 - r$ es la distancia del polo a la circunferencia unidad, la relación SNR dada en (9.6.56) se reduce en d^2, mientras que en el filtro de un único polo la reducción es proporcional a d. Estos resultados sirven para reforzar la afirmación anterior, independientemente del uso de más bits en las operaciones de suma que en las multiplicaciones como mecanismos para evitar la importante penalización debida al cambio de escala.

El análisis de los efectos de cuantificación en un filtro de segundo orden puede aplicarse directamente a los filtros de orden superior basados en la implementación paralelo. En este caso, cada sección de filtro de segundo orden es independiente de las restantes secciones y, por tanto, la potencia de ruido de cuantificación total en la salida del paralelo es simplemente la suma lineal de las potencias de ruido de cuantificación de cada sección individual. Por el contrario, la implementación en cascada es más compleja de analizar. En este caso, el ruido generado en cualquier filtro de segundo orden es filtrado por las secciones que le siguen. En consecuencia, aparece la cuestión de cómo emparejar los polos reales para formar secciones de segundo orden y cómo ordenar los filtros de segundo orden resultantes para minimizar la potencia de ruido total en la salida

del filtro de orden superior. Este tema fue investigado por Jackson (1970a, b), quien demostró que los polos próximos a la circunferencia unidad deben emparejarse con los ceros más próximos, con el fin de reducir la ganancia de cada filtro de segundo orden. Cuando se disponen en cascada las secciones de segundo orden, una estrategia razonable consiste en colocar las secciones en orden decreciente partiendo de la de máxima ganancia en frecuencia. De este modo, la potencia de ruido generada en las primeras secciones de alta ganancia no será amplificada significativamente por las secciones posteriores.

El siguiente ejemplo ilustra la cuestión de que ordenar apropiadamente las secciones en una realización en cascada es importante para controlar el ruido de redondeo en la salida del filtro completo.

EJEMPLO 9.6.1

Determine la varianza del ruido de redondeo en la salida de las dos realizaciones en cascada del filtro cuya función de sistema es

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)$$

donde

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \\ H_2(z) &= \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \end{aligned}$$

Solución. Sean $h(n)$, $h_1(n)$ y $h_2(n)$ respuestas al impulso unidad correspondientes a las funciones de sistema $H(z)$, $H_1(z)$ y $H_2(z)$, respectivamente. Se deduce que

$$\begin{aligned} h_1(n) &= (\tfrac{1}{2})^n u(n), \\ h_2(n) &= (\tfrac{1}{4})^n u(n) \\ h(n) &= [2(\tfrac{1}{2})^n - (\tfrac{1}{4})^n]u(n) \end{aligned}$$

Las dos realizaciones en cascada se muestran en la Figura 9.6.9.

En la primera realización en cascada, la varianza de la salida es

$$\sigma_{q1}^2 = \sigma_e^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \sum_{n=0}^{\infty} h_2^2(n) \right]$$

En la segunda realización en cascada, la varianza del ruido de salida es

$$\sigma_{q2}^2 = \sigma_e^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \sum_{n=0}^{\infty} h_1^2(n) \right]$$

Ahora

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} h_1^2(n) &= \tfrac{1}{1-\frac{1}{4}} = \tfrac{4}{3} \\ \sum_{n=0}^{\infty} h_2^2(n) &= \tfrac{1}{1-\frac{1}{16}} = \tfrac{16}{15} \\ \sum_{m=0}^{\infty} h^2(n) &= \tfrac{4}{1-\frac{1}{4}} - \tfrac{4}{1-\frac{1}{8}} + \tfrac{1}{1-\frac{1}{16}} = 1.83 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \sigma_{q1}^2 &= 2.90\sigma_e^2 \\ \sigma_{q2}^2 &= 3.16\sigma_e^2 \end{aligned}$$

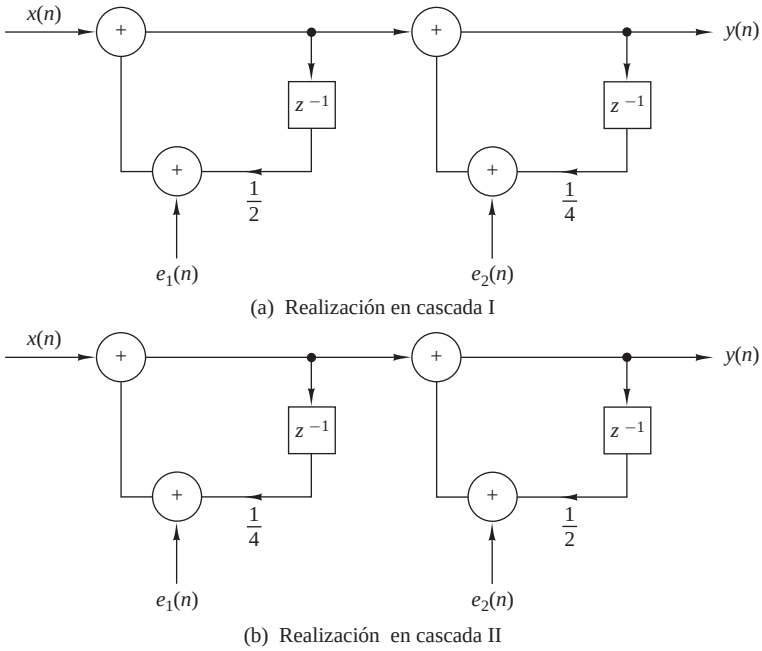


Figura 9.6.9. Las dos realizaciones en cascada del Ejemplo 9.6.1.(a) Realización en cascada I. (b) Realización en cascada II.

y la relación de las varianzas de ruido es

$$\frac{\sigma_{q2}^2}{\sigma_{q1}^2} = 1.09$$

En consecuencia, la potencia de ruido en la segunda realización en cascada es un 9 % mayor que en la primera realización.

9.7 Resumen y referencias

En este capítulo hemos visto que existen diversas realizaciones para los sistemas discretos en el tiempo. Los sistemas FIR pueden implementarse utilizando la forma directa, en cascada, basándose en el muestreo en frecuencia y en celosía. Los sistemas IIR también se pueden implemantar en la forma directa, en cascada, en celosía o en celosía-escalera y en paralelo.

Para cualquier sistema dado descrito mediante una ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes, estas realizaciones son equivalentes en el sentido de que representan el mismo sistema y generan la misma salida para cualquier entrada dada, siempre que los cálculos internos se realicen con precisión infinita. Sin embargo, las distintas estructuras no son equivalentes cuando se realizan empleando artimética de precisión finita.

Pueden obtenerse estructuras de filtros FIR e IIR adicionales adoptando una formulación estado–espacio que proporcione una descripción interna de un sistema. Tales realizaciones estado–espacio se han tratado en las ediciones anteriores de este libro, pero se han eliminado en esta edición por limitaciones de espacio. El uso de las estructuras de filtros estado–espacio en la realización de sistemas IIR fue propuesto por Mullis y Roberts (1976a,b), y fue aún más desarrollado por Hwang (1977), Jackson *et al.* (1979), Jackson (1979), Mills *et al.* (1981) y Bomar (1985).

Se han presentado tres importantes factores que permiten elegir entre las distintas realizaciones de los sistemas FIR e IIR. Estos factores son: la complejidad de los cálculos, los requisitos de memoria y los efectos

de la longitud de palabra finita. Dependiendo de la característica en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia de un sistema, algunas estructuras pueden necesitar menos cálculos y/o menos memoria que otras. Por tanto, a la hora de seleccionar una realización hay que tener en cuenta estos dos importantes factores.

En la Sección 9.3 hemos deducido las estructuras transpuestas. Para ello, hemos presentado varios conceptos y operaciones acerca de los diagramas de flujo de la señal. Estos diagramas se tratan en profundidad en los libros de Mason y Zimmerman (1960) y Chow y Cassignol (1962).

Otra importante estructura de los sistemas IIR, el *filtro de ondas digitales*, fue investigado por Fettweis (1971) y desarrollado por Sedlmeyer y Fettweis (1973). Puede encontrar información detallada sobre esta estructura de filtro en el libro de Antoniou (1979).

Los efectos de la longitud de palabra finita constituyen un factor importante en la implementación de los sistemas de tratamiento digital de señales. En este capítulo hemos descrito los efectos de una longitud de palabra finita en los filtros digitales. En particular, hemos considerado los siguiente problemas relacionados con los efectos de trabajar con una longitud de palabra finita:

1. Cuantificación de parámetros en filtros digitales.
2. Ruido de redondeo en la multiplicación.
3. Desbordamiento en la suma.
4. Ciclos límite.

Estos cuatro efectos son internos al filtro e influyen en el método mediante el que se vaya a implementar el sistema. En particular, hemos demostrado que los sistemas de orden superior, especialmente los sistemas IIR, deben implementarse utilizando secciones de segundo orden como bloques de construcción. Hemos mencionado que el uso de la realización en la forma directa II es preferible a la forma convencional o la transpuesta.

Los efectos de los errores de redondeo en las implementaciones de punto fijo de estructuras de filtros FIR e IIR han sido investigados por muchos expertos. Podemos citar los estudios de Gold y Rader (1966), Rader y Gold (1967b), Jackson (1970a,b), Liu (1971), Chan y Rabiner (1973a,b,c), y Oppenheim y Weinstein (1972).

Las oscilaciones de ciclo límite se producen en los filtros IIR como resultado de los efectos de cuantificación de la multiplicación en punto fijo y del redondeo. La investigación de los ciclos límite en el filtrado digital y su comportamiento característico se trata en los documentos de Parker y Hess (1971), Brubaker y Gowdy (1972), Sandberg y Kaiser (1972) y Jackson (1969, 1979). Este último aborda los ciclos límite en las estructuras estado–espacio. También hemos descrito métodos para eliminar los ciclos límite debidos a los errores de redondeo. Por ejemplo, los estudios de Barnes y Fam (1977), Fam y Barnes (1979), Chang (1981), Butterweck *et al.* (1984), y Auer (1987) se ocupan de este problema. Las oscilaciones debidas al desbordamiento se tratan en los documentos de Ebert *et al.* (1969).

Los efectos de la cuantificación de parámetros se han tratado en numerosos documentos. Podemos citar como referencia los trabajos de Rader y Gold (1967b), Knowles y Olcayto (1968), Avenhaus y Schuessler (1970), Herrmann y Schuessler (1970b), Chan y Rabiner (1973c), y Jackson (1976).

Por último, hemos hablado de las estructuras de filtros en celosía y en celosía-escalera que son implementaciones de punto fijo muy robustas. Si desea ver un tratamiento de estos tipos de filtro, el lector puede consultar los estudios de Gray y Markel (1973), Makhoul (1978), y Morf *et al.* (1977) y el libro de Markel y Gray (1976).

Problemas

9.1 Determine una realización de la forma directa de los siguientes filtros de fase lineal.

(a) $h(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4, 3, 2, 1\}$

(b) $h(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 3, 2, 1\}$

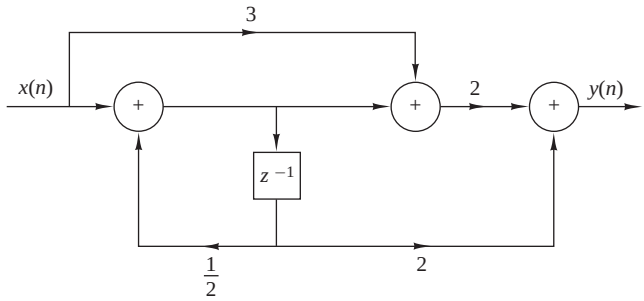


Figura P.9.3.

9.2 Considere un filtro FIR cuya función de sistema es

$$H(z) = 1 + 2.88z^{-1} + 3.4048z^{-2} + 1.74z^{-3} + 0.4z^{-4}$$

Dibuje las realizaciones en la forma directa y en celosía del filtro y determine en detalle las correspondientes ecuaciones de entrada–salida. ¿Se trata de un sistema de fase mínima?

9.3 Determine la función del sistema y la respuesta al impulso del sistema mostrado en la Figura P.9.3.

9.4 Determine la función del sistema y la respuesta al impulso del sistema mostrado en la Figura P.9.4.

9.5 Determine la estructura transpuesta del sistema de la Figura P.9.4 y verifique que tanto el sistema original como el transpuesto tienen la misma función de sistema.

9.6 Determine a_1, a_2, c_1, y c_0 en función de b_1 y b_2, de modo que los dos sistemas de la Figura P.9.6 sean equivalentes.

9.7 Considere el filtro mostrado en la Figura P.9.7.

(a) Determine su función de sistema.

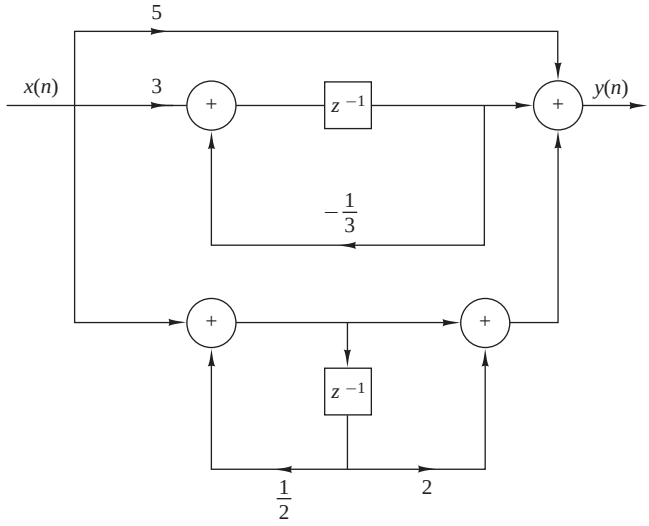


Figura P.9.4.

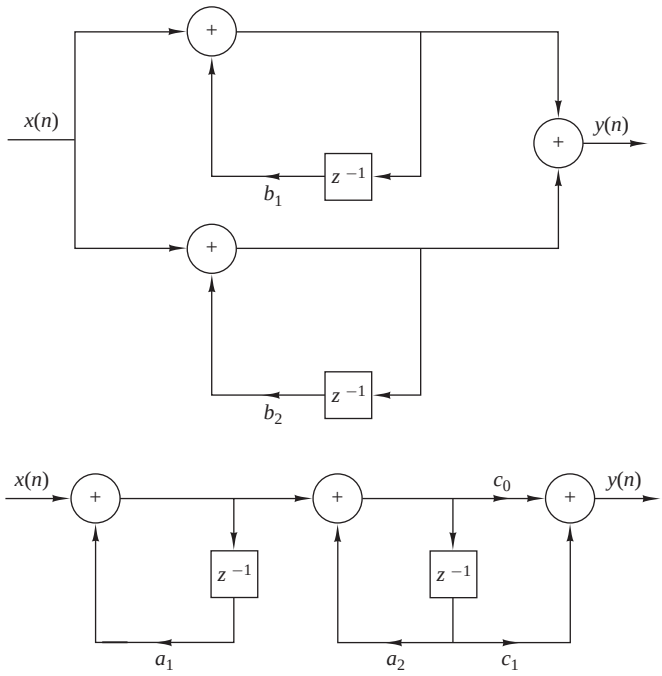


Figura P.9.6.

(b) Dibuje el diagrama de polos y ceros y compruebe su estabilidad si

1. $b_0 = b_2 = 1, \quad b_1 = 2, \quad a_1 = 1.5, a_2 = -0.9$
2. $b_0 = b_2 = 1, \quad b_1 = 2, \quad a_1 = 1, a_2 = -2$

(c) Determine la respuesta a $x(n) = \cos(\pi n/3)$ si $b_0 = 1$, $b_1 = b_2 = 0$, $a_1 = 1$ y $a_2 = -0.99$.

9.8 Considere el sistema LTI, inicialmente en reposo, descrito por la ecuación en diferencias

$$y(n) = \frac{1}{4}y(n-2) + x(n)$$

(a) Determine la respuesta al impulso, $h(n)$, del sistema.

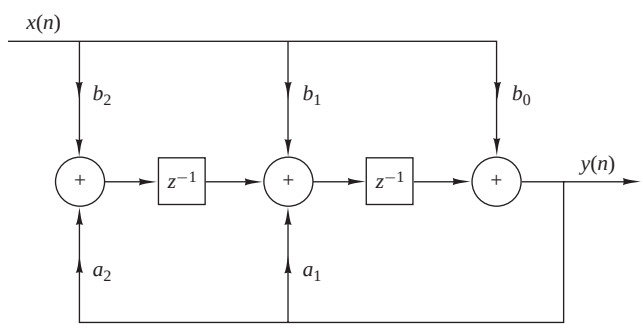


Figura P.9.7.

(b) Determine la respuesta del sistema a la señal de entrada

$$x(n) = [(\frac{1}{2})^n + (-\frac{1}{2})^n]u(n)$$

(c) Determine las realizaciones de la forma directa II, en paralelo y en cascada para este sistema.

(d) Dibuje de forma aproximada el módulo de la respuesta $|H(\omega)|$ de este sistema.

9.9 Obtenga las estructuras de la forma directa I, la forma directa II, en cascada y en paralelo de los siguientes sistemas.

(a) $y(n) = \frac{3}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2) + x(n) + \frac{1}{3}x(n-1)$

(b) $y(n) = -0.1y(n-1) + 0.72y(n-2) + 0.7x(n) - 0.252x(n-2)$

(c) $y(n) = -0.1y(n-1) + 0.2y(n-2) + 3x(n) + 3.6x(n-1) + 0.6x(n-2)$

(d) $H(z) = \dfrac{2(1-z^{-1})(1+\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2})}{(1+0.5z^{-1})(1-0.9z^{-1}+0.81z^{-2})}$

(e) $y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + \frac{1}{4}y(n-2) + x(n) + x(n-1)$

(f) $y(n) = y(n-1) - \frac{1}{2}y(n-2) + x(n) - x(n-1) + x(n-2)$

¿Cuáles de los sistemas anteriores son estables?

9.10 Demuestre que los sistemas de la Figura P.9.10 son equivalentes.

9.11 Determine todos los filtros FIR especificados por los parámetros de la estructura en celosía $K_1 = \frac{1}{2}$, $K_2 = 0.6$, $K_3 = -0.7$ y $K_4 = \frac{1}{3}$.

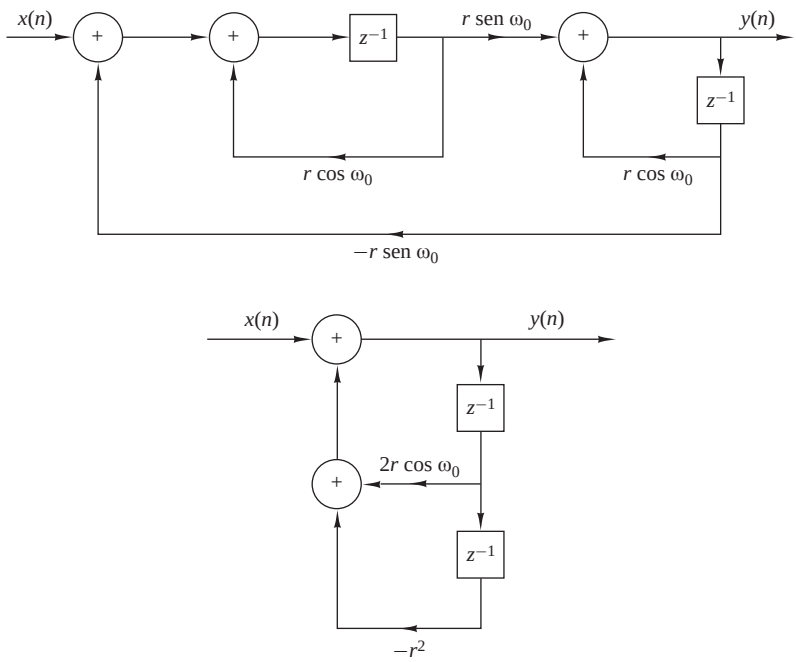


Figura P.9.10.

9.12 Determine el conjunto de ecuaciones en diferencias que describe una realización de un sistema IIR basada en el uso de la estructura transpuesta de la forma directa II para los susbisistemas de segundo orden.

9.13 Escriba un programa que implemente una realización en paralelo basada en módulos de segundo orden con estructura transpuesta de la forma directa II.

9.14 Escriba un programa que implemente una realización en cascada basada en módulos de segundo orden de la forma directa II normal.

9.15 Determine los parámetros $\{K_m\}$ del filtro en celosía correspondientes al filtro FIR descrito por la función del sistema

$$H(z) = A_2(z) = 1 + 2z^{-1} + z^{-2}$$

9.16 **(a)** Determine los ceros y represente el patrón de ceros del filtro FIR en celosía que tiene los parámetros siguientes:

$$K_1 = \frac{1}{2}, \qquad K_2 = -\frac{1}{3}, \qquad K_3 = 1$$

(b) Lo mismo que en el apartado (a) pero con $K_3 = -1$.

(c) Se comprueba que todos los ceros caen exactamente sobre la circunferencia unidad. ¿Puede generalizarse este resultado? ¿Cómo?

(d) Dibuje la fase de la respuesta de los filtros de los apartados (a) y (b). ¿Qué observaciones puede hacer? ¿Puede generalizarse este resultado? ¿Cómo?

9.17 Considere un filtro FIR en celosía con coeficientes $K_1 = 0.65$, $K_2 = -0.34$ y $K_3 = 0.8$.

(a) Halle su respuesta al impulso haciendo un seguimiento de un impulso unidad de entrada a través de la estructura en celosía.

(b) Dibuje la estructura de la forma directa equivalente.

9.18 Considere un sistema IIR causal cuya función de sistema es

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3}}{1 + 0.9z^{-1} - 0.8z^{-2} + 0.5z^{-3}}$$

(a) Determine la estructura en celosía–escalera equivalente.

(b) Compruebe si el sistema es estable.

9.19 Determine la relación entrada–salida, la función de sistema y el patrón de polos y ceros para el sistema discreto en el tiempo de la Figura P.9.19.

9.20 Determine la realización en celosía para el resonador digital

$$H(z) = \frac{1}{1 - (2r\cos\omega_0)z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

9.21 **(a)** Determine la respuesta al impulso de un filtro FIR en celosía con los parámetros $K_1 = 0.6$, $K_2 = 0.3$, $K_3 = 0.5$ y $K_4 = 0.9$.

(b) Dibuje los filtros de sólo ceros y de sólo polos en la forma directa y en celosía especificados por los parámetros K dados en el apartado (a).

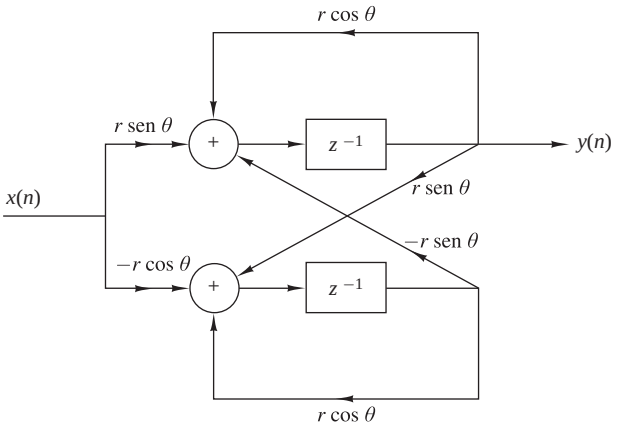


Figura P.9.19.

9.22 **(a)** Determine la realización en celosía–escalera para el resonador

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - (2r\cos\omega_0)z^{-1} + r2z^{-2}}$$

(b) ¿Qué ocurre si $r = 1$?

9.23 Dibuje la estructura en celosía–escalera para el sistema

$$H(z) = \frac{1 - 0.8z^{-1} + 0.15z^{-2}}{1 + 0.1z^{-1} - 0.72z^{-2}}$$

9.24 Considere un sistema de polos y ceros con la función de sistema

$$H(z) = \frac{(1 - 0.5e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.5e^{-j\pi/4}z^{-1})}{(1 - 0.8e^{j\pi/3}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/3}z^{-1})}$$

Dibuje las realizaciones en la forma directa II normal y transpuesta del sistema.

9.25 Determine una realización en paralelo y una realización en cascada del sistema

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})}$$

9.26 El formato en punto flotante genérico para un microprocesador DSP es el siguiente:
El valor del número X está dado por

$$X = \begin{cases} 01.M \times 2^E & \text{si } S = 0 \\ 10.M \times 2^E & \text{si } S = 1 \\ 0 & \text{si } E \text{ es el valor en complemento a dos más negativo} \end{cases}$$

Determine el rango de números positivos y negativos para los dos formatos siguientes:

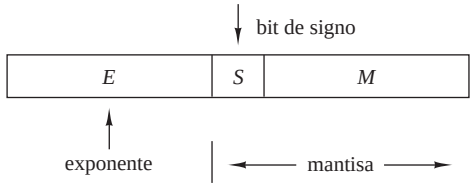
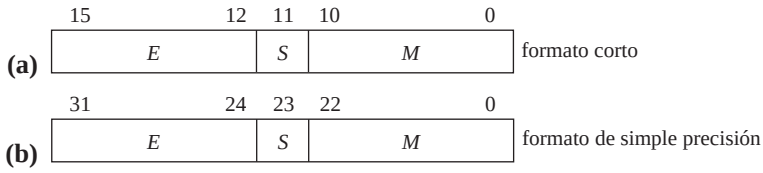


Figura P.9.26.



9.27 Considere el filtro IIR recursivo mostrado en la Figura P.9.27 y sean $h_F(n)$, $h_R(n)$ y $h(n)$ las respuestas al impulso de la sección FIR, la sección recursiva y el filtro total, respectivamente.

(a) Halle todas la secciones de segundo orden causales y estables con coeficientes enteros (a_1, a_2) y determine y dibuje sus respuestas al impulso y en frecuencia. Estos filtros no requieren multiplicaciones complicadas ni cuantificación después de realizar las multiplicaciones.

(b) Demuestre que tres de las secciones obtenidas en el apartado (a) pueden obtenerse mediante la interconexión de otras secciones.

(c) Halle la ecuación en diferencias que describe la respuesta al impulso $h(n)$ del filtro y determine las condiciones para que el filtro completo sea de tipo FIR.

(d) Vuelva a obtener los resultados de los apartados (a) hasta (c) utilizando consideraciones en el dominio z.

9.28 Este problema ilustra el desarrollo de estructuras de filtros digitales utilizando la regla de Horner para evaluar los polinomios. Considere el polinomio

$$p(x) = \alpha_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

que calcula $p(x)$ con el coste mínimo de p multiplicaciones y p sumas.

(a) Dibuje la estructuras correspondientes a las descomposiciones en factores

$$H_1(z) = b_0(1 + b_1 z^{-1}(1 + b_2 z^{-1}(1 + b_3 z^{-1})))$$

$$H(z) = b_0(z^{-3} + (b_1 z^{-2} + (b_2 z^{-1} + b_3)))$$

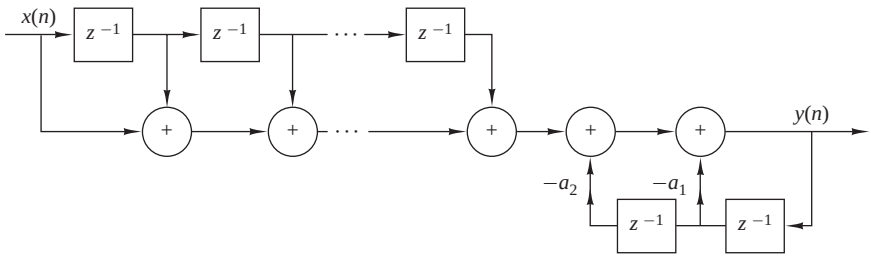


Figura P.9.27.

y determine la función de sistema, el número de elementos de retardo y las operaciones aritméticas para cada estructura.

(b) Dibuje la estructura de Horner para el siguiente sistema de fase lineal:

$$H(z) = z^{-1}\left[\alpha_0 + \sum_{k=1}^{3}(z^{-k}+z^{k})\alpha_k\right]$$

9.29 Sean x_1 y x_2 números binarios de $(b+1)$ bits con módulos menores que 1. Para calcular la suma de x_1 y x_2 utilizando la representación en complemento a dos y tratándolos como números sin signo de $(b+1)$ bits, realice la suma en módulo 2 e ignore cualquier acarreo debido al bit de signo.

(a) Demuestre que si la suma de dos números con el mismo signo tiene el signo opuesto, ello corresponde a un desbordamiento.

(b) Demuestre que cuando calculamos la suma de varios números empleando la representación en complemento a dos, el resultado será correcto, incluso si se producen desbordamientos, si la suma correcta es menor que 1 en módulo. Ilustre este argumento construyendo un ejemplo simple con tres números.

9.30 Considere el sistema descrito por la ecuación en diferencias

$$y(n) = ay(n-1) - ax(n) + x(n-1)$$

(a) Demuestre que se trata de un sistema paso todo.

(b) Obtenga la realización en la forma directa II del sistema.

(c) Si cuantifica los coeficientes del sistema del apartado (b), ¿sigue siendo paso todo?

(d) Obtenga una realización reescribiendo la ecuación en diferencias como

$$y(n) = a[y(n-1) - x(n)] + x(n-1)$$

(e) Si cuantifica los coeficientes del sistema del apartado (d), ¿continúa siendo paso todo?

9.31 Considere el sistema

$$y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + x(n)$$

(a) Calcule su respuesta a la entrada $x(n) = (\frac{1}{4})^n u(n)$ suponiendo que se aplica aritmética de precisión infinita.

(b) Calcule la respuesta del sistema $y(n)$, $0 \le n \le 5$ para la misma entrada, suponiendo aritmética de precisión finita, aritmética fraccionaria en formato signo–magnitud con cinco bits (es decir, el bit de signo más cuatro bits fraccionarios). La cuantificación se realiza por truncamiento.

(c) Compare los resultados obtenidos en los apartados (a) y (b).

9.32 La entrada al sistema

$$y(n) = 0.999y(n-1) + x(n)$$

se cuantifica empleando $b = 8$ bits. ¿Cuál es la potencia producida por el ruido de cuantificación en la salida del filtro?

9.33 Considere el sistema

$$y(n) = 0.875y(n-1) - 0.125y(n-2) + x(n)$$

(a) Calcule sus polos y diseñe la realización en cascada del sistema.

(b) Cuantifique los coeficientes del sistema utilizando truncamiento, manteniendo un bit de signo más otros tres bits. Determine los polos del sistema resultante.

(c) Repita el apartado (b) para la misma precisión utilizando redondeo.

(d) Compare los polos obtenidos en los apartados (b) y (c) con los del apartado (a). ¿Cuál es la mejor realización? Dibuje las respuestas en frecuencia de los sistemas de los apartados (a), (b) y (c).

9.34 Considere el sistema

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 + \frac{1}{4}z^{-1})}$$

(a) Dibuje todas las realizaciones posibles del sistema.

(b) Suponga que implementamos el filtro utilizando aritmética fraccionaria de punto fijo en formato signo–magnitud utilizando $(b+1)$ bits (un bit es para el signo). Cada producto resultante se redondea a b bits. Determine la varianza del ruido de redondeo creado por los multiplicadores en la salida de cada una de las realizaciones del apartado (a).

9.35 El filtro de primer orden mostrado en la Figura P.9.35 se implementa utilizando aritmética fraccionaria de punto fijo en complemento dos (incluyendo el signo). Los productos se redondean a cuatro bits. Utilizando la entrada $x(n) = 0.10\delta(n)$, determine:

(a) Las primeras cinco salidas si $\alpha = 0.5$. ¿Entra el filtro en un ciclo límite?

(b) Las primeras cinco salidas si $\alpha = 0.75$. ¿Entra el filtro en un ciclo límite?

9.36 El sistema digital mostrado en la Figura P.9.36 utiliza un convertidor A/D que usa artimética de punto fijo en complemento a dos, seis bits (incluyendo el signo) y redondeo. El filtro $H(z)$ se implementa utilizando ocho bits (incluyendo el signo) con aritmética de punto fijo y representación en complemento a dos con redondeo. La entrada $x(t)$ es un proceso aleatorio de media cero distribuido uniformemente con una autocorrelación $\gamma_{xx}(\tau) = 3\delta(\tau)$. Suponga que el convertidor A/D puede manejar valores de entrada de hasta ± 1.0 sin producir desbordamientos.

(a) ¿Qué valor de atenuación debe aplicarse antes del convertidor A/D para garantizar que no haya desbordamiento?

(b) Con la atenuación anterior, ¿cuál es la relación señal–ruido de cuantificación (SQNR) en la salida del convertidor A/D?

(c) Las muestras del convertidor A/D de seis bits pueden justificarse a la izquierda, a la derecha o centrarse en la palabra de ocho bits utilizada como entrada al filtro digital. ¿Cuál es la estrategia correcta para usar la relación SNR máxima en la salida del filtro sin que se produzca desbordamiento?

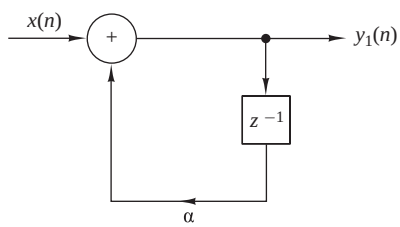


Figura P.9.35.

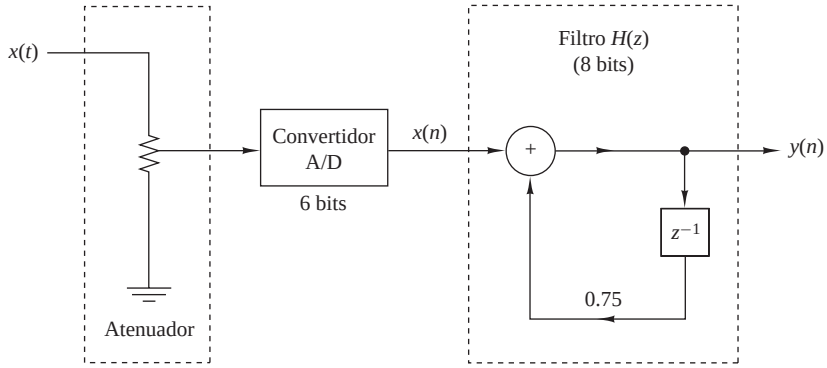


Figura P.9.36.

(d) ¿Cuál es la relación SNR en la salida del filtro debida a todas las fuentes de ruido de cuantificación?

9.37 Demuestre que la Figura P.9.37 es la implementación en forma acoplada de un filtro de dos polos, cuyos polos están en $x = re^{\pm j\theta}$. Existen cuatro multiplicaciones reales por punto de salida. Sea $e_i(n)$, $i = 1, 2, 3, 4$ el ruido de redondeo en una implementación de punto fijo del filtro. Suponga que las fuentes de ruido son secuencias de ruido blanco estacionarias mutuamente incorreladas y de media cero. Para cada n, la densidad de probabilidad $p(e)$ es uniforme en el intervalo $-\Delta/2 \leq e \leq \Delta/2$, donde $\Delta = 2^{-b}$.

(a) Escriba las dos ecuaciones en diferencias acopladas para $y(n)$ y $v(n)$, incluyendo las fuentes de ruido y la secuencia de entrada $x(n)$.

(b) A partir de estas dos ecuaciones en diferencias, demuestre que las funciones del sistema del filtro $H_1(z)$ y $H_2(z)$ entre los términos del ruido de entrada $e_1(n) + e_2(n)$ y $e_3(n) + e_4(n)$ y la salida $y(n)$

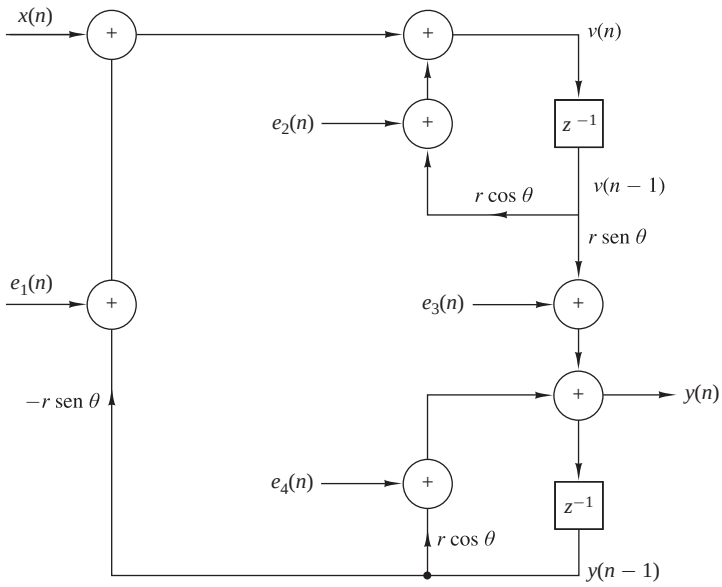


Figura P.9.37.

son:

$$H_1(z) = \frac{r \operatorname{sen}\theta z^{-1}}{1 - 2r\cos\theta z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

$$H_2(z) = \frac{1 - r\cos\theta z^{-1}}{1 - 2r\cos\theta z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

Sabemos que

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2r\cos\theta z^{-1} + r2z^{-2}} \Rightarrow h(n) = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} r^n \operatorname{sen}(n+1)\theta u(n)$$

Determine $h_1(n)$ y $h_2(n)$.

(c) Determine una expresión cerrada para la varianza del ruido total $e_i(n)$, $i = 1, 2, 3, 4$ en la salida del filtro.

9.38 Determine la varianza del ruido de redondeo en la salida de las dos realizaciones en cascada del filtro mostrado en la Figura P.9.38, cuya función de sistema es

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)$$

donde

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$H_2(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

9.39 *Efectos de cuantificación en los filtros FIR en su forma directa.* Considere una realización en la forma directa de un filtro FIR de longitud M. Suponga que la multiplicación de cada coeficiente por la correspondiente muestra de la señal se realiza en aritmética de punto fijo con b bits y que cada producto se redondea a b bits. Determine la varianza del ruido de cuantificación en la salida del filtro usando una caracterización estadística del ruido de redondeo como en la Sección 9.6.3.

9.40 Considere el sistema especificado por la función de sistema

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{B(z)}{A(z)} \\ &= \left[G_1 \frac{(1 - 0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{3}z^{-1})} \right] \left[G_2 \frac{(1 + \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{5}{8}z^{-1})}{(1 - 0.8e^{j\pi/3}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/3}z^{-1})} \right] \end{aligned}$$

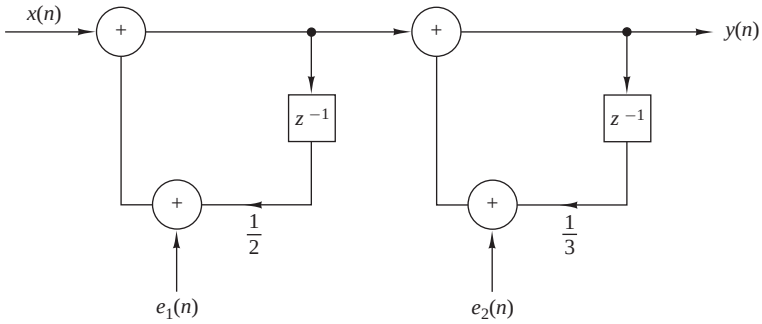
(a) Seleccione G_1 y G_2 de modo que la ganancia de cada sección de segundo orden en $\omega = 0$ sea igual a 1.

(b) Dibuje las realizaciones en la forma directa I, la forma directa II y en cascada del sistema.

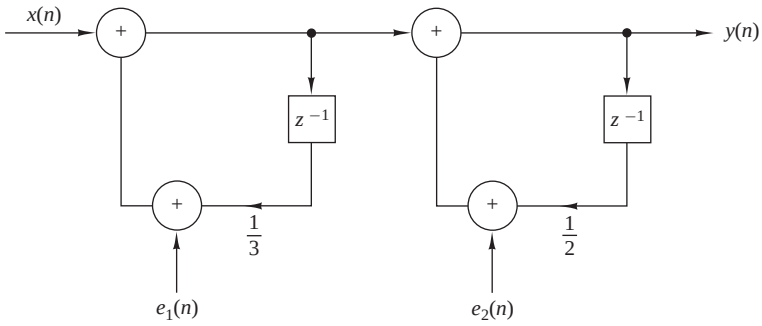
(c) Escriba un programa que implemente la forma directa I y la forma directa II, y calcule las primeras muestras de la respuesta al impulso y el escalón del sistema.

(d) Dibuje los resultados del apartado (c) para ilustrar el funcionamiento de los programas.

9.41 Considere el sistema dado en el Problema 9.40 con $G_1 = G_2 = 1$.



(a) Realización en cascada I



(b) Realización en cascada II

Figura P.9.38.

(a) Determine una realización en celosía para el sistema

$$H(z) = B(z)$$

(b) Determine una realización en celosía para el sistema

$$H(z) = \frac{1}{A(z)}$$

(c) Determine una realización en celosía-escalera para el sistema $H(z) = B(z)/A(z)$.

(d) Escriba un programa para la implementación de la estrucura en celosía–escalera del apartado (c).

(e) Determine y dibuje las primeras 100 muestras de las respuestas al impulso de los apartados (a) hasta (c) trabajando con estructuras en celosía.

(f) Calcule y dibuje las primeras 100 muestras de la convolución de las respuestas al impulso en los apartados (a) y (b). ¿Qué puede comprobar? Explique los resultados.

9.42 Considere el sistema dado en el Problema 9.40. Determine la estructura en paralelo y escriba un programa para su implementación.

10

Diseño de filtros digitales

Con los temas que hemos desarrollado en los capítulos anteriores, ahora estamos preparados para abordar el diseño de filtros digitales. Describiremos varios métodos para diseñar filtros digitales FIR e IIR.

En el diseño de filtros selectivos en frecuencia, la característica del filtro deseado se especifica en el dominio de la frecuencia en función del módulo y de la fase de la respuesta del filtro. En el proceso de diseño del filtro, determinamos los coeficientes de un filtro FIR o IIR causal que es buena aproximación de las especificaciones de la respuesta en frecuencia deseada. El tipo de filtro que se diseñe, FIR o IIR, depende de la naturaleza del problema y de las especificaciones de la respuesta en frecuencia deseada.

En la práctica, los filtros FIR se emplean en problemas de filtrado en los que se precisa una característica de fase dentro de la banda de paso del filtro. Si no se necesita esta característica de fase lineal, puede emplearse un filtro IIR o FIR. Sin embargo, por regla general, un filtro IIR tiene lóbulos secundarios más pequeños en la banda eliminada que un filtro FIR con el mismo número de parámetros. Por esta razón, si es tolerable cierta distorsión, es preferible un filtro IIR, principalmente porque su implementación precisa muy pocos parámetros, requiere menos memoria y presenta menos complejidad de cálculo.

Junto con el diseño de filtros digitales, vamos a describir también las transformaciones en frecuencia tanto en el dominio analógico como en el digital, para transformar un filtro paso bajo prototipo en otro filtro paso bajo, paso banda, de banda eliminada o paso alto.

Actualmente, el diseño de filtros FIR e IIR digitales es mucho más simple gracias a la disponibilidad de numerosos programas software. Al describir en este capítulo los métodos de diseño de filtros, nuestro primer objetivo será proporcionar al lector los conocimientos necesarios para seleccionar el filtro que mejor se adapte a la aplicación y satisfacer los requisitos de diseño.

10.1 Consideraciones generales

En la Sección 5.4, hemos descrito las características de los filtros ideales y hemos demostrado que tales filtros no son causales y, por tanto, no son físicamente realizables. En esta sección, vamos a abordar en detalle la causalidad y sus implicaciones. A continuación, presentaremos las características de la respuesta en frecuencia de los filtros digitales FIR e IIR causales.

10.1.1 La causalidad y sus implicaciones

Consideremos la cuestión de la causalidad en más detalle examinando la respuesta al impulso $h(n)$ de un filtro paso bajo ideal cuya respuesta en frecuencia es

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases} \tag{10.1.1}$$

La respuesta al impulso de este filtro es

$$h(n) = \begin{cases} \dfrac{\omega_c}{\pi}, & n = 0 \\ \dfrac{\omega_c}{\pi} \dfrac{\operatorname{sen} \omega_c n}{\omega_c n}, & n \neq 0 \end{cases} \tag{10.1.2}$$

Un diagrama de $h(n)$ para $\omega_c = \pi/4$ se muestra en la Figura 10.1.1. Está claro que el filtro paso bajo ideal es un filtro no causal y por tanto no se puede implementar en la práctica.

Una posible solución consiste en introducir un retardo grande n_0 en $h(n)$ y establecer arbitrariamente $h(n) = 0$ para $n < n_0$. Sin embargo, el sistema resultante ya no presenta una respuesta en frecuencia ideal. No obstante, si hacemos $h(n) = 0$ para $n < n_0$, la expansión en serie de Fourier de $H(\omega)$ da lugar al fenómeno de Gibbs, como se describe en la Sección 10.2.

Aunque esta exposición va a limitarse a la realización de un filtro paso bajo, las conclusiones que saquemos pueden generalizarse para los restantes filtros ideales. En resumen, ninguna de las características del filtro mostradas anteriormente en la Figura 5.4.1 son causales, por lo que no es posible implementarlos físicamente.

Una pregunta que naturalmente surge en este punto es la siguiente: ¿cuáles son las condiciones necesarias y suficientes que debe satisfacer una respuesta en frecuencia $H(\omega)$ para que el filtro resultante sea causal? El teorema de Paley–Wiener proporciona la respuesta a esta pregunta. Podemos enunciar este teorema como sigue:

Teorema de Paley–Wiener. Si $h(n)$ tiene energía finita y $h(n) = 0$ para $n < 0$, entonces [puede consultar Wiener y Paley (1934)]

$$\int_{-\pi}^{\pi} |ln|H(\omega)||d\omega < \infty \tag{10.1.3}$$

Inversamente, si $|H(\omega)|$ es integrable y si la integral dada en (10.1.3) es finita, entonces podemos asociar con $|H(\omega)|$ una fase de la respuesta $\Theta(\omega)$, por lo que el filtro resultante con la respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\Theta(\omega)}$$

es causal.

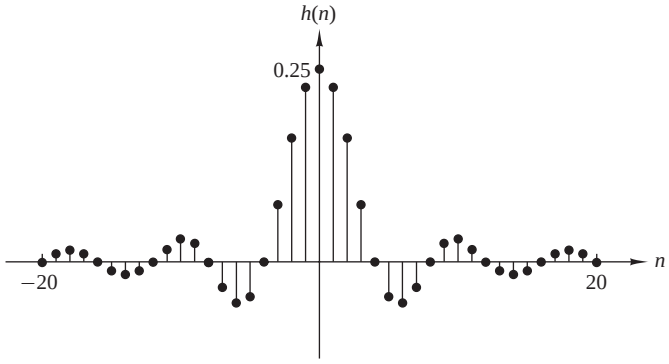


Figura 10.1.1. Respuesta al impulso unidad de un filtro paso bajo ideal.

Una conclusión importante que podemos extraer del teorema de Paley–Wiener es que el módulo $|H(\omega)|$ puede ser cero para algunas frecuencias, pero no puede ser cero en ninguna banda finita de frecuencias, ya que la integral es infinita. En consecuencia, cualquier filtro ideal es no causal.

Aparentemente, la causalidad impone algunas restricciones estrictas en un sistema lineal e invariante en el tiempo. Además de la condición de Paley–Wiener, la causalidad también implica una relación fuerte entre $H_R(\omega)$ y $H_I(\omega)$, las componentes real e imaginaria de la respuesta en frecuencia $H(\omega)$. Para ilustrar esta dependencia, descomponemos $h(n)$ en una secuencia par y una secuencia impar, es decir,

$$h(n) = h_e(n) + h_o(n) \tag{10.1.4}$$

donde

$$h_e(n) = \frac{1}{2}[h(n) + h(-n)] \tag{10.1.5}$$

y

$$h_o(n) = \frac{1}{2}[h(n) - h(-n)] \tag{10.1.6}$$

Ahora, si $h(n)$ es causal, es posible recuperar $h(n)$ a partir de su componente par $h_e(n)$ para $0 \le n \le \infty$, o a partir de su componente impar $h_o(n)$ para $1 \le n \le \infty$.

Podemos ver fácilmente que

$$h(n) = 2h_e(n)u(n) - h_e(0)\delta(n), \qquad n \ge 0 \tag{10.1.7}$$

y

$$h(n) = 2h_o(n)u(n) + h(0)\delta(n), \qquad n \ge 1 \tag{10.1.8}$$

Dado que $h_o(n) = 0$ para $n = 0$, no podemos recuperar $h(0)$ a partir de $h_o(n)$ y por tanto también necesitamos conocer $h(0)$. En cualquier caso, es evidente que $h_o(n) = h_e(n)$ para $n \ge 1$, por lo que existe una relación fuerte entre $h_o(n)$ y $h_e(n)$.

Si $h(n)$ es absolutamente sumable (es decir, BIBO estable), la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ existe, y

$$H(\omega) = H_R(\omega) + jH_I(\omega) \tag{10.1.9}$$

Además, si $h(n)$ es real y causal, las propiedades de simetría de la transformada de Fourier implican que

$$\begin{aligned} h_e(n) &\overset{F}{\longleftrightarrow} H_R(\omega) \\ h_o(n) &\overset{F}{\longleftrightarrow} H_I(\omega) \end{aligned} \tag{10.1.10}$$

Dado que $h(n)$ queda completamente especificada por $h_e(n)$, se deduce que $H(\omega)$ queda completamente determinada si conocemos $H_R(\omega)$. Alternativamente, $H(\omega)$ queda completamente determinada a partir de $H_I(\omega)$ y $h(0)$. En resumen, $H_R(\omega)$ y $H_I(\omega)$ son independientes y no pueden especificarse de forma independiente si el sistema es causal. Esto es equivalente a decir que el módulo y la fase de la respuesta de un filtro causal son interdependientes y por tanto no se pueden especificar de manera independiente.

Dada $H_R(\omega)$ para una secuencia real, par y absolutamente sumable $h_e(n)$, podemos determinar $H(\omega)$. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento.

EJEMPLO 10.1.1

Considere un sistema LTI estable con una respuesta real y par al impulso $h(n)$. Determine $H(\omega)$ si

$$H_R(\omega) = \frac{1 - a\cos\omega}{1 - 2a\cos\omega + a^2}, \qquad |a| < 1$$

Solución. El primer paso consiste en determinar $h_e(n)$. Esto puede hacerse teniendo en cuenta que

$$H_R(\omega) = H_R(z)|_{z=e^{j\omega}}$$

donde

$$H_R(z) = \frac{1-a(z+z^{-1})/2}{1-a(z+z^{-1})+a^2} = \frac{z-a(z^2+1)/2}{(z-a)(1-az)}$$

La región de convergencia tiene que estar restringida por los polos en $p_1 = a$ y $p_2 = 1/a$ y debe incluir la circunferencia unidad. Por tanto, la ROC es $|a| < |z| < 1/|a|$. En consecuencia, $h_e(n)$ es una secuencia de dos lóbulos, con el polo en $z = a$ que contribuye a la componente causal y $p_2 = 1/a$ que contribuye a la componente anticausal. Utilizando una expansión en fracciones parciales, obtenemos

$$h_e(n) = \frac{1}{2}a^{|n|} + \frac{1}{2}\delta(n) \tag{10.1.11}$$

Sustituyendo (10.1.11) en (10.1.7), obtenemos $h(n)$ como

$$h(n) = a^n u(n)$$

Por último, obtenemos la transformada de Fourier de $h(n)$ como

$$H(\omega) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

La relación entre las componentes real e imaginaria de la transformada de Fourier de una secuencia real, causal y absolutamente sumable puede establecerse fácilmente a partir de (10.1.7). Esta relación es

$$H(\omega) = H_R(\omega) + jH_I(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_R(\lambda)U(\omega-\lambda)d\lambda - h_e(0) \tag{10.1.12}$$

donde $U(\omega)$ es la transformada de Fourier del escalón unidad $u(n)$. Aunque el escalón unidad no es absolutamente sumable, tiene transformada de Fourier (*véase* la Sección 4.2.8).

$$\begin{aligned} U(\omega) &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1-e^{-j\omega}} \\ &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\cot\frac{\omega}{2}, \qquad -\pi \le \omega \le \pi \end{aligned} \tag{10.1.13}$$

Sustituyendo (10.1.13) en (10.1.12), obtenemos la relación entre $H_R(\omega)$ y $H_I(\omega)$ como

$$H_I(\omega) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_R(\lambda)\cot\frac{\omega-\lambda}{2}d\lambda \tag{10.1.14}$$

Luego $H_I(\omega)$ queda determinada de forma unívoca a partir de $H_R(\omega)$ a través de esta relación integral. La integral se conoce como *transformada discreta de Hilbert*. Dejamos como ejercicio para el lector establecer la relación entre $H_R(\omega)$ y la función de la transformada discreta de Hilbert de $H_I(\omega)$.

En resumen, la causalidad tiene implicaciones muy importantes en el diseño de filtros selectivos en frecuencia. Éstas son: (a) la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ no puede ser cero excepto en un conjunto finito de puntos de frecuencia; (b) el módulo $|H(\omega)|$ no puede ser constante en cualquier intervalo finito de frecuencia y la transición de la banda de paso a la banda eliminada no puede ser infinitamente abrupta (esto es una consecuencia del fenómeno de Gibbs, que resulta del truncamiento de $h(n)$ para conseguir la causalidad); y (c) las componentes real e imaginaria de $H(\omega)$ son interdependientes y están relacionadas por la transformada discreta de Hilbert. En consecuencia, el módulo $|H(\omega)|$ y la fase $\Theta(\omega)$ de $H(\omega)$ no se pueden elegir arbitrariamente.

Ahora que conocemos las restricciones que impone la causalidad a la respuesta en frecuencia y teniendo en cuenta el hecho de que los filtros ideales no pueden implementarse en la práctica, vamos a limitar nuestra atención a la clase de sistemas lineales e invariantes en el tiempo especificados por la ecuación en diferencias

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k)$$

que son causales y pueden implementarse físicamente. Como hemos demostrado, tales sistemas tienen una respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-j\omega k}} \tag{10.1.15}$$

El problema de diseño de un filtro digital básico consiste en aproximar cualquiera de las características de la respuesta en frecuencia ideal a un sistema que tenga la respuesta en frecuencia dada por (10.1.15), seleccionando apropiadamente los coeficientes $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$. El problema de la aproximación se trata en detalle en las Secciones 10.2 y 10.3, donde se exponen técnicas para el diseño de filtros digitales.

10.1.2 Características de los filtros prácticos selectivos en frecuencia

Como hemos visto en la sección anterior, los filtros ideales son no causales y, por tanto, no físicamente irrealizables para aplicaciones de tratamiento de señales en tiempo real. La causalidad implica que la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ del filtro no puede ser cero, excepto en un conjunto finito de puntos del intervalo de frecuencias. Además, $H(\omega)$ no puede presentar un corte infinitamente abrupto al pasar de la banda de paso a la banda eliminada, es decir, $H(\omega)$ no puede pasar de la unidad a cero abruptamente.

Aunque la respuesta en frecuencia de los filtros ideales puede resultar deseable, no es absolutamente necesaria en la mayoría de las aplicaciones prácticas. Si relajamos estas condiciones, es posible implementar filtros causales que pueden aproximarse a los filtros ideales tanto como deseemos. En particular, no es necesario insistir en que el módulo $|H(\omega)|$ tenga que ser constante en la banda de paso completa del filtro. Normalmente, es tolerable un pequeño rizado en la banda de paso, como se ilustra en la Figura 10.1.2. De forma similar, no es

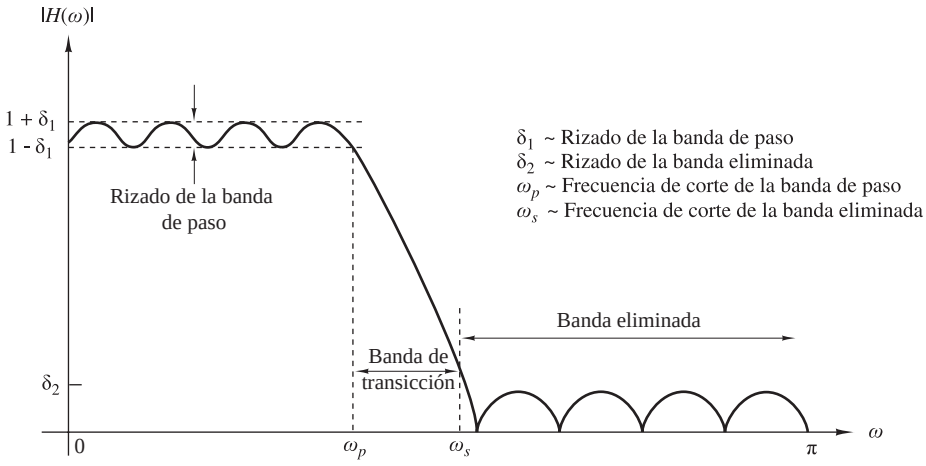


Figura 10.1.2. Módulo de los filtros físicamente realizables.

necesario que la respuesta del filtro $|H(\omega)$ sea cero en la banda eliminada. Un valor pequeño distinto de cero de rizado en la banda eliminada también es tolerable.

La transición de la respuesta en frecuencia de la banda de paso a la banda eliminada define la *banda de transición* o *región de transición* del filtro, como se ilustra en la Figura 10.1.2. La frecuencia de corte ω_p define el límite superior de la banda de paso y la frecuencia ω_s designa el comienzo de la banda eliminada. Por tanto, la anchura de la banda de transición es $\omega_s - \omega_p$. La anchura de la banda de paso normalmente se denomina *ancho de banda* del filtro. Por ejemplo, si se trata de un filtro paso bajo con una frecuencia de corte de la banda de paso ω_p, su ancho de banda es ω_p.

Si existe rizado en la banda de paso del filtro, su valor se designa mediante δ_1, y el módulo $|H(\omega)|$ varía entre los límites $1 \pm \delta_1$. El rizado de la banda eliminada del filtro se designa como δ_2.

Para acomodar un rango dinámico grande en la gráfica de la respuesta en frecuencia de cualquier filtro, es habitual utilizar una escala logarítmica para el módulo $|H(\omega)|$. En consecuencia, el rizado en la banda de paso es $20\log_{10}\delta_1$ decibelios, y en la banda eliminada es $20\log_{10}\delta_2$.

En cualquier problema de diseño de filtros podemos especificar: (1) el rizado máximo de la banda de paso tolerable, (2) el rizado máximo de la banda eliminada tolerable, (3) la frecuencia de corte de la banda de paso ω_p y (4) la frecuencia de corte de la banda eliminada ω_s. Basándonos en estas especificaciones, podemos seleccionar los parámetros $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ de la respuesta en frecuencia, dada por (10.1.15), que proporcionen la mejor aproximación a la especificación deseada. El grado en que $H(\omega)$ se aproxime a la especificación depende en parte de los criterios utilizados para seleccionar los coeficientes del filtro $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$, así como de las cantidades (M,N) de coeficientes.

En la sección siguiente vamos a presentar un método para diseñar filtros FIR de fase lineal.

10.2 Diseño de filtros FIR

En esta sección se describen varios métodos para diseñar filtros FIR. Nuestro tratamiento está centrado en los filtros FIR de fase lineal.

10.2.1 Filtros FIR simétricos y antisimétricos

Un filtro FIR de longitud M con entrada $x(n)$ y salida $y(n)$ se describe mediante la ecuación en diferencias

$$\begin{aligned} y(n) &= b_0x(n) + b_1x(n-1) + \cdots + b_{M-1}x(n-M+1) \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k) \end{aligned} \tag{10.2.1}$$

donde $\{b_k\}$ es el conjunto de coeficientes del filtro. Alternativamente, podemos expresar la secuencia de salida como la convolución de la respuesta del sistema al impulso unidad $h(n)$ con la señal de entrada. Así, tenemos

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) \tag{10.2.2}$$

donde los límites inferior y superior de la convolución reflejan la causalidad y la característica de duración finita de filtro. Evidentemente, (10.2.1) y (10.2.2) son idénticas en la forma y, por tanto, podemos deducir que $b_k = h(k)$, $k = 0, 1, \ldots, M-1$.

El filtro también puede caracterizarse mediante su función de sistema

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)z^{-k} \tag{10.2.3}$$

que es un polinomio de grado $M-1$ en la variable z^{-1}. Las raíces de este polinomio son los ceros del filtro.

Un filtro FIR tiene fase lineal si su respuesta al impulso unidad satisface la condición

$$h(n) = \pm h(M-1-n), \qquad n = 0, 1, \ldots, M-1 \tag{10.2.4}$$

Si incorporamos las condiciones de simetría y antisimetría de (10.2.4) a (10.2.3), tenemos

$$\begin{aligned} H(z) &= h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + \cdots + h(M-2)z^{-(M-2)} + h(M-1)z^{-(M-1)} \\ &= z^{-(M-1)/2}\left\{h\left(\frac{M-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n)\left[z^{(M-1-2k)/2} \pm z^{-(M-1-2k)/2}\right]\right\}, \quad M \text{ impar} \\ &= z^{-(M-1)/2}\sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n)[z^{(M-1-2k)/2} \pm z^{-(M-1-2k)/2}], \qquad M \text{ par} \end{aligned} \tag{10.2.5}$$

Si ahora sustituimos z^{-1} por z en (10.2.3) y multiplicamos ambos lados de la ecuación resultante por $z^{-(M-1)}$, obtenemos

$$z^{-(M-1)}H(z^{-1}) = \pm H(z) \tag{10.2.6}$$

Este resultado implica que las raíces del polinomio $H(z)$ son idénticas a las raíces del polinomio $H(z^{-1})$. En consecuencia, las raíces de $H(z)$ deben producir parejas recíprocas. En otras palabras, si z_1 es una raíz o un cero de $H(z)$, entonces $1/z_1$ también es una raíz. Además, si la respuesta al impulso unidad $h(n)$ del filtro es real, las raíces complejas deben producir parejas complejas conjugadas. Por tanto, si z_1 es una raíz compleja, z_1^* también es una raíz. Como consecuencia de (10.2.6), $H(z)$ también tiene un cero en $1/z_1^*$. La Figura 10.2.1 ilustra la simetría que existe en las posiciones de los ceros de un filtro FIR de fase lineal.

La respuesta en frecuencia de los filtros FIR de fase lineal se obtiene evaluando (10.2.5) en la circunferencia unidad. Esta sustitución proporciona la expresión para $H(\omega)$.

Cuando $h(n) = h(M-1-n)$, $H(\omega)$ puede expresarse como

$$H(\omega) = H_r(\omega)e^{-j\omega(M-1)/2} \tag{10.2.7}$$

donde $H_r(\omega)$ es una función real de ω y se puede expresar como

$$H_r(\omega) = h\left(\tfrac{M-1}{2}\right) + 2\textstyle\sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n)\cos\omega\left(\tfrac{M-1}{2} - n\right), \quad M \text{ impar} \tag{10.2.8}$$

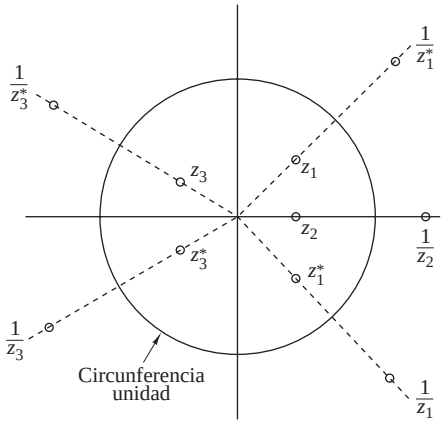


Figura 10.2.1. Simetría de las posiciones de los ceros en un filtro FIR de fase lineal.

$$H_r(\omega) = 2\sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n)\cos\omega\left(\tfrac{M-1}{2}-n\right), \quad M \text{ par} \tag{10.2.9}$$

La característica de fase del filtro tanto para M impar como para M par es

$$\Theta(\omega) = \begin{cases} -\omega\left(\dfrac{M-1}{2}\right), & \text{si } H_r(\omega) > 0 \\ -\omega\left(\dfrac{M-1}{2}\right)+\pi, & \text{si } H_r(\omega) < 0 \end{cases} \tag{10.2.10}$$

Si

$$h(n) = -h(M-1-n)$$

la respuesta al impulso unidad es *antisimétrica*. Para M impar, el punto central de la secuencia $h(n)$ antisimétrica es $n = (M-1)/2$. En consecuencia,

$$h\left(\frac{M-1}{2}\right) = 0$$

Sin embargo, si M es par, cada término de $h(n)$ tiene el término correspondiente de signo opuesto.

Es sencillo demostrar que la respuesta en frecuencia de un filtro FIR con una respuesta al impulso antisimétrica pueda expresarse como

$$H(\omega) = H_r(\omega)e^{j[-\omega(M-1)/2+\pi/2]} \tag{10.2.11}$$

donde

$$H_r(\omega) = 2\sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n)\operatorname{sen}\omega\left(\frac{M-1}{2}-n\right), \qquad M \text{ impar} \tag{10.2.12}$$

$$H_r(\omega) = 2\sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n)\operatorname{sen}\omega\left(\frac{M-1}{2}-n\right), \qquad M \text{ par} \tag{10.2.13}$$

La característica de fase del filtro tanto para M impar como para M par es

$$\Theta(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}-\omega\left(\dfrac{M-1}{2}\right), & \text{si } H_r(\omega) > 0 \\ \dfrac{3\pi}{2}-\omega\left(\dfrac{M-1}{2}\right), & \text{si } H_r(\omega) < 0 \end{cases} \tag{10.2.14}$$

Estas fórmulas generales de la respuesta en frecuencia pueden emplearse para diseñar filtros FIR de fase lineal con respuestas al impulso simétricas y antisimétricas. Observe que, para $h(n)$ simétrica, el número de coeficientes del filtro que especifica la respuesta en frecuencia es $(M+1)/2$ cuando M es impar, o $M/2$ cuando M es par. Por el contrario, si la respuesta al impulso unidad es antisimétrica,

$$h\left(\frac{M-1}{2}\right) = 0$$

de modo que existen $(M-1)/2$ coeficientes de filtro cuando M es impar y $M/2$ coeficientes cuando M es par que tienen que ser especificados.

La elección de una respuesta al impulso simétrica o antisimétrica depende de la aplicación. Como veremos más adelante, una respuesta al impulso simétrica es adecuada para algunas aplicaciones, mientras que la respuesta al impulso antisimétrica es más adecuada para otras aplicaciones. Por ejemplo, si $h(n) = -h(M-1-n)$ y M es

impar, (10.2.12) implica que $H_r(0) = 0$ y $H_r(\pi) = 0$. En conseuencia, (10.2.12) no es adecuada ni para un filtro paso bajo ni para un filtro paso alto. Del mismo modo, la respuesta al impulso unidad antisimétrico con M par da como resultado $H_r(0) = 0$, lo que puede verificarse fácilmnte a partir de (10.2.13). Por tanto, no utilizaremos la condición de antisimetría en el diseño de un filtro FIR paso bajo de fase lineal. Por otro lado, la condición de simetría $h(n) = h(M-1-n)$ proporciona un filtro FIR de fase lineal con una respuesta distinta de cero en $\omega = 0$, es decir,

$$H_r(0) = h\left(\frac{M-1}{2}\right) + 2\sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n), \qquad M \text{ impar} \tag{10.2.15}$$

$$H_r(0) = 2\sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n), \qquad M \text{ par} \tag{10.2.16}$$

En resumen, el problema de diseñar un filtro FIR consiste simplemente en determinar los M coeficientes de $h(n)$, $n = 0, 1, \ldots, M-1$, a partir de una especificación de la respuesta en frecuencia deseada $H_d(\omega)$ del filtro FIR. Los parámetros importantes de la especificación de $H_d(\omega)$ se proporcionan en la Figura 10.1.2.

En las siguientes secciones se describen los métodos de diseño basados en la especificación de $H_d(\omega)$.

10.2.2 Diseño de filtros FIR de fase lineal utilizando ventanas

En este método, a partir de la especificación de la respuesta en frecuencia deseada $H_d(\omega)$ determinamos la correspondiente respuesta al impulso unidad $h_d(n)$. Así, $h_d(n)$ está relacionada con $H_d(\omega)$ por la transformada de Fourier

$$H_d(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} h_d(n) e^{-j\omega n} \tag{10.2.17}$$

donde

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) e^{j\omega n} d\omega \tag{10.2.18}$$

Por tanto, dada $H_d(\omega)$, podemos determinar la respuesta al impulso unidad $h_d(n)$ evaluando la integral dada en (10.2.17).

En general, la respuesta al impulso unidad $h_d(n)$ obtenida a partir de (10.2.17) es infinita en duración y tiene que truncarse en algún punto, por ejemplo en $n = M-1$, para proporcionar un filtro FIR de longitud M. Truncar $h_d(n)$ a una longitud $M-1$ es equivalente a multiplicar $h_d(n)$ por una "ventana rectangular", definida como

$$w(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, \ldots, M-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{10.2.19}$$

Luego ahora la respuesta al impulso unidad del filtro FIR es

$$h(n) = h_d(n)w(n) = \begin{cases} h_d(n), & n = 0, 1, \ldots, M-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{10.2.20}$$

Es instructivo considerar el efecto de la función de ventana sobre la respuesta en frecuencia deseada $H_d(\omega)$. Recuerde que multiplicar la función de ventana $w(n)$ por $h_d(n)$ es equivalente a convolucionar $H_d(\omega)$ con $W(\omega)$, donde $W(\omega)$ es la representación en el dominio de la frecuencia (transformada de Fourier) de la función de ventana, es decir,

$$W(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} w(n) e^{-j\omega n} \tag{10.2.21}$$

Luego la convolución de $H_d(\omega)$ con $W(\omega)$ proporciona la respuesta en frecuencia del filtro FIR (truncado). Es decir,

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\nu)W(\omega-\nu)d\nu \tag{10.2.22}$$

La transformada de Fourier de la ventana rectangular es

$$\begin{aligned} W(\omega) &= \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1-e^{-j\omega M}}{1-e^{-j\omega}} = e^{-j\omega(M-1)/2}\,\frac{\operatorname{sen}(\omega M/2)}{\operatorname{sen}(\omega/2)} \end{aligned} \tag{10.2.23}$$

El módulo de esta función de ventana es

$$|W(\omega)| = \frac{|\operatorname{sen}(\omega M/2)|}{|\operatorname{sen}(\omega/2)|}, \qquad \pi \le \omega \le \pi \tag{10.2.24}$$

y una parte de su fase lineal es

$$\Theta(\omega) = \begin{cases} -\omega\left(\dfrac{M-1}{2}\right), & \text{cuando } \operatorname{sen}(\omega M/2) \ge 0 \\ -\omega\left(\dfrac{M-1}{2}\right)+\pi, & \text{cuando } \operatorname{sen}(\omega M/2) < 0 \end{cases} \tag{10.2.25}$$

El módulo de la respuesta de la función de ventana se ilustra en la Figura 10.2.2 para $M = 31$ y 61. La anchura del lóbulo principal [la anchura que se mide en el primer cero de $W(\omega)$] es $4\pi/M$. Luego, cuando M aumenta, el lóbulo principal se hace más estrecho. Sin embargo, la altura de los lóbulos secundarios de $|W(\omega)|$ es ligeramente mayor, pero no se ven afectados por un incremento de M. De hecho, incluso aunque la anchura de cada lóbulo secundario disminuye cuando se produce un incremento de M, su altura aumenta cuando aumenta M de tal manera que el área bajo el lóbulo secundario permanece invariante ante los cambios de M. Este comportamiento característico no es evidente a partir de la observación de la Figura 10.2.2 porque $W(\omega)$ se ha normalizado mediante M, de modo que los valores de pico normalizados de los lóbulos secundarios permanecen invariantes ante un incremento de M.

Las características de la ventana rectangular desempeñan un papel importante en la determinación de la respuesta en frecuencia resultante del filtro FIR obtenido por truncamiento de $h_d(n)$ a una longitud M. Específicamente, la convolución de $H_d(\omega)$ con $W(\omega)$ tiene el efecto de suavizar $H_d(\omega)$. Cuando M aumenta, $W(\omega)$ se hace más estrecha y el suavizado proporcionado por $W(\omega)$ se reduce. Por otro lado, los grandes lóbulos

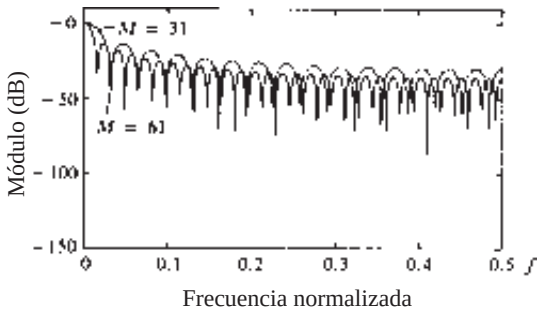


Figura 10.2.2. Respuesta en frecuencia de una ventana rectangular de longitud (a) $M = 31$ y (b) $M = 61$.

Nombre de la ventana	Secuencia en el dominio del tiempo, $h(n), 0 \le n \le M-1$
Bartlett (triangular)	$1 - \dfrac{2\left\lvert n - \dfrac{M-1}{2}\right\rvert}{M-1}$
Blackman	$0.42 - 0.5\cos\dfrac{2\pi n}{M-1} + 0.08\cos\dfrac{4\pi n}{M-1}$
Hamming	$0.54 - 0.46\cos\dfrac{2\pi n}{M-1}$
Hanning	$\dfrac{1}{2}\left(1 - \cos\dfrac{2\pi n}{M-1}\right)$
Kaiser	$\dfrac{I_0\left[\alpha\sqrt{\left(\dfrac{M-1}{2}\right)^2 - \left(n - \dfrac{M-1}{2}\right)^2}\right]}{I_0\left[\alpha\left(\dfrac{M-1}{2}\right)\right]}$
Lanczos	$\left\{\dfrac{\operatorname{sen}\left[2\pi\left(n - \dfrac{M-1}{2}\right)\Big/(M-1)\right]}{2\pi\left(n - \dfrac{M-1}{2}\right)\Big/\left(\dfrac{M-1}{2}\right)}\right\}^L, \quad L > 0$
	$1, \left\lvert n - \dfrac{M-1}{2}\right\rvert \le \alpha\dfrac{M-1}{2}, \qquad 0 < \alpha < 1$
Tukey	$\dfrac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\dfrac{n - (1+a)(M-1)/2}{(1-\alpha)(M-1)/2}\pi\right)\right]$
	$\alpha(M-1)/2 \le \left\lvert n - \dfrac{M-1}{2}\right\rvert \le \dfrac{M-1}{2}$

Tabla 10.1. Funciones de ventana para el diseño de filtros FIR.

secundarios de $W(\omega)$ dan lugar a una serie de efectos de rizado no deseados en la respuesta en frecuencia del filtro FIR $H(\omega)$, y también en los relativamente grandes lóbulos de secundarios de $H(\omega)$. Estos efectos no deseados se eliminan bien utilizando ventanas que no contengan discontinuidades abruptas en sus características en el dominio en el tiempo y los correspondientes lóbulos secundarios más pequeños en sus características en el dominio de la frecuencia.

La Tabla 10.1 enumera varias funciones de ventana cuyas respuestas en frecuencia son deseables. La Figura 10.2.3 ilustra las características en el dominio del tiempo de las ventanas. Las respuestas en frecuencia de las ventanas de Hanning, Hamming y Blackman se ilustran en las Figuras 10.2.4 hasta 10.2.6. Todas estas funciones de ventana tienen lóbulos secundarios significativamente más pequeños comparados con los de la ventana rectangular. Sin embargo, para el mismo valor de M, la anchura del lóbulo principal también es mayor

para estas ventanas si se comparan con la ventana rectangular. En consecuencia, estas funciones de ventana proporcionan más suavizado a través de la operación de convolución en el dominio de la frecuencia y, como resultado, la región de transición de la respuesta del filtro FIR es más ancha. Para reducir la anchura de esta región de transición, podemos simplemente aumentar la longitud de la ventana, lo que da lugar a un filtro más grande. La Tabla 10.2 resume estas importantes características en el dominio de la frecuencia de las distintas funciones de ventana.

Esta técnica basada en las funciones de ventana se describe mejor a través de un ejemplo concreto. Suponga que deseamos diseñar un filtro FIR paso bajo simétrico de fase lineal cuya respuesta en frecuencia es,

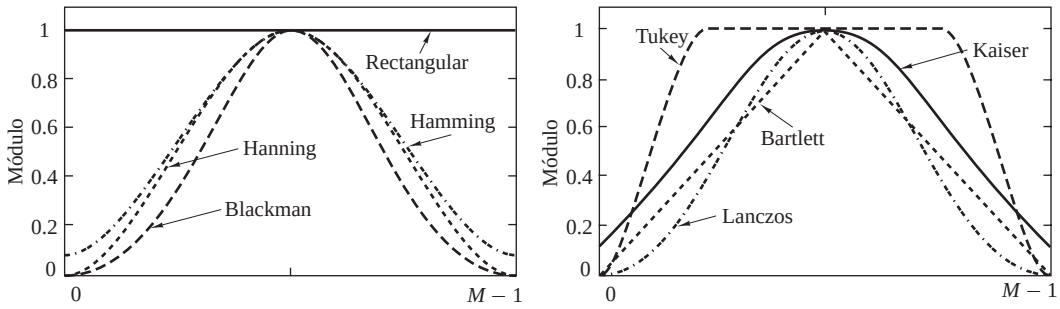


Figura 10.2.3. Formas de varias funciones de ventana.

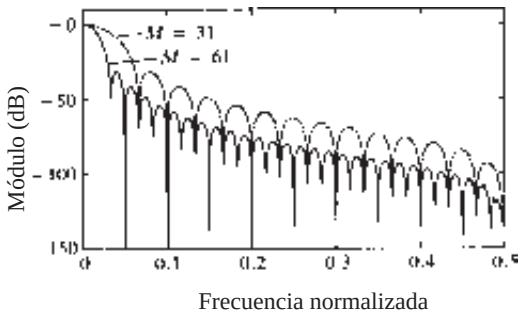


Figura 10.2.4. Respuestas en frecuencia de la ventana de Hanning para (a) $M = 31$ y (b) $M = 61$.

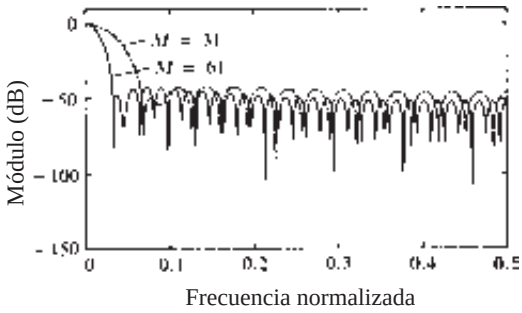


Figura 10.2.5. Respuestas en frecuencia de la ventana Hamming para (a) $M = 31$ y (b) $M = 61$.

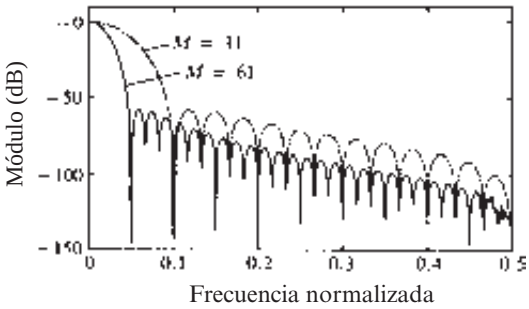


Figura 10.2.6. Respuestas en frecuencia de la ventana de Blackman para (a) $M = 31$ y (b) $M = 61$.

$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1e^{-j\omega(M-1)/2}, & 0 \le |\omega| \le \omega_c \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{10.2.26}$$

Se añade un retardo de $(M-1)/2$ unidades a $H_d(\omega)$ para forzar que el filtro tenga una longitud M. La correspondiente respuesta al impulso, obtenida a partir del cálculo de la integral de (10.2.18), es

$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega\left(n-\frac{M-1}{2}\right)} d\omega \\ &= \frac{\operatorname{sen}\omega_c\left(n-\dfrac{M-1}{2}\right)}{\pi\left(n-\dfrac{M-1}{2}\right)}, \qquad n \ne \tfrac{M-1}{2} \end{aligned} \tag{10.2.27}$$

Evidentemente, $h_d(n)$ es no causal y tiene duración infinita.

Si multiplicamos $h_d(n)$ por la ventana rectangular dada en (10.2.19), obtenemos un filtro FIR de longitud M cuya respuesta al impulso unidad es

$$h(n) = \frac{\operatorname{sen}\omega_c\left(n-\frac{M-1}{2}\right)}{\pi\left(n-\dfrac{M-1}{2}\right)}, \qquad 0 \le n \le M-1, \quad n \ne \frac{M-1}{2} \tag{10.2.28}$$

Tipo de ventana	Anchura aproximada de la región de transición del lóbulo principal	Pico del lóbulo secundario (dB)
Rectangular	$4\pi/M$	-13
Bartlett	$8\pi/M$	-25
Hanning	$8\pi/M$	-31
Hamming	$8\pi/M$	-41
Blackman	$12\pi/M$	-57

Tabla 10.2. Características en el dominio de la frecuencia de algunas funciones de ventana.

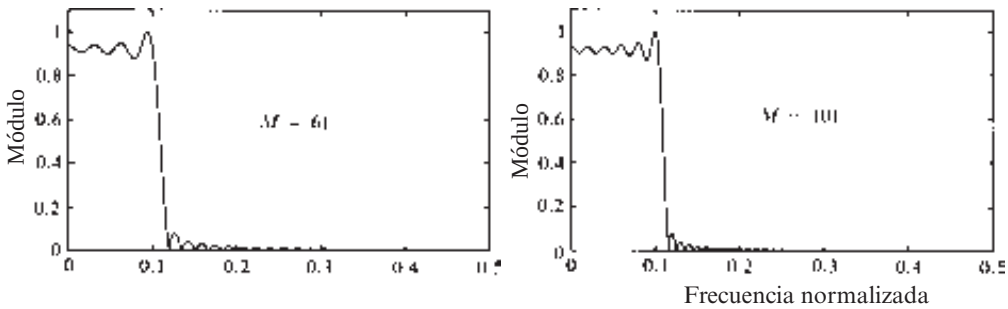


Figura 10.2.7. Filtro paso bajo diseñado con una ventana rectangular. (a) $M = 61$ y (b) $M = 101$.

Si se selecciona M para que sea impar, el valor de $h(n)$ en $n = (M-1)/2$ es

$$h\left(\frac{M-1}{2}\right) = \frac{\omega_c}{\pi} \tag{10.2.29}$$

El módulo de la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ de este filtro se ilustra en la Figura 10.2.7 para $M = 61$ y $M = 101$. Observe que se producen oscilaciones o rizados relativamente grandes en las proximidades del extremo de la banda del filtro. Las oscilaciones aumentan en frecuencia cuando M aumenta, pero no disminuyen en amplitud. Como hemos indicado anteriormente, estas grandes oscilaciones son el resultado directo de la existencia de lóbulos secundarios grandes en la característica de frecuencia $W(\omega)$ de la ventana rectangular. Cuando esta función de ventana se convoluciona con la respuesta en frecuencia deseada $H_d(\omega)$, las oscilaciones que aparecen como grandes lóbulos secundarios de área constante de $W(\omega)$ se desplazan a lo largo de la discontinuidad que existe en $H_d(\omega)$. Puesto que (10.2.17) es básicamente una representación en serie de Fourier de $H_d(\omega)$, la multiplicación de $h_d(n)$ por una ventana rectangular es lo mismo que truncar la representación en serie de Fourier de la característica del filtro deseada $H_d(\omega)$. Sabemos que el truncamiento de la serie de Fourier introduce rizados en la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ debido a la convergencia no uniforme de la serie de Fourier en una discontinuidad. El comportamiento oscilatorio en las proximidades del extremo de la banda del filtro se conoce como *fenómeno de Gibbs*.

Para aliviar la presencia de las oscilaciones grandes en la banda de paso y en la banda eliminada, debemos emplear una función de ventana que contenga un atenuador y disminuya hasta cero gradualmente, en lugar de abruptamente, como ocurre con una ventana rectangular. Las Figuras 10.2.8 hasta 10.2.11 ilustran la respuesta en frecuencia del filtro resultante cuando se emplean algunas de las funciones de ventana enumeradas en la Tabla 10.1 para atenuar $h_d(n)$. Como se ilustra en las Figuras 10.2.8 hasta 10.2.11, las funciones de ventana eliminan

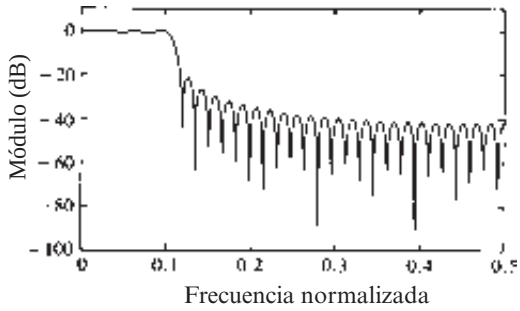


Figura 10.2.8. Filtro FIR paso bajo diseñado con una ventana rectangular ($M = 61$).

los efectos de rizado en el límite de la banda y dan lugar a lóbulos secundarios más pequeños a expensas de un incremento de la anchura de la banda de transición del filtro.

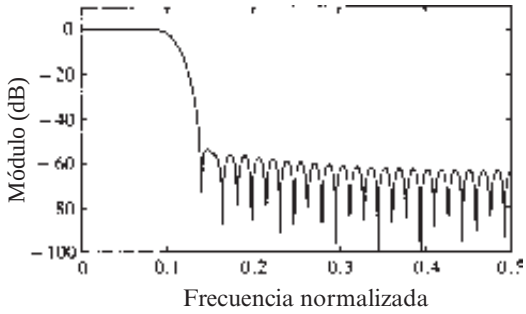


Figura 10.2.9. Filtro FIR paso bajo diseñado con una ventana de Hamming $(M = 61)$.

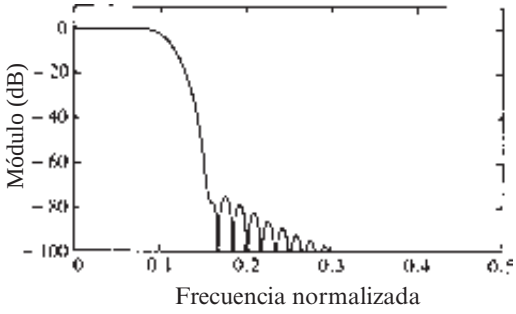


Figura 10.2.10. Filtro FIR paso bajo diseñado con una ventana de Blackman $(M = 61)$.

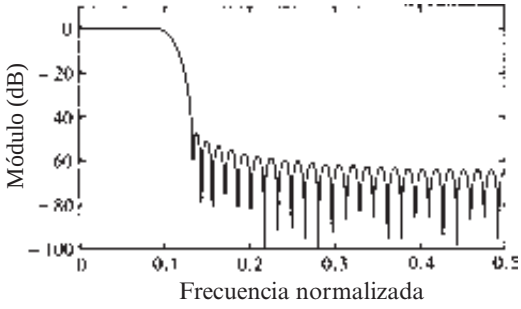


Figura 10.2.11. Filtro FIR paso bajo diseñado con una ventana de Kaiser para $\alpha = 4$, $(M = 61)$.

10.2.3 Diseño de filtros FIR de fase lineal mediante el método basado en el muestreo en frecuencia

En el método basado en el muestreo en frecuencia para el diseño de filtros FIR, especificamos la respuesta en frecuencia deseada $H_d(\omega)$ en un conjunto de frecuencias equiespaciadas, es decir,

$$\begin{aligned} \omega_k = \tfrac{2\pi}{M}(k+\alpha), \qquad & k = 0,1,\ldots,\frac{M-1}{2}, \quad M \text{ impar} \\ & k = 0,1,\ldots,\frac{M}{2}-1, \quad M \text{ par} \\ & \alpha = 0 \quad \text{o} \quad \tfrac{1}{2} \end{aligned} \tag{10.2.30}$$

y resolvemos para obtener la respuesta al impulso unidad $h(n)$ del filtro FIR a partir de esta especificación en frecuencia. Para reducir los lóbulos secundarios, es deseable optimizar la especificación en frecuencia en la banda de transición del filtro. Esta optimización puede llevarse a cabo numéricamente utilizando una computadora digital y aplicando técnicas de programación lineal, como puede verse en Rabiner *et al.* (1970).

En esta sección aplicamos la propiedad de simetría básica de la respuesta en frecuencia muestreada para simplificar los cálculos. La respuesta en frecuencia deseada del filtro es [para simplificar, hemos eliminado el subíndice en $H_d(\omega)$],

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n)e^{-j\omega n} \tag{10.2.31}$$

Suponga que especificamos la respuesta en frecuencia del filtro en las frecuencias dadas por (10.2.30). Luego a partir de (10.2.31), obtenemos

$$\begin{aligned} H(k+\alpha) \equiv \quad & H\left(\frac{2\pi}{M}(k+\alpha)\right) \\ H(k+\alpha) \equiv \quad & \sum_{n=0}^{M-1} h(n)e^{-j2\pi(k+\alpha)n/M}, \qquad k = 0,1,\ldots,M-1 \end{aligned} \tag{10.2.32}$$

Es una manera sencilla de invertir (10.2.32) y expresar $h(n)$ en función de $H(k+\alpha)$. Si mutliplicamos ambos lados de la Ecuación (10.2.32) por la exponencial $\exp(j2\pi km/M)$, $m = 0, 1, \ldots, M-1$, y sumamos para $k = 0, 1, \ldots, M-1$, el lado derecho de dicha ecuación se reduce a $Mh(m)\exp(-j2\pi\alpha m/M)$. Luego obtenemos

$$h(n) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} H(k+\alpha)e^{j2\pi(k+\alpha)n/M}, \qquad n = 0,1,\ldots,M-1 \tag{10.2.33}$$

La relación dada por (10.2.33) nos permite calcular los valores de la respuesta al impulso unidad $h(n)$ a partir de la especificación de las muestras en frecuencia $H(k+\alpha)$, $k = 0, 1, \ldots, M-1$. Observe que cuando $\alpha = 0$, (10.2.32) se reduce a la transformada discreta de Fourier (DFT) de la secuencia $\{h(n)\}$ y la Ecuación (10.2.33) es la DFT inversa (IDFT).

Puesto que $\{h(n)\}$ es real, podemos demostrar fácilmente que las muestras en frecuencia $\{H(k+\alpha)\}$ satisfacen la condición de simetría

$$H(k+\alpha) = H^*(M-k-\alpha) \tag{10.2.34}$$

Esta condición de simetría, junto con las condiciones de simetría para $\{h(n)\}$, pueden emplearse para reducir las especificaciones de frecuencia de M puntos a $(M+1)/2$ puntos para M impar y a $M/2$ puntos para M par. Por tanto, las ecuaciones lineales para determinar $\{h(n)\}$ a partir de $\{H(k+\alpha)\}$ se simplifican de forma considerable.

En particular, si (10.2.11) se muestrea en las frecuencias $\omega_k = 2\pi(k+\alpha)/M$, $k = 0, 1, \ldots, M-1$, obtenemos

$$H(k+\alpha) = H_r\left(\frac{2\pi}{M}(k+\alpha)\right)e^{j[\beta\pi/2 - 2\pi(k+\alpha)(M-1)/2M]} \tag{10.2.35}$$

donde $\beta = 0$ cuando $\{h(n)\}$ es simétrica y $\beta = 1$ cuando $\{h(n)\}$ es antisimétrica. Podemos hacer una simplificación definiendo un conjunto de muestras en las frecuencia reales $\{G(k+x)\}$

$$G(k+\alpha) = (-1)^k H_r\left(\frac{2\pi}{M}(k+\alpha)\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, M-1 \tag{10.2.36}$$

Sustituimos (10.2.36) en (10.2.35) para eliminar $H_r(\omega_k)$ y así obtenemos

$$H(k+\alpha) = G(k+\alpha)e^{j\pi k}e^{j[\beta\pi/2 - 2\pi(k+\alpha)(M-1)/2M]} \tag{10.2.37}$$

Ahora la condición de simetría para $H(k+\alpha)$ dada por (10.2.34) se traduce en la correspondiente condición de simetría para $G(k+\alpha)$, la cual se puede aplicar sustituyendo en (10.2.33), con el fin de simplificar las expresiones para la respuesta al impulso del filtro FIR $\{h(n)\}$ para los cuatros casos: $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$ y $\beta = 1$. Los resultados se resumen en la Tabla 10.3. Las demostraciones detalladas se dejan como ejercicio para el lector.

Aunque el método basado en el muestreo en frecuencia nos proporciona otro medio para diseñar filtros FIR de fase lineal, su principal ventaja está ligada a la eficiente estructura del muestreo en frecuencia, la cual se obtiene cuando la mayoría de las muestras en frecuencia son cero, como se demuestra en la Sección 9.2.3.

Los siguientes ejemplos ilustran el diseño de filtros FIR de fase lineal basado en el método de muestreo en frecuencia. Los valores óptimos para las muestras en la banda de transición se obtienen a partir de la tablas del Apéndice B, las cuales se han extraido de los estudios de Rabiner *et al.* (1970).

EJEMPLO 10.2.1

Determine los coeficientes de un filtro FIR de fase lineal de longitud $M = 15$ que tiene una respuesta al impulso unidad simétrica y una respuesta en frecuencia que satisface las siguientes condiciones

$$H_r\left(\frac{2\pi k}{15}\right) = \begin{cases} 1, & k = 0,1,2,3 \\ 0.4, & k = 4 \\ 0, & k = 5,6,7 \end{cases}$$

Solución. Puesto que $h(n)$ es simétrica y las frecuencias se seleccionan para que se correspondan con el caso de $\alpha = 0$, utilizamos la fórmula correspondiente de la Tabla 10.3 para evaluar $h(n)$. En este caso,

$$G(k) = (-1)^k H_r\left(\frac{2\pi k}{15}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, 7$$

El resultado de este cálculo es

$$\begin{aligned}
h(0) = h(14) &= -0.014112893 \\
h(1) = h(13) &= -0.001945309 \\
h(2) = h(12) &= 0.04000004 \\
h(3) = h(11) &= 0.01223454 \\
h(4) = h(10) &= -0.09138802 \\
h(5) = h(9) &= -0.01808986 \\
h(6) = h(8) &= 0.3133176 \\
h(7) &= 0.52
\end{aligned}$$

La respuesta en frecuencia de este filtro se muestra en la Figura 10.2.12. Debemos resaltar que $H_r(\omega)$ es exactamente igual a los valores proporcionados por las especificaciones anteriores en $\omega_k = 2\pi k/15$.

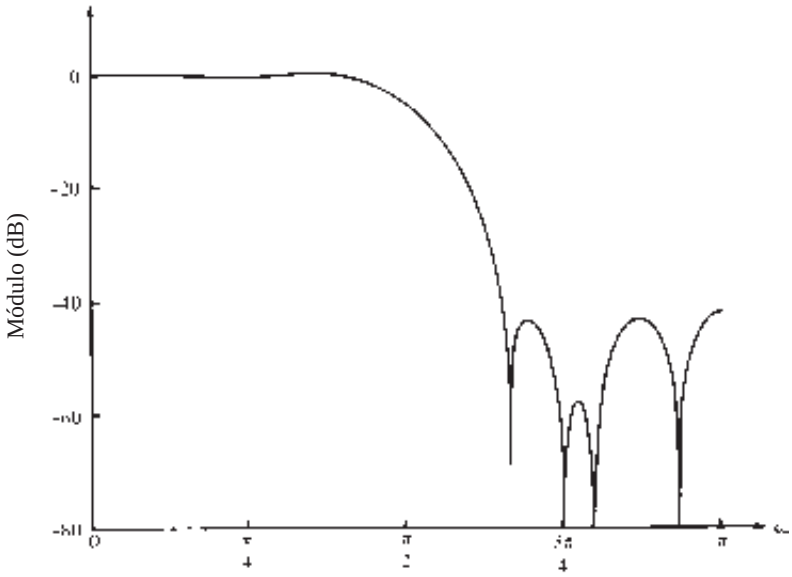


Figura 10.2.12. Respuesta en frecuencia del filtro FIR de fase lineal del Ejemplo 10.2.1.

EJEMPLO 10.2.2

Determine los coeficientes de un filtro FIR de fase lineal de longitud $M = 32$ que tiene una respuesta al impulso simétrica y una respuesta en frecuencia que satisface la siguiente condición

$$H_r\left(\frac{2\pi(k+\alpha)}{32}\right) = \begin{cases} 1, & k = 0,1,2,3,4,5 \\ T_1, & k = 6 \\ 0, & k = 7,8,\ldots,15 \end{cases}$$

donde $T_1 = 0.3789795$ para $\alpha = 0$ y $T_1 = 0.3570496$ para $\alpha = \frac{1}{2}$. Estos valores de T_1 se han obtenido a partir de la tablas que especifican los parámetros óptimos de transición incluidas en el Apéndice B.

Solución. Las ecuaciones adecuadas para este cálculo se proporcionan en la Tabla 10.3 para $\alpha = 0$ y $\alpha = \frac{1}{2}$. Estos cálculos proporcionan las respuestas al impulso unidad mostradas en la Tabla 10.4. Las respuestas en frecuencia correspondientes se ilustran en las Figuras 10.2.13 y 10.2.14, respectivamente. Observe que el ancho de banda del filtro para $\alpha = \frac{1}{2}$ es mayor que para $\alpha = 0$.

La optimización de las muestras en la región de transición de la respuesta en frecuencia puede explicarse calculando la función del sistema $H(z)$, dada por (9.2.12), sobre la circunferencia unidad y empleando la relación dada en (10.2.37) para expresar $H(\omega)$ en función de $G(k+\alpha)$. Así, para el filtro simétrico, obtenemos,

$$H(\omega) = \left\{ \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\omega M}{2} - \pi\alpha\right)}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{G(k+\alpha)}{\operatorname{sen}\left[\dfrac{\omega}{2} - \dfrac{\pi}{M}(k+\alpha)\right]} \right\} e^{-j\omega(M-1)/2} \tag{10.2.38}$$

	Simétrica
	$H(k) = G(k)e^{j\pi k/M}, \qquad k = 0, 1. \ldots, M-1$
	$G(k) = (-1)^k H_r\left(\dfrac{2\pi k}{M}\right), \qquad G(k) = -G(M-k)$
$\alpha = 0$	$h(n) = \dfrac{1}{M}\left\{G(0) + 2\sum_{k=1}^{U} G(k)\cos\dfrac{2\pi k}{M}(n+\dfrac{1}{2})\right\}$
	$U = \begin{cases} \frac{M-1}{2}, & M \text{ impar} \\ \frac{M}{2}-1, & M \text{ par} \end{cases}$
	$H\left(k+\dfrac{1}{2}\right) = G\left(k+\dfrac{1}{2}\right)e^{-j\pi/2}e^{j\pi(2k+1)/2M}$
$\alpha = \frac{1}{2}$	$G\left(k+\frac{1}{2}\right) = (-1)^k H_r\left[\dfrac{2\pi}{M}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]$
	$G\left(k+\dfrac{1}{2}\right) = G\left(M-k-\dfrac{1}{2}\right)$
	$h(n) = \frac{2}{M}\sum_{k=0}^{U} G\left(k+\frac{1}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{2\pi}{M}\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$
	Antisimétrica
	$H(k) = G(k)e^{j\pi/2}e^{j\pi k/M}, \qquad k = 0, 1, \ldots, M-1$
$\alpha = 0$	$G(k) = (-1)^k H_r\left(\dfrac{2\pi k}{M}\right), \qquad G(k) = G(M-k)$
	$h(n) = -\dfrac{2}{M}\sum_{k=1}^{(M-1)/2} G(k)\operatorname{sen}\dfrac{2\pi k}{M}\left(n+\dfrac{1}{2}\right), \qquad M \text{ impar}$
	$h(n) = \frac{1}{M}\left\{(-1)^{n+1}G(M/2) - 2\sum_{k=1}^{(M/2)-1} G(k)\operatorname{sen}\frac{2\pi}{M}k\left(n+\frac{1}{2}\right)\right\}, \quad M \text{ par}$
$\alpha = \dfrac{1}{2}$	$H\left(k+\dfrac{1}{2}\right) = G\left(k+\frac{1}{2}\right)e^{j\pi(2k+1)/2M}$
	$G\left(k+\dfrac{1}{2}\right) = (-1)^k H_r\left[\frac{2\pi}{M}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]$
	$G\left(k+\dfrac{1}{2}\right) = -G\left(M-k-\frac{1}{2}\right); \qquad G(M/2) = 0 \text{ para } M \text{ impar}$
	$h(n) = \dfrac{2}{M}\sum_{k=0}^{V} G\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\cos\dfrac{2\pi}{M}\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$
	$V = \begin{cases} \frac{M-3}{2}, & M \text{ impar} \\ \frac{M}{2}-1, & M \text{ par} \end{cases}$

Tabla 10.3. Respuesta al impulso unidad: $h(n) = \pm h(M-1-n)$

donde

$$G(k+\alpha) = \begin{cases} -G(M-k), & \alpha = 0 \\ G(M-k-\frac{1}{2}), & \alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{10.2.39}$$

M = 32	M = 32
ALPHA = 0.	ALPHA = 0.5
T1 = 0.3789795E+00	T1 = 0.3570496E+00
h(0) = −0.7141978E-02	h(0) = −0.4089120E-02
h(1) = −0.3070801E-02	h(1) = −0.9973779E-02
h(2) = 0.5891327E-02	h(2) = −0.7379891E-02
h(3) = 0.1349923E-01	h(3) = 0.5949799E-02
h(4) = 0.8087033E-02	h(4) = 0.1727056E-01
h(5) = −0.1107258E-01	h(5) = 0.7878412E-02
h(6) = −0.2420687E-01	h(6) = −0.1798590E-01
h(7) = −0.9446550E-02	h(7) = −0.2670584E-01
h(8) = 0.2544464E-01	h(8) = 0.3778549E-02
h(9) = 0.3985050E-01	h(9) = 0.4191022E-01
h(10) = 0.2753036E-02	h(10) = 0.2839344E-01
h(11) = −0.5913959E-01	h(11) = −0.4163144E-01
h(12) = −0.6841660E-01	h(12) = −0.8254962E-01
h(13) = 0.3175741E-01	h(13) = 0.2802212E-02
h(14) = 0.2080981E+00	h(14) = 0.2013655E+00
h(15) = 0.3471138E+00	h(15) = 0.3717532E+00

Tabla 10.4.

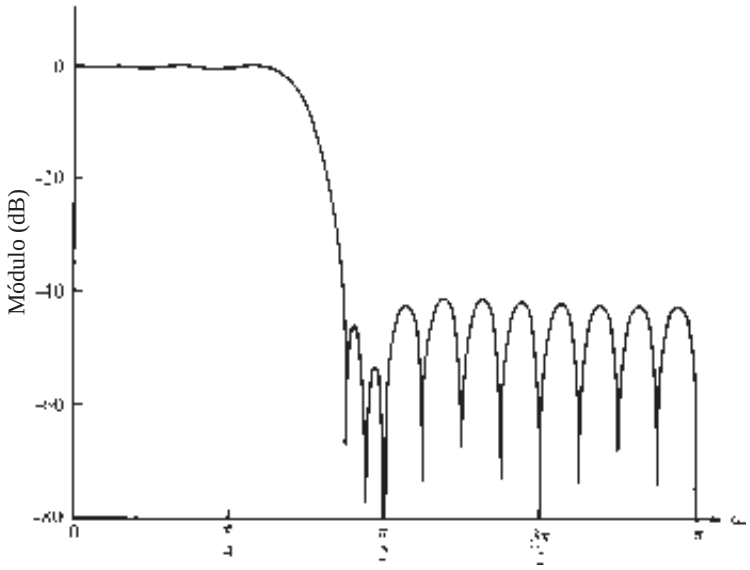


Figura 10.2.13. Respuesta en frecuencia del filtro FIR de fase lineal del Ejemplo 10.2.2 ($M = 32$ y $\alpha = 0$).

Del mismo modo, para el filtro FIR de fase lineal antisimétrico, obtenemos

$$H(\omega) = \left\{ \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\omega M}{2} - \pi\alpha\right)}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{G(k+\alpha)}{\operatorname{sen}\left[\dfrac{\omega}{2} - \dfrac{\pi}{M}(k+\alpha)\right]} \right\} e^{-j\omega(M-1)/2} e^{j\pi/2} \tag{10.2.40}$$

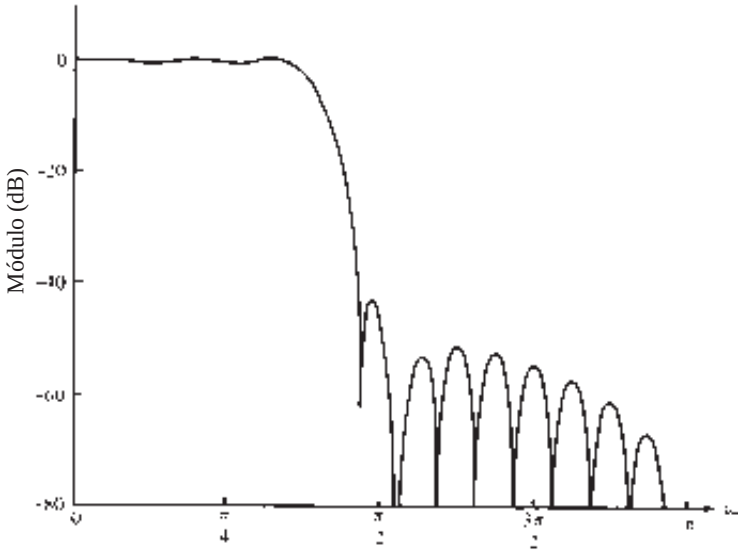


Figura 10.2.14. Respuesta en frecuencia del filtro FIR de fase lineal del Ejemplo 10.2.2 ($M = 32$ y $\alpha = \frac{1}{2}$).

donde

$$G(k+\alpha) = \begin{cases} G(M-k), & \alpha = 0 \\ -G\left(M-k-\frac{1}{2}\right), & \alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{10.2.41}$$

Con estas expresiones para la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ en función de las muestras en frecuencias deseadas $\{G(k+\alpha)\}$, podemos explicar fácilmente el método de selección de los parámetros $\{G(k+\alpha)\}$ en la banda de transición que resultan de minimizar el pico del lóbulo secundario en la banda eliminada. En resumen, los valores de $G(k+\alpha)$ en la banda de paso se fijan en $(-1)^k$ y en la banda eliminada se fijan en cero. Para cualquier elección de $G(k+\alpha)$ en la banda de transición, el valor de $H(\omega)$ se calcula en un conjunto denso de frecuencias (en $\omega_n = 2\pi n/K$, $n = 0, 1, \ldots, K-1$, donde, por ejemplo, $K = 10M$). Se determina el valor del lóbulo secundario máximo y los valores de los parámetros $\{G(k+\alpha)\}$ en la banda de transición se modifican en la dirección de máximo descenso, lo que efectivamente reduce el lóbulo secundario máximo. A continuación se repite el cálculo de $H(\omega)$ con la nueva elección de $\{G(k+\alpha)\}$. De nuevo se determina el máximo lóbulo secundario de $H(\omega)$ y los valores de los parámetros $\{G(k+\alpha)\}$ en la banda de transición en la dirección de máximo descenso, lo que a su vez reduce el lóbulo secundario. Este proceso iterativo se realiza hasta que converge a la elección óptima de los parámetros $\{G(k+\alpha)\}$ en la banda de transición.

Existe un potencial problema en la realización basada en el muestreo en frecuencia de los filtros FIR de fase lineal. Esta realización del filtro FIR introduce polos y ceros en puntos equiespaciados sobre la circunferencia unidad. En el caso ideal, los ceros cancelan a los polos y, en consecuencia, los ceros reales de $H(z)$ quedan determinados por la selección de las muestras en frecuencia $\{H(k+\alpha)\}$. Sin embargo, en una implementación práctica de la realización basada en el muestreo de frecuencia, los efectos de cuantificación impiden una cancelación perfecta de los polos y los ceros. De hecho, la localización de los polos sobre la circunferencia unidad no proporciona un amortiguamiento del ruido debido al redondeo de los cálculos. Como resultado, el ruido tiende a aumentar con el tiempo pudiendo finalmente destruir el funcionamiento normal del filtro.

Para mitigar este problema, podemos desplazar los polos y los ceros desde la circunferencia unidad a una circunferencia interior a la circunferencia unidad, por ejemplo de radio $r = 1-\varepsilon$, donde ε es un valor muy pequeño. Así, la función de sistema del filtro FIR de fase lineal se convierte en

$$H(z) = \frac{1 - r^M z^{-M} e^{j2\pi\alpha}}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{H(k+\alpha)}{1 - re^{j2\omega\pi(k+\alpha)/M} z^{-1}} \tag{10.2.42}$$

La correspondiente realización del filtro de dos polos vista en la Sección 9.2.3 puede modificarse de acuerdo con esto. El amortiguamiento que proprociona la selección de un radio $r < 1$ garantiza la limitación del ruido de redondeo evitándose así la inestabilidad.

10.2.4 Diseño de filtros FIR de fase lineal con rizado constante óptimo

El método de aplicar una ventana y el método basado en el muestreo en frecuencia son técnicas relativamente simples de diseño de filtros FIR. Sin embargo, también presentan algunas desventajas menores, descritas en la Sección 10.2.6, que pueden ser indeseables en algunas aplicaciones. Un problema importante es la falta de un control preciso sobre frecuencias críticas tales como ω_p y ω_s.

El método de diseño de filtros descrito en esta sección se formula como problema de la aproximación de Chebyshev. Esto puede verse como un criterio de diseño óptimo en el sentido de que el error de la aproximación ponderado entre la respuesta en frecuencia deseada y la respuesta en frecuencia real se dispersa a lo largo de la banda de paso e igualmente a lo largo de la banda eliminada del filtro, minimizando de este modo el error máximo. El filtro resultante diseñado presenta rizados tanto en la banda de paso como en la banda eliminada.

Para describir el procedimiento de diseño, consideremos el diseño de un filtro paso bajo con una frecuencia de corte en la banda de paso ω_p y una frecuencia de corte en la banda eliminada ω_s. A partir de la especificación general dada en la Figura 10.1.2 podemos ver que en la banda de paso, la respuesta en frecuencia del filtro satisface la condición

$$1 - \delta_1 \le H_r(\omega) \le 1 + \delta_1, \qquad |\omega| \le \omega_p \tag{10.2.43}$$

Del mismo modo, en la banda eliminada, la respuesta en frecuencia del filtro está especificada para caer entre los límites $\pm\delta_2$, es decir,

$$-\delta_2 \le H_r(\omega) \le \delta_2, \qquad |\omega| > \omega_s \tag{10.2.44}$$

Por tanto, δ_1 representa el rizado de la banda de paso y δ_2 representa la atenuación o el rizado en la banda eliminada. El otro parámetro del filtro es M, su longitud o número de coeficientes.

Vamos a centrarnos en los cuatro casos distintos de un filtro FIR de fase lineal. Estos casos se abordan en la Sección 10.2.2 y que se resumen a continuación.

Caso 1: respuesta al impulso unidad simétrica: $h(n) = h(M-1-n)$ y M impar. En este caso, la respuesta en frecuencia real $H_r(\omega)$ es

$$H_r(\omega) = h\left(\frac{M-1}{2}\right) + 2\sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n)\cos\omega\left(\frac{M-1}{2} - n\right) \tag{10.2.45}$$

Si hacemos $k = (M-1)/2 - n$ y definimos un nuevo conjunto de parámetros del filtro $\{a(k)\}$ como

$$a(k) = \begin{cases} h\left(\dfrac{M-1}{2}\right), & k = 0 \\ 2h\left(\dfrac{M-1}{2} - k\right), & k = 1, 2, \ldots, \dfrac{M-1}{2} \end{cases} \tag{10.2.46}$$

la Ecuación (10.2.45) se reduce a la forma compacta

$$H_r(\omega) = \sum_{k=0}^{(M-1)/2} a(k)\cos\omega k \tag{10.2.47}$$

Caso 2: respuesta al impulso unidad simétrica: $h(n) = h(M-1-n)$ y M par. En este caso, $H_r(\omega)$ se expresa como

$$H_r(\omega) = 2\sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n)\cos\omega\left(\frac{M-1}{2}-n\right) \tag{10.2.48}$$

De nuevo, cambiamos el índice del sumatorio de n a $k = M/2 - n$ y definimos un nuevo conjunto de parámetros del filtro $\{b(k)\}$ como

$$b(k) = 2h\left(\frac{M}{2}-k\right), \qquad k = 1,2,\ldots,M/2 \tag{10.2.49}$$

Con estas sustituciones, (10.2.48) puede escribirse como sigue

$$H_r(\omega) = \sum_{k=1}^{M/2} b(k)\cos\omega\left(k-\frac{1}{2}\right) \tag{10.2.50}$$

Para llegar a la optimización, es conveniente reordenar (10.2.50) en la forma

$$H_r(\omega) = \cos\frac{\omega}{2}\sum_{k=0}^{(M/2)-1} \tilde{b}(k)\cos\omega k \tag{10.2.51}$$

donde los coeficientes $\{\tilde{b}(k)\}$ están relacionados linealmente con los coeficientes $\{b(k)\}$. De hecho, podemos demostrar que la relación entre ellos es

$$\begin{aligned} \tilde{b}(0) &= \frac{1}{2}b(1) \\ \tilde{b}(k) &= 2b(k) - \tilde{b}(k-1), \qquad k = 1,2,3,\ldots,\frac{M}{2}-2 \\ \tilde{b}\left(\frac{M}{2}-1\right) &= 2b\left(\frac{M}{2}\right) \end{aligned} \tag{10.2.52}$$

Caso 3: respuesta al impulso unidad antisimétrica: $h(n) = -h(M-1-n)$ y M impar. La respuesta en frecuencia real $H_r(\omega)$ en este caso es

$$H_r(\omega) = 2\sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n)\operatorname{sen}\omega\left(\frac{M-1}{2}-n\right) \tag{10.2.53}$$

Si cambiamos el sumatorio en la Ecuación (10.2.53) de n a $k = (M-1)/2 - n$ y definimos un nuevo conjunto de parámetros del filtro $\{c(k)\}$ como

$$c(k) = 2h\left(\frac{M-1}{2}-k\right), \qquad k = 1,2,\ldots,(M-1)/2 \tag{10.2.54}$$

entonces (10.2.53) se transforma en

$$H_r(\omega) = \sum_{k=1}^{(M-1)/2} c(k)\operatorname{sen}\omega k \tag{10.2.55}$$

Como en el caso anterior, es conveniente reordenar (10.2.55) de la forma siguiente

$$H_r(\omega) = \operatorname{sen}\omega\sum_{k=0}^{(M-3)/2} \tilde{c}(k)\cos\omega k \tag{10.2.56}$$

donde los coeficientes $\{\tilde{c}(k)\}$ están relacionados linealmente con los parámetros $\{c(k)\}$. Esta relación puede deducirse a partir de (10.2.55) y (10.2.56) y es simplemente

$$\begin{aligned}
\tilde{c}\left(\frac{M-3}{2}\right) &= c\left(\frac{M-1}{2}\right) \\
\tilde{c}\left(\frac{M-5}{2}\right) &= 2c\left(\frac{M-3}{2}\right) \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \\
\tilde{c}(k-1)-\tilde{c}(k+1) &= 2c(k), \qquad 2 \le k \le \frac{M-5}{2} \\
\tilde{c}(0)+\tfrac{1}{2}\tilde{c}(2) &= c(1)
\end{aligned} \tag{10.2.57}$$

Caso 4: respuesta al impulso unidad antisimétrica: $h(n) = -h(M-1-n)$ y M par. En este caso, la respuesta en frecuencia real $H_r(\omega)$ es

$$H_r(\omega) = 2\sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n)\,\mathrm{sen}\,\omega\left(\frac{M-1}{2}-n\right) \tag{10.2.58}$$

Un cambio en el índice del sumatorio de n a $k = M/2 - n$ combinado con una definición de un nuevo conjunto de coeficientes del filtro $\{d(k)\}$, relacionados con $\{h(n)\}$ según

$$d(k) = 2h\left(\frac{M}{2}-k\right), \qquad k = 1,2,\ldots,\frac{M}{2} \tag{10.2.59}$$

da lugar a la expresión

$$H_r(\omega) = \sum_{k=1}^{M/2} d(k)\,\mathrm{sen}\,\omega\left(k-\frac{1}{2}\right) \tag{10.2.60}$$

Como en los dos casos anteriores, es conveniente reordenar (10.2.60) de la forma siguiente

$$H_r(\omega) = \mathrm{sen}\,\frac{\omega}{2}\sum_{k=0}^{(M/2)-1} \tilde{d}(k)\cos\omega k \tag{10.2.61}$$

donde los nuevos parámetros del filtro $\{\tilde{d}(k)\}$ están relacionados con $\{d(k)\}$ del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
\tilde{d}\left(\frac{M}{2}-1\right) &= 2d\left(\frac{M}{2}\right) \\
\tilde{d}(k-1)-\tilde{d}(k) &= 2d(k), \qquad 2 \le k \le \frac{M}{2}-1 \\
\tilde{d}(0)-\frac{1}{2}\tilde{d}(1) &= d(1)
\end{aligned} \tag{10.2.62}$$

Las expresiones de $H_r(\omega)$ en estos cuatro casos se resumen en la Tabla 10.5. Fíjese en que las reordenaciones realizadas en los casos 2, 3 y 4 nos han permitido expresar $H_r(\omega)$ como

$$H_r(\omega) = Q(\omega)P(\omega) \tag{10.2.63}$$

Tipo de filtro	$Q(\omega)$	$P(\omega)$
$h(n) = h(M-1-n)$ M impar (Caso 1)	1	$\sum_{k=0}^{(M-1)/2} a(k)\cos\omega k$
$h(n) = h(M-1-n)$ M par (Caso 2)	$\cos\frac{\omega}{2}$	$\sum_{k=0}^{(M/2)-1} \tilde{b}(k)\cos\omega k$
$h(n) = -h(M-1-n)$ M impar (Caso 3)	$\operatorname{sen}\omega$	$\sum_{k=0}^{(M-3)/2} \tilde{c}(k)\cos\omega k$
$h(n) = -h(M-1-n)$ M even (Case 4)	$\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}$	$\sum_{k=0}^{(M/2)-1} \tilde{d}(k)\cos\omega k$

Tabla 10.5. Funciones de respuesta en frecuencia reales para los filtros FIR de fase lineal.

donde

$$Q(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{Caso 1} \\ \cos\dfrac{\omega}{2} & \text{Caso 2} \\ \operatorname{sen}\omega & \text{Caso 3} \\ \operatorname{sen}\dfrac{\omega}{2} & \text{Caso 4} \end{cases} \tag{10.2.64}$$

y $P(\omega)$ tiene la forma común

$$P(\omega) = \sum_{k=0}^{L} \alpha(k)\cos\omega k \tag{10.2.65}$$

representando $\{\alpha(k)\}$ los parámetros del filtro, los cuales están linealmente relacionados con la respuesta al impulso unidad $h(n)$ del filtro FIR. El límite superior L del sumatorio es $L = (M-1)/2$ para el caso 1, $L = (M-3)/2$ para el caso 3 y $L = M/2 - 1$ para los casos 2 y 4.

Además del marco de trabajo común especificado para la representación de $H_r(\omega)$, también definimos la respuesta en frecuencia real deseada $H_{\text{dr}}(\omega)$ y la función de ponderación $W(\omega)$ para el error de la aproximación. La respuesta en frecuencia real deseada $H_{\text{dr}}(\omega)$ se define simplemente como igual a la unidad en la banda de paso y cero en la banda eliminada. Por ejemplo, la Figura 10.2.15 ilustra varios tipos diferentes de la característica de $H_{\text{dr}}(\omega)$. La función de ponderación para el error de aproximación nos permite seleccionar el tamaño relativo de los errores en las diferentes bandas de frecuencia (es decir, en la banda de paso y en la banda eliminada). En particular, es conveniente normalizar $W(\omega)$ para que sea igual a la unidad en la banda eliminada y $W(\omega) = \delta_2/\delta_1$ en la banda de paso, es decir,

$$W(\omega) = \begin{cases} \delta_2/\delta_1, & \omega \text{ en la banda de paso} \\ 1, & \omega \text{ en la banda eliminada} \end{cases} \tag{10.2.66}$$

Así, simplemente seleccionamos $W(\omega)$ en la banda de paso para resaltar nuestro interés en el tamaño relativo del rizado en la banda eliminada respecto del rizado en la banda de paso.

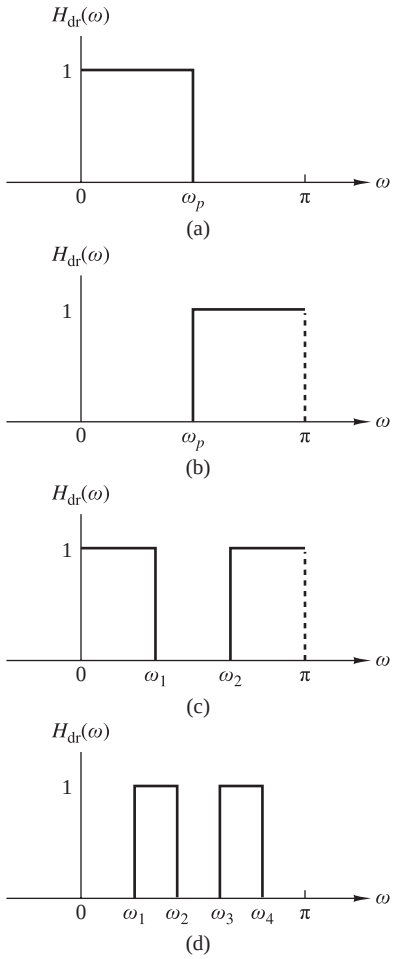


Figura 10.2.15. Respuestas en frecuencia deseadas para los diferentes tipos de filtros.

Con la especificación de $H_{dr}(\omega)$ y $W(\omega)$, ahora podemos definir el error de aproximación ponderado como

$$\begin{aligned} E(\omega) &= W(\omega)[H_{dr}(\omega) - H_r(\omega)] \\ &= W(\omega)[H_{dr}(\omega) - Q(\omega)P(\omega)] \\ &= W(\omega)Q(\omega)\left[\frac{H_{dr}(\omega)}{Q(\omega)} - P(\omega)\right] \end{aligned} \tag{10.2.67}$$

Por conveniencia matemática, definimos una función de ponderación modificada $\hat{W}(\omega)$ y una respuesta en frecuencia modificada $\hat{H}_{dr}(\omega)$ como

$$\begin{aligned} \hat{W}(\omega) &= W(\omega)Q(\omega) \\ \hat{H}_{dr}(\omega) &= \frac{H_{dr}(\omega)}{Q(\omega)} \end{aligned} \tag{10.2.68}$$

Luego el error de aproximación ponderado se expresa como

$$E(\omega) = \hat{W}(\omega)[\hat{H}_{dr}(\omega) - P(\omega)] \tag{10.2.69}$$

para los cuatro tipos diferentes de filtros FIR de fase lineal.

Dada la función de error $E(\omega)$, el problema de la aproximación de Chebyshev consiste básicamente en determinar los parámetros del filtro $\{\alpha(k)\}$ que minimizan el valor absoluto máximo de $E(\omega)$ en las bandas de frecuencia en las que se realiza la aproximación. En términos matemáticos, buscamos la solución del problema

$$\min_{\text{de } \{\alpha(k)\}} \left[\max_{\omega \varepsilon S} |E(\omega)| \right] = \min_{\text{de } \{a(k)\}} \left[\max_{\omega \varepsilon S} |\hat{W}(\omega)[\hat{H}_{\text{dr}}(\omega) - \sum_{k=0}^{L} \alpha(k) \cos \omega k]| \right] \tag{10.2.70}$$

donde S representa el conjunto (unión disjunta) de bandas de frecuencia sobre las que se va a realizar la optimización. Básicamente, el conjunto S consta de las bandas de paso y eliminadas del filtro deseado.

La solución a este problema se debe a Parks y McClellan (1972a), quienes aplicaron un teorema a la teoría de la aproximación de Chebyshev, denominado *teorema de alternancia*, el cual enunciamos a continuación, aunque no lo vamos a demostrar.

Teorema de alternancia. Sea S un subconjunto compacto del intervalo $[0, \pi)$. Una condición necesaria y suficiente para que

$$P(\omega) = \sum_{k=0}^{L} \alpha(k) \cos \omega k$$

sea la mejor y única aproximación de Chebyshev ponderada a $\hat{H}_{\text{dr}}(\omega)$ en S, es que la función de error $E(\omega)$ presente al menos $L+2$ frecuencias extremas en S. Es decir, deben existir al menos $L+2$ frecuencias $\{\omega_i\}$ en S tal que $\omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_{L+2}$, $E(\omega_i) = -E(\omega_{i+1})$, y

$$|E(\omega_i)| = \max_{\omega \varepsilon S} |E(\omega)|, \qquad i = 1, 2, \ldots, L+2$$

Fíjese en que la función de error $E(\omega)$ alterna en signo entre dos frecuencias extremas sucesivas. De aquí, que este teroema se conozca como teorema de alternancia.

Con el fin de explicar más en detalle el teorema de alternancia, consideremos el diseño de un filtro paso bajo con la banda de paso $0 \leq \omega \leq \omega_p$ y la banda eliminada $\omega_s \leq \omega \leq \pi$. Dado que la respuesta en frecuencia deseada $H_{\text{dr}}(\omega)$ y la función de ponderación $W(\omega)$ son constantes, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dE(\omega)}{d\omega} &= \frac{d}{d\omega}\{W(\omega)[H_{\text{dr}}(\omega) - H_r(\omega)]\} \\ &= -\frac{dH_r(\omega)}{d\omega} = 0 \end{aligned}$$

En consecuencia, las frecuencias $\{\omega_i\}$ correspondientes a los picos de $E(\omega)$ también corresponden a los picos en los que $H_r(\omega)$ cumple la tolerancia de error. Dado que $H_r(\omega)$ es un polinomio trigonométrico de grado L, para el caso 1, por ejemplo,

$$\begin{aligned} H_r(\omega) &= \sum_{k=0}^{L} \alpha(k) \cos \omega k \\ &= \sum_{k=0}^{L} \alpha(k) \left[\sum_{n=0}^{k} \beta_{nk} (\cos \omega)^n \right] \\ &= \sum_{k=0}^{L} \alpha'(k) (\cos \omega)^k \end{aligned} \tag{10.2.71}$$

se deduce que $H_r(\omega)$ puede tener como máximo $L-1$ máximos y mínimos locales en el intervalo abierto $0 < \omega < \pi$. Además, normalmente $\omega = 0$ y $\omega = \pi$ son extremos de $H_r(\omega)$ y también de $E(\omega)$. Por tanto, $H_r(\omega)$

tiene como máximo $L+1$ frecuencias extremas. Además, las frecuencias de corte de la banda ω_p y ω_s son también los extremos de $E(\omega)$, ya que $|E(\omega)|$ es máxima en $\omega=\omega_p$ y $\omega=\omega_s$. En consecuencia, existen como máximo $L+3$ frecuencias extremas en $E(\omega)$ para la mejor y unívoca aproximación del filtro paso bajo ideal. Por otro lado, el teorema de alternancia establece que existen al menos $L+2$ frecuencias extremas en $E(\omega)$. Luego la función de error para el filtro paso bajo tiene $L+3$ o $L+2$ frecuencias extremas. En general, los diseños de filtros que contienen más de $L+2$ alternancias o rizados se denominan *filtros con rizados adicionales*. Cuando el diseño del filtro contiene el número máximo de alternancias, se conoce como *filtro de rizado máximo*.

El teorema de alternancia garantiza una solución única para el problema de la optimización de Chebyshev dada en (10.2.70). En las frecuencias extremas deseadas $\{\omega_n\}$, tenemos el conjunto de ecuaciones

$$\hat{W}(\omega_n)[\hat{H}_{\mathrm{dr}}(\omega_n)-P(\omega_n)]=(-1)^n\delta, \qquad n=0,1,\ldots,L+1 \tag{10.2.72}$$

donde δ representa el valor máximo de la función de error $E(\omega)$. De hecho, si seleccionamos $W(\omega)$, como se indica en (10.2.66), se obtiene que $\delta=\delta_2$.

El conjunto de ecuaciones lineales dadas en (10.2.72) pueden reordenarse como sigue

$$P(\omega_n)+\frac{(-1)^n\delta}{\hat{W}(\omega_n)}=\hat{H}_{\mathrm{dr}}(\omega_n), \qquad n=0,1,\ldots,L+1$$

o, lo que es equivalente, de la forma

$$\sum_{k=0}^{L}\alpha(k)\cos\omega_n k+\frac{(-1)^n\delta}{\hat{W}(\omega_n)}=\hat{H}_{\mathrm{dr}}(\omega_n), \qquad n=0,1,\ldots,L+1 \tag{10.2.73}$$

Si tratamos los $\{a(k)\}$ y δ como los parámetros que se van a determinar, (10.2.73) puede expresarse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos\omega_0 & \cos 2\omega_0 & \cdots & \cos L\omega_0 & \dfrac{1}{\hat{W}(\omega_0)} \\ 1 & \cos\omega_1 & \cos 2\omega_1 & \cdots & \cos L\omega_1 & \dfrac{-1}{\hat{W}(\omega_1)} \\ & \vdots & & & & \\ & \vdots & & & & \\ 1 & \cos\omega_{L+1} & \cos 2\omega_{L+1} & \cdots & \cos L\omega_{L+1} & \dfrac{(-1)^{L+1}}{\hat{W}(\omega_{L+1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(0) \\ \alpha(1) \\ \vdots \\ \alpha(L) \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{H}_{\mathrm{dr}}(\omega_0) \\ \hat{H}_{\mathrm{dr}}(\omega_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{H}_{\mathrm{dr}}(\omega_{L+1}) \end{bmatrix} \tag{10.2.74}$$

Inicialmente, no conocemos ni el conjunto de frecuencias extremas $\{\omega_n\}$ ni los parámetros $\{\alpha(k)\}$ y δ. Para obtener los parámetros, utilizamos un algoritmo iterativo, denominado *algoritmo de intercambio de Remez* [*véase* Rabiner *et al.* (1975)], en el que se comienza proponiendo un conjunto de frecuencias extremas, se determinan $P(\omega)$ y δ, y luego se calcula la función de error $E(\omega)$. A partir de $E(\omega)$, determinamos otro conjunto de $L+2$ frecuencias extremas y repetimos el proceso de forma iterativa hasta que converja al conjunto óptimo de frecuencias extremas. Aunque la ecuación matricial dada por (10.2.74) puede emplearse en el procdimiento iterativo, la inversión de matrices es un proceso que consume tiempo y es ineficiente.

Un procedimiento más eficiente, sugerido por Rabiner *et al.* (1975), consiste en calcular δ analíticamente, de acuerdo con la fórmula

$$\delta=\frac{\gamma_0\hat{H}_{\mathrm{dr}}(\omega_0)+\gamma_1\hat{H}_{\mathrm{dr}}(\omega_1)+\cdots+\gamma_{L+1}\hat{H}_{\mathrm{dr}}(\omega_{L+1})}{\dfrac{\gamma_0}{\hat{W}(\omega_0)}-\dfrac{\gamma_1}{\hat{W}(\omega_1)}+\cdots+\dfrac{(-1)^{L+1}\gamma_{L+1}}{\hat{W}(\omega_{L+1})}} \tag{10.2.75}$$

donde

$$\gamma_k = \prod_{\substack{n=0 \\ n\neq k}}^{L+1} \frac{1}{\cos\omega_k - \cos\omega_n} \tag{10.2.76}$$

La expresión para δ dada por (10.2.75) se deduce de forma inmediata de la ecuación matricial (10.2.74). Por tanto, con una elección inicial de las $L+2$ frecuencias extremas, calculamos δ.

Ahora dado que $P(\omega)$ es un polinomio trigonométrico de la forma

$$P(\omega) = \sum_{k=0}^{L} \alpha(k)x^k, \qquad x = \cos\omega$$

y puesto que sabemos que el polinomio en los puntos $x_n \equiv \cos\omega_n$, $n = 0, 1, \ldots, L+1$, toma los valores

$$P(\omega_n) = \hat{H}_{\mathrm{dr}}(\omega_n) - \frac{(-1)^n\delta}{\hat{W}(\omega_n)}, \qquad n = 0, 1, \ldots, L+1 \tag{10.2.77}$$

podemos emplear la fórmula de interpolación de Lagrange para $P(\omega)$. Luego $P(\omega)$ se puede expresar como [*véase* Hamming (1962)]

$$P(\omega) = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{L} P(\omega_k)[\beta_k/(x-x_k)]}{\displaystyle\sum_{k=0}^{L} [\beta_k/(x-x_k)]} \tag{10.2.78}$$

donde $P(\omega_n)$ está dada por (10.2.77), $x = \cos\omega$, $x_k = \cos\omega_k$ y

$$\beta_k = \prod_{\substack{n=0 \\ n\neq k}}^{L} \frac{1}{x_k - x_n} \tag{10.2.79}$$

Teniendo la solución para $P(\omega)$, podemos calcular la función de error $E(\omega)$ a partir de

$$E(\omega) = \hat{W}(\omega)[\hat{H}_{\mathrm{dr}}(\omega) - P(\omega)] \tag{10.2.80}$$

sobre un conjunto denso de puntos de frecuencia. Normalmente, basta con un número de puntos igual a $16M$, donde M es la longitud del filtro. Si $|E(\omega)| \geq \delta$ para algunas frecuencias del conjunto denso, entonces se selecciona un nuevo conjunto de frecuencias correspondientes a los $L+2$ picos más grandes de $|E(\omega)|$ y se repite el procedimiento de cálculo utilizando (10.2.75). Puesto que el nuevo conjunto de $L+2$ frecuencias extremas se selecciona para que corresponda con los picos de la función de error $|E(\omega)|$, el algoritmo fuerza a que δ aumente en cada iteración hasta converger en el límite superior y por tanto llegar a la solución óptima para el problema de la aproximación de Chebyshev. En otras palabras, cuando $|E(\omega)| \leq \delta$ para todas las frecuencias del conjunto denso, la solución óptima se determina en función del polinomio $H(\omega)$. En la Figura 10.2.16 se muestra un diagrama de flujo del algoritmo debido a Remez (1957).

Una vez que se ha obtenido la solución óptima en función de $P(\omega)$, la respuesta al impulso unidad $h(n)$ puede calcularse directamente, sin tener que calcular los parámetros $\{\alpha(k)\}$. En efecto, hemos determinado

$$H_r(\omega) = Q(\omega)P(\omega)$$

que se puede evaluar en $\omega = 2\pi k/M$, $k = 0, 1, \ldots, (M-1)/2$, para M impar o $M/2$ para M par. A continuación, dependiendo del filtro que se esté diseñando, $h(n)$ puede determinarse a partir de la fórmulas dadas en la Tabla 10.3.

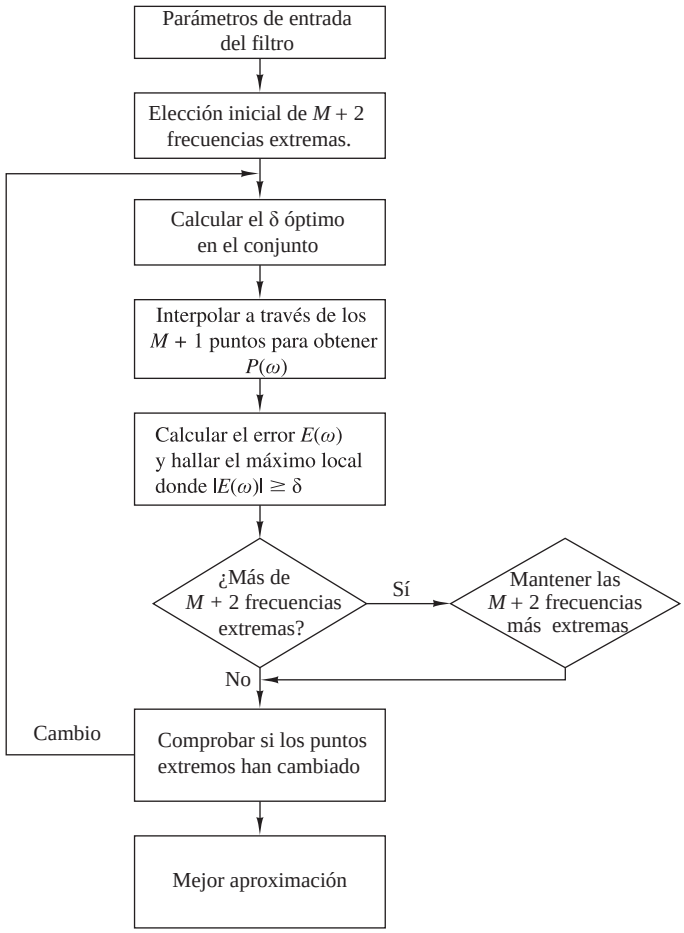


Figura 10.2.16. Diagrama de flujo del algoritmo de Remez.

Hay disponible un programa software escrito por Parks y McClellan (1972b) para diseñar filtros FIR de fase lineal basado en los criterios de la aproximación de Chebyshev e implementado mediante el algoritmo de intercambio de Remez. Este programa puede emplearse para diseñar filtros paso bajo, paso alto o paso banda, diferenciadores y transformadores de Hilbert. Los dos primeros tipos de filtros se describen en las secciones siguientes. Actualmente hay disponible una serie de paquetes software para el diseño de filtros FIR de fase lineal y rizado constante.

El programa de Parks–McClellan requiere una serie de parámetros de entrada que determinen las características del filtro. En particular, deben especificarse los siguientes parámetros:

NFILT: la longitud del filtro, designada anteriormente por M.

JTYPE: el tipo de filtro :
JTYPE = 1 da lugar a un filtro de banda eliminada/paso banda múltiple.
JTYPE = 2 da lugar a un diferenciador.
JTYPE = 3 da lugar a un transformador de Hilbert.

NBANDS: el número de bandas de frecuencia desde 2 (para un filtro paso bajo) a un máximo de 10 (para un filtro de múltiples bandas).

LGRID: la densidad de la cuadrícula para interpolar la función de error $E(\omega)$. El valor predeterminado es 16, si no se especifica.

EDGE: las bandas de frecuencia especificadas por las frecuencias de corte inferior y superior, hasta un máximo de 10 bandas (una matriz de tamaño 20 como máximo). Las frecuencias se proporcionan en función de la variable $f = \omega/2\pi$, donde $f = 0.5$ corresponde a la frecuencia de solapamiento.

FX: una matriz de tamaño máximo 10 que especifique la respuesta en frecuencia deseada $H_{\text{dr}}(\omega)$ en cada banda.

WTX: una matriz de tamaño máximo 10 que especifique la función de ponderación en cada banda.

Los siguientes ejemplos muestran el uso de este programa para diseñar un filtro paso bajo y un filtro paso banda.

EJEMPLO 10.2.3

Diseñe un filtro paso bajo de longitud $M = 61$ con una frecuencia de corte en la banda de paso de $f_p = 0.1$ y una frecuencia de corte de la banda eliminada $f_s = 0.15$.

Solución. El filtro paso bajo es un filtro de dos bandas con frecuencias de corte de la banda de paso $(0, 0.1)$ y frecuencias de corte de la banda eliminada $(0.15, 0.5)$. La respuesta deseada es $(1, 0)$ y la función de ponderación se selecciona arbitrariamente como $(1, 1)$.

$$\begin{aligned}
&61, 1, 2\\
&0.0, 0.1, 0.15, 0.5\\
&1.0, 0.0\\
&1.0, 1.0
\end{aligned}$$

La respuesta al impulso y la respuesta en frecuencia se muestran en la Figura 10.2.17. El filtro resultante tiene una atenuación en la banda eliminada de -56 dB y un rizado en la banda de paso de 0.0135 dB.

Si aumentamos la longitud del filtro a $M = 101$ manteniendo todos los demás parámetros iguales, el filtro resultante tiene la respuesta al impulso y la respuesta en frecuencia mostradas en la Figura 10.2.18. Ahora, la atenuación de la banda eliminada es -85 dB y el rizado de la banda de paso se reduce a 0.00046 dB.

Debemos indicar que es posible incrementar la atenuación en la banda eliminada manteniendo la longitud del filtro fija, por ejemplo con $M = 61$, y disminuyendo la función de ponderación $W(\omega) = \delta_2/\delta_1$ en la banda de paso. Con $M = 61$ y una función de ponderación $(0.1, 1)$, obtenemos un filtro que tiene una atenuación de -65 dB en la banda eliminada y un rizado en la banda de paso de 0.049 dB.

EJEMPLO 10.2.4

Diseñe un filtro paso banda de longitud $M = 32$ con frecuencias de corte de la banda paso $f_{p1} = 0.2$ y $f_{p2} = 0.35$ y frecuencias de corte de la banda eliminada $f_{s1} = 0.1$ y $f_{s2} = 0.425$.

Solución. Este filtro paso banda es un filtro de tres bandas con una banda eliminada definida en el intervalo $(0, 0.1)$, una banda de paso definida en el intervalo $(0.2, 0.35)$ y una segunda banda eliminada definida en $(0.425, 0.5)$. La función de ponderación se selecciona como $(10.0, 1.0, 10.0)$, o como $(1.0, 0.1, 1.0)$ y la respuesta deseada en las tres bandas es $(0.0, 1.0, 0.0)$. Por tanto, los parámetros de entrada al programa son

$$\begin{aligned}
&32, 1, 3\\
&0.0, 0.1, 0.2, 0.35, 0.425, 0.5\\
&0.0, 1.0, 0.0\\
&10.0, 1.0, 10.0
\end{aligned}$$

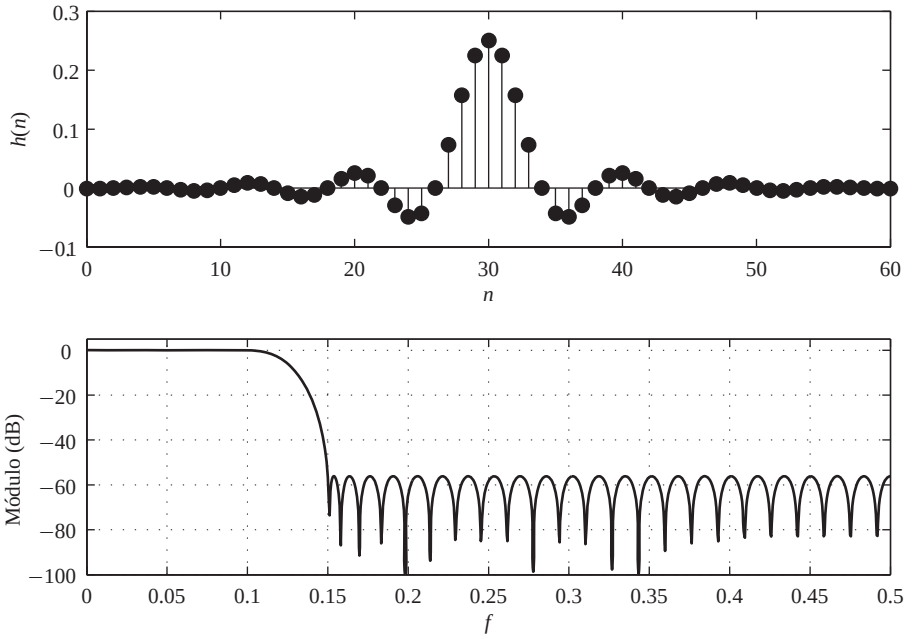


Figura 10.2.17. Respuestas al impulso y en frecuencia del filtro FIR de longitud $M = 61$ del Ejemplo 10.2.3.

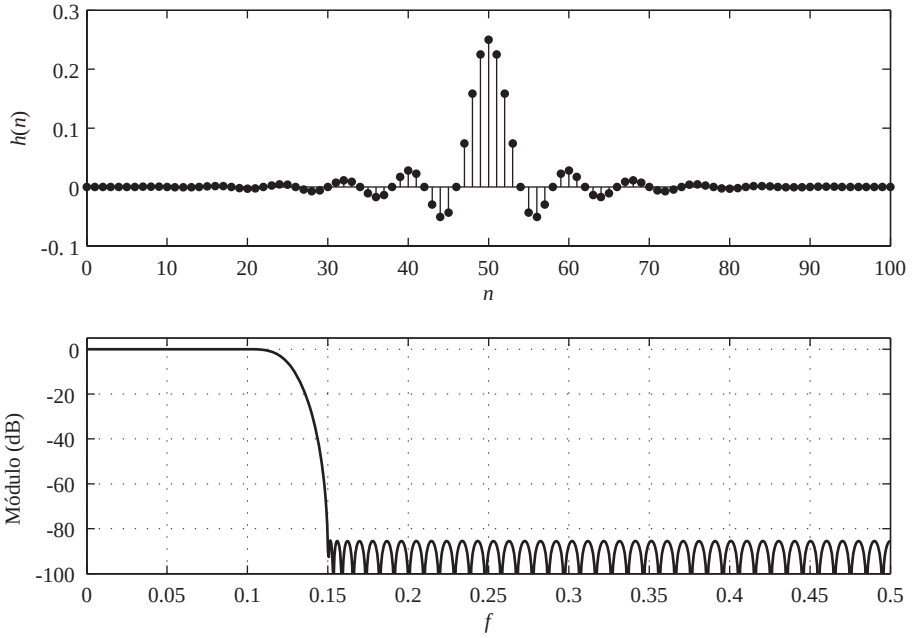


Figura 10.2.18. Respuestas al impulso y en frecuencia del filtro FIR de longitud $M = 101$ del Ejemplo 10.2.3.

Observe que el rizado de las bandas eliminadas δ_2 es 10 veces menor que el rizado en la banda de paso, debido al hecho de que los errores en el banda eliminada se han proporcionado con un peso de 10 comparados con el peso asignado en la

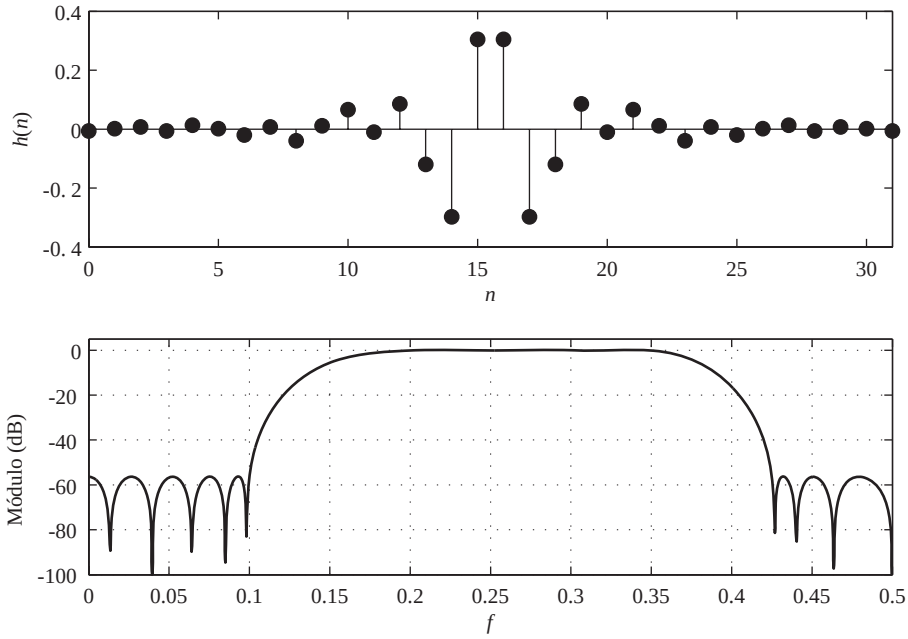


Figura 10.2.19. Respuestas al impulso y en frecuencia del filtro FIR de longitud $M = 32$ del Ejemplo 10.2.4.

banda de paso que es igual a la unidad. La respuesta al impulso y la respuesta en frecuencia del filtro paso banda se ilustran en la Figura 10.2.19.

Estos ejemplos sirven para ilustrar la facilidad relativa con la que pueden diseñarse filtros óptimos paso bajo, paso alto, de banda eliminada, paso banda y filtros más generales FIR de fase lineal y múltiples bandas basándose en el criterio de la aproximación de Chebyshev e implementados mediante el algoritmo de intercambio de Remez. En las dos secciones siguientes vamos a abordar el diseño de diferenciadores y transformadores de Hilbert.

10.2.5 Diseño de diferenciadores FIR

Los diferenciadores se emplean en muchos sistemas analógicos y digitales para calcular la derivada de una señal. Un diferenciador ideal tiene una respuesta en frecuencia que es linealmente proporcional a la frecuencia. De forma similar, un diferenciador digital ideal se define como aquél que tiene la respuesta en frecuencia

$$H_d(\omega) = j\omega, \qquad -\pi \le \omega \le \pi \tag{10.2.81}$$

La respuesta al impulso unidad correspondiente a $H_d(\omega)$ es

$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega)e^{j\omega n}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} j\omega e^{j\omega n}d\omega \\ &= \frac{\cos \pi n}{n}, \qquad -\infty < n < \infty, \qquad n \neq 0 \end{aligned} \tag{10.2.82}$$

Observe que el diferenciador ideal tiene una respuesta al impulso antisimétrica [es decir, $h_d(n) = -h_d(-n)$]. Por tanto, $h_d(0) = 0$.

En esta sección vamos a ocuparnos del diseño de diferenciadores FIR de fase lineal basado en la aproximación de Chebyshev. Teniendo en cuenta el hecho de que el diferenciador ideal tiene una respuesta al impulso unidad antisimétrica, vamos a centrar nuestra atención en los diseños FIR en los que $h(n) = -h(M-1-n)$. Luego trabajaremos con los filtros clasificados en la sección anterior correspondientes a los casos 3 y 4.

Recordemos que en el caso 3, donde M es impar, la respuesta en frecuencia real del filtro FIR $H_r(\omega)$ tiene la característica en la que $H_r(0) = 0$. Una respuesta igual a cero en la frecuencia cero es la única condición que un diferenciador debe satisfacer. En la Tabla 10.5, podemos ver que ambos tipos de filtros satisfacen esta condición. Sin embargo, si se desea un diferenciador de banda completa, esto es imposible de conseguir con un filtro FIR que tenga un número impar de coeficientes, ya que $H_r(\pi) = 0$ para M impar. Sin embargo, en la práctica, rara vez se necesitan diferenciadores de banda completa.

En la mayoría de los casos prácticos, la respuesta en frecuencia deseada sólo tiene que ser lineal en un intervalo de frecuencias limitado $0 \le \omega \le 2\pi f_p$, donde f_p es el ancho de banda del diferenciador. En el intervalo de frecuencias $2\pi f_p < \omega \le \pi$, la respuesta deseada puede estar o no registrada a cero.

En el diseño de diferenciadores FIR basados en la aproximación de Chebyshev, la función de ponderación $W(\omega)$ se especifica en el programa como

$$W(\omega) = \frac{1}{\omega}, \qquad 0 \le \omega \le 2\pi f_p \tag{10.2.83}$$

con el fin de que el rizado relativo en la banda de paso sea constante. Por tanto, el error absoluto entre la respuesta deseada ω y la aproximación $H_r(\omega)$ aumenta cuando ω varía de 0 a $2\pi f_p$. Sin embargo, la función de ponderación dada por (10.2.83) garantiza que el error relativo

$$\begin{aligned} \delta &= \text{máx}_{0\le\omega\le 2\pi f_p}\{W(\omega)[\omega - H_r(\omega)]\} \\ &= \text{máx}_{0\le\omega\le 2\pi f_p}\left[1 - \tfrac{H_r(\omega)}{\omega}\right] \end{aligned} \tag{10.2.84}$$

sea fijo dentro de la banda de paso del diferenciador.

EJEMPLO 10.2.5

Utilice el algoritmo de Remez para diseñar un diferenciador FIR de fase lineal de longitud $M = 60$. La frecuencia de corte de la banda de paso es 0.1 y la frecuencia de corte de la banda eliminada es 0.15.

Solución. Los parámetros de entrada al programa son

```
60,    2,     2
0.0,   0.1,   0.15,   0.5
1.0,   0.0
1.0,   1.0
```

La respuesta en frecuencia se ilustra en la Figura 10.2.20. En la misma figura también se muestra el error de la aproximación en la banda de paso $0 \le f \le 0.1$ del filtro.

Los parámetros importantes en un diferenciador son su longitud M, su ancho de banda {frecuencia de corte de la banda} f_p, y el error relativo de pico δ de la aproximación. La interrelación entre estos tres parámetros se pueden visualizar fácilmente de forma paramétrica. En particular, el valor de $20\log_{10}\delta$ en función de f_p con M como parámetro se ilustra en la Figura 10.2.21 para M par y en la Figura 10.2.22 para M impar. Estos resultados, debidos a Rabiner y Schafer (1974a), son útiles en la selección de la longitud del filtro, dadas las especificaciones referentes al rizado dentro de la banda y la frecuencia de corte f_p.

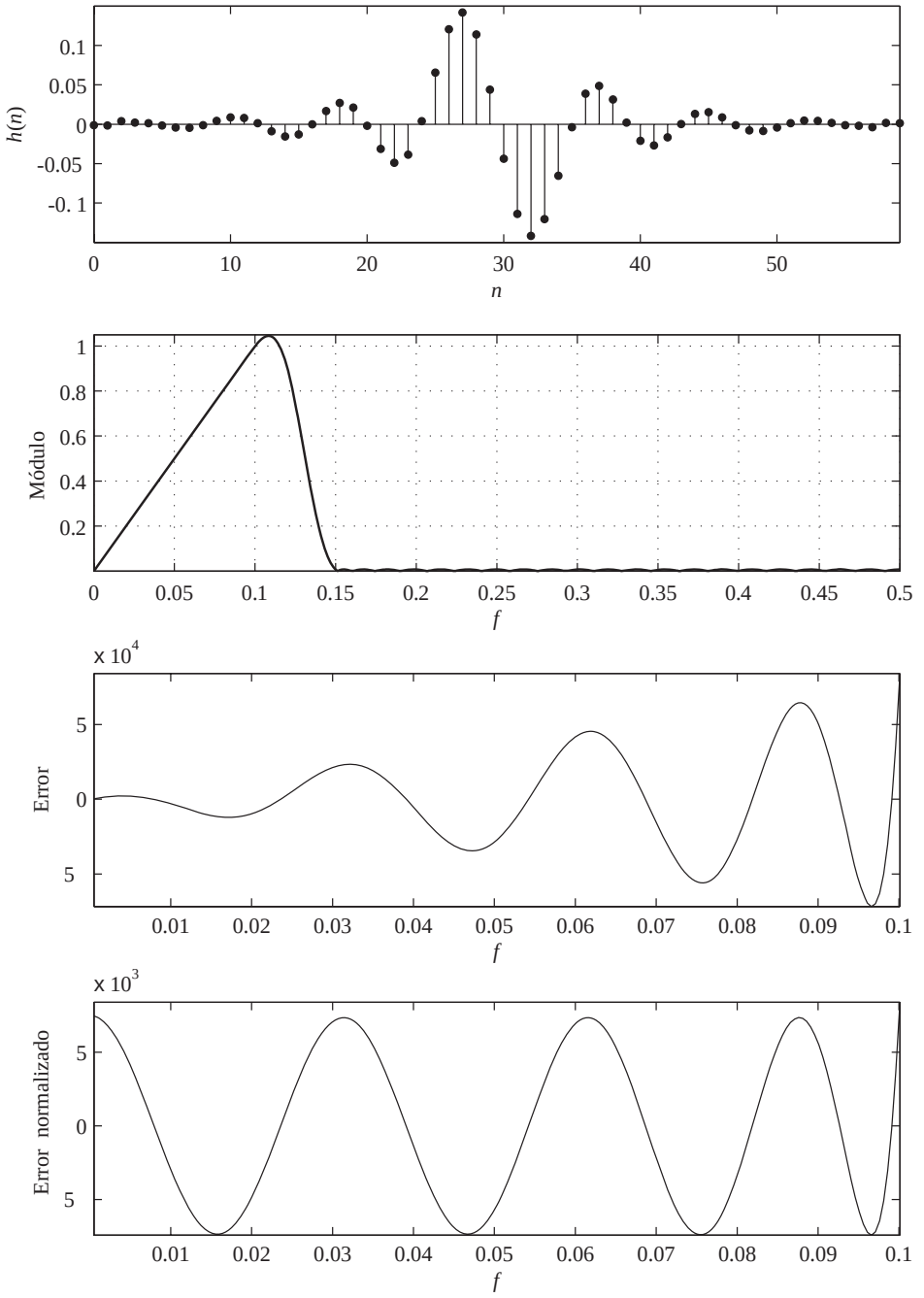


Figura 10.2.20. Respuesta en frecuencia y error de la aproximación para $M = 60$ del diferenciador FIR del Ejemplo 10.2.5.

Una comparación de las gráficas de las Figuras 10.2.21 y 10.2.22 revela que los diferenciadores de longitud par dan lugar a un error de aproximación significativamente más pequeño δ que el de los diferenciadores de longitud impar comparable. Los diseños basados en un valor de M impar son particularmente pobres si el ancho

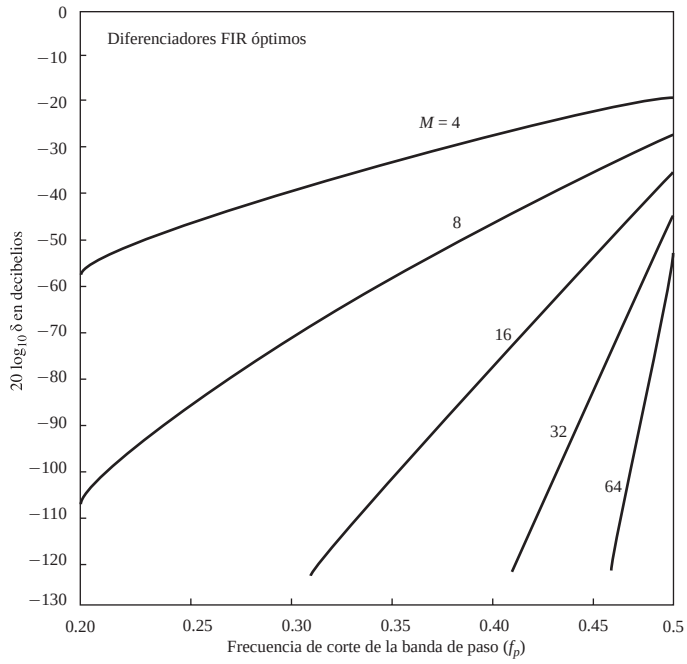


Figura 10.2.21. Curvas de $20\log_{10}\delta$ en función de f_p para $M = 4$, 8, 16, 32 y 64. [De los documentos de Rabiner y Schafer (1974a). Reimpreso con permiso de AT&T.

de banda excede $f_p = 0.45$. El problema es básicamente el cero de la respuesta en frecuencia en $\omega = \pi(f = 1/2)$. Cuando $f_p < 0.45$, se obtienen buenos diseños para M impar, aunque los diferenciadores de longitud comparable con M par siempre son mejores en el sentido de que el error de aproximación es más pequeño.

En vista de la obvia ventaja de los diferenciadores de longitud par sobre los de longitud impar, podemos sacar la conclusión de que los diferenciadores de longitud impar son siempre preferibles en los sistemas prácticos. Esto es particularmente cierto en muchas aplicaciones. Sin embargo, tenemos que destacar que el retardo de señal introducido por cualquier filtro FIR de fase lineal es $(M-1)/2$, que no es un entero cuando M es par. En muchas aplicaciones prácticas, esto no es importante. En otras aplicaciones en las que es deseable tener un retardo de valor entero en la señal de salida del diferenciador, deberemos seleccionar M para que sea impar.

Estos resultados numéricos están basados en diseños que resultan de la aproximación de Chebyshev. Tenemos que señalar también que es posible y relativamente fácil diseñar diferenciadores FIR de fase lineal basados en el método de muestreo en frecuencia. Por ejemplo, la Figura 10.2.23 ilustra la respuesta en frecuencia de un diferenciador con ancho de banda $(f_p = 0.5)$ de longitud $M = 30$. La gráfica del valor absoluto del error de aproximación como función de la frecuencia también se incluye en esta figura.

10.2.6 Diseño de transformadores de Hilbert

Un transformador ideal de Hilbert es un filtro paso todo que aplica un desplazamiento de fase de 90° a sus señales de entrada. Por tanto, la respuesta en frecuencia del transformador ideal de Hilbert se especifica como sigue

$$H_d(\omega) = \begin{cases} -j, & 0 < \omega \leq \pi \\ j, & -\pi < \omega < 0 \end{cases} \tag{10.2.85}$$

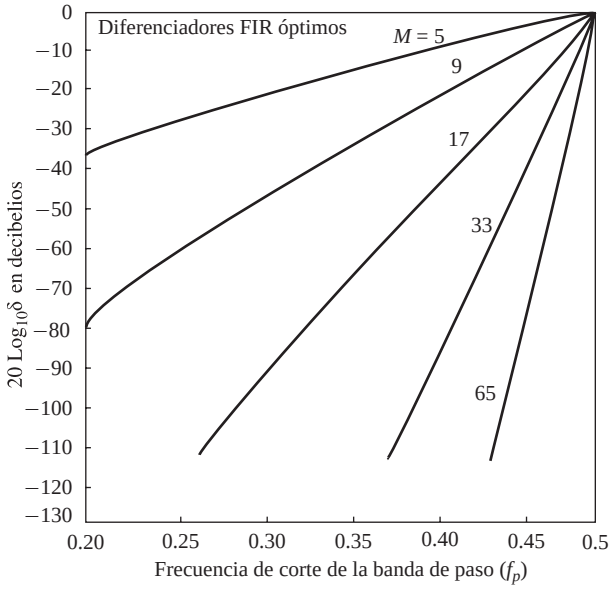


Figura 10.2.22. Curvas de $20\log_10\delta$ en función de F_p para $M = 5$, 9, 17,33 y 65 [De los documentos de Rabiner y Schafer (1974a). Reimpreso con permiso de AT&T.

Los transformadores de Hilbert se utilizan frecuentemente en sistemas de comunicación y de tratamiento de señales como, por ejemplo, en la generación de señales moduladas de una única banda lateral, señales de radar y procesamiento de señales de voz.

La respuesta al impulso unidad de un transformador ideal de Hilbert es

$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega)e^{j\omega n}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} je^{j\omega n}d\omega - \int_{0}^{\pi} je^{j\omega n}d\omega\right) \\ &= \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\operatorname{sen}^2(\pi n/2)}{n}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{10.2.86}$$

Como era de esperar, $h_d(n)$ tiene duración infinita y es no causal. Observe que $h_d(n)$ es antisimétrica [es decir, $h_d(n) = -h_d(-n)$]. Teniendo en cuenta esta característica, vamos a centrar nuestra atención en el diseño de los tranformadores FIR de Hilbert de fase lineal con una respuesta al impulso unidad antisimétrica [es decir, $h(n) = -h(M-1-n)$]. Podemos observar también que la elección de una respuesta al impulso unidad antisimétrica es coherente con disponer de una respuesta en frecuencia $H_d(\omega)$ puramente imaginaria.

Recordemos una vez más que cuando $h(n)$ es antisimétrica, la respuesta en frecuencia real $H_r(\omega)$ es cero en $\omega = 0$ tanto para M impar como par y en $\omega = \pi$ cuando M es impar. Evidentemente, es imposible diseñar un transformador digital paso todo de Hilbert. Afortunadamente, en las aplicaciones de procesamiento de señales prácticas, un transformador paso todo de Hilbert no es necesario. Su ancho de banda sólo tiene que cubrir el ancho de banda de la señal que se va a desplazar en fase. En consecuencia, especificamos la respuesta en frecuencia real de un filtro transformador de Hilbert como

$$H_{\text{dr}}(\omega) = 1, \qquad 2\pi f_l \leq \omega \leq 2\pi f_u \tag{10.2.87}$$

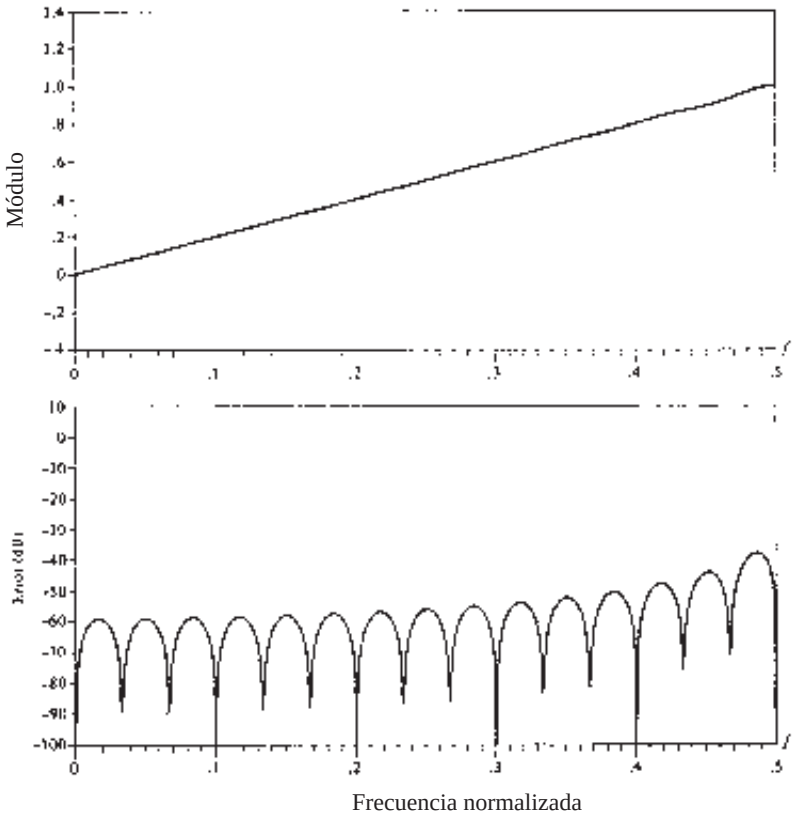


Figura 10.2.23. Respuesta en frecuencia y error de aproximación para un diferenciador FIR con $M = 30$ diseñado por el método de muestreo en frecuencia.

donde f_l y f_u son las frecuencias de corte inferior y superior, respectivamente.

Es interesante destacar que el transformador ideal de Hilbert con una respuesta al impulso unidad $h_d(n)$ dada por (10.2.86) es cero para n par. El transformador FIR de Hilbert cumple esta propiedad bajo determinadas condiciones de simetría. En particular, consideremos el tipo de filtro del caso 3 para el que

$$H_r(\omega) = \sum_{k=1}^{(M-1)/2} c(k) \operatorname{sen} \omega k \tag{10.2.88}$$

y suponga que $f_l = 0.5 - f_u$. Esto asegura una banda de paso simétrica alrededor de la frecuencia central $f = 0.25$. Si la respuesta en frecuencia presenta esta propiedad de simetría, $H_r(\omega) = H_r(\pi - \omega)$ y, por tanto, (10.2.88) proporciona

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{(M-1)/2} c(k) \operatorname{sen} \omega k &= \sum_{k=1}^{(M-1)/2} c(k) \operatorname{sen} k(\pi - \omega) \\
&= \sum_{k=1}^{(M-1)/2} c(k) \operatorname{sen} \omega k \cos \pi k \\
&= \sum_{k=1}^{(M-1)/2} c(k)(-1)^{k+1} \operatorname{sen} \omega k
\end{aligned}$$

o, lo que es equivalente,

$$\sum_{k=1}^{(M-1)/2} [1-(-1)^{k+1}]c(k)\,\mathrm{sen}\,\omega k = 0 \tag{10.2.89}$$

Evidentemente, $c(k)$ tiene que ser igual a cero para $k = 0, 2, 4, \ldots$.

Ahora la relación entre $\{c(k)\}$ y la respuesta al impulso unidad $\{h(n)\}$ es, a partir de (10.2.54),

$$c(k) = 2h\left(\frac{M-1}{2} - k\right)$$

o, lo que es equivalente,

$$h\left(\frac{M-1}{2} - k\right) = \frac{1}{2}c(k) \tag{10.2.90}$$

Si $c(k)$ es cero para $k = 0, 2, 4, \ldots$, entonces (10.2.90) se convierte en

$$h(k) = \begin{cases} 0, & k = 0,2,4,\ldots, \qquad \text{para } \dfrac{M-1}{2} \text{ par} \\ 0, & k = 1,3,5,\ldots, \qquad \text{para } \dfrac{M-1}{2} \text{ impar} \end{cases} \tag{10.2.91}$$

Lamentablemente, (10.2.91) sólo se cumple para M impar; no se cumple para M par. Esto significa que para valores comparables de M, el caso de M impar es preferible, ya que la complejidad de cálculo (número de multiplicaciones y sumas por punto de salida) es casi la mitad que para el caso en que M es par.

Cuando el diseño del transformador de Hilbert se implementa mediante la aproximación de Chebyshev utilizando el algoritmo de Remez, seleccionamos los coeficientes del filtro para minimizar el error de aproximación de pico

$$\begin{aligned} \delta &= \max_{2\pi f_l \le \omega \le 2\pi f_u} [H_{\mathrm{dr}}(\omega) - H_r(\omega)] \\ &= \max_{2\pi f_l \le \omega \le 2\pi f_u} [1 - H_r(\omega)] \end{aligned} \tag{10.2.92}$$

Así, la función de ponderación se fija a la unidad y la optimización se realiza en una única banda de frecuencias (es decir, la banda de paso del filtro).

EJEMPLO 10.2.6

Diseñe un transformador de Hilbert con los siguientes parámetros: $M = 31$, $f_l = 0.05$ y $f_u = 0.45$.

Solución. Observe que la respuesta en frecuencia es simétrica, ya que $f_u = 0.5 - f_l$. Los parámetros para ejecutar el algoritmo de Remez son:

```
31,     3,      1
0.05,   0.45
1.0
1.0
```

El resultado de este diseño es la respuesta al impulso unidad y la respuesta en frecuencia mostradas en la Figura 10.2.24. Observe que, realmente, cualquier otro valor de $h(n)$ es prácticamente cero.

Rabiner y Schafer (1974b) han investigado las características de los diseños de transformadores de Hilbert tanto para M impar como para M par. Si el diseño del filtro se restringe a una respuesta en frecuencia simétrica,

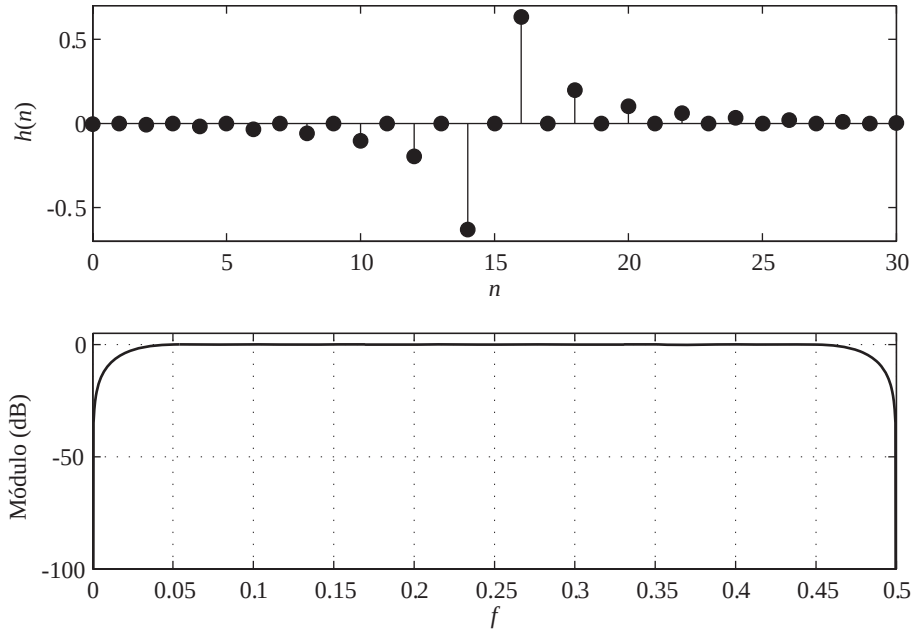


Figura 10.2.24. Frecuencia del filtro transformador FIR de Hilbert del Ejemplo 10.2.6.

entonces hay básicamente tres parámetros de interés, M, δ y f_l. La Figura 10.2.25 es ua gráfica de $20\log_{10}\delta$ en función de f_l (la anchura de la banda de transición) con M como parámetro. Observe que para valores comparables de M, no existe ninguna ventaja de rendimiento por emplear un valor de M impar en lugar de par, y viceversa. Sin embargo, la complejidad de cálculo en la implementación de un filtro para M impar es menor en un factor de 2 respecto a si M es par, como se ha indicado previamente. Por tanto, en la práctica, es preferible emplear un valor impar para M.

Para propósitos de diseño, las gráficas de la Figura 10.2.25 sugieren como regla que,

$$M f_l \approx -0.61\log_{10}\delta \tag{10.2.93}$$

Luego esta fórmula puede utilizarse para estimar el tamaño de uno de los tres parámetros básicos del filtro cuando se conocen los otros dos.

10.2.7 Comparación de los métodos de diseño de los filtro FIR de fase lineal

Históricamente, el método de diseño basado en el uso de ventanas para truncar la respuesta al impulso $h_d(n)$ y obtener la forma espectral deseada fue el primer método propuesto para diseñar filtros FIR de fase lineal. El método basado en el muestreo en frecuencia y la aproximación de Chebyshev se desarrollaron en la década de los años setenta y se han hecho muy populares en el diseño de filtros FIR de fase lineal prácticos.

La principal desventaja del método de diseño mediante ventanas es la falta de un control preciso de las frecuencias críticas, tales como ω_p y ω_s, en el diseño de un filtro FIR paso bajo. Los valores de ω_p y ω_s, en general, dependen del tipo de ventana y de la longitud del filtro M.

El método basado en el muestreo en frecuencia proporciona una mejora respecto del método de diseño mediante ventanas, ya que $H_r(\omega)$ se especifica en las frecuencias $\omega_k = 2\pi k/M$ u $\omega_k = \pi(2k+1)/M$ y la banda de transición es un múltiplo de $2\pi/M$. Este método de diseño es especialmente atractivo cuando el filtro FIR se implementa en el dominio de la frecuencia utilizando la DFT o mediante cualquiera de las realizaciones basadas en el muestreo en frecuencia. La característica más atractiva de estas realizaciones es que $H_r(\omega_k)$ es igual a cero o a la unidad en todas las frecuencias, excepto en la banda de transición.

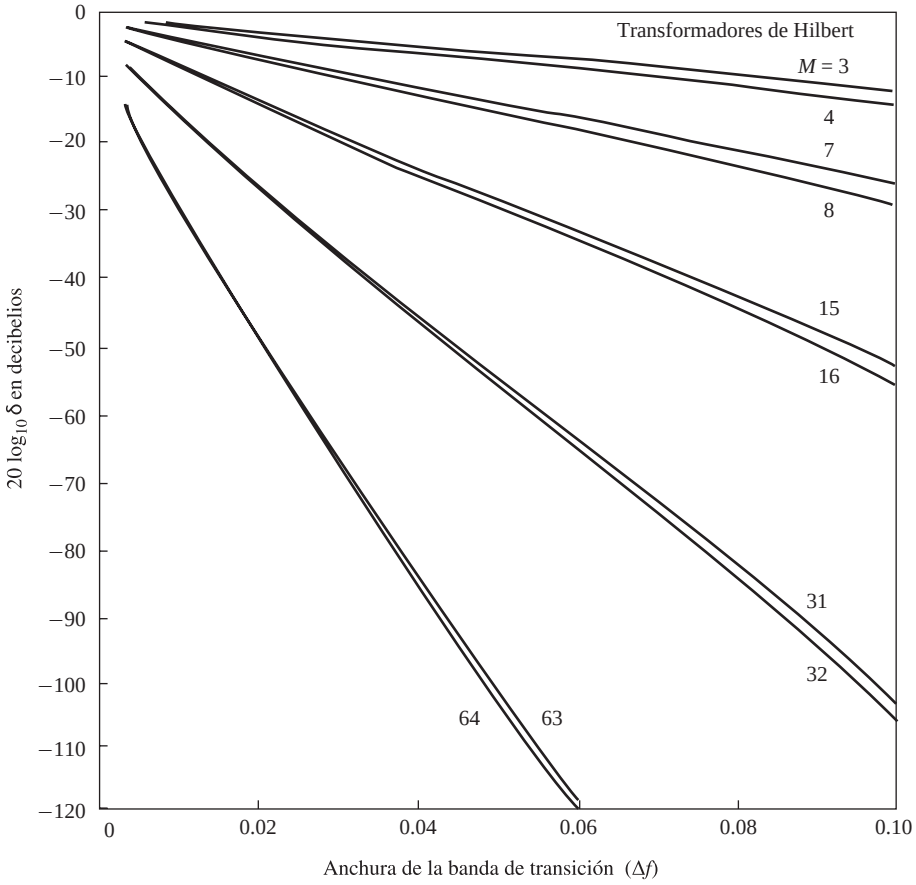


Figura 10.2.25. Curvas $20\log_{10}\delta$ en función de Δf para $M = 3, 4, 7, 8, 15, 16, 31, 32, 63, 64$. [De los documentos de Rabiner y Schafer (1974b). Reimpreso con permiso de AT&T.]

La aproximación de Chebyshev proporciona un control total sobre las especificaciones del filtro y, en consecuencia, normalmente es preferible a los otros dos métodos. Para un filtro paso bajo, las espcificaciones se proporcionan en función de los parámetros ω_p, ω_s, δ_1, δ_2 y M. Podemos especificar los parámetros ω_p, ω_s, M y δ, y optimizar los filtros respecto a δ_2. Si extendemos el error de la aproximación a la banda de paso y a la banda eliminada del filtro, este método da lugar a un filtro óptimo, en el sentido de que para un conjunto dado de especificaciones como el descrito, el nivel máximo del lóbulo secundario se minimiza.

El procedimiento de diseño de Chebyshev basado en el algoritmo de intercambio de Remez requiere que especifiquemos la longitud del filtro, las frecuencias críticas ω_p y ω_s, y la relación δ_2/δ_1. Sin embargo, en el diseño de filtros es más natural especificar ω_p, ω_s, δ_1 y δ_2, para determinar la longitud del filtro que satisface las especificaciones. Aunque no existe una fórmula simple que permita determinar la longitud del filtro a partir de estas especificaciones, se han propuesto una serie de aproximaciones que permiten estimar M a partir de ω_p, ω_s, δ_1 y δ_2. Una fórmula simple atribuida a Kaiser para aproximar M es

$$\hat{M} = \frac{-20\log_{10}\left(\sqrt{\delta_1\delta_2}\right) - 13}{14.6\,\Delta f} + 1 \tag{10.2.94}$$

donde Δf es la anchura de la banda de transición, definida como $\Delta f = (\omega_s - \omega_p)/2\pi$. Esta fórmula se proporciona en los documentos de Rabiner *et al.* (1975). Una fórmula más precisa propuesta por Herrmann *et al.* (1973) es

$$\hat{M} = \frac{D_\infty(\delta_1, \delta_2) - f(\delta_1, \delta_2)(\Delta f)^2}{\Delta f} + 1 \tag{10.2.95}$$

donde, por definición,

$$\begin{aligned} D_\infty(\delta_1, \delta_2) = {} & [0.005309(\log_{10}\delta_1)^2 + 0.07114(\log_{10}\delta_1) - 0.4761](\log_{10}\delta_2) \\ & -[0.00266(\log_{10}\delta_1)^2 + 0.5941\log_{10}\delta_1 + 0.4278] \end{aligned} \tag{10.2.96}$$

$$f(\delta_1, \delta_2) = 11.012 + 0.51244(\log_{10}\delta_1 - \log_{10}\delta_2) \tag{10.2.97}$$

Estas fórmulas son extremadamente útiles para obtener una buena estimación de la longitud del filtro requerida para conseguir las especificaciones dadas para Δf, δ_1 y δ_2. El valor estimado se utiliza para llevar a cabo el diseño y si el valor resultante de δ excede el valor especificado de δ_2, la longitud puede incrementarse hasta obtener un nivel en el lóbulo secundario que cumpla las especificaciones.

10.3 Diseño de filtros IIR a partir de filtros analógicos

Al igual que en el diseño de filtros FIR, existen varios métodos que pueden utilizarse para diseñar filtros digitales con una respuesta al impulso unidad de duración infinita. Las técnicas que se describen en esta sección se basan todas ellas en la conversión de un filtro analógico en un filtro digital. El diseño de filtros analógicos es un campo maduro y bien desarrollado, por lo que no debe resultar sorprendente que comencemos el diseño de los filtros digitales en el dominio analógico y luego convirtamos dicho diseño al dominio digital.

Un filtro analógico puede describirse mediante su función de sistema,

$$H_a(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} \beta_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} \alpha_k s^k} \tag{10.3.1}$$

donde $\{\alpha_k\}$ y $\{\beta_k\}$ son los coeficientes del filtro, o mediante su respuesta al impulso, que está relacionada con $H_a(s)$ mediante la transformada de Laplace

$$H_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}\,dt \tag{10.3.2}$$

Alternativamente, el filtro analógico cuya función de sistema relacional es $H(s)$ [dada por la Ecuación (10.3.1)], puede describirse mediante la ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} \beta_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \tag{10.3.3}$$

donde $x(t)$ designa la señal de entrada e $y(t)$ designa la salida del filtro.

Cada una de estas tres caracterizaciones equivalentes de un filtro analógico nos lleva a métodos alternativos para convertir el filtro al dominio digital, como se describe en las Secciones 10.3.1 hasta 10.3.3. Recuerde que el sistema analógico lineal e invariante en el tiempo $H(s)$ es estable si todos sus polos se encuentran en la mitad izquierda del plano s. En consecuencia, para que la técnica de conversión sea efectiva, deberá poseer las siguientes propiedades:

1. El eje $j\Omega$ del plano s debe corresponderse con la circunferencia unidad en el plano z. Así, existirá una relación directa entre las dos variables de frecuencia en ambos dominios.
2. El semiplano izquierdo del plano s debe corresponderse con el interior de la circunferencia unidad en el plano z. Por tanto, un filtro analógico estable se convertirá en un filtro digital estable.

En la sección anterior hemos mencionado que los filtros IIR estables y físicamente realizables no pueden tener fase lineal. Recuerde que un filtro de fase lineal debe tener una función de sistema que satisfaga la condición

$$H(z) = \pm z^{-N} H(z^{-1}) \tag{10.3.4}$$

donde z^{-N} representa un retardo de N unidades de tiempo. Pero si éste fuera el caso, el filtro tendría un polo reflejado en el exterior de la circunferencia unidad por cada polo ubicado en el interior de dicha circunferencia. Por tanto, el filtro sería inestable. En consecuencia, un filtro IIT causal y estable no puede tener una fase lineal.

Si eliminamos la restricción sobre la implementabilidad física, en principio, sería posible obtener un filtro IIR de fase lineal. Este método implica llevar a cabo una inversión temporal de la señal de entrada $x(n)$, haciendo pasar $x(-n)$ a través de un filtro digital $H(z)$, una inversión temporal de la salida de $H(z)$ y, por último, hacer pasar de nuevo el resultado a través de $H(z)$. Este procesamiento de señales es enormemente complejo en lo que se refiere a los cálculos y no ofrece ninguna ventaja sobre los filtros FIR de fase lineal. En consecuencia, cuando una aplicación requiere un filtro de fase lineal, debe emplearse un filtro FIR.

En el diseño de filtros IIR, especificaremos las características deseadas del filtro sólo para el módulo de la respuesta. Esto no significa que no consideremos importante la fase de la respuesta. Ya que el módulo y la fase de la respuesta están relacionados, como se ha indicado en la Sección 10.1, especificamos las características deseadas del módulo y aceptamos la fase que se obtiene a partir de la metodología del diseño.

10.3.1 Diseño de filtros IIR mediante aproximación de derivadas

Uno de los métodos más sencillos para convertir un filtro analógico en un filtro digital consiste en aproximar la ecuación diferencial dada por (10.3.3) mediante una ecuación en diferencias equivalente. Este método se utiliza a menudo para resolver numéricamente una ecuación diferencial de coeficientes constantes utilizando una computadora digital.

En la expresión de la derivada $dy(t)/dt$ en el instante $t = nT$, sustituimos la *diferencia* $[y(nT) - y(nT-1)]/T$. Así

$$\begin{aligned} \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=nT} &= \frac{y(nT) - y(nT-T)}{T} \\ &= \frac{y(n) - y(n-1)}{T} \end{aligned} \tag{10.3.5}$$

donde T representa el intervalo de muestreo e $y(n) \equiv y(nT)$. El diferenciador analógico cuya salida es $dy(t)/dt$ tiene la función de sistema $H(s) = s$, mientras que el sistema digital que genera la salida $[y(n) - y(n-1)]/T$ tiene la función de sistema $H(z) = (1 - z^{-1})/T$. En consecuencia, como se muestra en la Figura 10.3.1, el equivalente en el dominio de la frecuencia para la relación (10.3.5) es

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T} \tag{10.3.6}$$

La segunda derivada $d^2y(t)/dt^2$ se reemplaza por la segunda diferencia, así:

$$\left.\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right|_{t=nT} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dy(t)}{dt}\right]_{t=nT}$$

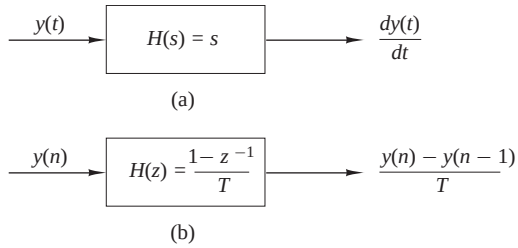


Figura 10.3.1. La sustitución de la diferencia por la derivada implica la correspondencia $s = (1 - z^{-1})/T$.

$$= \frac{[y(nT) - y(nT - T)]/T - [y(nT - T) - y(nT - 2T)]/T}{T}$$

$$= \frac{y(n) - 2y(n-1) + y(n-2)}{T^2} \tag{10.3.7}$$

En el dominio de la frecuencia, la Ecuación (10.3.7) es equivalente a

$$s^2 = \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{T^2} = \left(\frac{1 - z^{-1}}{T}\right)^2 \tag{10.3.8}$$

Se deduce fácilmente que la sustitución de la derivada k de $y(t)$ proporciona la relación equivalente en el dominio de la frecuencia

$$s^k = \left(\frac{1 - z^{-1}}{T}\right)^k \tag{10.3.9}$$

En consecuencia, la función de sistema para los filtros IIR digitales obtenida como resultado de la aproximación de las derivadas mediante diferencias finitas es

$$H(z) = H_a(s)|_{s=(1-z^{-1})/T} \tag{10.3.10}$$

donde $H_a(s)$ es la función de sistema del filtro analógico caracterizado por la ecuación diferencial dada por la Ecuación (10.3.3).

Vamos a investigar las implicaciones de la correspondencia entre el plano s y el plano z como se especifica en (10.3.6) o, lo que es equivalente,

$$z = \frac{1}{1 - sT} \tag{10.3.11}$$

Si sustituimos $s = j\Omega$ en (10.2.11), tenemos que

$$z = \frac{1}{1 - j\Omega T}$$

$$= \frac{1}{1 + \Omega^2 T^2} + j\frac{\Omega T}{1 + \Omega^2 T^2} \tag{10.3.12}$$

Cuando Ω varía entre $-\infty$ e ∞, el lugar geométrico de los puntos en el plano z es una circunferencia de radio $\frac{1}{2}$ con centro en $z = \frac{1}{2}$, como se ilustra en la Figura 10.3.2.

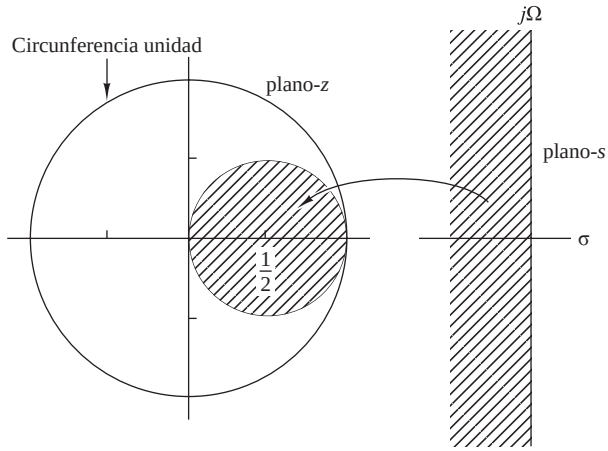


Figura 10.3.2. La relación $s = (1 - z^{-1})/T$ establece la correspondencia entre el semiplano izquierdo s y los puntos interiores de la circunferencia de radio $\frac{1}{2}$ y centro $z = \frac{1}{2}$ en el plano z.

Puede demostrarse fácilmente que la relación dada por (10.3.11) establece la correspondencia entre los puntos del semiplano izquierdo s y los puntos interiores de la circunferencia en el plano z, y entre los puntos del semiplano derecho s y los puntos exteriores a la circunferencia. En consecuencia, esta correspondencia tiene la propiedad de que un filtro analógico estable se transforma en un filtro digital estable. Sin embargo, la posible ubicación de los polos del filtro digital está confinada a frecuencias relativamente bajas y, como consecuencia, la correpondencia se restringe al diseño de filtros paso bajo y filtros paso banda que tienen frecuencias de resonancia relativamente bajas. Por ejemplo, no es posible transformar un filtro analógico paso alto en el correspondiente filtro digital paso alto.

En un intento por vencer las limitaciones de la correspondencia anterior, se han propuesto sustituciones más complejas para la derivadas. En particular, se ha propuesto una diferencia de orden L de la forma

$$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=nT} = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{L} \alpha_k \frac{y(nT+kT) - y(nT-kT)}{T} \tag{10.3.13}$$

donde los $\{\alpha_k\}$ son un conjunto de parámetros que se pueden seleccionar para optimizar la aproximación. La correspondencia resultante entre el plano s y el plano z ahora es

$$s = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{L} \alpha_k (z^k - z^{-k}) \tag{10.3.14}$$

Cuando $z = e^{j\omega}$, tenemos

$$s = j\frac{2}{T}\sum_{k=1}^{L} \alpha_k \operatorname{sen} \omega k \tag{10.3.15}$$

que es puramente imaginario. Por tanto,

$$\Omega = \frac{2}{T}\sum_{k=1}^{L} \alpha_k \operatorname{sen} \omega k \tag{10.3.16}$$

es la correspondencia resultante entre las dos variables de frecuencia. Mediante la elección apropiada de los coeficientes $\{\alpha_k\}$ es posible asignar el eje $j\Omega$ a la circunferencia unidad. Además, los puntos del semiplano izquierdo s puede corresponderse con los puntos interiores de la circunferencia unidad en el plano z.

A pesar de haber conseguido las dos características deseables mediante la correspondencia definida por (10.3.16), el problema de elegir el conjunto de coeficientes $\{\alpha_k\}$ continúa. En general, este problema es complicado. Puesto que existen técnicas más sencillas para convertir filtros analógicos en fitros IIR digitales, no vamos a insistir en el uso de las diferencias de orden L como sustituto de la derivada.

EJEMPLO 10.3.1

Convierta el filtro analógico paso banda cuya función de sistema es

$$H_a(s) = \frac{1}{(s+0.1)^2+9}$$

en un filtro IIR digital sustituyendo la derivada por la diferencia correspondiente.

Solución. Sustituyendo el valor de s dado por (10.3.6) en $H(s)$ obtenemos

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{\left(\dfrac{1-z^{-1}}{T}+0.1\right)^2+9} \\ &= \frac{T^2/(1+0.2T+9.01T^2)}{1-\dfrac{2(1+0.1T)}{1+0.2T+9.01T^2}z^{-1}+\dfrac{1}{1+0.2T+9.01T^2}z^{-2}} \end{aligned}$$

La función de sistema $H(z)$ tiene la forma de un resonador siempre que T se seleccione para ser lo suficientemente pequeño (por ejemplo, $T \leq 0.1$), con el fin de que los polos se encuentren en las proximidades de la circunferencia unidad. Observe que se cumple la condición $a_1^2 < 4a_2$, por lo que los polos son complejos.

Por ejemplo, si $T = 0.1$, los polos se localizan en

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= 0.91 \pm j0.27 \\ &= 0.949e^{\pm j16.5^\circ} \end{aligned}$$

Observe que el intervalo de frecuencias de resonancia está limitado a las bajas frecuencias, a causa de las características de la correspondencia. Animamos al lector a representar gráficamente la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ del filtro digital para diferentes valores de T y a comparar los resultados con la respuesta en frecuencia del filtro analógico.

EJEMPLO 10.3.2

Convierta el filtro analógico paso banda del Ejemplo (10.3.1) en un filtro IIR digital utilizando la correspondencia

$$s = \frac{1}{T}(z - z^{-1})$$

Solución. Sustituyendo el valor de s en $H(s)$, obtenemos

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{\left(\dfrac{z-z^{-1}}{T}+0.1\right)^2+9} \\ &= \frac{z^2T^2}{z^4+0.2Tz^3+(2+9.01T^2)z^2-0.2Tz+1} \end{aligned}$$

Observe que esta correspondencia ha introducido dos polos adicionales en la conversión de $H_a(s)$ en $H(z)$. Por tanto, el filtro digital es significativamente más complejo que el analógico. Éste es un inconveniente importante de la correspondencia dada.

10.3.2 Diseño de filtros IIR basado en la invarianza del impulso

En el método basado en la invarianza del impulso, nuestro objetivo es diseñar un filtro IIR que tenga una respuesta al impulso unidad $h(n)$ que sea la versión muestreada de la respuesta al impulso del filtro analógico. Es decir,

$$h(n) \equiv h(nT), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{10.3.17}$$

donde T es el intervalo de muestreo.

Para examinar las implicaciones de la Ecuación (10.3.17), volvamos a la Sección 6.1. Recuerde que cuando una señal continua en el tiempo $x_a(t)$ cuyo espectro es $X_a(F)$ se muestrea a una frecuencia $F_s = 1/T$ muestras por segundo, el espectro de la señal muestreada es la repetición periódica del espectro escalado $F_s X_a(F)$ de período F_s. Específicamente, la relación es

$$X(f) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a[(f-k)F_s] \tag{10.3.18}$$

donde $f = F/F_s$ es la frecuencia normalizada. Si la frecuencia de muestreo F_s es menor que dos veces la frecuencia más alta contenida en $X_a(F)$ se produce *aliasing*.

Expresado en el contexto del muestreo de la respuesta al impulso de un filtro analógico con la respuesta en frecuencia $H_a(F)$, el filtro digital con la respuesta al impulso $h(n) \equiv h_a(nT)$ tiene la respuesta en frecuencia

$$H(f) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a[(f-k)F_s] \tag{10.3.19}$$

o, lo que es equivalente,

$$H(\omega) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a[(\omega - 2\pi k)F_s] \tag{10.3.20}$$

o

$$H(\Omega T) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \tag{10.3.21}$$

La Figura 10.3.3 muestra la respuesta en frecuencia de un filtro analógico paso bajo y la respuesta en frecuencia del filtro digital correspondiente.

Está claro que el filtro digital con la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ tiene la respuesta en frecuencia del filtro analógico correspondiente si el intervalo de muestreo T se selecciona para que sea lo suficientemente pequeño como para impedir por completo o al menos para minimizar los efectos del *aliasing*. También está claro que el método basado en la invarianza del impulso es inapropiado para diseñar filtros paso alto debido al *aliasing* que resulta del proceso de muestreo.

Para investigar la correspondencia de puntos entre el plano z y el plano s debida al proceso de muestreo, nos basamos en una generalización de (10.3.21) que relaciona la transformada z de $h(n)$ con la transformada de Laplace de $h_a(t)$. Esta relación es

$$H(z)|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(s - j\frac{2\pi k}{T}\right) \tag{10.3.22}$$

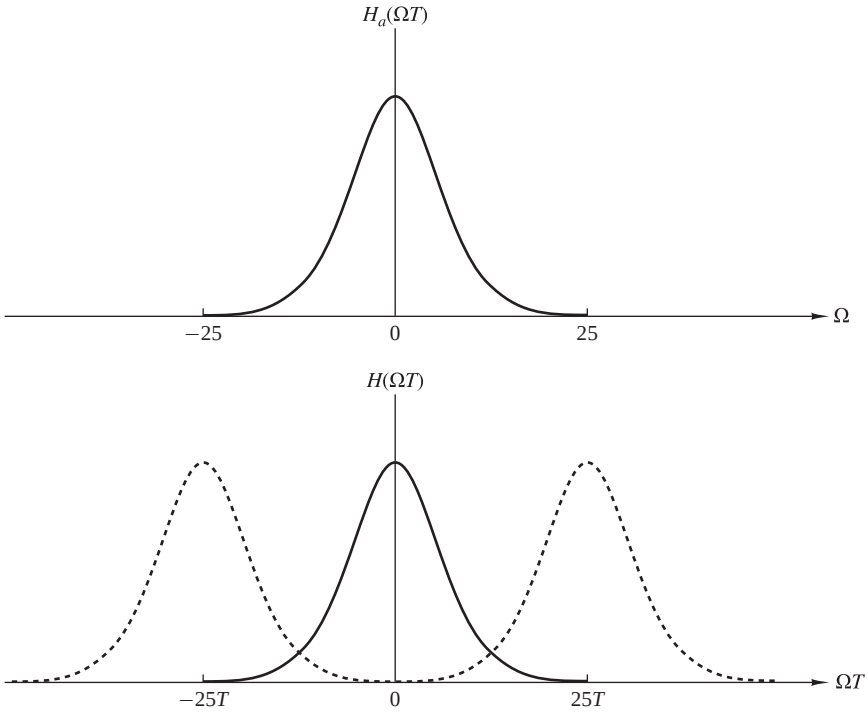


Figura 10.3.3. Respuesta en frecuencia $H_a(\Omega)$ del filtro analógico y respuesta en frecuencia del correspondiente filtro digital con *aliasing*.

donde

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} \\ H(z)|_{z=e^{sT}} &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n) e^{-sTn} \end{aligned} \tag{10.3.23}$$

Observe que cuando $s = j\Omega$, (10.3.22) se reduce a (10.3.21), donde el factor de j en $H_a(\Omega)$ se ha suprimido en nuestra notación.

Considere la correspondencia entre los puntos del plano s y del plano z implicada por la relación

$$z = e^{sT} \tag{10.3.24}$$

Si sustituimos $s = \sigma + j\Omega$ y expresamos la variable compleja z en forma polar como $z = re^{j\omega}$, (10.3.24) se transforma en

$$re^{j\omega} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T}$$

Evidentemente, tenemos que

$$\begin{aligned} r &= e^{\sigma T} \\ \omega &= \Omega T \end{aligned} \tag{10.3.25}$$

Por tanto, $\sigma < 0$ implica que $0 < r < 1$ y $\sigma > 0$ implica que t $r > 1$. Cuando $\sigma = 0$, tenemos que $r = 1$. Por tanto, el semiplano izquierdo s se corresponde con el interior de la circunferencia unidad en el plano z y el semiplano derecho en s se corresponde con el exterior de la circunferencia unidad en el plano z.

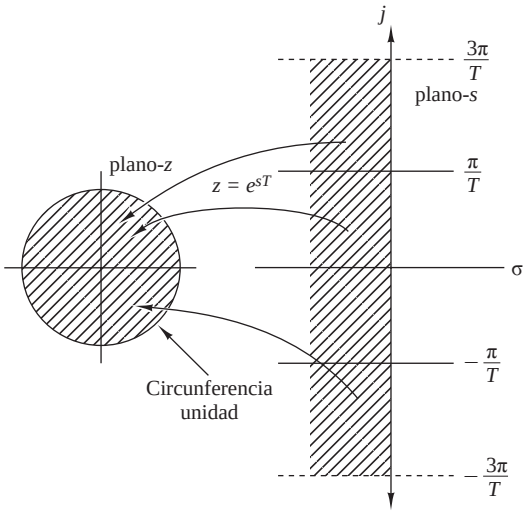


Figura 10.3.4. La correspondencia $z = e^{sT}$ asigna bandas de anchura $2\pi/T$ (para $\sigma < 0$) en el plano s con puntos de la circunferencia unidad en el plano z.

También, el eje $j\Omega$ se corresponde con la circunferencia unidad en el plano z, como se ha indicado anteriormente. Sin embargo, esta correspondencia entre el eje $j\Omega$ y la circunferencia unidad no es una correspondencia uno-a-uno. Dado que ω es única en el intervalo $(-\pi, \pi)$, la correspondencia $\omega = \Omega T$ implica que el intervalo $-\pi/T \leq \Omega \leq \pi/T$ se corresponde con los valores del intervalo $-\pi \leq \omega \leq \pi$. Además, el intervalo de frecuencias $\pi/T \leq \Omega \leq 3\pi/T$ también se corresponde con el intervalo $-\pi \leq \omega \leq \pi$ y, en general, con intervalos $(2k-1)\pi/T \leq \Omega \leq (2k+1)\pi/T$, cuando k es un entero. Luego la correspondencia de la frecuencia analógica Ω con la variable de frecuencia ω en el dominio digital es una correspondencia muchos-a-uno, que simplemente refleja los efectos del *aliasing* debidos al muestreo. La Figura 10.3.4 ilustra la correspondencia entre el plano s y el plano z según la relación dada en (10.3.24).

Para saber un poco más sobre el efecto del diseño basado en la invarianza del impulso sobre las características del filtro resultante, vamos a expresar la función de sistema del filtro analógico en forma de fracciones parciales. Suponiendo que los polos del filtro analógico son distintos, podemos escribir

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{s - p_k} \tag{10.3.26}$$

donde $\{p_k\}$ son los polos del filtro analógico y $\{c_k\}$ son los coeficientes de la expansión en fracciones parciales. En consecuencia,

$$h_a(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{p_k t}, \qquad t \geq 0 \tag{10.3.27}$$

Si muestreamos $h_a(t)$ periódicamente en $t = nT$, tenemos

$$h(n) = h_a(nT) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{p_k T n} \tag{10.3.28}$$

Sustituyendo ahora el valor dado por (10.3.28), la función de sistema del filtro IIR digital resultante es

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} c_k e^{p_k T n} \right) z^{-n} = \sum_{k=1}^{N} c_k \sum_{n=0}^{\infty} (e^{p_k T} z^{-1})^n \tag{10.3.29}$$

El sumatorio interno de (10.3.29) converge porque $p_k < 0$ y proporciona

$$\sum_{n=0}^{\infty} (e^{p_k T} z^{-1})^n = \frac{1}{1 - e^{p_k T} z^{-1}} \tag{10.3.30}$$

Por tanto, la función de sistema del filtro digital es

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}} \tag{10.3.31}$$

Observe que el filtro digital tiene polos en

$$z_k = e^{p_k T}, \qquad k = 1, 2, \ldots, N \tag{10.3.32}$$

Aunque los polos del plano s se corresponden con los del plano z de acuerdo con la relación (10.3.32), debemos destacar que los ceros de ambos dominios no satisfacen esta misma relación. Por tanto, el método basado en la invarianza del impulso no se define mediante la simple correspondencia de puntos dada por la Ecuación (10.3.24).

El desarrollo obtenido para $H(z)$ dado por (10.3.31) está basado en un filtro que tiene polos distintos. Puede generalizarse para incluir polos de orden múltiple. Sin embargo, por abreviar, no vamos a ver la generalización de la expresión (10.3.31).

EJEMPLO 10.3.3

Convierta el filtro analógico cuya función de sistema es

$$H_a(s) = \frac{s + 0.1}{(s + 0.1)^2 + 9}$$

en un filtro IIR digital aplicando el método basado en la invarianza del impulso.

Solución. Observe que el filtro analógico tiene un cero en $s = -0.1$ y un par de polos complejos conjugados en $p_k = -0.1 \pm j3$ como se muestra en la Figura 10.3.5.

No tenemos que determinar la respuesta al impulso $h_a(t)$ para diseñar el filtro IIR digital basado en el método de la invarianza del impulso. En su lugar, determinamos directamente $H(z)$, de acuerdo con la Ecuación (10.3.31), a partir de la expansión en fracciones parciales $H_a(s)$. Luego tenemos

$$H(s) = \frac{\frac{1}{2}}{s + 0.1 - j3} + \frac{\frac{1}{2}}{s + 0.1 + j3}$$

Por tanto,

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - e^{-0.1T} e^{j3T} z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - e^{-0.1T} e^{-j3T} z^{-1}}$$

Luego como los dos polos son complejos conjugados, podemos combinarlos para formar un filtro de sólo dos polos con la función de sistema

$$H(z) = \frac{1 - (e^{-0.1T} \cos 3T) z^{-1}}{1 - (2e^{-0.1T} \cos 3T) z^{-1} + e^{-0.2T} z^{-1}}$$

El módulo de la respuesta en frecuencia de este filtro se muestra en la Figura 10.3.6 para $T = 0.1$ y $T = 0.5$. Con propósitos de comparación, también hemos representado el módulo de la respuesta en frecuencia del filtro analógico en la Figura 10.3.7. Observe que el *aliasing* es significativamente más predominante cuando $T = 0.5$ que cuando $T = 0.1$. Observe también el desplazamiento de la frecuencia de resonancia cuando T varía.

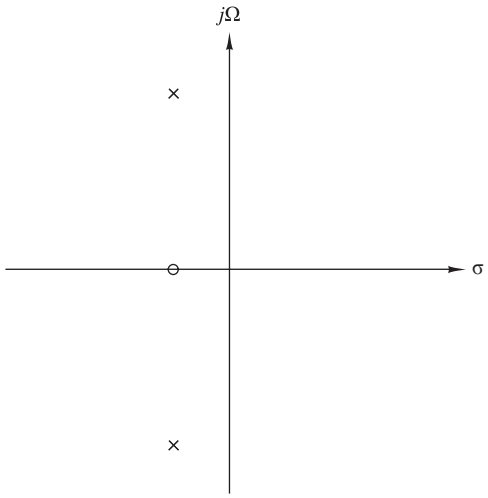


Figura 10.3.5. Posiciones de los polos y los ceros del filtro analógico del Ejemplo 10.3.3.

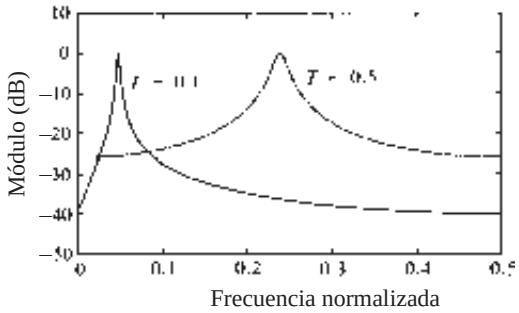


Figura 10.3.6. Respuesta en frecuencia del filtro digital del Ejemplo 10.3.3.

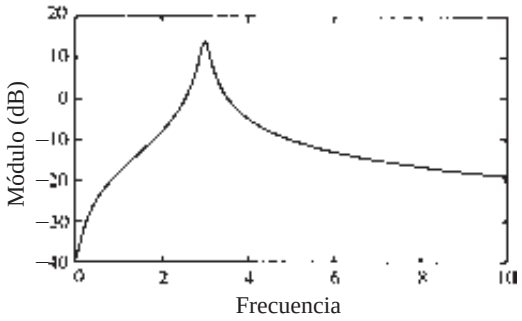


Figura 10.3.7. Respuesta en frecuencia del filtro analógico del Ejemplo 10.3.3.

El ejemplo anterior ilustra la importancia de seleccionar un valor pequeño para T con el fin de minimizar el efecto de *aliasing*. A causa de la presencia del *aliasing*, el método basado en la invarianza del impulso es apropiado para el diseño de solamente filtros paso bajo y paso banda.

10.3.3 Diseño de filtros IIR mediante la transformación bilineal

Las técnicas de diseño de filtros IIR descritas en las dos secciones anteriores presentan serias limitaciones que sólo las hacen apropiadas para los filtros paso bajo y una clase limitada de filtros paso banda.

En esta sección describimos una correspondencia entre el plano s y el plano z, denominada tranformación bilineal, que permite superar la limitación de los otros dos métodos de diseño descritos anteriormente. La transformación bilineal es una correspondencia que transforma el eje $j\Omega$ en la circunferencia unidad en el plano z una sola vez, evitando así el efecto de *aliasing* en las componentes de frecuencia. Además, todos los puntos del semiplano izquierdo s se corresponden con el interior de la circunferencia unidad en el plano z y todos los puntos del semiplano derecho s se corresponden con los puntos externos a la circunferencia unidad en el plano z.

La transformación bilineal puede ligarse a la fórmula trapezoidal de integración numérica. Por ejemplo, consideremos un filtro analógico lineal cuya función de sistema es

$$H(s) = \frac{b}{s+a} \tag{10.3.33}$$

Este sistema también se caracteriza por la ecuación diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t) \tag{10.3.34}$$

En lugar de sustituir la derivada por una diferencia finita, suponga que la integramos y aproximamos la integral mediante la fórmula trapezoidal. Así,

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} y'(\tau)d\tau + y(t_0) \tag{10.3.35}$$

donde $y'(t)$ designa la derivada de $y(t)$. La aproximación de la integral dada en (10.3.35) mediante la fórmula trapezoidal en $t = nT$ y $t_0 = nT - T$ da

$$y(nT) = \frac{T}{2}[y'(nT) + y'(nT-T)] + y(nT-T) \tag{10.3.36}$$

Ahora la ecuación diferencial dada por (10.3.34) evaluada en $t = nT$ proporciona

$$y'(nT) = -ay(nT) + bx(nT) \tag{10.3.37}$$

Utilizamos (10.3.37) para sustituir la derivada dada en (10.3.36) y luego obtenemos una ecuación en diferencias para el sistema discreto en el tiempo equivalente. Con $y(n) \equiv y(nT)$ y $x(n) \equiv x(nT)$, obtenemos el resultado

$$\left(1 + \frac{aT}{2}\right)y(n) - \left(1 - \frac{aT}{2}\right)y(n-1) = \frac{bT}{2}[x(n) + x(n-1)] \tag{10.3.38}$$

La transformada z de esta ecuación en diferencias es

$$\left(1 + \frac{aT}{2}\right)Y(z) - \left(1 - \frac{aT}{2}\right)z^{-1}Y(z) = \frac{bT}{2}(1+z^{-1})X(z)$$

En consecuencia, la función de sistema del filtro digital equivalente es

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(bT/2)(1+z^{-1})}{1 + aT/2 - (1 - aT/2)z^{-1}}$$

o, lo que es lo mismo,

$$H(z) = \frac{b}{\dfrac{2}{T}\left(\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+a} \tag{10.3.39}$$

Evidentemente, la correspondencia entre el plano s y el plano z es

$$s = \frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) \tag{10.3.40}$$

Ésta es la *transformación bilineal*.

Aunque esta deducción de la transformada bilineal se ha desarrollado para una ecuación diferencial de primer orden, en general, se cumple para una ecuación diferencial de orden N.

Para investigar las características de la transformación bilineal, considere

$$\begin{aligned} z &= re^{j\omega} \\ s &= \sigma + j\Omega \end{aligned}$$

Así, la Ecuación (10.3.40) puede expresarse como

$$\begin{aligned} s &= \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \\ &= \frac{2}{T}\frac{re^{j\omega}-1}{re^{j\omega}+1} \\ &= \frac{2}{T}\left(\frac{r^2-1}{1+r^2+2r\cos\omega} + j\frac{2r\operatorname{sen}\omega}{1+r^2+2r\cos\omega}\right) \end{aligned}$$

Luego,

$$\sigma = \frac{2}{T}\frac{r^2-1}{1+r^2+2r\cos\omega} \tag{10.3.41}$$

$$\Omega = \frac{2}{T}\frac{2r\operatorname{sen}\omega}{1+r^2+2r\cos\omega} \tag{10.3.42}$$

Observe en primer lugar que si $r < 1$, entonces $\sigma < 0$, y si $r > 1$, entonces $\sigma > 0$. En consecuencia, el semiplano izquierdo s se corresponde con el interior de la circunferencia unidad en el plano z y el semiplano derecho se corresponde con el exterior de la circunferencia unidad. Si $r = 1$, entonces $\sigma = 0$ y

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{2}{T}\frac{\operatorname{sen}\omega}{1+\cos\omega} \\ &= \frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2} \end{aligned} \tag{10.3.43}$$

o, lo que es equivalente,

$$\omega = 2\tan^{-1}\frac{\Omega T}{2} \tag{10.3.44}$$

la relación definida en (10.3.44) entre las variables de frecuencia en los dos dominios se ilustra en la Figura 10.3.8. Observe que el rango completo de Ω se hace corresponder sólo una vez con el intervalo $-\pi \le \omega \le \pi$.

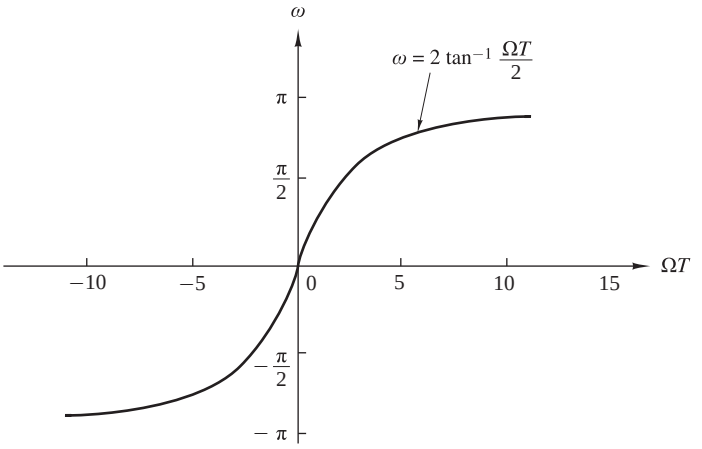


Figura 10.3.8. Correspondencia entre las variables de frecuencia ω y Ω resultante de la transformación bilineal.

Sin embargo, la correspondencia es extremadamente no lineal. Observe que hay una compresión de frecuencia o *deformación de frecuencia*, como normalmente se denomina, debida a la no linealidad de la función arcotangente.

Es interesante destacar también que la transformación bilineal hace corresponder el punto $s = \infty$ con el punto $z = -1$. En consecuencia, el filtro paso bajo de un sólo polo dado por (10.3.33), que tiene un cero en $s = \infty$, da lugar a un filtro digital que tiene un cero en $z = -1$.

EJEMPLO 10.3.4

Convierta el filtro analógico cuya función de sistema es

$$H_a(s) = \frac{s+0.1}{(s+0.1)^2+16}$$

en un filtro digital IIR aplicando la transformación bilineal. El filtro digital tiene una frecuencia de resonancia de $\omega_r = \pi/2$.

Solución. Observe en primer lugar que el filtro analógico tiene una frecuencia de resonancia $\Omega_r = 4$. Esta frecuencia se hace corresponder con $\omega_r = \pi/2$ seleccionando el valor del parámetro T. A partir de la relación (10.3.43), debemos seleccionar $T = \frac{1}{2}$ para obtener $\omega_r = \pi/2$. Luego la correspondencia deseada es

$$s = 4\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

El filtro digital resultante tiene la función de sistema

$$H(z) = \frac{0.128+0.006z^{-1}-0.122z^{-1}}{1+0.0006z^{-1}+0.975z^{-2}}$$

Observe que el coeficiente del término z^{-1} del denominador de $H(z)$ es extremadamente pequeño y se puede aproximar a cero. Luego tenemos la función de sistema

$$H(z) = \frac{0.128+0.006z^{-1}-0.122z^{-2}}{1+0.975z^{-2}}$$

Este filtro tiene polos en

$$p_{1,2} = 0.987e^{\pm j\pi/2}$$

y ceros en

$$z_{1,2} = -1, 0.95$$

Por tanto, hemos diseñado con éxito un filtro de dos polos cuya frecuencia de resonancia está próxima a $\omega = \pi/2$.

En este ejemplo, el parámetro T se ha seleccionado para hacer corresponder la frecuencia de resonancia del filtro análogico con la frecuencia de resonancia del filtro digital. Normalmente, el diseño del filtro digital se inicia con las especificaciones en el dominio digital, lo que implica a la variable de frecuencia ω. Estas especificaciones en frecuencia se convierten al dominio análogico por medio de la relación dada en (10.3.43). El filtro analógico se diseña entonces para que cumpla dichas especificaciones y se convierte en un filtro digital aplicando la transformación bilineal dada en (10.3.40). En este procedimiento, el parámetro T es transparente y puede fijarse en cualquier valor arbitrario (por ejemplo, $T = 1$). El siguiente ejemplo ilustra este punto.

EJEMPLO 10.3.5

Diseñe un filtro digital paso bajo de un sólo polo con un ancho de banda a 3-dB de 0.2π, utilizando la transformación bilineal aplicada al filtro analógico

$$H(s) = \frac{\Omega_c}{s + \Omega_c}$$

donde Ω_c es el ancho de banda a 3-dB del filtro analógico.

Solución. El filtro digital se especifica para que tenga su ganancia a -3-dB se produzca a la frecuencia $\omega_c = 0.2\pi$. En el dominio de la frecuencia, la $\omega_c = 0.2\pi$ del filtro analógico corresponde a

$$\Omega_c = \frac{2}{T}\tan 0.1\pi = \frac{0.65}{T}$$

Luego el filtro analógico tiene la función del sistema

$$H(s) = \frac{0.65/T}{s + 0.65/T}$$

Esta expresión representa nuestro diseño del filtro en el dominio analógico.

Ahora aplicamos la transformación bilineal dada por (10.3.40) para convertir el filtro analógico en el filtro digital deseado. Así, obtenemos

$$H(z) = \frac{0.245(1 + z^{-1})}{1 - 0.509z^{-1}}$$

donde el parámetro T ha sido repartido.

La respuesta en frecuencia del filtro digital es

$$H(\omega) = \frac{0.245(1 + e^{-j\omega})}{1 - 0.509e^{-j\omega}}$$

En $\omega = 0$, $H(0) = 1$, y en $\omega = 0.2\pi$, tenemos $|H(0.2\pi)| = 0.707$, que es la respuesta deseada.

10.3.4 Características de los filtros analógicos más comúnmente utilizados

Como hemos visto anteriormente, los filtros IIR digitales puede obtenerse fácilmente partiendo de un filtro analógico y aplicando a continuación una correspondencia para transformar el plano s en el plano z. De este modo, el diseño de un filtro digital se reduce a diseñar un filtro analógico adecuado y a continuación llevar a

cabo la conversión de $H(s)$ en $H(z)$, de tal forma que se conserve, en la medida de lo posible, la característica deseada del filtro analógico.

El diseño de filtros analógicos es un campo ya muy desarrollado en muchos libros que se ocupan de este tema. En esta sección describiremos brevemente características importantes de los filtros analógicos comúnmente utilizados y veremos los parámetros relevantes de los filtros. Vamos a centrarnos en los filtros paso bajo. A continuación, expondremos varias transfomaciones en frecuencia que convierten un filtro paso bajo prototipo en un filtro paso banda, paso alto o de banda eliminada.

Filtros de Butterworth. Los filtros paso bajo de Butterworth son filtros de sólo polos caracterizados por el módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{1+\varepsilon^2(\Omega/\Omega_p)^{2N}} \tag{10.3.45}$$

donde N es el orden del filtro, Ω_c es su frecuencia a -3-dB (normalmente denominada frecuencia de corte), Ω_p es la frecuencia de corte de la banda de paso y $1/(1+\varepsilon^2)$ es el valor en la frecuencia de corte de la banda de $|H(\Omega)|^2$. Puesto que $H(s)H(-s)$ evaluado en $s = j\Omega$ es simplemente igual a $|H(\Omega)|^2$, se deduce que

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1+(-s^2/\Omega_c^2)^N} \tag{10.3.46}$$

Los polos de $H(s)H(-s)$ se producen en una circunferencia de radio Ω_c en puntos equidistantes. A partir de (10.3.46), tenemos que

$$\frac{-s^2}{\Omega_c^2} = (-1)^{1/N} = e^{j(2k+1)\pi/N}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

y, por tanto,

$$s_k = \Omega_c e^{j\pi/2} e^{j(2k+1)\pi/2N}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{10.3.47}$$

Por ejemplo, la Figura 10.3.9 ilustra las posiciones de los polos para los filtros de Butterworth con $N = 4$ y $N = 5$.

La respuesta en frecuencia de los filtros de Butterworth se muestra en la Figura 10.3.10 para distintos valores de N. Observe que $|H(\Omega)|^2$ es monotónica tanto en la banda de paso como en la banda eliminada. El orden del filtro necesario para tener una atenuación δ_2 en una frecuencia especificada Ω_s se determina fácilmente a partir de (10.3.45). Luego en $\Omega = \Omega_s$, tenemos

$$\frac{1}{1+\varepsilon^2(\Omega_s/\Omega_p)^{2N}} = \delta_2^2$$

y, por tanto,

$$N = \frac{\log[(1/\delta_2^2)-1]}{2\log(\Omega_s/\Omega_c)} = \frac{\log(\delta/\varepsilon)}{\log(\Omega_s/\Omega_p)} \tag{10.3.48}$$

donde, por definición, $\delta_2 = 1/\sqrt{1+\delta^2}$. Así, el filtro de Butterworth queda completamente caracterizado por los parámetros N, δ_2, ε, y la relación Ω_s/Ω_p.

EJEMPLO 10.3.6

Determine el orden y los polos de un filtro paso bajo de Butterworth que tenga un ancho de banda a -3-dB de 500 Hz y una atenuación de 40 dB a 1000 Hz.

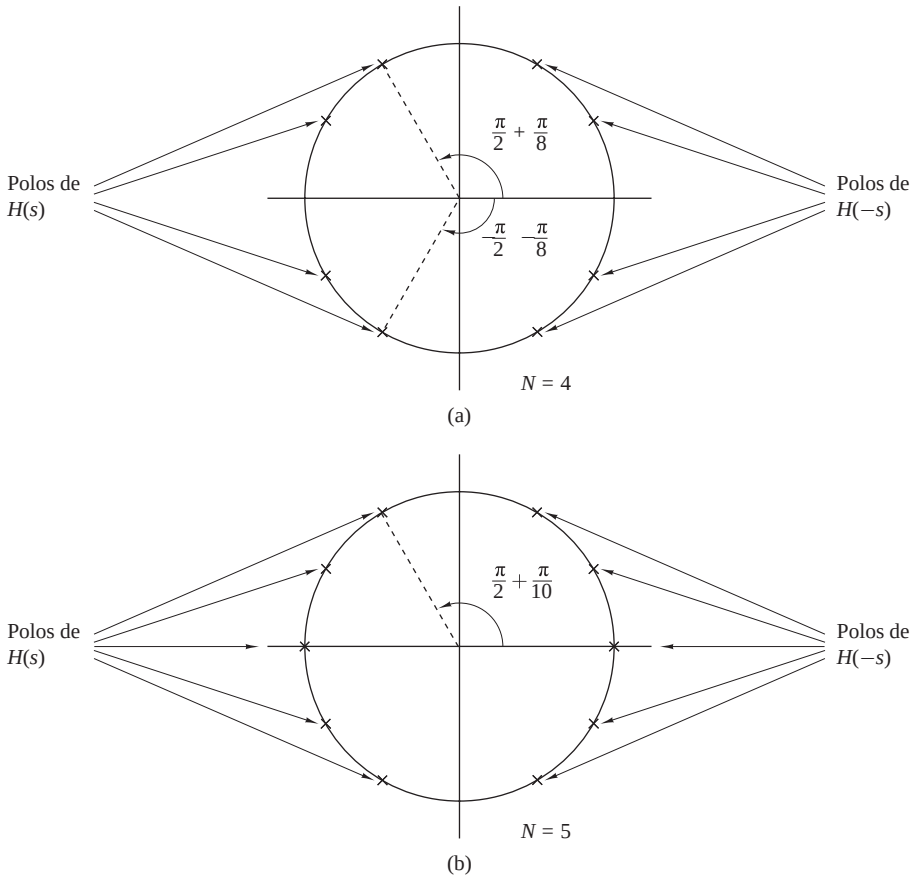


Figura 10.3.9. Posiciones de los polos para los filtros de Butterworth.

Solución. Las frecuencias críticas son la frecuencia a -3-dB Ω_c y las frecuencias de la banda eliminada Ω_s, que son

$$\begin{aligned}\Omega_c &= 1000\pi \\ \Omega_s &= 2000\pi\end{aligned}$$

Para una atenuación de 40 dB, $\delta_2 = 0.01$. Luego a partir de (10.3.48), obtenemos

$$\begin{aligned}N &= \frac{\log_{10}(10^4 - 1)}{2\log_{10} 2} \\ &= 6.64\end{aligned}$$

Para cumplir las especificaciones deseadas, seleccionamos $N = 7$. Las posiciones de los polos son

$$s_k = 1000\pi e^{j[\pi/2+(2k+1)\pi/14]}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 6$$

Filtros de Chebyshev. Existen dos tipos de filtros de Chebyshev. Los filtros de Chebyshev de tipo I son filtros de sólo polos que presentan un rizado constante en la banda de paso y una característica monotónica en la

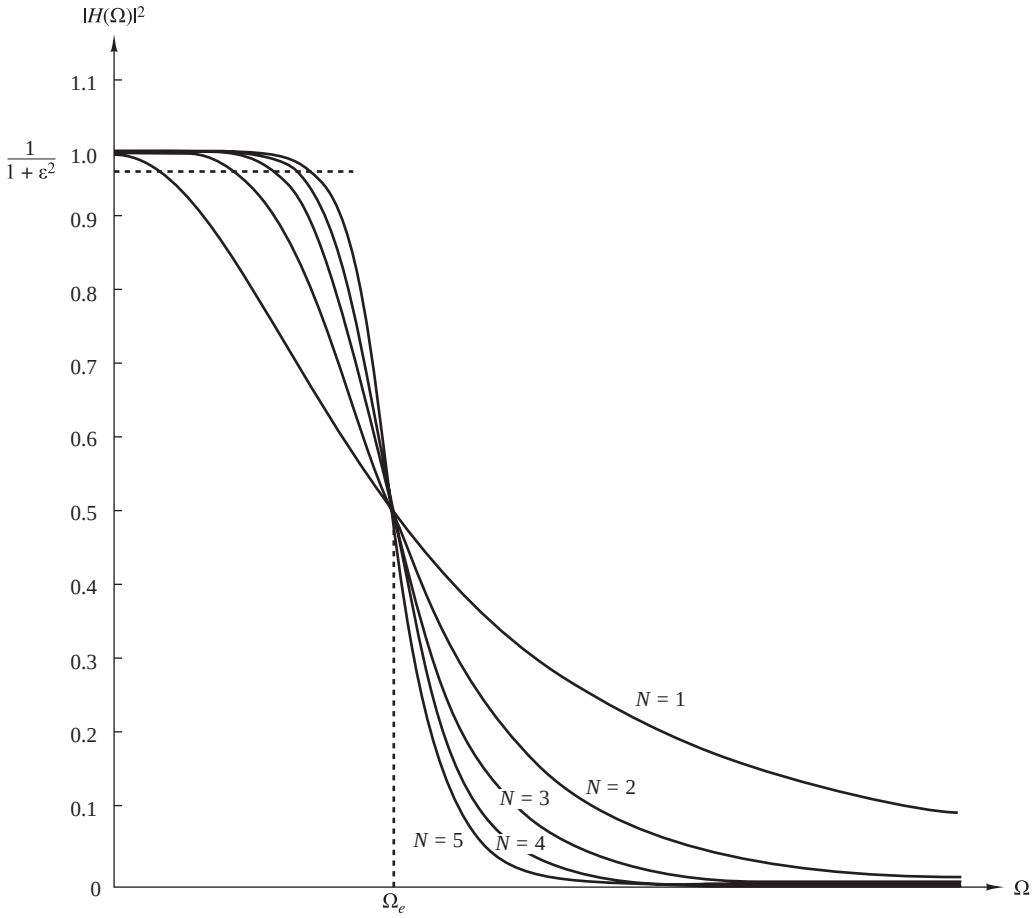


Figura 10.3.10. Respuesta en frecuencia de los filtros de Butterworth.

banda eliminada. Por otro lado, la familia de filtros de Chebyshev de tipo II tienen polos y ceros, y presentan un comportamiento monotónico en la banda de paso y un rizado constante en la banda eliminada. Los ceros de este tipo de filtros se encuentran en el eje imaginario del plano s.

El módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia de un filtro de Chebyshev de tipo I está dado por

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_N^2(\Omega/\Omega_p)} \tag{10.3.49}$$

donde ε es un parámetro del filtro relacionado con el rizado en la banda de paso y $T_N(x)$ es un polinomio de Chebyshev de orden N que se define como

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N\cos^{-1}x), & |x| \le 1 \\ \cosh(N\cosh^{-1}x), & |x| > 1 \end{cases} \tag{10.3.50}$$

Los polinomios de Chebyshev pueden generarse mediante la ecuación recursiva

$$T_{N+1}(x) = 2xT_N(x) - T_{N-1}(x), \qquad N = 1, 2, \ldots \tag{10.3.51}$$

donde $T_0(x) = 1$ y $T_1(x) = x$. A partir de (10.3.51), obtenemos $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, y así sucesivamente.

Algunas de las propiedades de estos polinomios son las siguientes:

1. $|T_N(x)| \leq 1$ para todo $|x| \leq 1$.

2. $T_N(1) = 1$ para todo N.

3. Todas las raíces del polinomio $T_N(x)$ se producen en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$.

El parámetro del filtro ε está relacionado con el rizado en la banda de paso, como se ilustra en la Figura 10.3.11, para N impar y N par. Para N impar, $T_N(0) = 0$ y por tanto $|H(0)|^2 = 1$. Por otro lado, para N par, $T_N(0) = 1$ y por tanto $|H(0)|^2 = 1/(1+\varepsilon^2)$. En la frecuencia de corte de la banda $\Omega = \Omega_p$, tenemos $T_N(1) = 1$, de modo que

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = 1 - \delta_1$$

o, lo que es equivalente,

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{(1-\delta_1)^2} - 1 \tag{10.3.52}$$

donde δ_1 es el valor del rizado en la banda de paso.

Los polos del filtro de Chebyshev de tipo I se encuentran sobre una elipse en el plano s cuyo eje mayor es

$$r_1 = \Omega_p \frac{\beta^2 + 1}{2\beta} \tag{10.3.53}$$

y el eje menor es

$$r_2 = \Omega_p \frac{\beta^2 - 1}{2\beta} \tag{10.3.54}$$

donde β está relacionado con ε según a la ecuación

$$\beta = \left[\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}+1}{\varepsilon}\right]^{1/N} \tag{10.3.55}$$

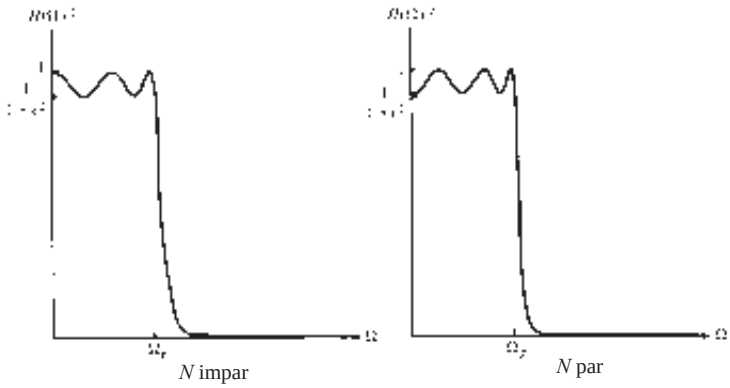


Figura 10.3.11. Filtro de Chebyshev de tipo I.

Las posiciones de los polos pueden determinarse fácilmente para un filtro de orden N calculando en primer lugar los polos para un filtro de Butterworth equivalente de orden N que caen sobre circunferencias de radio r_1 o radio r_2, como puede verse en la Figura 10.3.12. Si designamos las posiciones angulares de los polos del filtro de Butterworth como

$$\phi_k = \frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2N}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \tag{10.3.56}$$

entonces las posiciones de los polos del filtro de Chebyshev caen sobre la elipse en las coordenadas (x_k, y_k), $k = 0, 1, \ldots, N-1$, donde

$$\begin{aligned} x_k &= r_2 \cos\phi_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \\ y_k &= r_1 \operatorname{sen}\phi_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \end{aligned} \tag{10.3.57}$$

Un filtro de Chebyshev de tipo II contiene tanto ceros como polos. El módulo al cuadrado de su respuesta en frecuencia está dado por

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 [T_N^2(\Omega_s/\Omega_p)/T_N^2(\Omega_s/\Omega)]} \tag{10.3.58}$$

donde $T_N(x)$ es, de nuevo, el polinomio de Chebyshev de orden N y Ω_s es la frecuencia de la banda eliminada como se ilustra en la Figura 10.3.13. Los ceros se encuentran sobre el eje imaginario en los puntos

$$s_k = j\frac{\Omega_s}{\operatorname{sen}\phi_k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{10.3.59}$$

Los polos se localizan en los puntos (v_k, w_k), donde

$$v_k = \frac{\Omega_s x_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{10.3.60}$$

$$w_k = \frac{\Omega_s y_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{10.3.61}$$

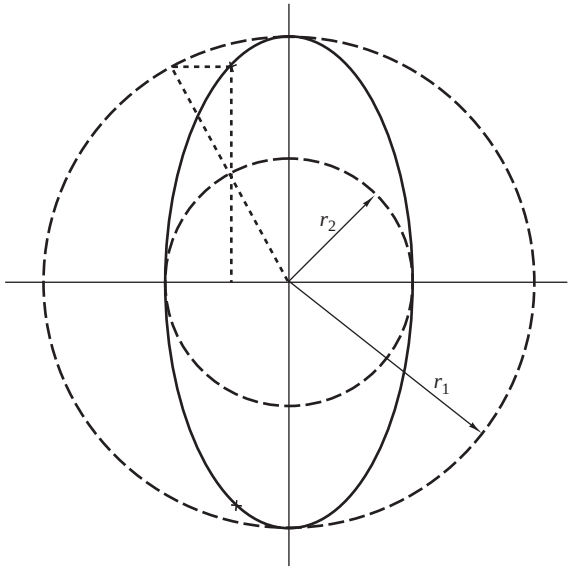


Figura 10.3.12. Determinación de las posiciones de los polos en un filtro de Chebyshev.

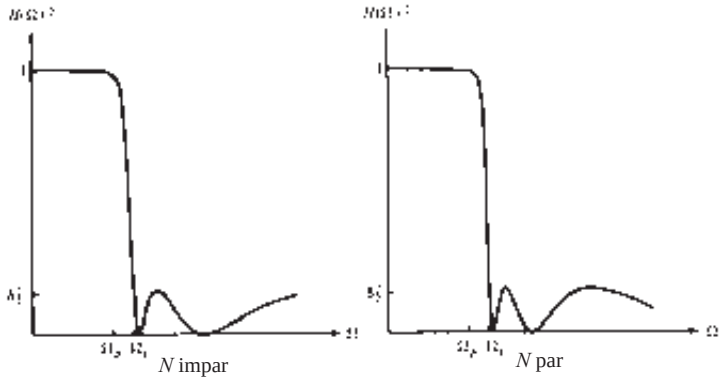


Figura 10.3.13. Filtros de Chebyshev de tipo II.

donde $\{x_k\}$ e $\{y_k\}$ se definen en (10.3.57) estando β relacionada con el rizado en la banda eliminada a través de la ecuación

$$\beta = \left[\frac{1+\sqrt{1-\delta_2^2}}{\delta_2}\right]^{1/N} \tag{10.3.62}$$

A partir de esta descripción, observe que los filtros de Chebyshev están caracterizados por los parámetros N, ε, δ_2 y la relación Ω_s/Ω_p. Para un conjunto dado de especificaciones de ε, δ_2 y Ω_s/Ω_p, podemos determinar el orden del filtro mediante la ecuación

$$\begin{aligned} N &= \frac{\log\left[\left(\sqrt{1-\delta_2^2}+\sqrt{1-\delta_2^2(1+\varepsilon^2)}\right)/\varepsilon\delta_2\right]}{\log\left[(\Omega_s/\Omega_p)+\sqrt{(\Omega_s/\Omega_p)^2-1}\right]} \\ &= \frac{\cosh^{-1}(\delta/\varepsilon)}{\cosh^{-1}(\Omega_s/\Omega_p)} \end{aligned} \tag{10.3.63}$$

donde, por definición, $\delta_2 = 1/\sqrt{1+\delta^2}$.

EJEMPLO 10.3.7

Determine el orden y los polos de un filtro paso bajo de Chebyshev de tipo I que tiene un rizado de 1-dB en la banda de paso, una frecuencia de corte $\Omega_p = 1000\pi$, una frecuencia de banda eliminada igual a 2000π y una atenuación de 40 dB o mayor para $\Omega \geq \Omega_s$.

Solución. En primer lugar, determinamos el orden del filtro. Así,

$$\begin{aligned} 10\log_{10}(1+\varepsilon^2) &= 1 \\ 1+\varepsilon^2 &= 1.259 \\ \varepsilon^2 &= 0.259 \\ \varepsilon &= 0.5088 \end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned} 20\log_{10}\delta_2 &= -40 \\ \delta_2 &= 0.01 \end{aligned}$$

Por tanto, a partir de (10.3.63) obtenemos

$$N = \frac{\log_{10} 196.54}{\log_{10}(2+\sqrt{3})} = 4.0$$

Luego un filtro de Chebyshev de tipo I que tiene cuatro polos cumple las especificaciones.

Las posiciones de los polos se determinan a partir de las relaciones (10.3.53) hasta (10.3.57). En primer lugar, calculamos β, r_1 y r_2. Así,

$$\begin{aligned} \beta &= 1.429 \\ r_1 &= 1.06\Omega_p \\ r_2 &= 0.365\Omega_p \end{aligned}$$

Los ángulos $\{\phi_k\}$ son

$$\phi_k = \frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{8}, \qquad k = 0,1,2,3$$

Por tanto, los polos se ubican en

$$\begin{aligned} x_1 + jy_1 &= -0.1397\Omega_p \pm j0.979\Omega_p \\ x_2 + jy_2 &= -0.337\Omega_p \pm j0.4056\Omega_p \end{aligned}$$

Las especificaciones del filtro del Ejemplo 10.3.7 son muy similares a las especificaciones dadas en el Ejemplo 10.3.6, las cuales implican el diseño de un filtro de Butterworth. En este caso, el número de polos necesario para cumplir las especificaciones era de siete. Por el contrario, el filtro de Chebyshev requiere sólo cuatro. Este resultado es típico en tales comparaciones. En general, el filtro de Chebyshev cumple las especificaciones con muchos menos polos que el correspondiente filtro de Butterworth. Alternativamente, si comparamos un filtro de Butterworth con un filtro de Chebyshev que tengan el mismo número de polos y las mismas especificaciones para las banda de paso y eliminada, el filtro de Chebyshev tendrá una banda de transición más pequeña. Si el lector desea ver una tabulación de las características de los filtros de Chebyshev y de sus posiciones de polos y ceros, puede consultar el manual de Zverev (1967).

Filtros elípticos. Los filtros elípticos (o de Cauer) presentan un rizado constante en la banda de paso y en la banda eliminada como se muestra en la Figura 10.3.14 para N impar y N par. Este tipo de filtros presenta tanto polos como ceros y se caracteriza por tener el módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 U_N(\Omega/\Omega_p)} \tag{10.3.64}$$

donde $U_N(x)$ es la función elíptica jacobiana de orden N, la cual está tabulada en el documento de Zverev (1967), y ε es un parámetro relacionado con el rizado de la banda de paso. Los ceros se sitúan sobre el eje $j\Omega$.

Como hemos visto al estudiar los filtros FIR, los diseños más eficientes se obtienen cuando se extiende el error de aproximación igualmente en la banda de paso y la banda eliminada. Los filtros elípticos consiguen este objetivo y, en consecuencia, son los más eficientes desde el punto de vista de conseguir el filtro de orden mínimo para un conjunto dado de especificaciones. Así, podemos decir que para un determinado orden y un conjunto de especificaciones dado, un filtro elíptico es el que tiene la banda de transición más pequeña.

El orden del filtro necesario para obtener un determinado conjunto de especificaciones para el rizado de la banda de paso δ_1, el rizado de la banda eliminada δ_2 y la relación de transición Ω_p/Ω_s está dado por

$$N = \frac{K(\Omega_p/\Omega_s)K\left(\sqrt{1-(\varepsilon^2/\delta^2)}\right)}{K(\varepsilon/\delta)K\left(\sqrt{1-(\Omega_p/\Omega_s)^2}\right)} \tag{10.3.65}$$

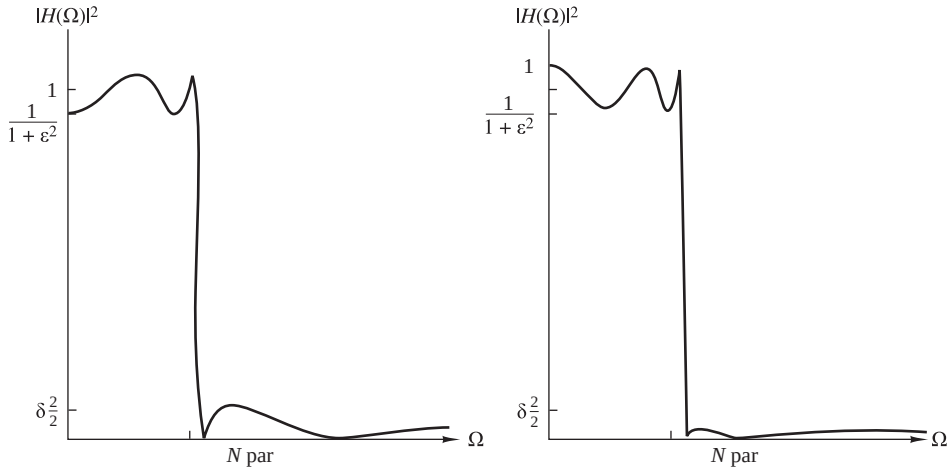


Figura 10.3.14. Cuadrado del módulo de la respuesta en frecuencia de los filtros elípticos.

donde $K(x)$ es la integral elíptica completa de primera clase, definida como

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - x^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} \tag{10.3.66}$$

y $\delta_2 = 1/\sqrt{1+\delta^2}$. Los valores de esta integral están tabulados en numerosos libros de texto, como por ejemplo, los libros de Jahnke y Emde (1945) y Dwight (1957)]. El rizado de la banda de paso es $10\log_{10}(1+\varepsilon^2)$.

No vamos a describir las funciones elípticas en detalle porque queda fuera del ámbito del libro. Baste con decir que hay disponibles programas software para diseñar filtros elípticos a partir de las especificaciones de frecuencia indicadas anteriormente.

En vista de lo óptimos que resultan los filtros elípticos, el lector puede plantearse por qué tener en cuenta los filtros de Butterworth o de Chebyshev en las aplicaciones prácticas. Una razón importante por la que estos tipos de filtros pueden resultar preferibles en determinadas aplicaciones es que poseen mejores respuestas en fases. La fase de la respuesta de los filtros elípticos es menos lineal en la banda de paso que en el caso de un filtro de Butterworth o de Chebyshev comparable, especialmente cerca de la frecuencia de corte de la banda.

Filtros de Bessel. Los filtros de Bessel son filtros de sólo polos caracterizados por la función de sistema

$$H(s) = \frac{1}{B_N(s)} \tag{10.3.67}$$

donde $B_N(s)$ es el polinomio de Bessel de orden N. Estos polinomios pueden expresarse en la forma

$$B_N(s) = \sum_{k=0}^{N} a_k s^k \tag{10.3.68}$$

donde los coeficientes $\{a_k\}$ están dados por

$$a_k = \frac{(2N-k)!}{2^{N-k} k!(N-k)!}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N \tag{10.3.69}$$

Alternativamente, los polinomios de Bessel pueden generarse de forma recursiva a partir de la relación

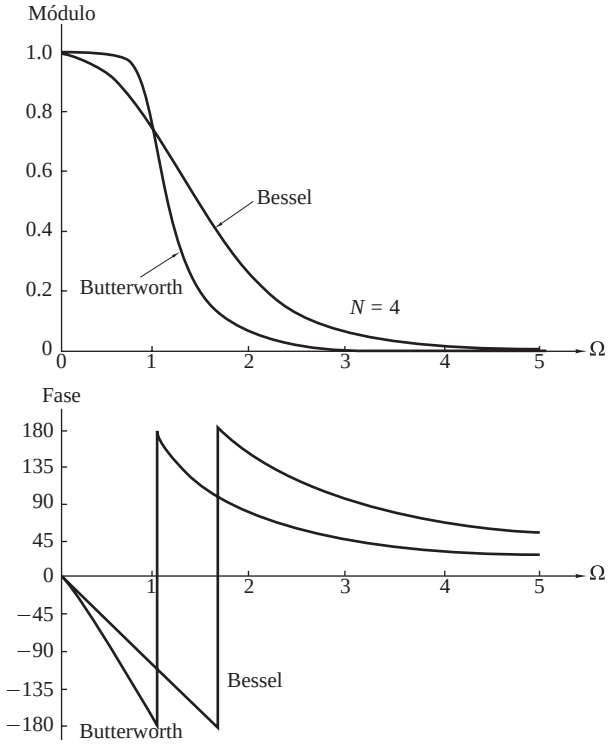


Figura 10.3.15. Módulo y fase de las respuestas de los filtros de Bessel y Butterworth de orden $N = 4$.

$$B_N(s) = (2N-1)B_{N-1}(s) + s^2 B_{N-2}(s) \tag{10.3.70}$$

con $B_0(s) = 1$ y $B_1(s) = s + 1$ como condiciones iniciales.

Una importante característica de los filtros de Bessel es la fase lineal de su respuesta en la banda de paso. Por ejemplo, la Figura 10.3.15 muestra una comparación del módulo y la fase de las respuestas de un filtro de Bessel y de un filtro de Butterworth de orden $N = 4$. Observe que el filtro de Bessel tiene una banda de transición más grande, pero su fase es lineal dentro de la banda de paso. Sin embargo, debemos destacar que la fase lineal del filtro analógico se pierde en el proceso de conversión del filtro al dominio digital por medio de de las transformaciones descritas anteriormente.

10.3.5 Algunos ejemplos de diseños de filtros digitales basados en la transformación bilineal

En esta sección vamos a presentar varios ejemplos de diseños de filtros digitales obtenidos a partir de filtros analógicos aplicando la transformación bilineal para convertir $H(s)$ en $H(z)$. Estos diseños de filtros deben realizarse con la ayuda de alguno de los diversos paquetes de software disponibles actualmente que se pueden utilizar en una computadora personal.

Un filtro paso bajo está diseñado para cumplir las especificaciones siguientes: un rizado máximo de $\frac{1}{2}$ dB en la banda de paso, 60-dB de atenuación en la banda eliminada, una frecuencia de corte en la banda de paso $\omega_p = 0.25\pi$ y una frecuencia de corte en la banda eliminada $\omega_s = 0.30\pi$.

Se necesita un filtro de Butterworth de orden $N = 37$ para satisfacer las especificaciones. Su respuesta en frecuencia se ilustra en la Figura 10.3.16. Si se utiliza un filtro de Chebyshev, un filtro de orden $N = 13$ satisfará

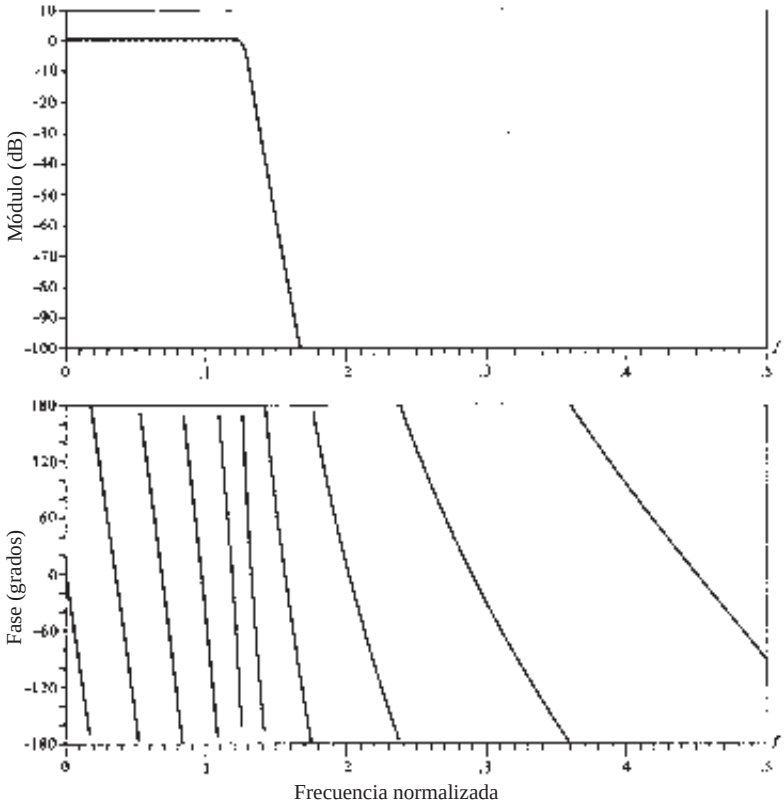


Figura 10.3.16. Respuesta en frecuencia de un filtro de Butterworth de orden 37.

las especificaciones. En la Figura 10.3.17 se muestra la respuesta en frecuencia de un filtro de Chebyshev de tipo I. El filtro presenta un rizado en la banda de paso de 0.31 dB. Por último, se diseña un filtro elíptico de orden $N = 7$ que también satisface las especificaciones. Con propósitos ilustrativos, en la Tabla 10.6, se incluyen los valores numéricos de los parámetros del filtro y las especificaciones en frecuencia resultantes se muestran en la Figura 10.3.18. En la función $H(z)$ utilizamos la siguiente notación para los parámetros:

$$H(z) = \prod_{i=1}^{K} \frac{b(i,0) + b(i,1)z^{-1} + b(i,2)z^{-2}}{1 + a(i,1)z^{-1} + a(i,2)z^{-2}} \tag{10.3.71}$$

Aunque en la sección anterior sólo hemos descrito filtros analógicos paso bajo, es sencillo convertir un filtro analógico paso bajo en un filtro analógico paso banda, de banda eliminada o paso alto aplicando una tranformación en frecuencia como se ha descrito en la Sección 10.4. La transformación bilineal se aplica entonces para convertir el filtro analógico en el filtro digital equivalente. Como en el caso de los filtros paso bajo descritos anteriormente, el diseño completo puede llevarse a cabo en una computadora.

10.4 Transformaciones en frecuencia

La sección anterior se ha centrado principalmente en el diseño de filtros IIR paso bajo. Si deseamos diseñar un filtro paso alto, o paso banda o de banda eliminada, basta con partir del filtro paso bajo prototipo (Butterworth, Chebyshev, elíptico, Bessel) y realizar una transformación en frecuencia.

```
            IIR (INFINITE IMPULSE RESPONSE
                FILTRO ELÍPTICO PASO BAJO
               COEFICIENTES NO CUANTIFICADOS
ORDEN DEL FILTRO = 7
FRECUENCIA DE MUESTREO = 2.000 KILOHERCIOS
I.  A(I, 1)     A(I, 2)   B(I, 0)   B(I, 1)    B(I, 2)
1    -.790103   .000000   .104948    .104948   .000000
2   -1.517223   .714088   .102450   -.007817   .102232
3   -1.421773   .861895   .420100   -.399842   .419864
4   -1.387447   .962252   .714929   -.826743   .714841
     *** CARACTERÍSTICAS DEL FILTRO DISEÑADO ***
                 BANDA 1      BANDA 2
FRECUENCIA DE CORTE INFERIOR    .00000      .30000
FRECUENCIA DE CORTE SUPERIOR    .25000     1.00000
GANANCIA NOMINAL      1.00000      .00000
RIZADO NOMINAL     .05600      .00100
RIZADO MÁXIMO     .04910      .00071
RIZADO EN DB       .41634   -63.00399
```

Tabla 10.6. Coeficientes de un filtro elíptico de orden 7.

Una posibilidad consiste en realizar la transformación en frecuencia en el dominio analógico y luego convertir el filtro analógico en el correspondiente filtro digital estableciendo una correspondencia entre el plano s y el plano z. Un método alternativo consiste en convertir primero el filtro paso bajo analógico en un filtro paso bajo digital y luego transformarlo en el filtro digital deseado mediante una transformación digital. En general, estos dos métodos proporcionan resultados diferentes, excepto para la transformación bilineal, en cuyo caso los filtros resultantes son idénticos. Estos dos métodos se describen a continuación.

10.4.1 Transformaciones de frecuencia en el dominio analógico

En primer lugar, consideraremos las transformaciones en frecuencia en el dominio analógico. Suponga que disponemos de un filtro paso bajo con una frecuencia de corte en la banda de paso Ω_p y deseamos convertirlo en otro filtro paso bajo cuya frecuencia de corte en la banda de paso sea Ω'_p. La transformación que cumple esto es

$$s \longrightarrow \frac{\Omega_p}{\Omega'_p} s, \qquad \text{(paso bajo a paso bajo)} \tag{10.4.1}$$

Así obtenemos un filtro paso cuya función de sistema es $H_l(s) = H_p[(\Omega_p/\Omega'_p)s]$, donde $H_p(s)$ es la función de sistema del filtro prototipo con una frecuencia de corte en la banda de paso Ω_p.

Si deseamos convertir un filtro paso bajo en un filtro paso alto con una frecuencia de corte de la banda de paso Ω'_p, la transformación deseada es

$$s \longrightarrow \frac{\Omega_p \Omega'_p}{s}, \qquad \text{(paso bajo a paso alto)} \tag{10.4.2}$$

La función de sistema del filtro paso es $H_h(s) = H_p(\Omega_p \Omega'_p/s)$.

La transformación para convertir un filtro paso bajo analógico con una frecuencia de corte en la banda de paso Ω_c en un filtro que tenga una frecuencia de corte inferior Ω_l y una frecuencia de corte superior Ω_u, puede

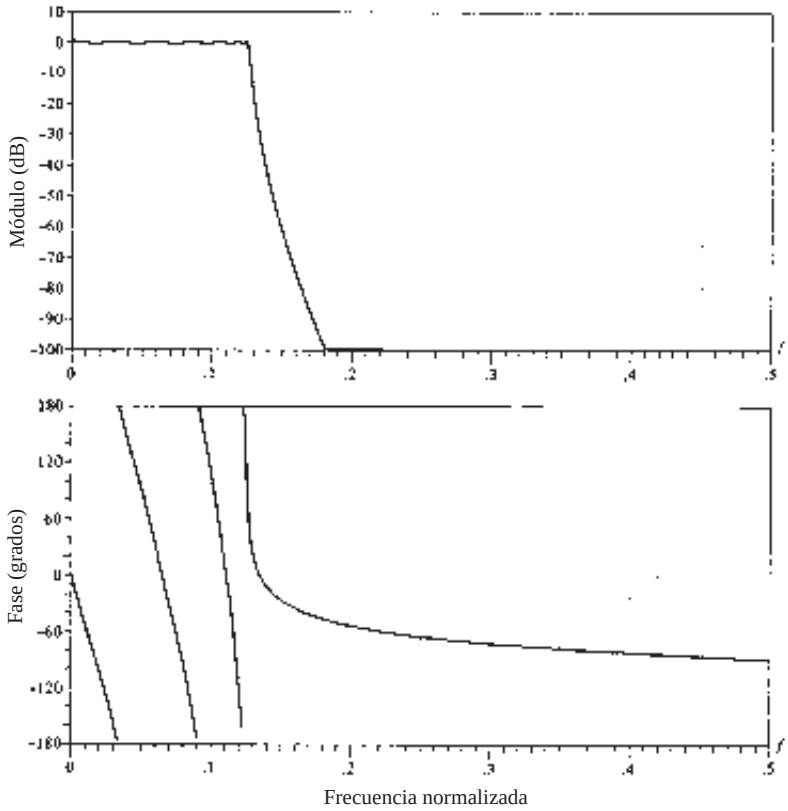


Figura 10.3.17. Respuesta en frecuencia de un filtro de Chebyshev de tipo I de orden 13.

llevarse a cabo convirtiendo primero el filtro paso bajo en otro filtro paso bajo que tenga una frecuencia de corte $\Omega'_p = 1$ y luego aplicar la transformación

$$s \longrightarrow \frac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)}, \qquad \text{(paso bajo a paso banda)} \tag{10.4.3}$$

Igualmente podemos obtener el mismo resultado en un sólo paso por medio de la transformación

$$s \longrightarrow \Omega_p \frac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)}, \qquad \text{(paso bajo a paso banda)} \tag{10.4.4}$$

donde

$$\Omega_l = \text{frecuencia de corte inferior}$$
$$\Omega_u = \text{frecuencia de corte superior}$$

Así, obtenemos

$$H_b(s) = H_p\left(\Omega_p \frac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)}\right)$$

Por último, si deseamos convertir un filtro paso bajo analógico con una frecuencia de corte Ω_p en un filtro de banda eliminada, la transformación consiste simplemente en aplicar la inversa de (10.4.3) con el factor adicional Ω_p que sirve para normalizar la frecuencia de corte del filtro paso bajo. Luego la transformación es

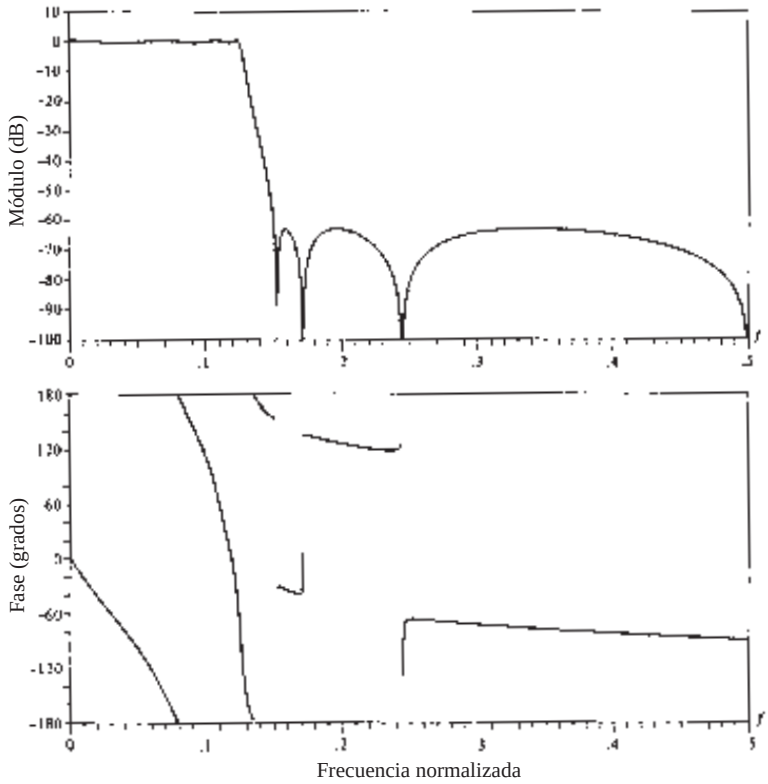


Figura 10.3.18. Respuesta en frecuencia de un filtro elíptico de orden 7.

$$s \longrightarrow \Omega_p \frac{s(\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_u \Omega_l}, \qquad \text{(paso bajo a banda eliminada)} \tag{10.4.5}$$

lo que nos lleva a

$$H_{bs}(s) = H_p\left(\Omega_p \frac{s(\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_u \Omega_l}\right)$$

Las correspondencias dadas en (10.4.1), (10.4.2), (10.4.3) y (10.4.5) se resumen en la Tabla 10.7. Las correspondencias (10.4.4) y (10.4.5) son no lineales y puede aparecer distorsión en la respuesta en frecuencia del filtro paso bajo. Sin embargo, los efectos de la no linealidad en la respuesta en frecuencia son menores y afecta principalmente a la escala de frecuencias conservando la característica de amplitud del filtro. Por tanto, un filtro paso bajo con rizado constante se transforma en un filtro paso alto, paso banda o de banda eliminada con rizado constante.

EJEMPLO 10.4.1

Transforme el filtro paso bajo de un sólo polo de Butterworth con la función de sistema

$$H(s) = \frac{\Omega_p}{s + \Omega_p}$$

en un filtro paso banda cuyas frecuencias de corte superior e inferior son Ω_u y Ω_l, respectivamente.

Tipo de transformación	Transformación	Frecuencias de corte del nuevo filtro
Paso bajo	$s \longrightarrow \dfrac{\Omega_p}{\Omega'_p} s$	Ω'_p
Paso alto	$s \longrightarrow \dfrac{\Omega_p \Omega'_p}{s}$	Ω'_p
Paso banda	$s \longrightarrow \Omega_p \dfrac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)}$	Ω_l, Ω_u
Banda eliminada	$s \longrightarrow \Omega_p \dfrac{s(\Omega_u - \Omega_c)}{s^2 + \Omega_u \Omega_l}$	Ω_l, Ω_u

Tabla 10.7. Transformaciones en frecuencia para filtros analógicos (el filtro paso bajo prototipo tiene una frecuencia de corte Ω_p).

Solución. La transformación deseada está dada por (10.4.4). Luego tenemos

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{\dfrac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)} + 1} \\ &= \frac{(\Omega_u - \Omega_l)s}{s^2 + (\Omega_u - \Omega_l)s + \Omega_l \Omega_u} \end{aligned}$$

El filtro resultante tiene un cero en $s = 0$ y polos en

$$s = \frac{-(\Omega_u - \Omega_l) \pm \sqrt{\Omega_u^2 + \Omega_l^2 - 6\Omega_u \Omega_l}}{2}$$

10.4.2 Transformaciones de frecuencia en el dominio digital

Como en el dominio analógico, las transformaciones de frecuencia pueden realizarse en un filtro paso bajo digital para convertirlo en un filtro paso alto, de banda eliminada o paso banda. La transformación implica reemplazar la variable z^{-1} por una función racional $g(z^{-1})$, que debe satisfacer las siguientes propiedades:

1. La correspondencia $z^{-1} \longrightarrow g(z^{-1})$ debe hacer corresponder los puntos del interior de la circunferencia unidad en el plano z con ellos mismos.
2. La circunferencia unidad también debe corresponderse consigo misma.

La condición (2) implica que para $r = 1$,

$$\begin{aligned} e^{-j\omega} &= g(e^{-j\omega}) \equiv g(\omega) \\ &= |g(\omega)| e^{j\arg[g(\omega)]} \end{aligned}$$

Es evidente que $|g(\omega)| = 1$ para todo ω. Es decir, la correspondencia tiene que ser paso todo. Por tanto, tiene la forma

Tipo de transformación	Transformación	Parámetros
Paso bajo	$z^{-1} \longrightarrow \dfrac{z^{-1}-a}{1-az^{-1}}$	$\omega'_p =$ frecuencia de corte del nuevo filtro $a = \dfrac{\text{sen}[(\omega_p-\omega'_p)/2]}{\text{sen}[(\omega_p+\omega'_p)/2]}$
Paso alto	$z^{-1} \longrightarrow -\dfrac{z^{-1}+a}{1+az^{-1}}$	$\omega'_p =$ frecuencia de corte del nuevo filtro $a = -\dfrac{\cos[(\omega_p+\omega'_p)/2]}{\cos[(\omega_p-\omega'_p)/2]}$
Paso banda	$z^{-1} \longrightarrow -\dfrac{z^{-2}-a_1z^{-1}+a_2}{a_2z^{-2}-a_1z^{-1}+1}$	$\omega_l =$ frecuencia de corte inferior $\omega_u =$ frecuencia de corte superior $a_1 = 2\alpha K/(K+1)$ $a_2 = (K-1)/(K+1)$ $\alpha = \dfrac{\cos[(\omega_u+\omega_l)/2]}{\cos[(\omega_u-\omega_l)/2]}$ $K = \cot\dfrac{\omega_u-\omega_l}{2}\tan\dfrac{\omega_p}{2}$
Banda eliminada	$z^{-1} \longrightarrow \dfrac{z^{-2}-a_1z^{-1}+a_2}{a_2z^{-1}-a_1z^{-1}+1}$	$\omega_l =$ frecuencia de corte inferior $\omega_u =$ frecuencia de corte superior $a_1 = 2\alpha/(K+1)$ $a_2 = (1-K)/(1+K)$ $\alpha = \dfrac{\cos[(\omega_u+\omega_l)/2]}{\cos[(\omega_u-\omega_l)/2]}$ $K = \tan\dfrac{\omega_u-\omega_l}{2}\tan\dfrac{\omega_p}{2}$

Tabla 10.8. Transformación de frecuencia para filtros digitales (el filtro paso bajo prototipo tiene una frecuencia de corte ω_p).

$$g(z^{-1}) = \pm\prod_{k=1}^{n}\frac{z^{-1}-a_k}{1-a_kz^{-1}} \tag{10.4.6}$$

donde $|a_k| < 1$ para garantizar que un filtro estable se transforma en otro filtro estable (es decir, para satisfacer la condición 1).

A partir de la forma general dada en (10.4.6), obtenemos el conjunto deseado de transformaciones digitales para convertir un filtro paso bajo digital prototipo en otro filtro digital paso bajo o paso banda, de banda eliminada o paso banda. Estas transformaciones se han tabulado en la Tabla 10.8.

EJEMPLO 10.4.2

Convierta el filtro paso bajo de un solo polo de Butterworth cuya función de sistema es

$$H(z) = \frac{0.245(1+z^{-1})}{1-0.509z^{-1}}$$

en un filtro paso banda con frecuencias de corte superior e inferior ω_u y ω_l, respectivamente. El filtro paso bajo tiene un ancho de banda a 3-dB igual a $\omega_p = 0.2\pi$ (*véase* el Ejemplo 10.3.5).

Solución. La transformación deseada es

$$z^{-1} \longrightarrow -\frac{z^{-2} - a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-2} - a_1 z^{-1} + 1}$$

donde a_1 y a_2 están definidos en la Tabla 10.8. Sustituyendo en $H(z)$ tenemos

$$H(z) = \frac{0.245\left[1 - \dfrac{z^{-2} - a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-2} - a_1 z^{-1} + 1}\right]}{1 + 0.509\left(\dfrac{z^{-2} - a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-2} - a_1 z^{-1} + 1}\right)}$$

$$= \frac{0.245(1 - a_2)(1 - z^{-2})}{(1 + 0.509a_2) - 1.509a_1 z^{-1} + (a_2 + 0.509)z^{-2}}$$

Observe que el filtro resultante tiene ceros en $z = \pm 1$ y un par de polos que dependen de la elección de ω_u y ω_l.

Por ejemplo, suponga que $\omega_u = 3\pi/5$ y $\omega_l = 2\pi/5$. Puesto que $\omega_p = 0.2\pi$, tenemos que $K = 1$, $a_2 = 0$ y $a_1 = 0$. Luego

$$H(z) = \frac{0.245(1 - z^{-2})}{1 + 0.509z^{-2}}$$

Este filtro tiene polos en $z = \pm j0.713$ y por tanto resuena en la frecuencia $\omega = \pi/2$.

Dado que una transformación de frecuencia puede realizarse en el dominio analógico o en el dominio digital, el diseñador del filtro tiene la posibilidad de elegir qué método utilizar. Sin embargo, debe tener cuidado a la hora de elegir el método dependiendo del tipo de filtro que vaya a diseñar. En particular, sabemos que el método basado en la invarianza del impulso y el de la correspondencia de derivadas son inapropiados para diseñar filtros paso alto y muchos filtros paso banda, debido al problema del *aliasing*. En consecuencia, no debe emplearse una transformación de frecuencia en el dominio analógico seguida de la conversión del resultado en el dominio digital utilizando estas dos correspondencias. En su lugar, es mucho mejor aplicar la correspondencia entre un filtro paso bajo analógico y un filtro paso bajo digital y luego realizar la transformación de frecuencia en el dominio digital. Así se evita el problema del *aliasing*.

En el caso de la transformación bilineal, donde el *aliasing* no es un problema, independientemente de si la transformación de frecuencia se realiza en el dominio analógico o en el dominio digital. De hecho, sólo en este caso los dos métodos dan como resultado filtros digitales idénticos.

10.5 Resumen y referencias

Hemos descrito con cierto detalle las técnicas más importantes para diseñar filtros FIR e IIR basados en especificaciones en el dominio de la frecuencia expresadas en función de la respuesta en frecuencia deseada $H_d(\omega)$ o en la respuesta al impulso deseada $h_d(n)$.

Por regla general, los filtros FIR se utilizan en aplicaciones en las que se necesita un filtro de fase lineal. Este requisito se precisa en muchas aplicaciones, especialmente en el campo de las telecomunicaciones, en el que hay que separar (demultiplexar) señales de datos, por ejemplo, que han sido multiplexadas por división de frecuencia, sin distorsionar dichas señales en el proceso de demultiplexación. De los diversos métodos descritos para el diseño de filtros FIR, el método de diseño basado en el muestreo de frecuencia y la aproximación óptima de Chebyshev proporcionan los mejores resultados.

Los filtros IIR se emplean generalmente en aplicaciones en las que la distorsión de fase es tolerable. De entre los tipos de filtros IIR, los elípticos son los más eficientes a la hora de implementarlos en el sentido de que dado un conjunto de especificaciones, un filtro elíptico es el de menor orden o tiene menos coeficientes que cualquier otro tipo de filtro IIR. Si se compara con los filtros FIR, el filtro elíptico también es considerablemente más eficiente. En vista de esto, puede considerarse el uso de un filtro elíptico para obtener la selectividad de frecuencia deseada, seguido de un ecualizador de fase paso todo que compense la distorsión de fase producida por el filtro elíptico. Sin embargo, esto da como resultado filtros con una cantidad de coeficientes de la combinación en cascada que es igual o mayor que la cantidad de coeficientes de un filtro FIR de fase lineal equivalente. En consecuencia, no se consigue ninguna reducción en la complejidad de cálculo con la utilización de filtros elípticos con ecualización de fase.

Existe actualmente mucha literatura dedicada al diseño de filtros digitales no siendo posible citar todas las referencias importantes, por lo que sólo vamos a enumerar unas pocas. Algunos de los primeros trabajos sobre diseño de filtros digitales fueron realizados por Kaiser (1963, 1966), Steiglitz (1965), Golden y Kaiser (1964), Rader y Gold (1967a), Shanks (1967), Helms (1968), Gibbs (1969, 1970) y, Gold y Rader (1969).

El diseño de filtros analógicos se trata en los libros clásicos de Storer (1957), Guillemin (1957), Weinberg (1962) y Daniels (1974).

El método basado en el muestreo en frecuencia para diseñar filtros digitales fue propuesto por Gold y Jordan (1968, 1969), y optimizado por Rabiner *et al.* (1970). Herrmann (1970), Herrmann y Schuessler (1970a) y, Hofstetter *et al.* (1971) publicaron resultados adicionales. El método de la aproximación de Chebyshev (minimax) para el diseño de filtros FIR de fase lineal fue propuesto por Parks y McClellan (1972a,b) y ampliado por Rabiner *et al.* (1975). El diseño de filtros elípticos digitales se aborda en el libro de Gold y Rader (1969) y en los documentos de Gray y Markel (1976). Este último incluye un programa software para diseñar filtros elípticos digitales.

La utilización de transformaciones de frecuencia en el dominio digital fue propuesta por Constantinides (1967, 1968, 1970). Estas transformaciones son apropiadas sólo para filtros IIR. El lector debe darse cuenta de que si estas transformaciones se aplican a un filtro FIR paso bajo, el filtro resultante es IIR.

Las técnicas de diseño directas de filtros digitales se han considerado en numerosos estudios, entre los que se incluyen autores como Shanks (1967), Burrus y Parks (1970), Steiglitz (1970), Deczky (1972), Brophy y Salazar (1973) y, Bandler y Bardakjian (1973).

Problemas

10.1 Diseñe un filtro FIR digital de fase lineal, aproximando la respuesta en frecuencia ideal

$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{para } |\omega| \leq \dfrac{\pi}{6} \\ 0, & \text{para } \dfrac{\pi}{6} < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

(a) Determine los coeficientes de un filtro de 25 retardos basado en el método de ventana empleando una ventana rectangular.

(b) Determine y represente el módulo y la fase de la respuesta del filtro.

(c) Repita los apartados (a) y (b) utilizando la ventana de Hamming.

(d) Repita los apartados (a) y (b) utilizando una ventana de Bartlett.

10.2 Repita el Problema 10.1 para un filtro de banda eliminada que tiene la respuesta ideal

$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{para } |\omega| \leq \frac{\pi}{6} \\ 0, & \text{para } \frac{\pi}{6} < |\omega| < \frac{\pi}{3} \\ 1, & \text{para } \frac{\pi}{3} \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

10.3 Rediseñe el filtro del Problema 10.1 utilizando las ventanas de Hanning y Blackman.

10.4 Rediseñe el filtro del Problema 10.2 utilizando las ventanas de Hanning y Blackman.

10.5 Determine la respuesta al impulso unidad $\{h(n)\}$ de un filtro FIR de fase lineal de longitud $M = 4$ cuya respuesta en frecuencia en $\omega = 0$ y $\omega = \pi/2$ se especifica como

$$H_r(0) = 1, \qquad H_r\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

10.6 Determine los coeficientes $\{h(n)\}$ de un filtro FIR de fase lineal de longitud $M = 15$ que tiene una respuesta al impulso unidad simétrica y una respuesta en frecuencia que satisface la condición

$$H_r\left(\frac{2\pi k}{15}\right) = \begin{cases} 1, & k = 0,1,2,3 \\ 0, & k = 4,5,6,7 \end{cases}$$

10.7 Repita el problema de diseño de filtro del Problema 10.6 con las especificaciones de respuesta en frecuencia

$$H_r\left(\frac{2\pi k}{15}\right) = \begin{cases} 1, & k = 0,1,2,3 \\ 0.4, & k = 4 \\ 0, & k = 5,6,7 \end{cases}$$

10.8 El diferenciador analógico ideal se describe mediante

$$y_a(t) = \frac{dx_a(t)}{dt}$$

donde $x_a(t)$ es la entrada e $y_a(t)$ es la señal de salida.

(a) Determine su respuesta en frecuencia excitando el sistema con la entrada $x_a(t) = e^{j2\pi Ft}$.

(b) Represente el módulo y la fase de la respuesta de un diferenciador analógico ideal de banda limitada B hercios.

(c) El diferenciador digital ideal se define como

$$H(\omega) = j\omega, \qquad |\omega| \leq \pi$$

Justifique esta definición comparando con la respuesta en frecuencia $|H(\omega)|, \sphericalangle H(\omega)$ con la del apartado (b).

(d) Calculando la respuesta en frecuencia $H(\omega)$, demuestre que el sistema discreto en el tiempo

$$y(n) = x(n) - x(n-1)$$

es una buena aproximación de un diferenciador a bajas frecuencias.

(e) Calcule la respuesta del sistema a la entrada

$$x(n) = A\cos(\omega_0 n + \theta)$$

10.9 Utilice el método de ventanas con una ventana de Hamming para diseñar un diferenciador de 21 retardos como se muestra en la Figura P.10.9. Calcule y dibuje el módulo y la fase de la respuesta del filtro resultante.

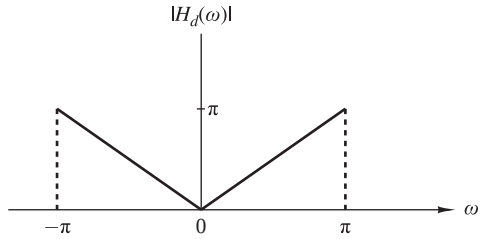


Figura P.10.9.

10.10 Utilice la transformación bilineal para convertir el filtro analógico cuya función de sistema es

$$H(s) = \frac{s+0.1}{(s+0.1)^2+9}$$

en un filtro IIR digital. Seleccione $T = 0.1$ y compare la ubicación de los ceros en $H(z)$ con las posiciones de los ceros obtenidos aplicando el método basado en la invarianza al impulso en la conversión de $H(s)$.

10.11 Convierta el filtro analógico paso banda del Ejemplo 10.4.1 en un filtro digital mediante la transformación bilineal. Deduzca las características del filtro digital obtenidas en el Ejemplo 10.4.2 mediante el método alternativo y verifique que la transformación bilineal aplicada al filtro analógico da como resultado el mismo filtro digital paso banda.

10.12 Un integrador analógico ideal se describe mediante la función de sistema $H_a(s) = 1/s$. Un integrador digital con la función de sistema $H(z)$ puede obtenerse utilizando la transformación bilineal. Es decir,

$$H(z) = \frac{T}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \equiv H_a(s)|_{s=(2/T)(1-z^{-1})/(1+z^{-1})}$$

(a) Escriba la ecuación en diferencias para el integrador digital que relaciona la entrada $x(n)$ con la salida $y(n)$.

(b) Dibuje el módulo $|H_a(j\Omega)|$ y la fase $\Theta(\Omega)$ del integrador analógico.

(c) Es fácil verificar que la respuesta en frecuencia del integrador digital es

$$H(\omega) = -j\frac{T}{2}\frac{\cos(\omega/2)}{\operatorname{sen}(\omega/2)} = -j\frac{T}{2}\cot\frac{\omega}{2}$$

Dibuje de manera aproximada $|H(\omega)|$ y $\theta(\omega)$.

(d) Compare el módulo y la fase obtenidas en los apartados (b) y (c). ¿Cómo adapta el integrador digital el módulo y la fase del integrador analógico?

(e) El integrador digital tiene un polo en $z = 1$. Si se implementa este filtro en una computadora digital, ¿qué restricciones deben imponerse a la señal de entrada $x(n)$ para evitar los problemas de cálculo?

10.13 En la Figura P.10.13 se muestra un diagrama de polos y ceros en el plano z. En continua, el filtro tiene ganancia unidad.

(a) Determine la función de sistema en la forma

$$H(z) = A\left[\frac{(1+a_1z^{-1})(1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2})}{(1+c_1z^{-1})(1+d_1z^{-1}+d_2z^{-2})}\right]$$

proporcionando los valores numéricos para los parámetros A, a_1, b_1, b_2, c_1, d_1 y d_2.

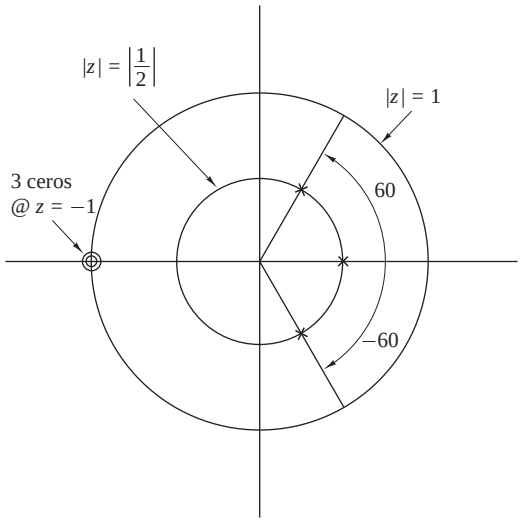


Figura P.10.13.

(b) Dibuje los diagramas de bloques indicando los valores numéricos de las ganancias de las siguientes formas:

(a) Forma directa II (forma canónica).

(b) Realización en cascada (hacer cada sección canónica con coeficientes reales).

10.14 Considere el diagram de polos y ceros mostrado en la Figura P.10.14.

(a) ¿Representa un filtro FIR?

(b) ¿Es un sistema de fase lineal?

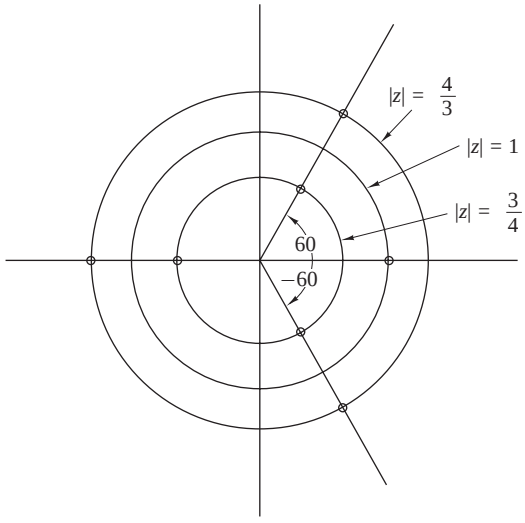


Figura P.10.14.

(c) Proporcione una realización en la forma directa que utilice todas las simetrías para minimizar el número de multiplicaciones. Indique las ganancias de todas las ramas.

10.15 Un filtro digital paso bajo tiene que cumplir las siguientes especificaciones:

Rizado de la banda de paso: ≤ 1 dB

Frecuencia de corte de la banda de paso: 4 kHz

Atenuación de la banda eliminada: ≥ 40 dB

Frecuencia de corte de la banda eliminada: 6 kHz

Frecuencia de muestreo: 24 kHz

El filtro se va a diseñar realizando una transformación bilineal sobre una función de sistema analógica. Determine qué orden de los filtros analógicos de Butterworth, Chebyshev y elíptico tiene que emplearse para cumplir las especificaciones de la implementación digital.

10.16 Se requiere que un filtro paso bajo digital IIR cumpla las siguientes especificaciones:

Rizado de la banda de paso (o rizado pico-a-pico): ≤ 0.5 dB

Frecuencia de corte de la banda de paso: 1.2 kHz

Atenuación de la banda eliminada: ≥ 40 dB

Frecuencia de corte de la banda eliminada: 2.0 kHz

Frecuencia de muestreo: 8.0 kHz

Utilice las fórmulas de diseño proprocionadas en el libro para determinar el orden del filtro para

(a) Un filtro digital de Butterworth

(b) Un filtro digital de Chebyshev

(c) Un filtro digital elíptico

10.17 Determine la función de sistema $H(z)$ del filtro digital de Chebyshev de menor orden que cumpla las siguientes especificaciones:

(a) Rizado de 1-dB en la banda de paso $0 \leq |\omega| \leq 0.3\pi$.

(b) Al menos 60 dB de atenuación en la banda eliminada $0.35\pi \leq |\omega| \leq \pi$. Utilice la transformación bilineal.

10.18 Determine la función de sistema $H(z)$ del filtro digital de Chebyshev de menor orden que cumpla las siguientes especificaciones:

(a) $\frac{1}{2}$-dB de rizado en la banda de paso $0 \leq |\omega| \leq 0.24\pi$.

(b) Como mínimo 50-dB de atenuación en la banda eliminada $0.35\pi \leq |\omega| \leq \pi$. Utilice la transformación bilineal.

10.19 Una señal analógica $x(t)$ está formada por la suma de dos componentes $x_1(t)$ y $x_2(t)$. En la Figura P.10.19 se muestran las características espectrales de $x(t)$. La señal $x(t)$ está limitada a 40 kHz y se muestrea a la frecuencia de 100 kHz para proporcionar la secuencia $x(n)$.

Se desea suprimir la señal $x_2(t)$ pasando la secuencia $x(n)$ a través de un filtro paso bajo digital. La distorsión de amplitud permitida en $|X_1(f)|$ es $\pm 2\%(\delta_1 = 0.02)$ en el intervalo $0 \leq |F| \leq 15$ kHz. Por encima de 20 kHz, el filtro debe presentar una atenuación de al menos 40 dB $(\delta_2 = 0.01)$.

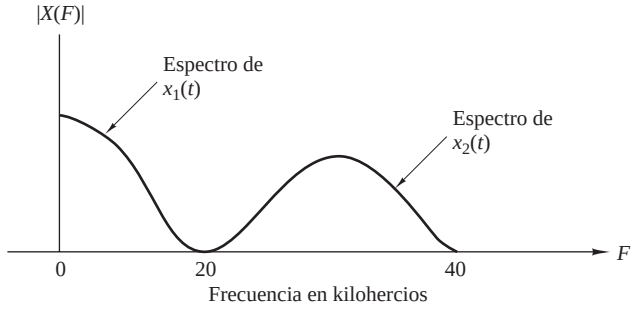


Figura P.10.19.

(a) Utilice el algoritmo de intercambio de Remez para diseñar el filtro FIR de fase lineal de orden *mínimo* que cumpla las especificaciones anteriores. A partir del diagrama del módulo de la respuesta en frecuencia del filtro, indique las especificaciones reales que tiene el filtro.

(b) Compare el orden M obtenido en el apartado (a) con las fórmulas aproximadas dadas por las Ecuaciones (10.2.94) y (10.2.95).

(c) Para el orden M obtenido en el apartado (a), diseñe un filtro FIR digital paso bajo utilizando la técnica de ventanas y la ventana de Hamming. Compare la respuesta en frecuencia de este diseño con la obtenida en el apartado (a).

(d) Diseñe el filtro elíptico de orden *mínimo* que cumple las especificaciones de amplitud dadas. Compare la respuesta en frecuencia del filtro elíptico con la del filtro FIR del apartado (a).

(e) Compare la complejidad de implementar el filtro FIR del apartado (a) con el filtro elíptico del apartado (d). Suponga que el filtro FIR se implementa en la forma directa y el filtro elíptico se implementa como una cascada de filtros de dos polos. Utilice los requisitos de almacenamiento y el número de multiplicaciones por punto de salida para hacer la comparación de complejidad.

10.20 La respuesta al impulso de un filtro analógico se muestra en la Figura P.10.20.

(a) Sea $h(n) = h_a(nT)$, donde $T = 1$, la respuesta al impulso de un filtro discreto en el tiempo. Determine la función de sistema $H(z)$ y la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ de este filtro FIR.

(b) Represente gráficamente (de forma aproximada) $|H(\omega)$ y compare esta respuesta en frecuencia con $|H_a(j\Omega)|$.

10.21 En este problema tendrá que comparar algunas de las características de las implementaciones analógica y digital del sistema analógico paso bajo de un solo polo

$$H_a(s) = \frac{\alpha}{s+\alpha} \Leftrightarrow h_a(t) = e^{-\alpha t}$$

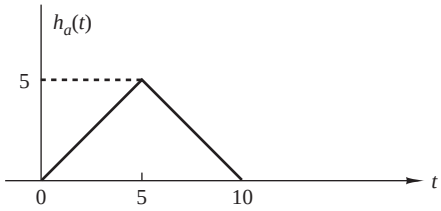


Figura P.10.20.

(a) ¿Cuál es la ganancia en continua? ¿Para qué frecuencia (en radianes) está la respuesta en frecuencia analógica 3 dB por debajo de su valor en continua? ¿Para qué frecuencia la respuesta en frecuencia analógica es cero? ¿En qué instante de tiempo la respuesta al impulso analógica decae a $1/e$ de su valor inicial?

(b) Proporcione la función del sistema digital $H(z)$ para el diseño invariante en el tiempo de este filtro. ¿Cuál es la ganancia en continua? Proporcione una expresión para la frecuencia a 3-dB en radianes. ¿Para qué frecuencia (valor real) la respuesta es cero? ¿Cuántas muestras hay en la respuesta en el dominio tiempo al impulso unidad antes de que disminuya a $1/e$ de su valor inicial?

(c) "Deforme previamente" el parámetro α y realice la transformación bilineal para obtener la función de sistema digital $H(z)$ a partir del diseño analógico. ¿Cuál es la ganancia en continua? ¿Para qué frecuencia (valor real) la respuesta es cero? Proporcione una expresión para la frecuencia a 3-dB (en radianes). ¿Cuántas muestras hay en la respuesta en el dominio del tiempo al impulso unidad antes de que disminuya a $1/e$ de su valor inicial?

10.22 Deseamos diseñar un filtro paso banda FIR que tenga una duración $M = 201$. $H_d(\omega)$ representa la característica ideal del filtro paso banda no causal, la cual se muestra en la Figura P.10.22.

(a) Determine la respuesta al impulso unidad $h_d(n)$ correspondiente a $H_d(\omega)$.

(b) Explique cómo utilizaría la ventana de Hamming

$$w(n) = 0.54 + 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), \qquad -\frac{M-1}{2} \le n \le \frac{M-1}{2}$$

para diseñar un filtro paso banda FIR que tenga una respuesta al impulso $h(n)$ para $0 \le n \le 200$.

(c) Suponga que hemos diseñado el filtro FIR con $M = 201$ utilizando la técnica basada en el muestreo en frecuencia especificando los coeficientes de la DFT $H(k)$ en lugar de $h(n)$. Proporcione los valores de $H(k)$ para $0 \le k \le 200$ corerspondientes a $H_d(e^{j\omega})$ e indique en qué difiere la respuesta en frecuencia del filtro real del ideal. ¿Es el filtro real un buen diseño? Explique su respuesta.

10.23 Deseamos diseñar un filtro paso banda digital a partir de un filtro prototipo paso bajo de Butterworth analógico de orden dos utilizando la transformación bilineal. Las especificaciones del filtro digital se muestran en la Figura P.10.23(a). Las frecuencias de corte (medidas en los puntos de potencia mitad) para el filtro digital deben estar en $\omega = 5\pi/12$ y $\omega = 7\pi/12$. El prototipo analógico se define mediante

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

con el punto de potencia mitad en $\Omega = 1$.

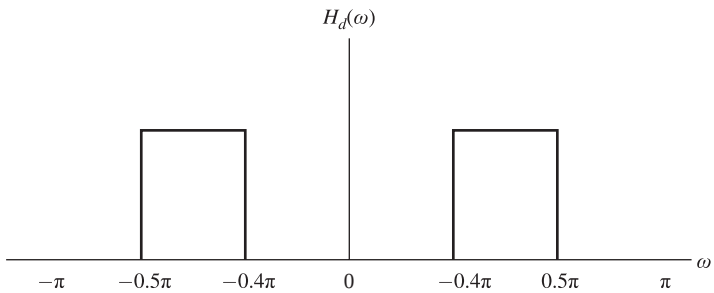


Figura P.10.22.

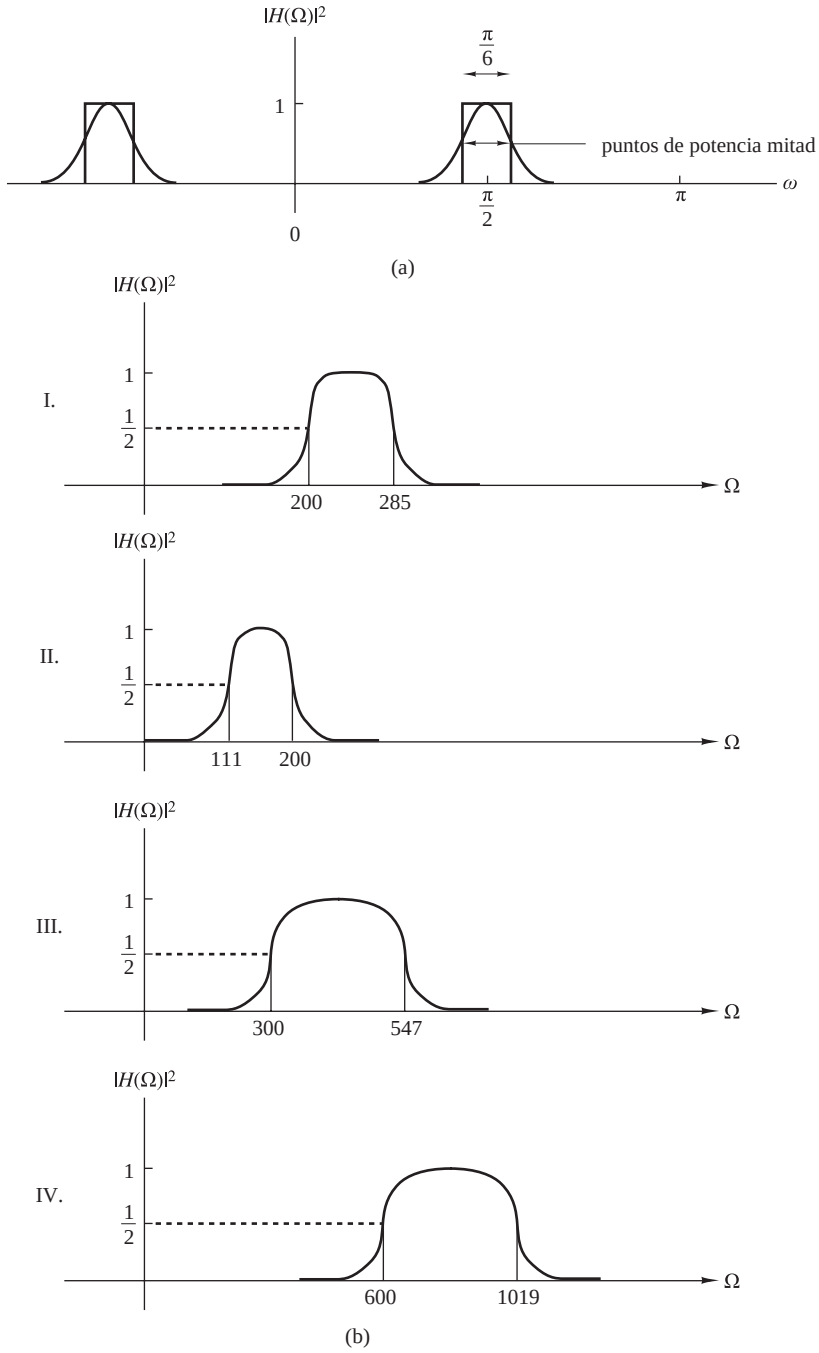


Figura P.10.23.

(a) Determine la función de sistema para el filtro paso banda digital.

(b) Utilizando las mismas especificaciones para el filtro digital que en el apartado (a), determine cuáles de los filtros prototipo paso banda analógicos mostrados en la Figura P.10.23(b) podrían transformarse

directamente utilizando la transformación bilineal para dar como resultado el apropiado filtro digital. Sólo se proporciona el módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia.

10.24 La Figura P.10.24 muestra un filtro digital diseñado utilizando el método basado en el muestreo en frecuencia.

(a) Dibuje un diagrama de polos y ceros en el plano z para este filtro.

(b) ¿Es el filtro paso bajo, paso alto o paso banda?

(c) Determine el módulo $|H(\omega)|$ de la respuesta en las frecuencias $\omega_k = \pi k/6$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

(d) Utilice los resultados del apartado (c) para dibujar el módulo de la respuesta en el intervalo $0 \leq \omega \leq \pi$ y confirmar su respuesta al apartado (b).

10.25 Una señal analógica de la forma $x_a(t) = a(t)\cos 2000\pi t$ tiene su banda limitada en el intervalo $900 \leq F \leq 1100$ Hz y se utiliza como entrada al sistema mostrado en la Figura P.10.25.

(a) Determine y dibuje los espectros para las señales $x(n)$ y $w(n)$.

(b) Utilice una ventana de Hamming de longitud $M = 31$ para diseñar un filtro FIR paso bajo de fase lineal $H(\omega)$ que deje pasar $\{a(n)\}$.

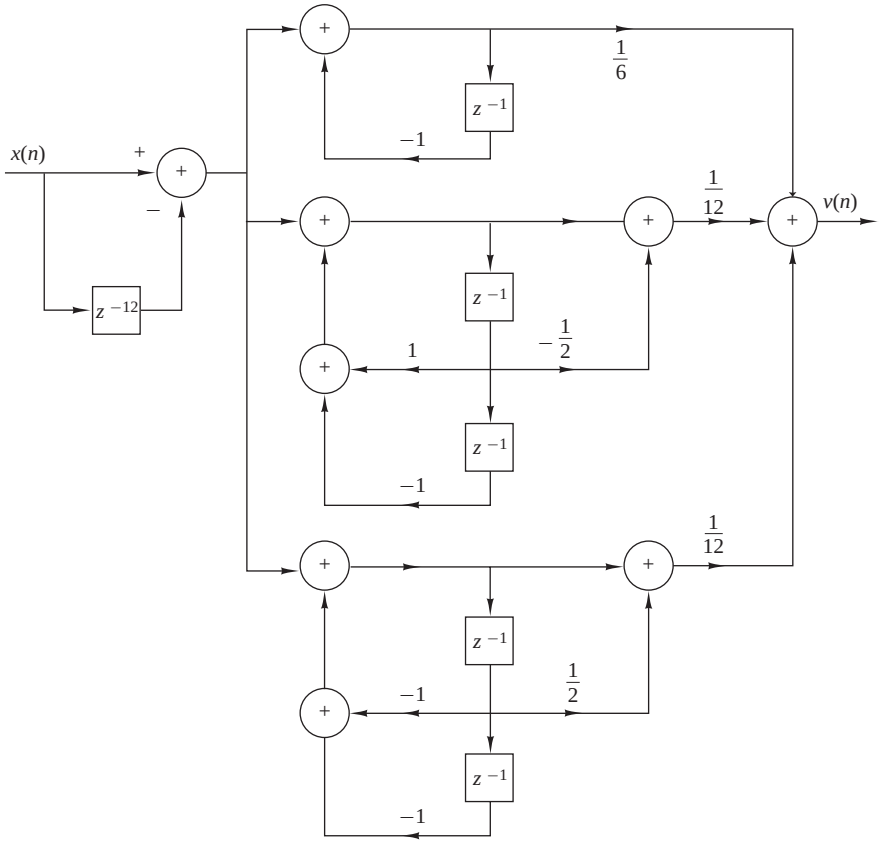


Figura P.10.24.

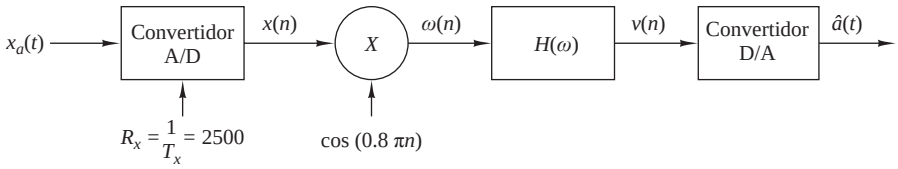


Figura P.10.25.

(c) Determine la frecuencia de muestreo del convertidor A/D que nos permitiría eliminar la conversión de frecuencia en el diagrama de la Figura P.10.25.

10.26 *Identificación del sistema* Considere un sistema LTI desconocido y un modelo de sistema FIR como se muestra en la Figura P.10.26. Ambos sistemas se excitan con la misma secuencia de salida $\{x(n)\}$. El problema consiste en determinar los coeficientes $\{h(n), 0 \le n \le M-1\}$ del modelo FIR del sistema, de manera que se minimice el error cuadrático medio entre las salidas de los dos sistemas.

(a) Determine la ecuación para los coeficientes $\{h(n), 0 \le n \le M-1\}$ del filtro FIR que minimicen el error por mínimos cuadrados.

$$\mathscr{E} = \sum_{n=0}^{N} [y(n) - \hat{y}(n)]^2$$

donde

$$\hat{y}(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k), \quad n = K, K+1, \ldots, N$$

y $N \gg M$.

(b) Repita el apartado (a) si la salida del sistema desconocido se distorsiona mediante un ruido blanco aditivo $\{w(n)\}$ cuya varianza es σ_w^2.

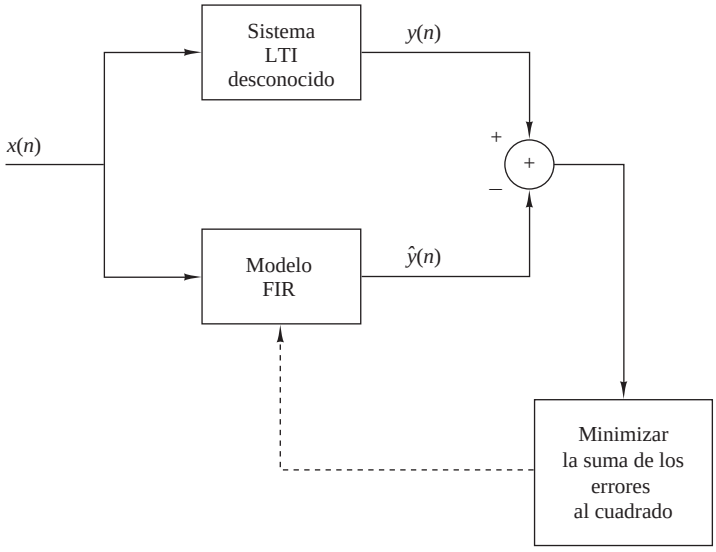


Figura P.10.26.

10.27 Un sistema lineal invariante en el tiempo tiene una secuencia de entrada $x(n)$ y una secuencia de salida $y(n)$. El usuario sólo tiene acceso a la salida del sistema $y(n)$. Además, se dispone de la siguiente información:

La señal de entrada es periódica de período fundamental N y tiene una envolvente espectral plana, es decir,

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k^x e^{j(2\pi/N)kn}, \qquad \text{para todo } n$$

donde $c_k^x = 1$ para todo k.

El sistema $H(z)$ es un sistema de sólo polos, es decir,

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{P} a_k z^{-k}}$$

pero el orden p y los coeficientes $(a_k, 1 \leq k \leq p)$ son desconocidos. ¿Es posible determinar el orden p y los valores numéricos de los coeficientes $\{a_k, 1 \leq k \leq p\}$ tomando medidas en la salida $y(n)$? En caso afirmativo, explique cómo. ¿Es esto posible para todo valor de p?

10.28 *Modelado de sistema FIR* Considere un sistema FIR "desconocido" con la respuesta al impulso $h(n)$, $0 \leq n \leq 11$, dada por

$$\begin{aligned}
h(0) = h(11) &= 0.309828 \times 10^{-1} \\
h(1) = h(10) &= 0.416901 \times 10^{-1} \\
h(2) = h(9) &= -0.577081 \times 10^{-1} \\
h(3) = h(8) &= -0.852502 \times 10^{-1} \\
h(4) = h(7) &= 0.147157 \times 10^{0} \\
h(5) = h(6) &= 0.449188 \times 10^{0}
\end{aligned}$$

Un usuario potencial tiene acceso a la entrada y a la salida del sistema pero no dispone de ninguna otra información sobre su respuesta, sólo sabe que se trata de un sistema FIR. En un esfuerzo por determinar la respuesta al impulso del sistema, el usuario lo excita con una secuencia aleatoria de valor medio cero $x(n)$ uniformemente distribuida en el intervalo $[-0.5, 0.5]$, y registra la señal $x(n)$ y la correspondiente salida $y(n)$ para $0 \leq n \leq 199$.

(a) Utilizando la información disponible sobre el sistema FIR desconocido, el usuario aplica el método de los mínimos cuadrados para obtener un modelo FIR $h(n)$, $0 \leq n \leq M-1$. Establezca las ecuaciones lineales, especificando los parámetros $h(0), h(1), \ldots, h(M-1)$. Especifique las fórmulas que deben emplearse para determinar los valores necesarios de la autocorrelación y la correlación cruzada.

(b) Puesto que el orden del sistema es desconocido, el usuario decide probar modelos de diferentes órdenes y comprobar el error cuadrático total correspondiente. Evidentemente, este error será cero (o muy próximo a cero si el orden del modelo es igual al orden del sistema). Calcule los modelos FIR $h_M(n)$, $0 \leq n \leq M-1$ para $M = 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$, así como los correspondientes errores cuadráticos totales correspondientes E_M, $M = 8, 9, \ldots, 14$. ¿Qué puede comentar?

(c) Determine y dibuje la respuesta en frecuencia del sistema y los modelos para $M = 11, 12, 13$. Comente los resultados.

(d) Suponga ahora que la salida del sistema se distorsiona con un ruido aditivo, por lo que en lugar de la señal $y(n)$, $0 \leq n \leq 199$, disponemos de la señal

$$v(n) = y(n) + 0.01w(n)$$

donde $w(n)$ es una secuencia aletoria gaussiana con valor medio igual a cero y varianza $\sigma^2 = 1$. Repita el apartado (b) del Problema 10.27 utilizando $v(n)$ en lugar de $y(n)$ y comente los resultados. La calidad del modelo también se puede determinar utilizando la magnitud

$$Q = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} [h(n) - \hat{h}(n)]^2}{\sum_{n=0}^{\infty} h^2(n)}$$

10.29 *Diseño de filtro mediante la aproximación de Padé* Sea $h_d(n)$, $n \geq 0$, la respuesta al impulso deseada del filtro IIR que va a ser especificado. El filtro que se va a diseñar para aproximar $\{h_d(n)\}$ tiene la función de sistema

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k}$$

$H(z)$ tiene $L = M + N + 1$ parámetros, es decir, los coeficientes $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ que se van a determinar. Suponga que la entrada aplicada al filtro es $x(n) = \delta(n)$. Entonces, la respuesta del filtro es $y(n) = h(n)$, y, por tanto,

$$\begin{aligned} h(n) = &-a_1 h(n-1) - a_2 h(n-2) - \cdots - a_N h(n-N) \\ &+ b_0 \delta(n) + b_1 \delta(n-1) + \cdots + b_M \delta(n-M) \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Demuestre que la ecuación (1) se reduce a

$$h(n) = -a_1 h(n-1) - a_2 h(n-2) - \cdots - a_N h(n-N) + b_n, \quad 0 \leq n \leq M \tag{2}$$

(b) Demuestre que para $n > M$, la ecuación (1) se reduce a

$$h(n) = -a_1 h(n-1) - a_2 h(n-2) - \cdots - a_N h(n-N), \quad n > M \tag{3}$$

(c) Explique cómo se pueden utilizar las ecuaciones (2) y (3) para determinar $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ haciendo $h(n) = h_d(n)$ para $0 \leq n \leq N + M$ (este método de diseño de filtros en el que $h(n)$ se corresponde exactamente con la respuesta deseada $h_d(n)$ para $0 \leq n \leq M + N$ se conoce como método de aproximación de Padé).

10.30 Suponga que la respuesta al impulso unidad es

$$h_d(n) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

(a) Utilice la aproximación de Padé descrita en el Problema 10.29 para determinar $h(n)$.

(b) Compare la respuesta en frecuencia de $H(\omega)$ con la respuesta del filtro deseada $H_d(\omega)$.

10.31 *Método de Shanks para el diseño de filtros por mínimos cuadrados* Suponga que se conoce la respuesta deseada $h_d(n)$, $n \geq 0$, y deseamos determinar los coeficientes $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ de un filtro IIR cuya función de sistema es

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

tal que la suma de los errores al cuadrado entre $h_d(n)$ y $h(n)$ está minimizada.

(a) Si la entrada a $H(z)$ es $x(n) = \delta(n)$, ¿cuál es la ecuación en diferencias que satisface el filtro $H(z)$?

(b) Demuestre que para $n > M$, una estimación de $h_d(n)$ es

$$\hat{h}_d(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k h_d(n-k)$$

y determine las ecuaciones para los coeficientes $\{a_k\}$ minimizando la suma de los errores al cuadrado.

$$\mathscr{E}_1 = \sum_{n=M+1}^{\infty} [h_d(n) - \hat{h}_d(n)]^2$$

Así quedan determinados los coeficientes del filtro $\{a_k\}$ que definen el denominador de $H(z)$.

(c) Para determinar los parámetros $\{b_k\}$, considere el sistema mostrado en la Figura P.10.31, donde

$$H_1(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{N} \hat{a}_k z^{-k}}$$

$$H_2(z) = \sum_{k=1}^{N} b_k z^{-k}$$

y $\{\hat{a}_k\}$ son los coeficientes determinados en el apartado (b).
Si la respuesta de $H_1(z)$ a la entrada $\delta(n)$ se designa como

$$v(n) = -\sum_{k=1}^{N} \hat{a}_k v(n-k) + \delta(n)$$

y la salida de $H_2(z)$ se designa como $\hat{h}_d(n)$, determine la ecuación para los parámetros $\{b_k\}$ que minimiza la suma de los errores al cuadrado

$$\mathscr{E}_2 = \sum_{n=0}^{\infty} [h_d(n) - \hat{h}_d(n)]^2$$

(El método anterior de mínimos cuadrados para el diseño del filtro se debe a Shanks (1967)).

10.32 Utilice el método de diseño de filtros de Shanks descrito en el Problema 10.31 para determinar los parámetros $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ de

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

cuando la respuesta deseada es la respuesta al impulso del filtro digital paso bajo de Chebyshev de tipo II con tres polos y tres ceros, cuya función de sistema es

$$H_d(z) = \frac{0.3060(1+z^{-1})(0.2652 - 0.09z^{-1} + 0.2652z^{-2})}{(1-0.3880z^{-1})(1-1.1318z^{-1}+0.5387z^{-2})}$$

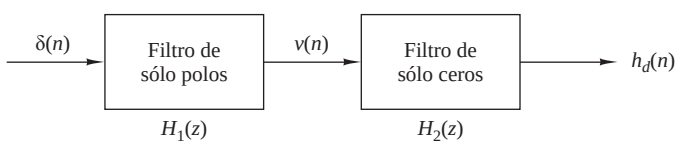


Figura P.10.31.

(a) Dibuje $h_d(n)$ y observe a continuación que $h_d(n) \approx 0$ para $n > 50$.

(b) Determine las posiciones de los polos y los ceros del filtro $H(z)$ obtenido mediante el método de Shanks para $(N,M) = (3,2)$, $(N,M) = (3,3)$ y $(N,M) = (4,3)$, y compare estos resultados con los polos y ceros de $H_d(z)$. Comente las similitudes y diferencias.

11

Tratamiento digital de señales de tasa múltiple

En muchas aplicaciones prácticas de tratamiento digital de señales, hay que enfrentarse con el problema de cambiar la tasa o frecuencia de muestreo de una señal, aumentándola o disminuyéndola en cierta cantidad. Por ejemplo, en sistemas de telecomunicaciones que transmiten y reciben diferentes tipos de señales (como teletipo, facsímil, voz, vídeo, etc.), existe un requisito para procesar las diversas señales a diferentes frecuencias asociadas a los correspondientes anchos de banda de las señales. El proceso de convertir una señal de una tasa dada a una tasa diferente se denomina *conversión de la tasa o frecuencia de muestreo*. A su vez, los sistemas que emplean múltiples tasas de muestreo en el procesamiento de señales digitales se conocen como *sistemas de tratamiento digital de señales de tasa múltiple*.

La conversión de la tasa de muestreo de una señal digital puede llevarse a cabo mediante uno de dos métodos generales. Uno de estos métodos consiste en pasar la señal digital a través de un convertidor D/A, filtrarla si fuera necesario y luego volver a muestrear la señal analógica resultante a la frecuencia deseada (es decir, hacer pasar la señal analógica a través de un convertidor A/D). El segundo método consiste en realizar toda la conversión de la frecuencia de muestreo en el dominio digital.

Una ventaja evidente del primer método es que la nueva frecuencia de muestreo puede elegirse arbitrariamente y no tiene que tener ninguna relación especial con la antigua frecuencia de muestreo. Sin embargo, un inconveniente importante es la distorsión de la señal introducida por el convertidor D/A en la reconstrucción de la señal y por los efectos de cuantificación en la conversión A/D. La conversión de la frecuencia de muestreo en el dominio digital evita esta desventaja.

En este capítulo vamos a describir la conversión de la tasa o frecuencia de muestreo en el dominio digital. En primer lugar, describimos la conversión de la frecuencia de muestreo mediante un factor racional. Presentaremos varios métodos para implementar el convertidor de frecuencia, incluyendo implementaciones de una sola etapa y multietapa. A continuación describiremos un método para realizar la conversión de la frecuencia de muestreo mediante un factor arbitrario y veremos su implementación. Presentaremos varias aplicaciones de esta conversión en sistemas de procesamiento de señales multitasa, lo que incluye la implementación de filtros de banda estrecha, bancos de filtros digitales, codificación de subbanda, transmultiplexores y filtros espejo en cuadratura.

11.1 Introducción

El proceso de conversión de la tasa de muestreo se puede desarrollar y comprender utilizando la idea de "remuestreo después de la reconstrucción". En este método teórico, una señal discreta en el tiempo se reconstruye idealmente y la señal continua en el tiempo resultante vuelve a muestrearse a una frecuencia de muestreo diferente. Esta idea nos lleva a una formulación matemática que permite la realización del proceso completo mediante técnicas de procesamiento digital de señales.

Sea $x(t)$ una señal continua en el tiempo que se muestrea a una frecuencia $F_x = 1/T_x$ para generar una señal discreta en el tiempo $x(nT_x)$. A partir de las muestras $x(nT_x)$ podemos generar una señal continua en el tiempo utilizando la fórmula de interpolación

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_x)g(t - nT_x) \tag{11.1.1}$$

Si el ancho de banda de $x(t)$ es menor que $F_x/2$ y la función de interpolación está dada por

$$g(t) = \frac{\operatorname{sen}(\pi t/T_x)}{\pi t/T_x} \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} G(F) = \begin{cases} T_x, & |F| \leq F_x/2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{11.1.2}$$

entonces $y(t) = x(t)$; en caso contrario, $y(t) \neq x(t)$. En la práctica, no es posible la recuperación perfecta de $x(t)$ porque el sumatorio infinito de (11.1.1) debería reemplazarse por un sumatorio finito.

Para realizar la conversión de la frecuencia de muestreo simplemente evaluamos (11.1.1) en los instantes de tiempo $t = mT_y$, donde $F_y = 1/T_y$ es la frecuencia de muestreo deseada. Por tanto, la fórmula general para la conversión de la frecuencia de muestreo es

$$y(mT_y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_x)g(mT_y - nT_x) \tag{11.1.3}$$

que expresa directamente las muestras de la secuencia deseada en función de las muestras de la secuencia original y de los valores muestreados de la función de reconstrucción en las posiciones $(mT_y - nT_x)$. El cálculo de $y(nT_y)$ requiere (a) la secuencia de entrada $x(nT_x)$, (b) la función de reconstrucción $g(t)$ y (c) los instantes de tiempo nT_x y mT_y de las muestras de entrada y de salida. Los valores $y(mT_y)$ calculados mediante esta ecuación son precisos sólo si $F_y > F_x$. Si $F_y < F_x$, habrá que filtrar las componentes de frecuencia de $x(t)$ por encima de $F_y/2$ antes de volver a muestrear con el fin de evitar el *aliasing*. Por tanto, la fórmula de conversión de la frecuencia de muestreo dada en (11.1.3) es $y(mT_y) = x(mT_y)$ si utilizamos (11.1.2) y $X(F) = 0$ para $|F| \geq \text{mín}\{F_x/2, F_y/2\}$.

Si $T_y = T_x$, la Ecuación (11.1.3) se transforma en una suma de convolución, la cual se corresponde con un sistema LTI. Para comprender el significado de (11.1.3) para $T_y \neq T_x$, reordenamos el argumento de $g(t)$ como sigue:

$$y(mT_y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_x)g\left(T_x\left(\frac{mT_y}{T_x} - n\right)\right) \tag{11.1.4}$$

El término mT_y/T_x puede descomponerse en una parte entera k_m y una parte fraccionaria Δ_m, $0 \leq \Delta_m < 1$, como sigue

$$\frac{mT_y}{T_x} = k_m + \Delta_m \tag{11.1.5}$$

donde

$$k_m = \left\lfloor \frac{mT_y}{T_x} \right\rfloor \tag{11.1.6}$$

y

$$\Delta_m = \frac{mT_y}{T_x} - \left\lfloor \frac{mT_y}{T_x} \right\rfloor \tag{11.1.7}$$

El símbolo $\lfloor a \rfloor$ designa el mayor entero contenido en a. La magnitud Δ_m especifica la posición de la muestra actual dentro del período de muestreo T_x. Sustituyendo (11.1.5) en (11.1.4), obtenemos

$$y(mT_y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_x) g((k_m + \Delta_m - n)T_x) \tag{11.1.8}$$

Si cambiamos el índice del sumatorio de (11.1.8) de n a $k = k_m - n$, tenemos

$$\begin{aligned} y(mT_y) &= y((k_m + \Delta_m)T_x) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(kT_x + \Delta_m T_x) x((k_m - k)T_x) \end{aligned} \tag{11.1.9}$$

La Ecuación (11.1.9) proporciona la ecuación para la implementación discreta en el tiempo de la conversión de la frecuencia de muestreo. Este proceso se ilustra en la Figura 11.1.1. Observe que (a) los instantes de muestreo de entrada y de salida T_x y T_y son fijos, (b) la función $g(t)$ se desplaza para cada m de modo que el valor $g(\Delta_m T_x)$ se posiciona en $t = mT_y$ y (c) los valores requeridos de $g(t)$ están determinados en los instantes de muestreo de la entrada. Para cada valor de m, el intervalo fraccionario Δ_m determina los coeficientes de la respuesta al impulso mientras que el índice k_m especifica las muestras de entrada correspondientes necesarias para calcular la muestra $y(mT_y)$. Dado que para cualquier valor de m, el índice k_m es un número entero, $y(mT_y)$ es la convolución entre la secuencia de entrada $x(nT_x)$ y una respuesta al impulso $g((n + \Delta_m)T_x)$. La diferencia entre (11.1.8) y (11.1.9) es que la primera desplaza una función de reconstrucción "que cambia" mientras que la segunda desplaza una secuencia de entrada "fija".

El proceso de conversión de la frecuencia de muestreo definido por (11.1.9) es un sistema discreto en el tiempo *lineal y variante en el tiempo*, ya que requiere una respuesta al impulso diferente

$$g_m(nT_x) = g((n + \Delta_m)T_x) \tag{11.1.10}$$

para cada muestra de salida $y(mT_y)$. Por tanto, tiene que calcularse un nuevo conjunto de coeficientes o recuperarse de un almacenamiento dedicado a los cálculos de *todas* las muestras de salida (*véase* la Figura 11.1.2). Este procedimiento resulta ineficiente cuando la función $g(t)$ es complicada y el número de valores necesarios es grande. Esta dependencia de m prohíbe el uso de estructuras recursivas, porque los valores de salida pasados necesarios tienen que calcularse utilizando una respuesta al impulso para el valor actual de Δ_m.

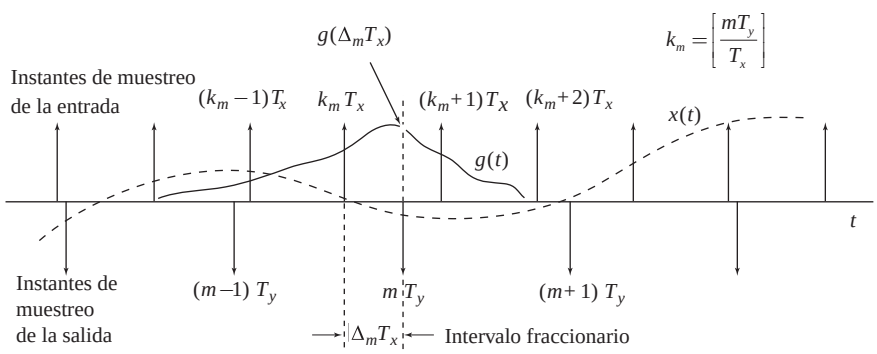


Figura 11.1.1. Ilustración de las relaciones temporales en la conversión de la frecuencia de muestreo.

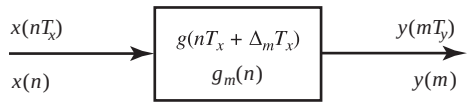


Figura 11.1.2. Sistema lineal discreto y variante en el tiempo para el proceso de conversión de la frecuencia de muestreo.

Se obtiene una simplificación significativa cuando la relación T_y/T_x se restringe a un número racional, es decir,

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{F_x}{F_y} = \frac{D}{I} \tag{11.1.11}$$

donde D e I son enteros relativamente primos. Para terminar, expresamos el desplazamiento Δ_m como

$$\Delta_m = \frac{mD}{I} - \left\lfloor \frac{mD}{I} \right\rfloor = \frac{1}{I}\left(mD - \left\lfloor \frac{mD}{I} \right\rfloor I\right) = \frac{1}{I}(mD)_I \tag{11.1.12}$$

donde $(k)_I$ designa el valor de k módulo I. A partir de (11.1.12), es evidente que Δ_m sólo puede tomar I valores unívocos $0, 1/I, \ldots, (I-1)/I$, por tanto, sólo existen I posibles respuestas al impulso distintas. Dado que $g_m(nT_x)$ puede tomar I conjuntos distintos de valores, es periódica en m; es decir,

$$g_m(nT_x) = g_{m+rI}(nT_x), \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{11.1.13}$$

Luego el sistema $g_m(nT_x)$ es un sistema discreto en el tiempo lineal y *variante periódicamente en el tiempo*. Este tipo de sistemas ha sido estudiado en profundidad para un amplio rango de aplicaciones (Meyers y Burrus, 1975). Ésta es una importante simplificación si la comparamos con el sistema discreto en el tiempo y variante *de forma continua* en el tiempo dado por (11.1.10).

Para ilustrar estos conceptos vamos a considerar dos casos especialmente importantes. Comenzaremos con el proceso de reducir la frecuencia de muestreo mediante un factor entero D, lo que se conoce como *diezmado* o *submuestreo*. Si hacemos $T_y = DT_x$ en (11.1.3), tenemos

$$y(mT_y) = y(mDT_x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_x)g((mD-k)T_x) \tag{11.1.14}$$

Observe que la señal de entrada y la respuesta al impulso se muestrean con un período T_x. Sin embargo, la respuesta al impulso se desplaza a incrementos de $T_y = DT_x$ porque necesitamos calcular sólo una de entre las D muestras. Dado que $I = 1$, tenemos que $\Delta_m = 0$ y, por tanto, sólo existe una respuesta al impulso $g(nT_x)$, para todo m. Este proceso se ilustra en la Figura 11.1.3 para $D = 2$.

Consideremos ahora el proceso de incrementar la frecuencia de muestreo en un factor entero I, lo que se denomina *supermuestreo* o *interpolación*. Si hacemos $T_y = T_x/I$ en (11.1.3), tenemos

$$y(mT_y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_x)g(m(T_x/I) - kT_x) \tag{11.1.15}$$

Observe que tanto $x(t)$ como $g(t)$ se muestrean con un período T_x; sin embargo, la respuesta al impulso se desplaza a incrementos de $T_y = T_x/I$ para el cálculo de cada muestra de salida. Esto es necesario para "rellenar" con un número adicional de $(I-1)$ muestras dentro de cada período T_x. Esto se ilustra en la Figura 11.1.4(a)–(b) para $I = 2$. Cada "desplazamiento fraccionario" requiere que remuestremos $g(t)$, lo que resulta en una nueva respuesta al impulso $g_m(nT_x) = g(nT_x + mT_x/I)$, para $m = 0, 1, \ldots, I-1$ de acuerdo con (11.1.14). Una

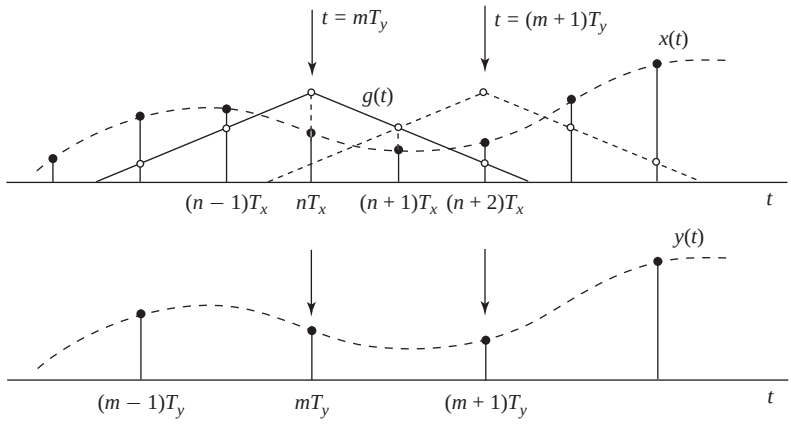


Figura 11.1.3. Ilustración de las relaciones temporales para reducir la frecuencia de muestreo en un factor entero $D = 2$. Una respuesta al impulso simple, muestreada con un período T_x, se desplaza a escalones iguales a $T_y = DT_x$ para generar las muestras de salida.

inspección detenida de la Figura 11.1.4(a)–(b) demuestra que si determinamos una respuesta al impulso $g(nT_y)$ y creamos una nueva secuencia $v(nT_y)$ insertando $(I-1)$ muestras de valor cero entre muestras sucesivas de $x(nT_x)$, podemos calcular $y(mT_y)$ como la convolución de las secuencias $g(nT_y)$ y $x(nT_y)$. Esta idea se ilustra en la Figura 11.1.4(c) para $I = 2$.

En las siguientes secciones vamos a ver en detalle las propiedades, el diseño y las estructuras que permiten implementar la conversión de la frecuencia de muestreo completamente en el dominio discreto en el tiempo. Por comodidad, normalmente eliminaremos los períodos de muestreo T_x y T_y del argumento de las señales discretas en el tiempo. Sin embargo, ocasionalmente, en beneficio del lector volveremos a incorporarlos y pensaremos en términos de unidades y magnitudes continuas en el tiempo.

11.2 Diezmado por un factor D

Supongamos que la señal $x(n)$ con espectro $X(\omega)$ va a submuestrearse por un factor entero D. Se supone que el espectro $X(\omega)$ es distinto de cero en el intervalo de frecuencias $0 \le |\omega| \le \pi$ o, lo que es lo mismo, en $|F| \le F_x/2$. Sabemos que si reducimos la frecuencia de muestreo seleccionando simplemente uno de cada D valores de $x(n)$, la señal resultante será una versión con *aliasing* de $x(n)$, con una frecuencia de solapamiento $F_x/2D$. Para evitar el *aliasing*, en primer lugar tenemos que reducir el ancho de banda de $x(n)$ a $F_{\max} = F_x/2D$ o, lo que es equivalente, a $\omega_{\max} = \pi/D$. Así podemos submuestrear por D y evitar el *aliasing*.

El proceso de diezmado se ilustra en la Figura 11.2.1. La secuencia de entrada $x(n)$ se pasa a través de un filtro paso bajo, caracterizado por la respuesta al impulso $h(n)$ y una respuesta en frecuencia $H_D(\omega)$, que idealmente satisface la condición

$$H_D(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \pi/D \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{11.2.1}$$

Luego el filtro elimina el espectro de $X(\omega)$ en el rango $\pi/D < \omega < \pi$. Por supuesto, la implicación es que sólo las componentes de frecuencia de $x(n)$ en el rango $|\omega| \le \pi/D$ son de interés para posteriores tratamientos de la señal.

La salida del filtro es una secuencia $v(n)$ dada por

$$v(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) \tag{11.2.2}$$

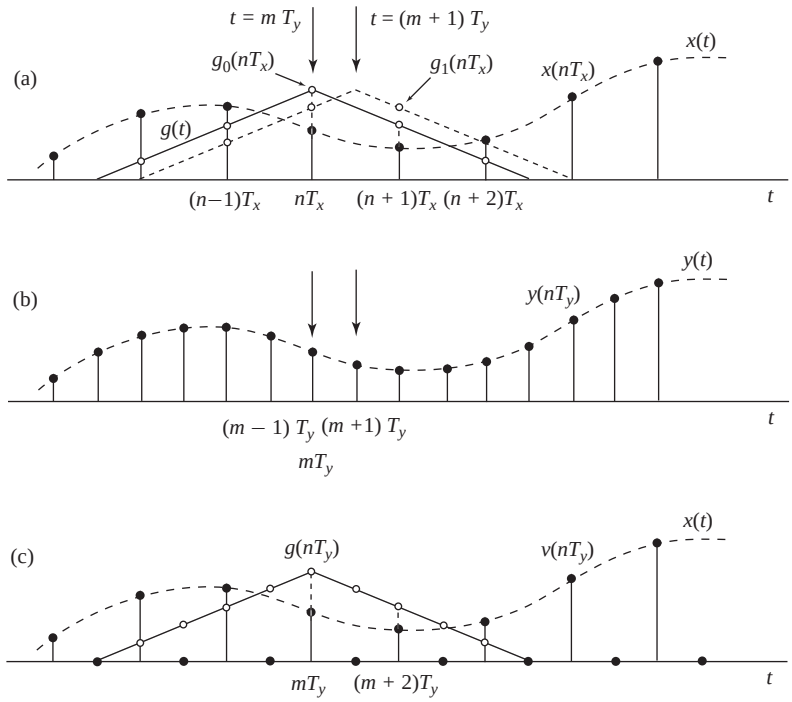


Figura 11.1.4. Ilustración de relaciones temporales para aumentar la frecuencia de muestreo en un factor entero $I = 2$. El método indicado en (a) requiere una respuesta al impulso para las muestras de salida pares y otra para las impares. El método indicado en (c) sólo requiere una respuesta al impulso, la cual se obtiene entrelazando las respuestas al impulso dadas en (a).

la cual se submuestrea por el factor D para generar $y(m)$. Así,

$$\begin{aligned} y(m) &= v(mD) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(mD-k) \end{aligned} \tag{11.2.3}$$

Aunque la operación de filtrado de $x(n)$ es lineal e invariante en el tiempo, la operación de submuestreo en combinación con los resultados de la operación de filtrado da lugar a un sistema variante en el tiempo. Esto puede verificarse fácilmente. Puesto que $x(n)$ produce $y(m)$, observe que $x(n-n_0)$ no implica $y(n-n_0)$, a menos que n_0 sea un múltiplo de D. En consecuencia, la operación lineal global lineal (filtrado lineal seguido de submuestreo) sobre $x(n)$ no es invariante en el tiempo.

Las características en el dominio de la frecuencia de la secuencia de salida $y(m)$ pueden obtenerse relacionando el espectro de $y(m)$ con el espectro de la secuencia de entrada $x(n)$. En primer lugar, conviene definir una secuencia $\tilde{v}(n)$ como

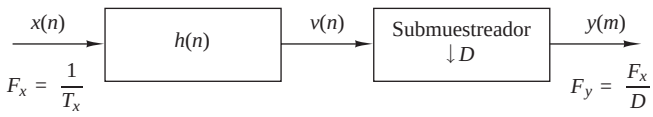


Figura 11.2.1. Diezmado por un factor D.

$$\tilde{v}(n) = \begin{cases} v(n), & n = 0, \pm D, \pm 2D, \ldots \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{11.2.4}$$

Evidentemente, $\tilde{v}(n)$ puede verse como una secuencia obtenida multiplicando $v(n)$ por un tren de impulsos periódico $p(n)$, con un período D, como se ilustra en la Figura 11.2.2. La representación en serie discreta de Fourier de $p(n)$ es

$$p(n) = \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} e^{j2\pi kn/D} \tag{11.2.5}$$

Por tanto,

$$\tilde{v}(n) = v(n)p(n) \tag{11.2.6}$$

y

$$y(m) = \tilde{v}(mD) = v(mD)p(mD) = v(mD) \tag{11.2.7}$$

Ahora la transformada z de la secuencia de salida $y(m)$ es

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(m)z^{-m} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{v}(mD)z^{-m} \\ Y(z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{v}(m)z^{-m/D} \end{aligned} \tag{11.2.8}$$

donde el último paso se obtiene a partir del hecho de que $\tilde{v}(m) = 0$, excepto en múltiplos de D. Utilizando las relaciones dadas en (11.2.5) y (11.2.6) en (11.2.8), obtenemos

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} v(m)\left[\frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} e^{j2\pi mk/D}\right] z^{-m/D} \\ &= \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1}\sum_{m=-\infty}^{\infty} v(m)(e^{-j2\pi k/D}z^{1/D})^{-m} \\ &= \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} V(e^{-j2\pi k/D}z^{1/D}) \\ &= \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} H_D(e^{-j2\pi k/D}z^{1/D})X(e^{-j2\pi k/D}z^{1/D}) \end{aligned} \tag{11.2.9}$$

donde el último paso se deduce del hecho de que $V(z) = H_D(z)X(z)$.

Evaluando $Y(z)$ en la circunferencia unidad, obtenemos el espectro de la señal de salida $y(m)$. Dado que la frecuencia de $y(m)$ es $F_y = 1/T_y$, la variable de frecuencia, que designamos como ω_y, se especifica en radianes y está relacionada con la frecuencia de muestreo F_y de la manera siguiente

$$\omega_y = \frac{2\pi F}{F_y} = 2\pi F T_y \tag{11.2.10}$$

Puesto que las frecuencias de muestreo están relacionadas por la expresión

$$F_y = \frac{F_x}{D} \tag{11.2.11}$$

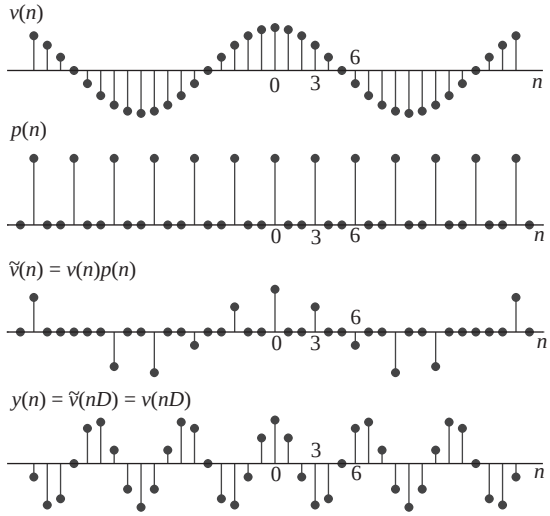


Figura 11.2.2. Pasos necesarios para facilitar la descripción matemática del submuestreo por un factor D, utilizando una secuencia sinusoidal para ilustrarlo.

se deduce que las variables de frecuencia ω_y y

$$\omega_x = \frac{2\pi F}{F_x} = 2\pi F T_x \tag{11.2.12}$$

están relacionadas por

$$\omega_y = D\omega_x \tag{11.2.13}$$

Por tanto, como era de esperar, mediante el proceso de submuestreo, el rango de frecuencias $0 \leq |\omega_x| \leq \pi/D$ se estrecha al rango de frecuencias correspondiente $0 \leq |\omega_y| \leq \pi$.

Concluimos que el espectro $Y(\omega_y)$, el cual se obtiene evaluando (11.2.9) sobre la circunferencia unidad, puede expresarse como

$$Y(\omega_y) = \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} H_D\left(\frac{\omega_y - 2\pi k}{D}\right) X\left(\frac{\omega_y - 2\pi k}{D}\right) \tag{11.2.14}$$

Con un filtro diseñado adecuadamente $H_D(\omega)$, el *aliasing* se elimina y, en consecuencia, todos excepto el primer término de (11.2.14) desaparecen. Por tanto,

$$Y(\omega_y) = \frac{1}{D}H_D\left(\frac{\omega_y}{D}\right) X\left(\frac{\omega_y}{D}\right) = \frac{1}{D}X\left(\frac{\omega_y}{D}\right) \tag{11.2.15}$$

para $0 \leq |\omega_y| \leq \pi$. Los espectros de las secuencias $x(n)$, $v(n)$ e $y(m)$ se ilustran en la Figura 11.2.3.

EJEMPLO 11.2.1

Diseñe un diezmador que submuestree una señal de entrada $x(n)$ por un factor $D = 2$. Utilice el algoritmo de Remez para determinar los coeficientes del filtro FIR con un rizado de 0.1-dB en la banda de paso y una atenuación de al menos 30 dB en la banda eliminada.

Solución. Una longitud de filtro $M = 30$ proporciona las especificaciones de diseño dadas anteriormente. La respuesta en frecuencia se ilustra en la Figura 11.2.4. Observe que la frecuencia de corte es $\omega_c = \pi/2$.

11.3 Interpolación por un factor I

Un incremento en la frecuencia de muestreo por un factor entero I puede conseguirse interpolando $I-1$ nuevas muestras entre valores sucesivos de la señal. El proceso de interpolación puede llevarse a cabo de diversas formas. Describiremos un proceso que conserva la forma espectral de la señal $x(n)$.

Sea $v(m)$ una secuencia con una frecuencia $F_y = IF_x$, la cual se obtiene a partir de $x(n)$ añadiendo $I-1$ ceros entre valores sucesivos de $x(n)$. Así,

$$v(m) = \begin{cases} x(m/I), & m = 0, \pm I, \pm 2I, \ldots \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{11.3.1}$$

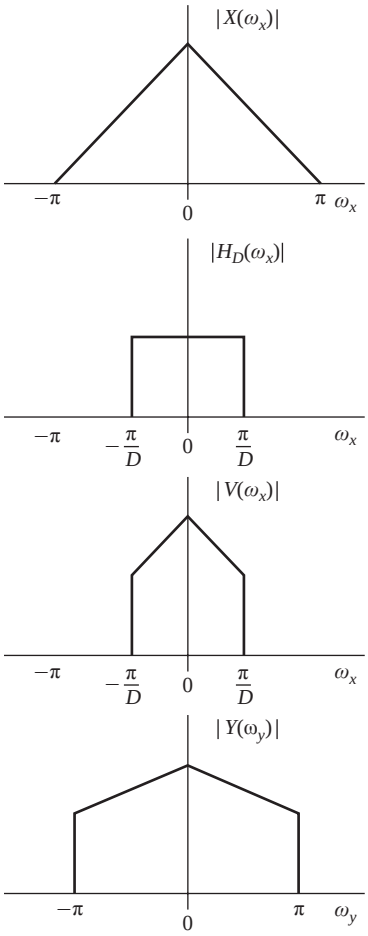


Figura 11.2.3. Espectros de las señales en el proceso de diezmado de $x(n)$ por un factor D.

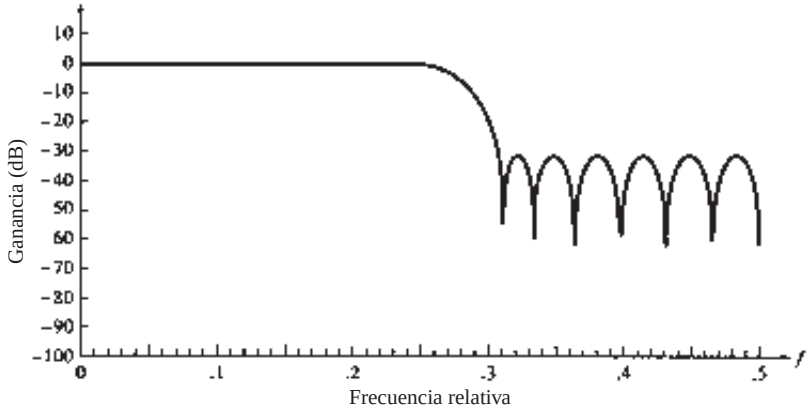


Figura 11.2.4. Módulo de la respuesta del filtro FIR de fase lineal de longitud $M = 30$ del Ejemplo 11.2.1

y su frecuencia de muestreo es idéntica a la frecuencia de $y(m)$. Esta secuencia tiene una transformada z

$$\begin{aligned} V(z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} v(m) z^{-m} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) z^{-mI} \\ &= X(z^I) \end{aligned} \tag{11.3.2}$$

El espectro correspondiente de $v(m)$ se obtiene evaluando (11.3.2) sobre la circunferencia unidad. Así,

$$V(\omega_y) = X(\omega_y I) \tag{11.3.3}$$

donde ω_y designa la relación entre la variable de frecuencia y la nueva frecuencia de muestreo F_y (es decir, $\omega_y = 2\pi F/F_y$). Ahora la relación entre las frecuencias de muestreo es $F_y = IF_x$ y, por tanto, las variables de frecuencia ω_x y ω_y están relacionadas de acuerdo con la fórmula

$$\omega_y = \frac{\omega_x}{I} \tag{11.3.4}$$

Los espectros $X(\omega_x)$ y $V(\omega_y)$ se ilustran en la Figura 11.3.1. Observe que el aumento de la frecuencia de muestreo, obtenido por la adición de $I-1$ muestras de valor cero entre valores sucesivos de $x(n)$, da lugar a una señal cuyo espectro $V(\omega_y)$ es una repetición periódica y solapada I veces del espectro de la señal de entrada $X(\omega_x)$.

Dado que las componentes de frecuencia de $x(n)$ en el rango $0 \le \omega_y \le \pi/I$ son únicas, las imágenes de $X(\omega)$ por encima de $\omega_y = \pi/I$ deben rechazarse pasando la secuencia $v(m)$ a través del filtro paso bajo, cuya respuesta en frecuencia $H_I(\omega_y)$, que idealmente presenta la característica

$$H_I(\omega_y) = \begin{cases} C, & 0 \le |\omega_y| \le \pi/I \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{11.3.5}$$

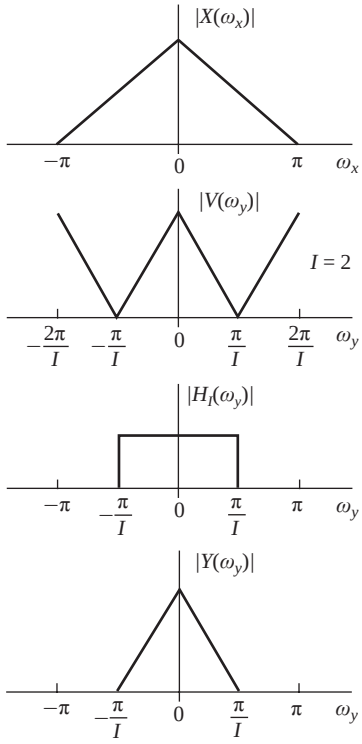


Figura 11.3.1. Espectros de $x(n)$ y $v(n)$ donde $V(\omega_y) = X(\omega_y l)$.

donde C es el factor de escala requerido para normalizar apropiadamente la secuencia de salida $y(m)$. En consecuencia, el espectro de salida es

$$Y(\omega_y) = \begin{cases} CX(\omega_y I), & 0 \le |\omega_y| \le \pi/I \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{11.3.6}$$

El factor de escala C se selecciona de modo que la salida $y(m) = x(m/I)$ para $m = 0, \pm I, +2I, \ldots$. Por comodidad matemática, seleccionamos el punto $m = 0$. Así,

$$\begin{aligned} y(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y(\omega_y)d\omega_y \\ &= \frac{C}{2\pi}\int_{-\pi/I}^{\pi/I} X(\omega_y I)d\omega_y \end{aligned} \tag{11.3.7}$$

Puesto que $\omega_y = \omega_x/I$, (11.3.7) puede expresarse como

$$\begin{aligned} y(0) &= \frac{C}{I}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega_x)d\omega_x \\ &= \frac{C}{I}x(0) \end{aligned} \tag{11.3.8}$$

Por tanto, $C = I$ es el factor de normalización deseado.

Por último, indicamos que la secuencia de salida $y(m)$ puede expresarse como una convolución de la secuencia $v(n)$ con la respuesta al impulso unidad $h(n)$ del filtro paso bajo. Por tanto,

$$y(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(m-k)v(k) \tag{11.3.9}$$

Dado que $v(k) = 0$ excepto en los múltiplos de I, donde $v(kI) = x(k)$, la Ecuación (11.3.9) se convierte en

$$y(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(m-kI)x(k) \tag{11.3.10}$$

EJEMPLO 11.3.1

Diseñe un interpolador que aumente la frecuencia de muestreo de entrada por un factor $l = 5$. Utilice el algoritmo de Remez para determinar los coeficientes de un filtro FIR con un rizado de 0.1-dB en la banda de paso y una atenuación de al menos 30 dB en la banda eliminada.

Solución. Un filtro de longitud $M = 30$ cumple las especificaciones de diseño dadas anteriormente. La respuesta en frecuencia del filtro FIR se ilustra en la Figura 11.3.2. Observe que la frecuencia de corte es $\omega_c = \pi/5$.

11.4 Conversión de la frecuencia de muestreo por un factor racional I/D

Una vez vistos los casos especiales de diezmado (submuestreo por un factor D) e interpolación (sobremuestreo por un factor I), vamos a considerar ahora el caso general de conversión de la frecuencia de muestreo por un factor racional I/D. Básicamente, podemos conseguir esta conversión de la frecuencia de muestreo interpolando en primer lugar por el factor I y luego submuestreando la salida del interpolador por el factor D. En otras palabras, una conversión de la frecuencia de muestreo por un factor racional I/D se consigue conectando en cascada un interpolador y un diezmador, como se ilustra en la Figura 11.4.1.

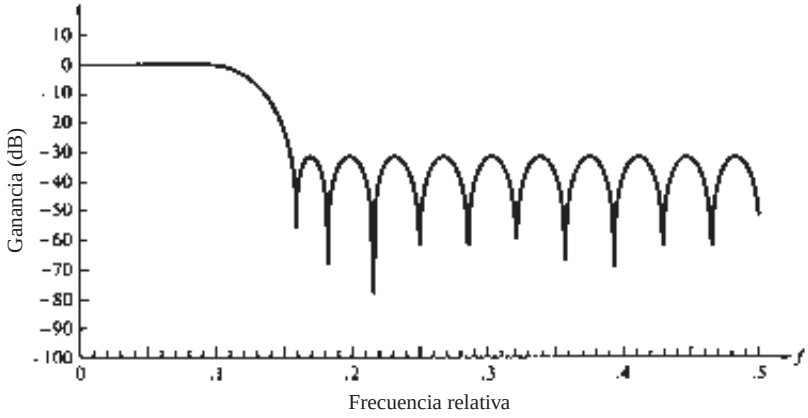


Figura 11.3.2. Módulo de la respuesta del filtro FIR de fase lineal de longitud $M = 30$ del Ejemplo 11.3.1

Debemos destacar que la importancia de realizar la interpolación en primer lugar y luego el diezmado es conservar la característica espectral deseada de $x(n)$. Además, con la configuración en cascada mostrada en la Figura 11.4.1, los dos filtros con respuestas al impulso $\{h_u(k)\}$ y $\{h_d(k)\}$ trabajan a la misma frecuencia, es decir, IF_x, y por tanto se pueden combinar en un solo filtro paso bajo con una respuesta al impulso $h(k)$, como se ilustra en la Figura 11.4.2. La respuesta en frecuencia $H(\omega_v)$ del filtro combinado debe incorporar las operaciones de filtrado tanto para la interpolación como para el diezmado, por lo que idealmente debe poseer la respuesta en frecuencia

$$H(\omega_v) = \begin{cases} I, & 0 \le |\omega_v| \le \text{mín}(\pi/D, \pi/I) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{11.4.1}$$

donde $\omega_v = 2\pi F/F_v = 2\pi F/IF_x = \omega_x/I$.

En el dominio del tiempo, la salida del sobremuestreador es la secuencia

$$v(l) = \begin{cases} x(l/I), & l = 0, \pm I, \pm 2I, \ldots \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{11.4.2}$$

y la salida del filtro lineal e invariante en el tiempo es

$$\begin{aligned} w(l) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(l-k)v(k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(l-kI)x(k) \end{aligned} \tag{11.4.3}$$

Por ultimo, la salida del convertidor de la frecuencia de muestreo es la secuencia $\{y(m)\}$, la cual se obtiene muestreando la secuencia $\{w(l)\}$ por un factor D. Luego

$$\begin{aligned} y(m) &= w(mD) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(mD-kI)x(k) \end{aligned} \tag{11.4.4}$$

Resulta práctico expresar la Ecuación (11.4.4) de otra manera haciendo un cambio de variable. Sea

$$k = \left\lfloor \frac{mD}{I} \right\rfloor - n \tag{11.4.5}$$

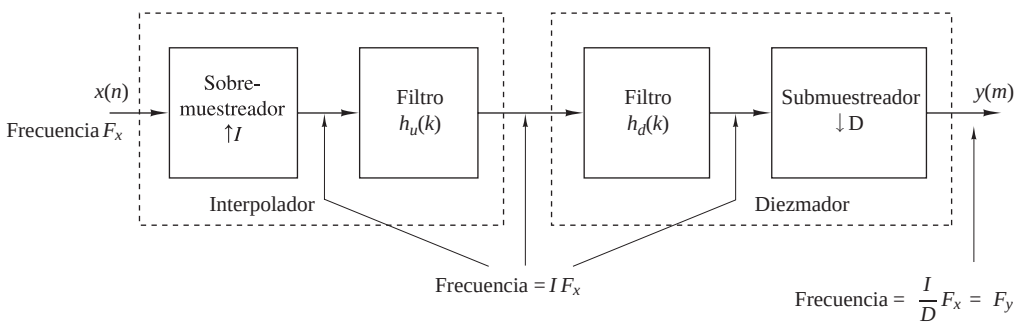


Figura 11.4.1. Método para llevar a cabo la conversión de la frecuencia de muestreo por un factor I/D.

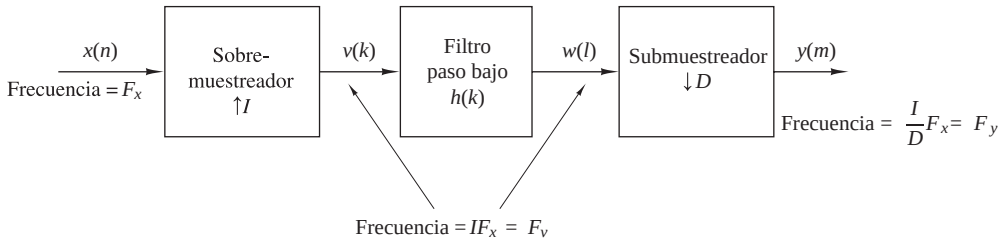


Figura 11.4.2. Método para la conversión de la frecuencia de muestreo por un factor I/D.

donde la notación $\lfloor r \rfloor$ designa el mayor entero contenido en r. Con este cambio de variable, (11.4.4) se transforma en

$$y(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h\left(mD - \left\lfloor \frac{mD}{I} \right\rfloor I + nI\right) x\left(\left\lfloor \frac{mD}{I} \right\rfloor - n\right) \tag{11.4.6}$$

Observe que

$$\begin{aligned} mD - \left\lfloor \tfrac{mD}{I} \right\rfloor I &= mD, \qquad \text{módulo } I \\ &= (mD)_I \end{aligned}$$

En consecuencia, la Ecuación (11.4.6) puede expresarse como

$$y(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nI + (mD)_I) x\left(\left\lfloor \frac{mD}{I} \right\rfloor - n\right) \tag{11.4.7}$$

que es la versión discreta en el tiempo de (11.1.9).

Es evidente a partir de esta expresión que la salida $y(m)$ se obtiene pasando la secuencia de entrada $x(n)$ a través de un filtro variante en el tiempo cuya respuesta al impulso es

$$g(n,m) = h(nI + (mD)_I), \qquad -\infty < m, n < \infty \tag{11.4.8}$$

donde $h(k)$ es la respuesta al impulso del filtro paso bajo invariante en el tiempo para la frecuencia de muestreo IF_x. Observe además que para cualquier entero k,

$$\begin{aligned} g(n, m+kI) &= h(nI + (mD + kDI)_I) \\ &= h(nI + (mD)_I) \\ &= g(n,m) \end{aligned} \tag{11.4.9}$$

Por tanto, $g(n,m)$ es periódica en la variable m y tiene período I.

Las relaciones en el dominio de la frecuencia pueden obtenerse combinando los resultados de los procesos de interpolación y diezmado. Por tanto, el espectro de la salida del filtro lineal con la respuesta al impulso $h(l)$ es

$$V(\omega_v) = H(\omega_v) X(\omega_v I) = \begin{cases} IX(\omega_v I), & 0 \le |\omega_v| \le \text{mín}(\pi/D, \pi/I) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{11.4.10}$$

El espectro de la secuencia de salida $y(m)$, obtenido mediante el diezmado de la secuencia $v(n)$ por un factor de D, es

$$Y(\omega_y) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} V\left(\frac{\omega_y - 2\pi k}{D}\right) \tag{11.4.11}$$

donde $\omega_y = D\omega_v$. Puesto que el filtro lineal impide que se produzca el *aliasing*, como puede verse en la Ecuación (11.4.10), el espectro de la secuencia de salida dada por (11.4.11) se reduce a

$$Y(\omega_y) = \begin{cases} \dfrac{I}{D} X\left(\dfrac{\omega_y}{D}\right), & 0 \le |\omega_y| \le \text{mín}\left(\pi, \dfrac{\pi D}{I}\right) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{11.4.12}$$

EJEMPLO 11.4.1

Diseñe un convertidor de la frecuencia de muestreo que aumente dicha frecuencia de muestreo en un factor de 2.5. Utilice el algoritmo de Remez para determinar los coeficientes del filtro FIR que presenta un rizado de 0.1-dB en la banda de paso y una atenuación de al menos 30 dB en la banda eliminada. Especifique los conjuntos de los coeficientes variantes en el tiempo $g(n,m)$ empleados en la realización del convertidor de la frecuencia de muestreo.

Solución. El filtro FIR que cumple las especificaciones de este problema es exactamente el mismo que el filtro diseñado en el Ejemplo 11.3.1. Su ancho de banda es $\pi/5$.

Los coeficientes del filtro FIR están dados por la Ecuación (11.4.8), luego

$$\begin{aligned} g(n,m) &= h(nI + (mD)_I) \\ &= h\left(nI + mD - \lfloor \frac{mD}{I} \rfloor I\right) \end{aligned}$$

Sustituyendo $I = 5$ y $D = 2$ obtenemos

$$g(n,m) = h\left(5n + 2m - 5\lfloor \frac{2m}{5} \rfloor\right)$$

Evaluando $g(n,m)$ para $n = 0,1,\ldots,5$ y $m = 0,1,\ldots,4$ obtenemos los siguientes coeficientes para el filtro variante en el tiempo:

$$\begin{array}{lllll} g(0,m) = \{h(0) & h(2) & h(4) & h(1) & h(3)\ \} \\ g(1,m) = \{h(5) & h(7) & h(9) & h(6) & h(8)\ \} \\ g(2,m) = \{h(10) & h(12) & h(14) & h(11) & h(13)\} \\ g(3,m) = \{h(15) & h(17) & h(19) & h(16) & h(18)\} \\ g(4,m) = \{h(20) & h(22) & h(24) & h(21) & h(23)\} \\ g(0,m) = \{h(25) & h(27) & h(29) & h(26) & h(28)\} \end{array}$$

En resumen, la conversión de la frecuencia de muestreo por un factor I/D puede llevarse a cabo aumentando primero la frecuencia de muestreo en un factor I, lo que se consigue insertando $I-1$ ceros entre valores sucesivos de la señal de entrada $x(n)$, realizando un filtrado lineal a continuación de la secuencia resultante para eliminar las imágenes no deseadas de $X(\omega)$ y submuestreando por último la señal filtrada por el factor D. Cuando $F_y > F_x$, el filtro paso bajo actúa como un postfiltro que elimina las réplicas espectrales en los múltiplos de F_x, pero no en los múltiplos de IF_x. Cuando $F_y < F_x$, el filtro paso bajo actúa como un prefiltro de *anti-aliasing* que elimina las réplicas espectrales desplazadas hacia abajo en múltiplos de F_y para evitar el solapamiento. El diseño del filtro paso bajo puede hacerse aplicando las técnicas de diseño de filtros descritas en el Capítulo 10.

11.5 Implementación de la conversión de la frecuencia de muestreo

En esta sección vamos a ver la implementación eficiente de sistemas de conversión de la frecuencia de muestreo utilizando estructuras de filtros polifásicos. Pueden conseguirse simplificaciones en los cálculos utilizando el método multietapa descrito en la Sección 11.6.

11.5.1 Estructuras de los filtros polifásicos

Las estructuras polifásicas de filtros FIR se desarrollaron para permitir la implementación eficiente de los convertidores de la frecuencia de muestreo; sin embargo, pueden emplearse también en otras aplicaciones. La estructura polifásica se basa en el hecho de que cualquier función de sistema puede separarse como sigue

$$\begin{aligned} H(z) &= \cdots + h(0) + h(M)z^{-M} + \cdots \\ &\quad \cdots + h(1)z^{-1} + h(M+1)z^{-(M+1)} + \cdots \\ &\vdots \\ &\quad \cdots + h(M-1)z^{-(M-1)} + h(2M-1)z^{-(2M-1)} + \cdots \end{aligned}$$

Si a continuación sacamos el factor $z^{-(i-1)}$ de la fila i-ésima, obtenemos

$$\begin{aligned} H(z) = {} & [\cdots + h(0) + h(M)z^{-M} + \cdots] \\ & + z^{-1}[\cdots + h(1) + h(M+1)z^{-M} + \cdots] \\ & \vdots \\ & + z^{-(M-1)}[\cdots + h(M-1) + h(2M-1)z^{-M} + \cdots] \end{aligned}$$

La última ecuación puede expresarse de forma compacta como

$$H(z) = \sum_{i=0}^{M-1} z^{-i} P_i(z^M) \tag{11.5.1}$$

donde

$$P_i(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nM+i)z^{-n} \tag{11.5.2}$$

La relación (11.5.1) se conoce como *descomposición polifásica en M componentes* y $P_i(z)$ son las componentes polifásicas de $H(z)$. Cada subsecuencia

$$p_i(n) = h(nM+i), \quad i = 0, 1, \ldots, M-1 \tag{11.5.3}$$

se obtiene muestreando una versión retardada ("en fase") de la respuesta al impulso original.

Para desarrollar una estructura de filtro polifásico de M componentes, utilizamos la Ecuación (11.5.1) para $M = 3$, con el fin de expresar la transformada z de la secuencia de salida como

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z)X(z) \\ &= P_0(z^3)X(z) + z^{-1}P_1(z^3)X(z) + z^{-2}P_2(z^3)X(z) && (11.5.4) \\ &= P_0(z^3)X(z) + z^{-1}\{P_1(z^3)X(z) + z^{-1}[P_2(z^3)X(z)]\} && (11.5.5) \end{aligned}$$

La Ecuación (11.5.4) lleva a la estructura polifásica de la Figura 11.5.1. Del mismo modo, (11.5.5) lleva a la estructura polifásica mostrada en la Figura 11.5.2. Ésta se conoce como estructura polifásica transpuesta porque es similar a la realización transpuesta del filtro FIR. Las estructuras polifásicas obtenidas son válidas para cualquier filtro, FIR o IIR, y cualquier valor finito de M y nos bastan para cubrir nuestras necesidades. Puede encontrar estructuras y detalles adicionales en Vaidyanathan (1993).

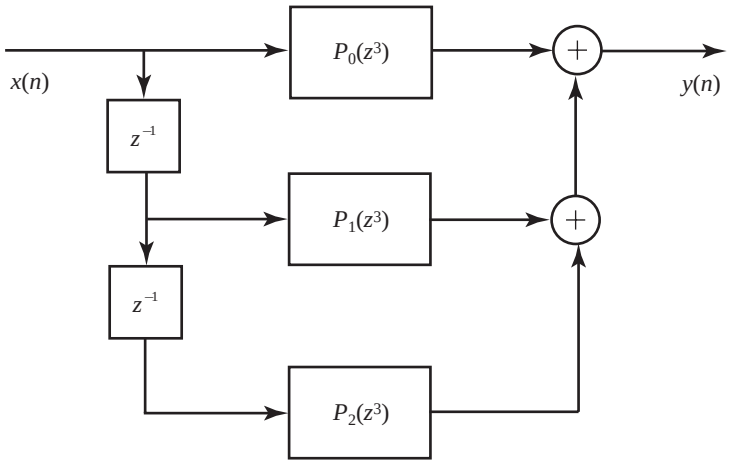


Figura 11.5.1. Diagrama de bloques de la estructura de filtro polifásico para $M = 3$.

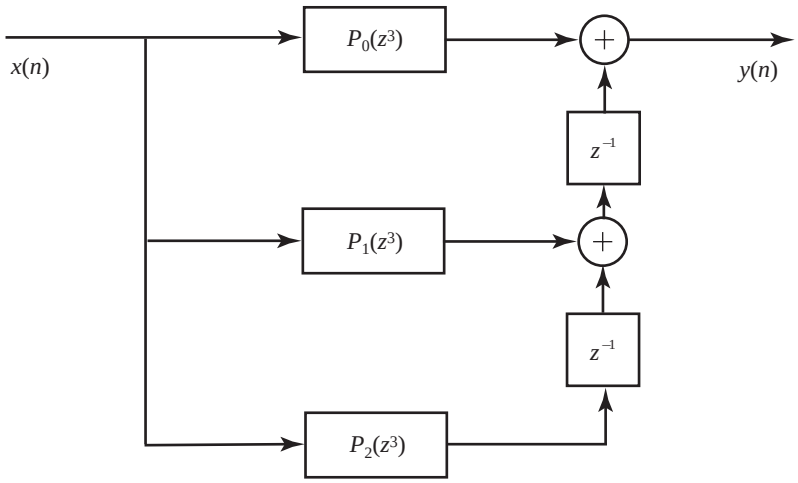


Figura 11.5.2. Ilustración de la estructura de filtro polifásico para $M = 3$.

11.5.2 Intercambio de filtros y submuestreadores/sobremuestreadores

En general, el orden de un convertidor de la frecuencia de muestreo (el cual es un sistema lineal y variante en el tiempo) y un sistema lineal invariante en el tiempo *no pueden* intercambiarse. A continuación vamos a obtener dos identidades, conocidas como *identidades nobles*, que permiten intercambiar la posición de un filtro con la de un submuestreador o un sobremuestreador modificando el filtro de la forma adecuada.

Para demostrar la primera identidad (*véase* la Figura 11.5.3), recordemos que la relación entrada–salida de un submuestreador es

$$y(n) = x(nD) \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} Y(z) = \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} X(z^{1/D}W_D^i) \tag{11.5.6}$$

donde $W_D = e^{-j2\pi/D}$. La salida del sistema en la Figura 11.5.3(a) puede expresarse como

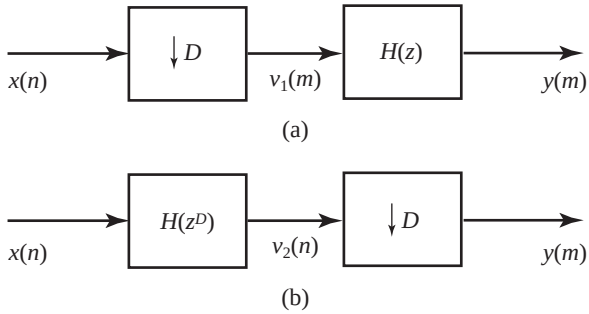


Figura 11.5.3. Dos sistemas de submuestreo equivalentes (primera identidad noble).

$$Y(z) = \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} V_1(z^{1/D}W_D^i) = \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} H(zW_D^{iD})X(z^{1/D}W_D^i) \tag{11.5.7}$$

porque $V_1(z) = H(z^D)X(z)$. Teniendo en cuenta $W_D^{iD} = 1$ y la Figura 11.5.3(b), la relación (11.5.7) queda

$$Y(z) = \frac{1}{D}H(z)\sum_{i=0}^{D-1} X(z^{1/D}W_D^i) = H(z)V_2(z) \tag{11.5.8}$$

lo que demuestra la equivalencia de las dos estructuras mostradas en la Figura 11.5.3.

Puede demostrarse una identidad similar para el caso del sobremuestreo. Comencemos recordando que la relación entrada–salida de un sobremuestreador es

$$y(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{I}\right), & n = 0, \pm I, \pm 2I, \ldots \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} Y(z) = X(z^I) \tag{11.5.9}$$

La salida del sistema de la Figura 11.5.4(a) puede escribirse como

$$Y(z) = H(z^I)V_1(z) = H(z^I)X(z^I) \tag{11.5.10}$$

porque $V_1(z) = X(z^I)$. La salida del sistema en la Figura 11.5.4(b) está dada por

$$Y(z) = V_2(z^I) = H(z^I)X(z^I) \tag{11.5.11}$$

que es igual a (11.5.10). Esto demuestra que los dos sistemas de la Figura 11.5.4 son idénticos.

En conclusión, hemos demostrado que es posible intercambiar la operación de filtrado lineal y el submuestreo o sobremuestreo, si modificamos adecuadamente la función de sistema del filtro.

11.5.3 Conversión de la frecuencia de muestreo mediante filtros peine con integrador conectado en cascada

La implementación hardware del filtro paso bajo necesario para la conversión de la frecuencia de muestreo puede simplificarse de forma importante si elegimos un filtro peine cuya función de sistema sea (*véase* la Sección 5.4.5)

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} z^{-k} = \frac{1 - z^{-M}}{1 - z^{-1}} \tag{11.5.12}$$

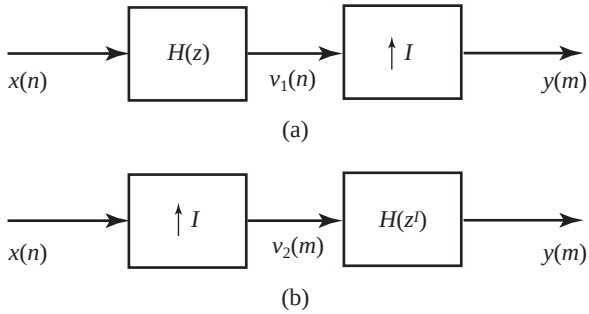


Figura 11.5.4. Dos sistemas de sobremuestreo equivalentes (segunda identidad noble).

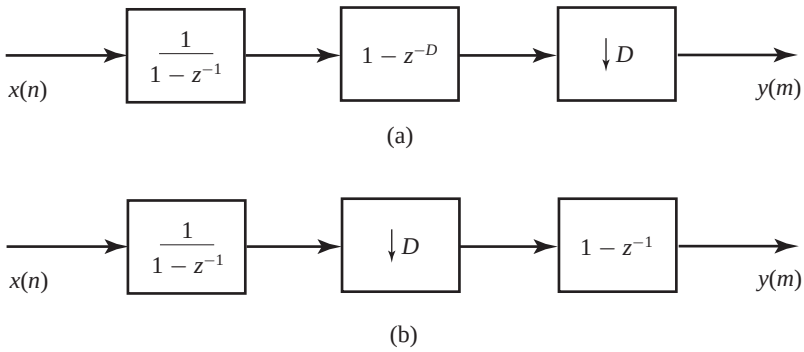


Figura 11.5.5. Uso de la primera identidad noble para obtener un filtro CIC eficiente para diezmado.

Este sistema puede implementarse conectando en cascada el "integrador" $1/(1-z^{-1})$ con el filtro peine $(1-z^{-M})$, o viceversa. Esto nos lleva a la citada estructura de filtro CIC *cascaded integrator comb, filtro peine con integrador en cascada*. Esta estructura CIC no requiere ninguna multiplicación o almacenamiento para los coeficientes del filtro.

Para obtener una estructura de diezmado eficiente, partimos de un filtro CIC peine–integrador seguido de un submuestreador y luego aplicamos la primera identidad noble, como se muestra en la Figura 11.5.5. Para el caso de interpolación, utilizamos un sobremuestreador seguido de un filtro CIC peine-integrador y luego aplicamos la segunda identidad noble, como se muestra en la Figura 11.5.6. Para mejorar la respuesta en frecuencia del filtro paso bajo necesario para llevar a cabo la conversión de la frecuencia de muestreo, podemos conectar en cascada K filtros CIC. En este caso, podemos colocar todos los integradores en un lado del filtro y los filtros peine en el otro lado, y luego aplicar las identidades nobles como en el caso de una sola etapa. El integrador $1/(1-z^{-1})$ es un sistema inestable. Por tanto, su salida puede crecer sin límites, haciendo que aparezca un desbordamiento cuando la sección del integrador esté en primer lugar, como en el caso de la estructura de diezmado mostrada en la Figura 11.5.5(b). Sin embargo, este desbordamiento puede ser tolerable si el filtro completo se implementa utilizando aritmética de punto fijo en complemento a dos. Si $D \neq M$ o $I \neq M$, el filtro peine $1-z^{-1}$ de las Figuras 11.5.5(a) y 11.5.6(b) debe reemplazarse por $1-z^{-M/D}$ o $1-z^{-M/I}$, respectivamente. Puede ver un tratamiento detallado de los filtros CIC para operaciones de diezmado e interpolación en Hogenauer (1981). Por último, observe que los filtros CIC son casos especiales de la estructura de muestreo en frecuencia vista en la Sección 10.2.3.

Si el orden del filtro CIC es una potencia de 2, es decir, $M = 2^K$, podemos descomponer la función de sistema (11.5.12) como sigue:

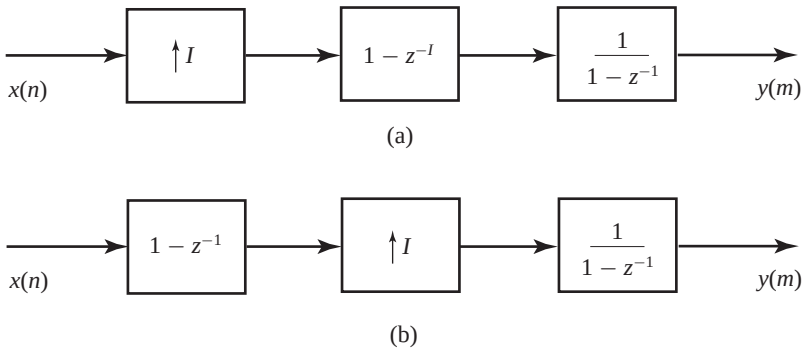


Figura 11.5.6. Uso de la segunda identidad noble para obtener un filtro CIC eficiente para interpolación.

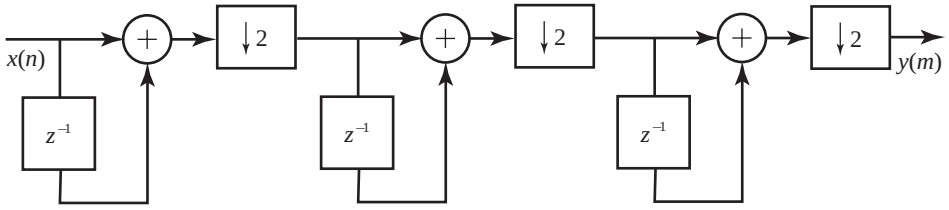


Figura 11.5.7. Estructura de filtro eficiente para llevar a cabo un diezmado por el factor $D = 8$ utilizando filtros peine.

$$H(z) = (1+z^{-1})(1+z^{-2})(1+z^{-4})\dots(1+z^{-2^{K-1}}) \tag{11.5.13}$$

Utilizando esta descomposición podemos desarrollar estructuras de diezmadores utilizando filtros CIC no recursivos. La Figura 11.5.7 muestra un ejemplo de un diezmador para $D = M = 8$. Esta estructura puede obtenerse conectando en cascada N filtros CIC siempre y cuando haya M secciones de primer orden $(1-z^{-1})$ entre cada etapa de diezmado. Podemos relajar la restricción $M = 2^K$ descomponiendo M en un producto de números primos, como se puede ver en Jang y Yang (2001).

11.5.4 Estructuras polifásicas para filtros de diezmado e interpolación

Para desarrollar una estructura polifásica para diezmado, partimos de la implementación directa del proceso de diezmado mostrado en la Figura 11.5.8. La secuencia diezmada se obtiene pasando la secuencia de entrada $x(n)$ a través de un filtro lineal y luego submuestreando la salida del filtro por un factor D. En esta configuración, el filtro opera a la frecuencia de muestreo superior F_x, mientras que sólo se precisa una de cada D muestras de salida. Una solución lógica sería encontrar una estructura en la que sólo se calculen las muestras necesarias. Vamos a desarrollar dicha implementación utilizando la estructura polifásica de la Figura 11.5.1. Puesto que el submuestreo conmuta con la suma, combinando las estructuras de las Figuras 11.5.8 y 11.5.1 obtenemos la estructura de la Figura 11.5.9(a). Si a continuación aplicamos la identidad de la Figura 11.5.3, obtenemos la estructura de implementación deseada mostrada en la Figura 11.5.9(b). En esta estructura de filtrado, sólo se calculan las muestras necesarias y todas las multiplicaciones y sumas se realizan a la frecuencia de muestreo inferior F_x/D. Así hemos obtenido la eficiencia deseada. Puede conseguirse una reducción adicional de los cálculos utilizando un filtro FIR de fase lineal y aplicando la propiedad de simetría de su respuesta al impulso.

En la práctica es más conveniente implementar el diezmador polifásico utilizando un *modelo de conmutador* como el mostrado en la Figura 11.5.10. El conmutator gira en *sentido horario* a partir del instante $n = 0$ y distribuye un bloque de D muestras de entrada a los filtros polifásicos comenzando por el filtro $i = D-1$ y

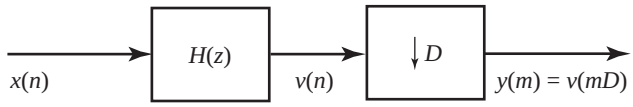


Figura 11.5.8. Sistema de diezmado.

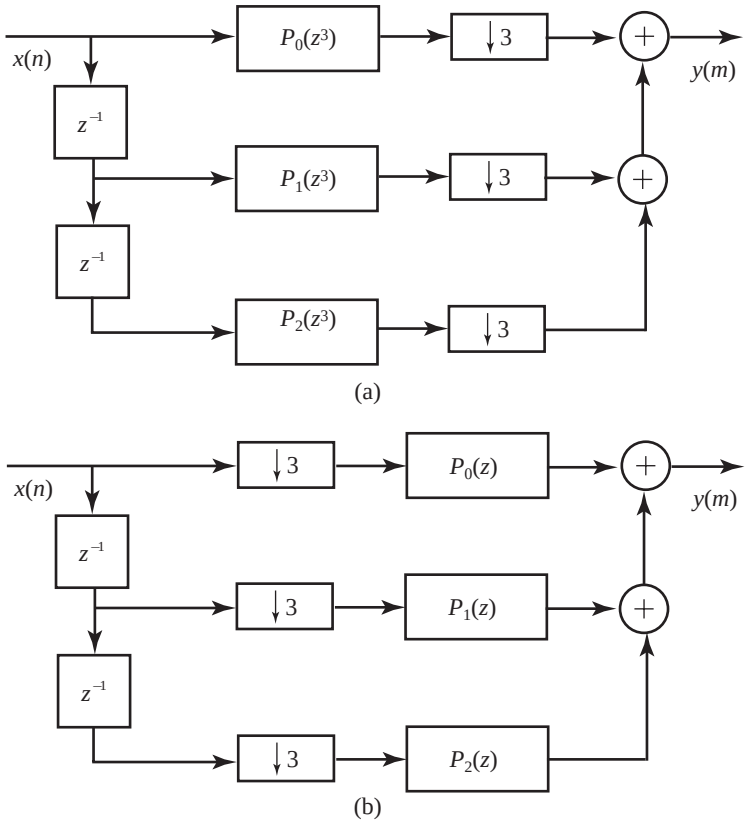


Figura 11.5.9. Implementación de un sistema de diezmado utilizando una estructura polifásica antes (a) y después (b) de utilizar la primera identidad noble.

continuando en orden inverso hasta $i = 0$. Por cada bloque de D muestras de entrada, los filtros polifásicos reciben una nueva entrada y sus salidas se calculan y suman para generar una muestra de la señal de salida $y(m)$. Puede aprender cómo funciona esta realización haciendo una inspección detenida de la Figura 11.1.3.

Consideremos ahora la implementación eficiente de un interpolador, el cual se realiza insertando en primer lugar $I - 1$ ceros entre muestras sucesivas de $x(n)$ y filtrando a continuación la secuencia resultante (*véase* la Figura 11.5.11). El principal problema con esta estructura es que los cálculos para el filtro se efectúan a la frecuencia de muestreo superior IF_x. La simplificación deseada se consigue reemplazando en primer lugar el filtro de la Figura 11.5.11 por la estructura polifásica transpuesta de la Figura 11.5.2, como se muestra en la Figura 11.5.12(a). A continuación, utilizamos la segunda identidad noble (*véase* la Figura 11.5.4) para obtener la estructura de la Figura 11.5.12(b). Así, todas las multiplicaciones de la operación de filtrado se efectúan a la frecuencia F_x. Es interesante destacar que la estructura de un interpolador se puede obtener transponiendo la estructura de un diezmador, y viceversa (Crochiere y Rabiner, 1981).

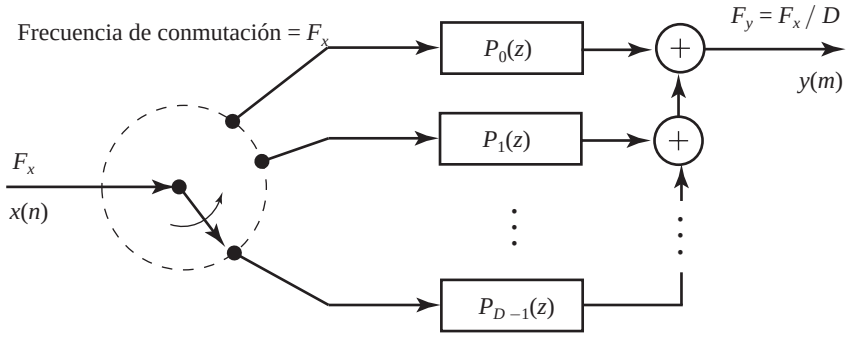


Figura 11.5.10. Diezmado utilizando un filtro polifásico y un conmutador.

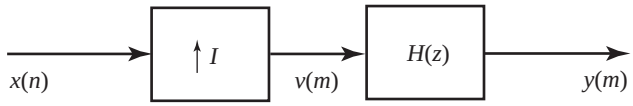


Figura 11.5.11. Sistema de interpolación.

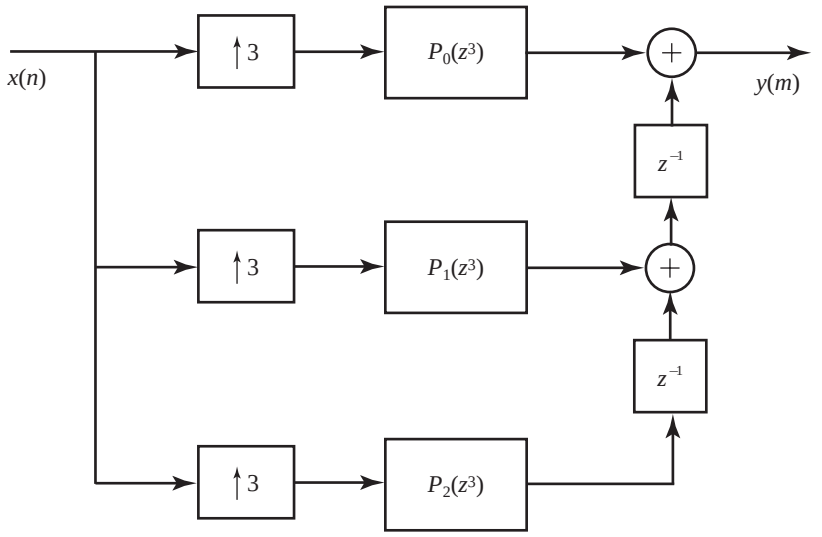
Para cada muestra de entrada, los filtros polifásicos producen I muestras de salida $y_0(n), y_1(n), \ldots, y_{I-1}(n)$. Dado que la salida $y_i(n)$ del filtro i va seguida por $(I-1)$ ceros y está retardada i muestras, los filtros polifásicos contribuyen con muestras distintas de cero en diferentes franjas temporales. En la práctica, podemos implementar la parte de la estructura que incluye los 1-a-I expansores, retardadores y sumadores utilizando el modelo de conmutador mostrado en la Figura 11.5.13. El conmutador gira en *sentido antihorario* empezando en el instante $n = 0$ en la rama $i = 0$. Por cada muestra de entrada $x(n)$, el conmutador lee la salida de los filtros polifásicos para obtener I muestras de la señal de salida (interpolada) $y(m)$. El funcionamiento de esta estructura puede comprenderse examinando en detalle la Figura 11.1.4. Cada filtro polifásico de la Figura 11.5.13 opera sobre la misma entrada utilizando su conjunto unívoco de coeficientes. Por tanto, podemos obtener los mismos resultados empleando un sólo filtro y cargando secuencialmente un conjunto diferente de coeficientes.

11.5.5 Estructuras para la conversión de la frecuencia de muestreo racional

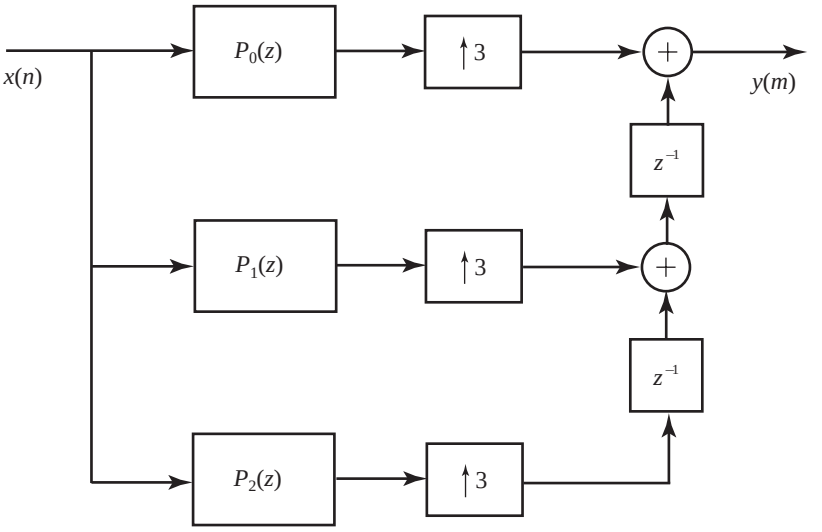
Un convertidor de frecuencia de muestreo con una relación I/D se puede implementar de forma eficiente utilizando un interpolador polifásico seguido de un submuestreador. Sin embargo, puesto que el submuestreador sólo conserva D salidas del subfiltro polifásico, no es necesario calcular los I valores interpolados entre muestras de entrada sucesivas. Para determinar qué salidas del subfiltro polifásico hay que calcular, consideremos un ejemplo con $I = 5$ y $D = 3$. La estructura polifásica del interpolador tiene $I = 5$ subfiltros que proporcionan muestras interpoladas en un período efectivo de muestreo $T = T_x/I$. El submuestreador toma D de estas muestras, dando lugar a una señal discreta en el tiempo con un período de muestreo $T_y = DT = DT_x/I$. Es recomendable pensar en términos de bloques de duración

$$T_{\text{bloque}} = IT_y = DT_x = IDT \tag{11.5.14}$$

que contengan L muestras de salida o I muestras de entrada. Las posiciones temporales relativas de las distintas secuencias y un bloque de datos se ilustran en la Figura 11.5.14. La secuencia de entrada $x(nT_x)$ se interpola para generar una secuencia $v(kT)$, la cual se diezma a continuación para obtener $y(mT_y)$. Si utilizamos un filtro FIR con $M = KI$ coeficientes, los subfiltros polifásicos están dados por $p_i(n) = h(nI + i)$, $i = 0, 1, \ldots, I-1$, donde $n = 0, 1, \ldots, K-1$. Para calcular la muestra de salida $y(m)$, utilizamos el subfiltro polifásico con índice i_m que requiere las muestras de entrada $x(k_m), x(k_m - 1), \ldots, x(k_m - K + 1)$. A partir de la relación (11.1.9) y de la Figura 11.5.14, podemos deducir fácilmente que



(a)



(b)

Figura 11.5.12. Implementación de un sistema de interpolación utilizando una estructura polifásica antes (a) y después (b) de utilizar la segunda identidad noble.

$$k_m = \left\lfloor \frac{mD}{I} \right\rfloor \quad \text{e} \quad i_m = (Dm)_I \tag{11.5.15}$$

Para $D = 3$ e $I = 5$, el primer bloque de datos incluye $D = 3$ muestras de entrada e $I = 5$ muestras de salida. Para calcular las muestras $\{y(0), y(1), y(2), y(3), y(4)\}$, utilizamos el subfiltro polifásico especificado por el índice $i_m = \{0, 3, 1, 4, 2\}$, respectivamente. Las muestras que se hallan en la memoria del filtro sólo se actualizan cuando k_m cambia de valor. Esta explicación proporciona las ideas básicas para llevar a cabo la implementación software eficiente del convertidor de la frecuencia de muestreo racional utilizando filtros FIR.

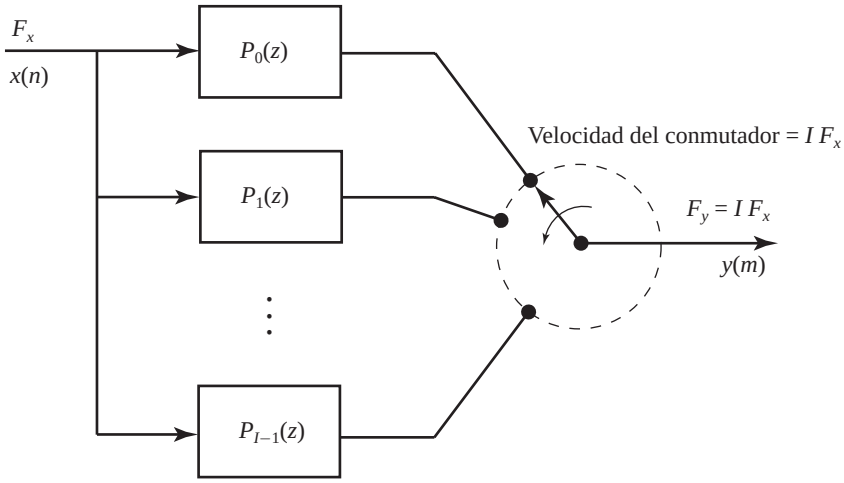


Figura 11.5.13. Interpolación por medio de un filtro polifásico y un conmutador.

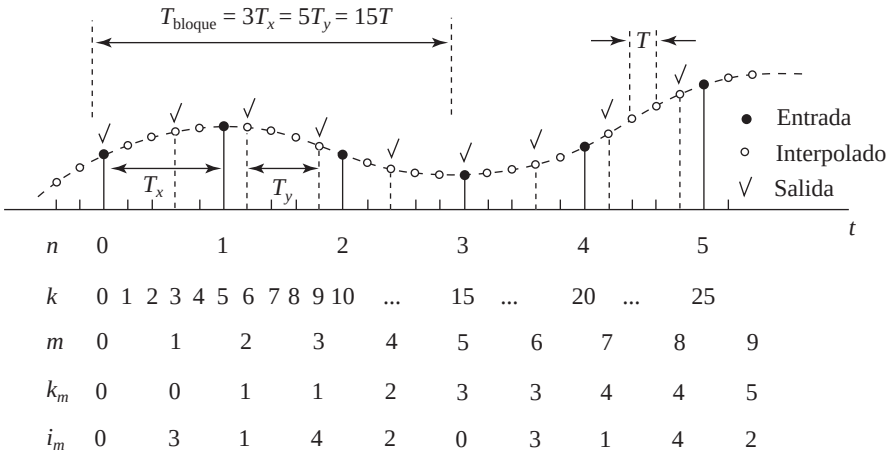


Figura 11.5.14. Ilustración del cálculo del índice para una implementación polifásica de la conversión de la frecuencia de muestreo para una relación racional $I/D = 5/3$.

11.6 Implementación multietapa de la conversión de la frecuencia de muestreo

En aplicaciones prácticas de conversión de la frecuencia de muestreo a menudo encontraremos factores de diezmado y factores de interpolación que son mucho mayores que la unidad. Por ejemplo, suponga que tenemos que alterar la frecuencia de muestreo por el factor $I/D = 130/63$. Aunque en teoría esta alteración de la frecuencia se puede conseguir de forma exacta, la implementación requeriría un banco de 130 filtros polifásicos y podría resultar ineficiente en lo que respecta a los cálculos. En esta sección, vamos a ver diversos métodos que permiten llevar a cabo la conversión de la frecuencia de muestreo para $D \gg 1$ y/o $I \gg 1$ en múltiples etapas.

En primer lugar, considere la interpolación por un factor $I \gg 1$ y suponga que I puede descomponerse en un producto de enteros positivos como

$$I = \prod_{i=1}^{L} I_i \tag{11.6.1}$$

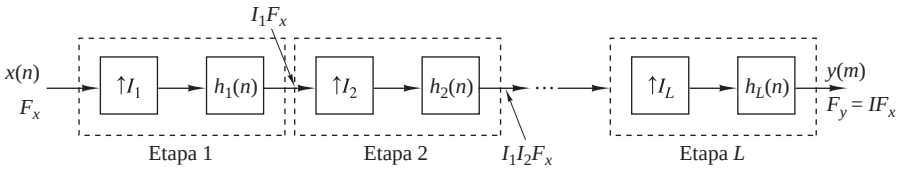


Figura 11.6.1. Implementación multietapa de interpolación por un factor I.

Luego la interpolación por un factor I puede conseguirse conectando en cascada L etapas de interpolación y filtrado, como se muestra en la Figura 11.6.1. Observe que el filtro de cada uno de los interpoladores elimina las imágenes introducidas por el proceso de sobremuestreo en el interpolador correspondiente.

De forma similar, el diezmado por un factor D, donde D puede descomponerse como un producto de enteros positivos

$$D = \prod_{i=1}^{J} D_i \tag{11.6.2}$$

es posible implementarlo como una conexión en cascada de J etapas de filtrado y diezmado como se ilustra en la Figura 11.6.2. Por tanto, la frecuencia de muestreo en la salida de la etapa i es

$$F_i = \frac{F_{i-1}}{D_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, J \tag{11.6.3}$$

donde la frecuencia de entrada para la secuencia $\{x(n)\}$ es $F_0 = F_x$.

Para garantizar que no se produce *aliasing* en el proceso de diezmado global, podemos diseñar cada etapa de filtrado de manera que se evite el *aliasing* dentro de la banda de frecuencias de interés. Definamos ahora la banda de paso y la banda de transición deseadas del diezmador global de la forma siguiente

$$\begin{aligned} &\text{Banda de paso: } 0 \le F \le F_{\text{pc}} \\ &\text{Banda de transición: } F_{\text{pc}} \le F \le F_{\text{sc}} \end{aligned} \tag{11.6.4}$$

donde $F_{\text{sc}} \le F_x/2D$. Así, el *aliasing* en la banda $0 \le F \le F_{\text{sc}}$ se evita seleccionando las bandas de frecuencia de cada filtro de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{Banda de paso: } 0 \le F \le F_{\text{pc}} \\ &\text{Banda de transición: } F_{\text{pc}} \le F \le F_i - F_{\text{sc}} \\ &\text{Banda eliminada: } F_i - F_{\text{sc}} \le F \le \frac{F_{i-1}}{2} \end{aligned} \tag{11.6.5}$$

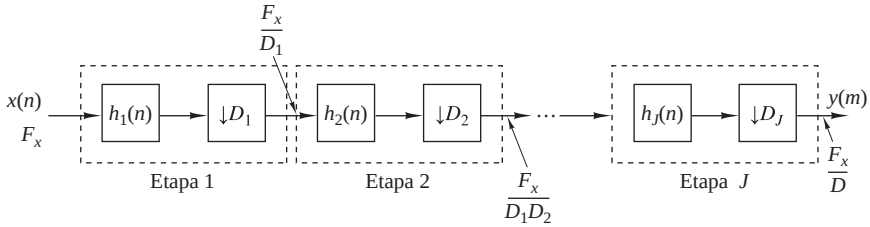


Figura 11.6.2. Implementación multietapa de diezmado por un factor D.

Por ejemplo, en la primera etapa de filtrado tenemos $F_1 = F_x/D_1$, y el filtro se diseña para tener las siguientes bandas de frecuencia:

$$\begin{aligned} &\text{Banda de paso: } 0 \le F \le F_{\text{pc}} \\ &\text{Banda de transición: } F_{\text{pc}} \le F \le F_1 - F_{\text{sc}} \\ &\text{Banda eliminada: } F_1 - F_{\text{sc}} \le F \le \frac{F_0}{2} \end{aligned} \tag{11.6.6}$$

Después del diezmado por D_1, existe *aliasing* procedente de las componentes de señal que caen en la banda de transición del filtro, pero el *aliasing* se produce a frecuencias por encima de F_{sc}. Luego no existe *aliasing* en la banda de frecuencias $0 \le F \le F_{\text{sc}}$. Diseñando los filtros de las etapas subsiguientes para satisfacer las especificaciones dadas en (11.6.5), garantizamos que no se producirá *aliasing* en la banda de frecuencias principal $0 \le F \le F_{\text{sc}}$.

EJEMPLO 11.6.1

Considere una señal de audio con un ancho de banda nominal de 4 kHz que ha sido muestreada a una frecuencia de 8 kHz. Suponga que deseamos aislar las componentes de frecuencia que están por debajo de 80 Hz con un filtro que tiene una banda de paso $0 \le F \le 75$ y una banda de transición $75 \le F \le 80$. Luego $F_{\text{pc}} = 75$ Hz y $F_{\text{sc}} = 80$. La señal existente en la banda $0 \le F \le 80$ puede diezmarse por el factor $D = F_x/2F_{\text{sc}} = 50$. Especificamos también que el filtro tiene un rizado en la banda de paso $\delta_1 = 10^{-2}$ y un rizado en la banda eliminada $\delta_2 = 10^{-4}$.

La longitud del filtro FIR de fase lineal necesario para satisfacer estas especificaciones se puede estimar a partir de las fórmulas bien conocidas dadas en la Sección 10.2.7. Recuerde que una fórmula especialmente simple que permite obtener una aproximación de la longitud M, atribuida a Kaiser, es

$$\hat{M} = \frac{-10\log_{10}\delta_1\delta_2 - 13}{14.6\Delta f} + 1 \tag{11.6.7}$$

donde Δf es la anchura normalizada (mediante la frecuencia de muestreo) de la región de transición [es decir, $\Delta f = (F_{\text{sc}} - F_{\text{pc}})/F_s$]. Una fórmula más precisa propuesta por Herrmann *et al.* (1973) es

$$\hat{M} = \frac{D_\infty(\delta_1,\delta_2) - f(\delta_1,\delta_2)(\Delta f)^2}{\Delta f} + 1 \tag{11.6.8}$$

donde $D_\infty(\delta_1, \delta_2)$ y $f(\delta_1, \delta_2)$ se definen como

$$\begin{aligned} D_\infty(\delta_1,\delta_2) &= [0.005309(\log_{10}\delta_1)^2 + 0.07114(\log_{10}\delta_1) \\ &\quad -0.4761]\log_{10}\delta_2 \\ &\quad -[0.00266(\log_{10}\delta_1)^2 + 0.5941\log_{10}\delta_1 + 0.4278] \end{aligned} \tag{11.6.9}$$

$$f(\delta_1,\delta_2) = 11.012 + 0.51244[\log_{10}\delta_1 - \log_{10}\delta_2] \tag{11.6.10}$$

Ahora un sólo filtro FIR seguido por un diezmador requerirá (utilizando la fórmula de Kaiser) un filtro de longitud (aproximada)

$$\hat{M} = \frac{-10\log_{10}10^{-6} - 13}{14.6(5/8000)} + 1 \approx 5152$$

Como alternativa, considere un proceso de diezmado en dos etapas con $D_1 = 25$ y $D_2 = 2$. En la primera etapa tenemos las especificaciones $F_1 = 320$ Hz y

$$\begin{aligned} &\text{Banda de paso: } 0 \le F \le 75 \\ &\text{Banda de transición: } 75 < F \le 240 \\ &\Delta f = \frac{165}{8000} \\ &\delta_{11} = \frac{\delta_1}{2}, \qquad \delta_{21} = \delta_2 \end{aligned}$$

Observe que hemos reducido el rizado de la banda de paso δ_1 en un factor de 2, por lo que el rizado total en la banda de paso de la conexión en cascada de los dos filtros no excede el valor de δ_1. Por otro lado, el rizado de la banda eliminada se mantiene en δ_2 en ambas etapas. Ahora la fórmula de Kaiser proporciona un valor estimado de M_1

$$\hat{M}_1 = \frac{-10\log_{10}\delta_{11}\delta_{21} - 13}{14.6\Delta f} + 1 \approx 167$$

En la segunda etapa, tenemos $F_2 = F_1/2 = 160$ y las especificaciones

$$\begin{aligned}
&\text{Banda de paso: } 0 \le F \le 75\\
&\text{Banda de transición: } 75 < F \le 80\\
&\Delta f = \frac{5}{320}\\
&\delta_{12} = \frac{\delta_1}{2}, \qquad \delta_{22} = \delta_2
\end{aligned}$$

Luego el valor estimado de la longitud M_2 del segundo filtro es

$$\hat{M}_2 \approx 220$$

Por tanto, la longitud total de los dos filtros FIR es aproximadamente $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 387$. Esto representa una reducción en un factor mayor de 13 de la longitud del filtro.

Animamos al lector a que repita los cálculos anteriores para $D_1 = 10$ y $D_2 = 5$.

Es evidente a partir de los cálculos realizados en el Ejemplo 11.6.1 que la reducción de la longitud del filtro es resultado de incrementar el factor Δf, el cual aparece en el denominador de las Ecuaciones (11.6.7) y (11.6.8). Llevando a cabo el proceso de diezmado en múltiples etapas, podemos aumentar la anchura de la región de transición a través de una reducción de la frecuencia de muestreo.

En el caso de un interpolador multietapa, la frecuencia de muestreo de la salida de la etapa i es

$$F_{i-1} = I_i F_i, \qquad i = J, J-1, \ldots, 1$$

y la frecuencia de salida es $F_0 = IF_J$ cuando la frecuencia de muestreo de entrada es F_J. Las especificaciones de las bandas de frecuencia correspondientes son:

$$\begin{aligned}
&\text{Banda de paso: } 0 \le F \le F_p\\
&\text{Banda de transición: } F_p < F \le F_i - F_{\text{sc}}
\end{aligned}$$

El siguiente ejemplo ilustra las ventajas de la interpolación multietapa.

EJEMPLO 11.6.2

Invirtamos el problema de filtrado descrito en el Ejemplo 11.6.1 partiendo de una señal que tiene una banda de paso $0 \le F \le 75$ y una banda de transición $75 \le F \le 80$. Deseamos interpolar por un factor de 50. Seleccionando $I_1 = 2$ e $I_2 = 25$, obtenemos básicamente una forma transpuesta del problema de diezmado considerado en el Ejemplo 11.6.1. Podemos entonces simplemente transponer el diezmador de dos etapas para obtener el interpolador de dos etapas con $I_1 = 2$, $I_2 = 25$, $\hat{M}_1 \approx 220$ y $\hat{M}_2 \approx 167$.

11.7 Conversión de la frecuencia de muestreo de señales paso banda

En esta sección vamos a abordar los procesos de diezmado e interpolación de señales paso banda. Comencemos destacando que cualquier señal paso banda se puede convertir en una señal paso bajo equivalente (*véase* la Sección 6.5.2) cuya frecuencia de muestreo puede cambiarse utilizando las técnicas que hemos desarrollado anteriormente. Sin embargo, un método más simple y más extendido es el concerniente al *posicionamiento de la banda en un entero* de las señales paso banda discretas en el tiempo. El concepto es similar al explicado en la Sección 6.4 para las señales paso banda continuas en el tiempo.

Más específicamente, suponga que deseamos diezmar por un factor D una señal paso banda ubicada en un entero con un espectro confinado en las bandas

$$(k-1)\frac{\pi}{D} < |\omega| < k\frac{\pi}{D} \tag{11.7.1}$$

donde k es un entero positivo. Un filtro paso banda definido como

$$H_{\mathrm{BP}}(\omega) = \begin{cases} 1, & (k-1)\frac{\pi}{D} < |\omega| < k\frac{\pi}{D} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{11.7.2}$$

normalmente se emplea para eliminar las componentes de frecuencia de la señal que se encuentran fuera del rango de frecuencias deseado. Así, un diezmado directo de la señal filtrada $v(n)$ por el factor D da lugar a una réplica periódica del espectro paso banda $V(\omega)$ cada $2\pi/D$ radianes según la Ecuación (11.2.14). El espectro de la señal diezmada $y(m)$ se obtiene aplicando un cambio de escala en el eje de frecuencias de $\omega_y = D\omega_x$. Este proceso se ilustra en la Figura 11.7.1 para la señal paso banda con posicionamiento en una banda impar ($k = 3$) y en la Figura 11.7.2 para señales con posicionamiento en una banda par ($k = 4$). En el caso en que k es impar, se produce una inversión del espectro de la señal al igual que en el caso continuo en el tiempo (véase la Figura 6.4.1(b)). La inversión puede deshacerse simplemente mediante el proceso $y'(m) = (-1)^m y(m)$. Observe que la violación de la restricción del ancho de banda dada por (11.7.1) da lugar a la aparición del efecto de *aliasing* en la señal.

El proceso de interpolación paso banda por un factor entero I es el inverso del proceso de diezmado y se puede llevar a cabo de manera similar. El proceso de sobremuestreo insertando ceros entre las muestras de $x(n)$ produce I imágenes en la banda $0 \le \omega \le \pi$. La imagen elegida se puede seleccionar mediante un filtro paso banda. Esto puede interpretarse como la "inversión" del proceso mostrado en la Figura 11.7.1. Observe que el proceso de interpolación también proporciona la oportunidad de obtener una traslación en frecuencia del espectro.

Por último, la conversión de la frecuencia de muestreo para una señal paso banda por un factor racional I/D puede obtenerse conectando en cascada un interpolador de manera que dependa de la elección de los parámetros D e I. Normalmente, se necesita un filtro paso banda que preceda al convertidor de frecuencia, con el fin de aislar la banda de frecuencias de interés de la señal. Observe que este método nos proporciona un método libre de modulación para obtener una traslación en frecuencia de una señal seleccionando $D = I$.

11.8 Conversión de la frecuencia de muestreo por un factor arbitrario

Una implementación eficiente de un conversor de la frecuencia de muestreo mediante una estructura polifásica requiere que las frecuencias F_x y F_y sean fijas y estén relacionadas mediante un factor racional I/D. En algunas

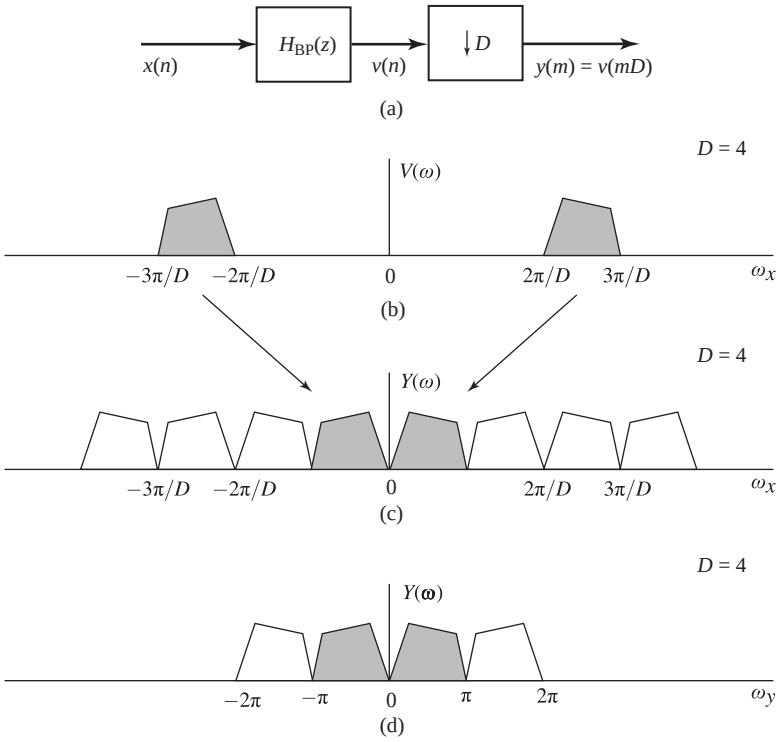


Figura 11.7.1. Interpretación espectral del diezmado de la señal paso banda para posicionamiento de la banda en un entero (posicionamiento en un entero impar).

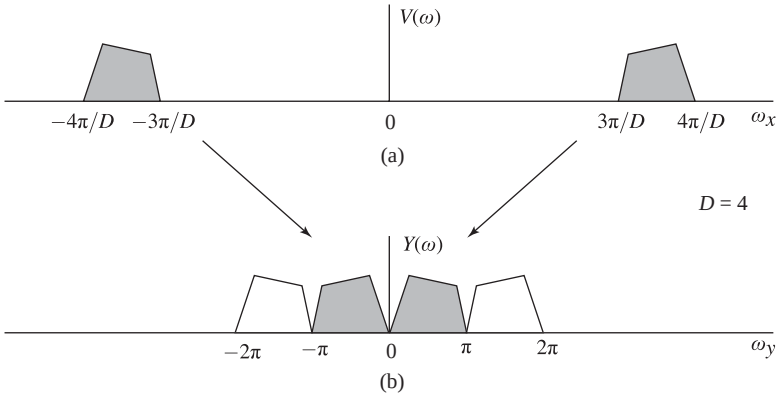


Figura 11.7.2. Interpretación espectral del diezmado de la señal paso banda para posicionamiento de la banda en un entero (posicionamiento en un entero par).

aplicaciones, esto no resulta eficiente e incluso, en ocasiones, es imposible emplear tal esquema de conversión de frecuencia exacto.

Por ejemplo, suponga que necesitamos efectuar una conversión de frecuencia por un número racional I/D, donde I es un entero muy grande (por ejemplo, $I/D = 1023/511$). Aunque podamos conseguir la conversión de frecuencia exacta por este número, necesitaríamos un filtro polifásico con 1023 subfiltros. Tal implementación

es obviamente ineficiente en lo que se refiere al uso de memoria, porque es necesario almacenar un número muy grande de coeficientes de filtro.

En algunas aplicaciones, la frecuencia de conversión exacta no es conocida cuando se está diseñando el convertidor, o bien la frecuencia está cambiando continuamente durante el proceso de conversión. Por ejemplo, podemos encontrarnos en una situación en la que las muestras de entrada y de salida estén controladas por dos relojes independientes. Incluso aunque en este caso sea aún posible definir una frecuencia de conversión nominal que sea un número racional, la frecuencia real sería ligeramente diferente, dependiendo de la diferencia de frecuencias entre los dos relojes. Obviamente, no es posible diseñar un convertidor exacto en este caso.

En principio, podemos convertir cualquier frecuencia F_x en cualquier frecuencia F_y (fija o variable) utilizando la fórmula (11.1.9), la cual repetimos a continuación por comodidad:

$$y(mT_y) = \sum_{k=K_1}^{K_2} g(kT_x + \Delta_m T_x)x((k_m - k)T_x) \tag{11.8.1}$$

Esto requiere el cálculo de una nueva respuesta al impulso $p_m(k) = g(kT_x + \Delta_m T_x)$ para cada muestra de salida. Sin embargo, si se mide Δ_m con una precisión finita, sólo existirá un conjunto finito de respuestas al impulso, el cual podrá precalcularse y cargarse de la memoria cuando sea necesario. A continuación vamos a exponer dos método prácticos para llevar a cabo la conversión de la frecuencia de muestreo por un factor arbitrario.

11.8.1 Remuestreo arbitrario con interpoladores polifásicos

Si empleamos un intepolador polifásico con I subfiltros podemos generar muestras espaciadas T_x/I. Por tanto, el número I de etapas determina la granularidad del proceso de interpolación. Si T_x/I es lo suficientemente pequeño como para que valores sucesivos de la señal no cambien de forma significativa o la variación sea menor que el escalón de cuantificación, podemos determinar el valor en cualquier posición $t = nT_x + \Delta T_x$, $0 \leq \Delta \leq 1$, utilizando el valor del vecino más próximo (interpolación de orden cero).

Puede obtenerse una mejora adicional utilizando interpolación lineal de dos puntos

$$y(nT_x + \Delta T_x) = (1 - \Delta)x(n) + \Delta x(n+1) \tag{11.8.2}$$

En la Sección 6.5 se ha visto cómo funcionan estas técnicas de interpolación y se han analizado sus características en el dominio de la frecuencia. Puede encontrar detalles prácticos adicionales en Ramstad (1984).

11.8.2 Remuestreo arbitrario con estructuras de filtros Farrow

En la práctica, normalmente implementamos convertidores de frecuencia utilizando filtros FIR paso bajo causales. Si empleamos un filtro FIR con $M = KI$ coeficientes, los coeficientes de los filtros polifásicos se obtienen mediante la correspondencia

$$p_i(n) = h(nI + i), \quad i = 0, 1, \ldots, I-1 \tag{11.8.3}$$

Esta correspondencia se puede visualizar fácilmente como la correspondencia entre la secuencia unidimensional $h(n)$ y una matriz bidimensional con I filas y K columnas, rellenando las columnas sucesivas siguiendo el orden natural de la manera siguiente:

$$\begin{array}{llllll}
p_0(k) & \mapsto h(0) & h(I) & \ldots & h((K-1)I) \\
p_1(k) & \mapsto h(1) & h(I+1) & \ldots & h((K-1)I+1) \\
 & \vdots & & & \\
p_i(k) & \mapsto h(i) & h(I+i) & \ldots & h((K-1)I+i) \\
p_{i+1}(k) & \mapsto h(i+1) & h(I+i+1) & \ldots & \\
 & \vdots & & & \\
p_{I-1}(k) & \mapsto h(I-1) & h(2I-1) & \ldots & h(KI-1)
\end{array} \tag{11.8.4}$$

Los filtros polifásicos $p_i(n)$ se emplean para calcular las muestras en I posiciones equidistantes $t = nT_x + i(T_x/I)$, $i = 0, 1, \ldots, I-1$, que cubren el intervalo de muestreo de entrada. Suponga ahora que deseamos calcular una muestra en $t = nT_x + \Delta T_x$, donde $\Delta \neq i/I$ y $0 \leq \Delta \leq 1$. Esto requiere un subfiltro polifásico que no existe, designado como $p_\Delta(k)$, que "caería" entre dos subfiltros existentes, por ejemplo, $p_i(k)$ y $p_{i+1}(k)$. Este conjunto de coeficientes daría lugar a una fila entre las filas cuyos índices son i e $i+1$. Observe que cada columna de (11.8.4) consta de un segmento de I muestras consecutivas de la respuesta al impulso $h(n)$ y cubre un intervalo de muestreo T_x. Suponga a continuación que podemos aproximar el conjunto de coeficientes de cada columna mediante un polinominio de grado L

$$B_k(\Delta) = \sum_{\ell=0}^{L} b_\ell^{(k)} \Delta^\ell, \quad k = 0, 1, \ldots, K-1 \tag{11.8.5}$$

Observe que evaluando (11.8.5) en $\Delta = i/I$ obtenemos los coeficientes del subfiltro polifásico $p_i(k)$. El tipo de polinomio (Lagrange, Chebyschev, etc.) y el orden L pueden elegirse de manera que se evite la degradación del comportamiento del filtro comparado con el filtro original $h(n)$. La muestra en la posición $t = nT_x + \Delta T_x$ se determina mediante

$$y((n+\Delta)T_x) = \sum_{k=0}^{K-1} B_k(\Delta) x((n-k)T_x), \quad 0 \leq \Delta \leq 1 \tag{11.8.6}$$

donde los coeficientes del filtro necesario se calculan utilizando la Ecuación (11.8.5). Si sustituimos los polinomios (11.8.5) en la fórmula de filtrado (11.8.6) y cambiamos el orden de los sumatorios, obtenemos

$$\begin{aligned} y((n+\Delta)T_x) &= \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{\ell=0}^{L} b_\ell^{(k)} \Delta^\ell x((n-k)T_x) \\ &= \sum_{\ell=0}^{L} \Delta^\ell \sum_{k=0}^{K-1} b_\ell^{(k)} x((n-k)T_x) \end{aligned}$$

La última ecuación puede escribirse como

$$y((n+\Delta)T_x) = \sum_{\ell=0}^{L} v(\ell) \Delta^\ell \tag{11.8.7}$$

donde

$$v(\ell) = \sum_{k=0}^{K-1} b_\ell^{(k)} x((n-k)T_x), \quad \ell = 0, 1, \ldots, L \tag{11.8.8}$$

La Ecuación (11.8.7) puede interpretarse como una representación en serie de Taylor de la secuencia de salida, donde los términos $v(\ell)$ son las derivadas locales sucesivas determinadas a partir de la secuencia de entrada. La relación (11.8.8) puede implementarse utilizando estructuras de filtrado FIR con funciones de sistema

$$H_\ell(z) = \sum_{k=0}^{K-1} b_\ell^{(k)} z^{-k} \tag{11.8.9}$$

El cálculo más eficiente del polinomio (11.8.7) puede llevarse a cabo empleando la regla anidada de Horner, la cual se ilustra a continuación para $L = 4$:

$$\begin{aligned} y(\Delta) &= c_0 + c_1\Delta + c_2\Delta^2 + c_3\Delta^3 + c_4\Delta^4 \\ &= c_0 + \Delta(c_1 + \Delta(c_2 + \Delta(c_3 + \Delta c_4))) \end{aligned} \tag{11.8.10}$$

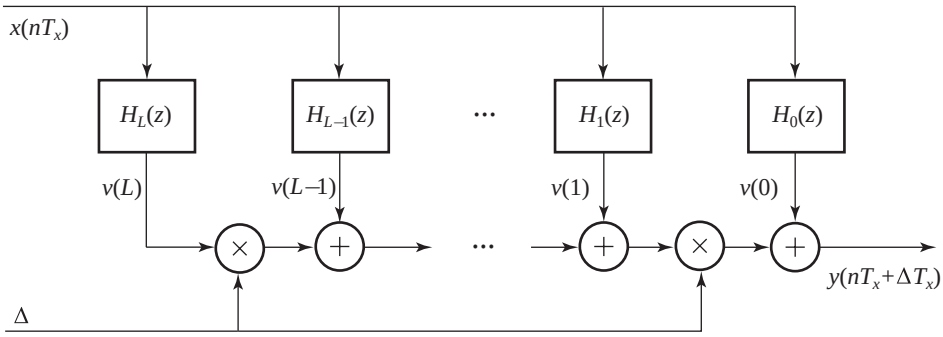


Figura 11.8.1. Diagrama de bloques de la estructura de Farrow para cambiar la frecuencia de muestreo por un factor arbitrario.

Este método nos lleva al diagrama de bloques mostrado en la Figura 11.8.1, el cual se conoce como estructura de Farrow (Farrow 1988). La estructura de Farrow básicamente realiza la interpolación entre los valores de la señal mediante la interpolación de los coeficientes del filtro. Puede encontrar información más detallada en Gardner (1993), Erup *et al.* (1993), Ramstad (1984), Harris (1997) y Laakso *et al.* (1996).

11.9 Aplicaciones del tratamiento multitasa de señales

Existen numerosas aplicaciones prácticas del tratamiento multitasa de señales. En esta sección vamos a describir algunas de estas aplicaciones.

11.9.1 Diseño de desplazadores de fase

Suponga que deseamos diseñar una red que retarde la señal $x(n)$ una fracción de una muestra. Supongamos que el retardo es una fracción racional de un intervalo de muestreo T_x [es decir, $d = (k/I)T_x$, donde k e I son enteros positivos relativamente primos]. En el dominio de la frecuencia, el retardo se corresponde con un desplazamiento de fase lineal de la forma

$$\Theta(\omega) = -\frac{k\omega}{I} \tag{11.9.1}$$

El diseño de un filtro paso todo de fase lineal es algo complicado. Sin embargo, podemos utilizar los métodos de conversión basados en el muestreo en frecuencia para obtener un retardo de $(k/I)T_x$, de forma exacta, sin introducir ninguna distorsión significativa en la señal. Más especiíficamente, considere el sistema mostrado en la Figura 11.9.1. La frecuencia de muestreo se aumenta en un factor I utilizando un interpolador estándar. El filtro paso bajo elimina las imágenes en el espectro de la señal interpolada y su salida aparece retardada k muestras a la frecuencia de muestreo IF_x. La señal retardada se diezma por un factor $D = I$. Por tanto, hemos conseguido el retardo deseado de $(k/I)T_x$.

Una implementación eficiente del interpolador es el filtro polifásico mostrado en la Figura 11.9.2. El retardo de k muestras se consigue colocando la posición inicial del conmutador en la salida del subfiltro k. Puesto que

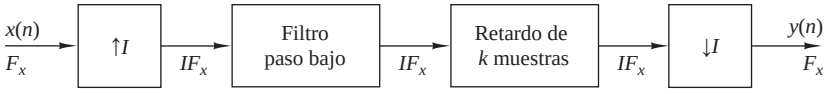


Figura 11.9.1. Método para generar un retardo en una señal discreta en el tiempo.

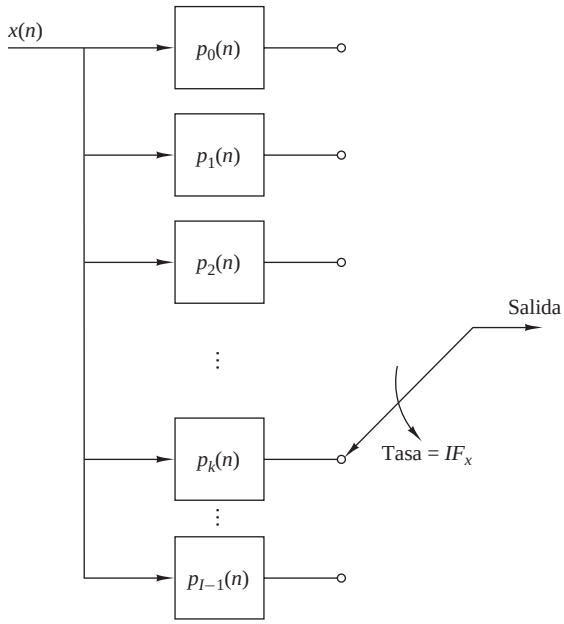


Figura 11.9.2. Estructura de filtros polifásicos para implementar el sistema mostrado en la Figura 11.9.1.

el diezmado por $D = I$ significa que tomamos una de cada I muestras del filtro polifásico, la posición del conmutador puede fijarse a la salida del subfiltro k. Así, un retardo en k/I puede lograrse utilizando sólo los k subfiltros del filtro polifásico. Observe que el filtro polifásico introduce un retardo adicional de $(M-1)/2$ muestras, donde M es la longitud de su respuesta al impulso.

Por último, debemos mencionar que si el retardo deseado es un factor no racional del intervalo de muestreo T_x, los métodos descritos en la Sección 11.8 pueden utilizarse para obtener el retardo.

11.9.2 Interfaz de sistemas digitales con diferentes frecuencias de muestreo

En la práctica, nos encontraremos con frecuencia con el problema de definir la interfaz entre dos sistemas digitales que están controlados por dos relojes que operan de forma independiente. Una solución analógica a este problema consiste en convertir la señal procedente del primer sistema en analógica y luego remuestrearla a la entrada del segundo sistema utilizando el reloj de dicho sistema. Sin embargo, un método más sencillo es aquél en el que la interfaz se establece mediante un método digital utilizando los métodos de conversión básicos de la frecuencia de muestreo descritos en este capítulo.

Más específicamente, consideremos la interfaz entre los dos sistemas que emplean relojes diferentes que se muestra en la Figura 11.9.3. La salida del sistema A a la frecuencia F_x se aplica a un interpolador que aumenta su frecuencia en un factor I. La salida del interpolador se aplica a la frecuencia IF_x a un circuito digital de muestreo y retención que sirve como interfaz con el sistema B a la frecuencia de muestreo superior IF_x. Las señales procedentes del circuito de muestreo y retención se leen en el sistema B a la frecuencia de reloj DF_y del sistema B. Así, la frecuencia de salida del circuito de muestreo y retención no está sincronizada con la frecuencia de entrada.

En el caso especial en que $D = I$ y las dos frecuencias de reloj son comparables pero no idénticas, algunas muestras en la salida del circuito de muestreo y retención pueden repetirse o eliminarse. La cantidad de distorsión resultante debida a este método puede mantenerse pequeña si el factor del interpolador/diezmador es grande. Utilizando la interpolación lineal en lugar del sistema de muestreo y retención digital podemos reducir aún más la distorsión y reducir después el tamaño del factor del interpolador.

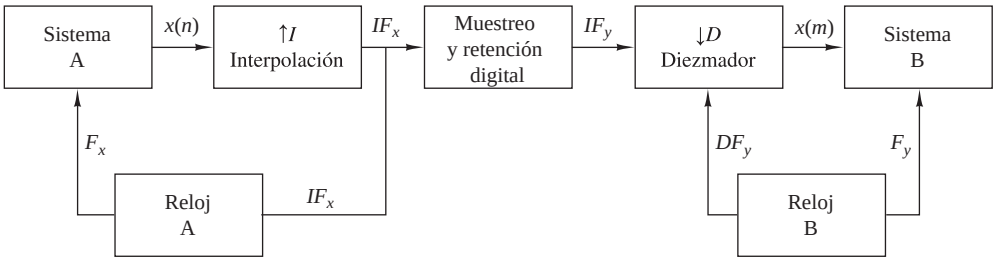


Figura 11.9.3. Interfaz de dos sistemas digitales con diferentes frecuencias de muestreo.

11.9.3 Implementación de filtros paso bajo de banda estrecha

En la Sección 11.6 hemos demostrado que una implementación de un convertidor de la frecuencia de muestreo a menudo proporciona una realización más eficiente, especialmente cuando las especificaciones del filtro son muy estrictas (por ejemplo, una banda de paso estrecha y una banda de transición estrecha). Bajo condiciones similares, un filtro FIR paso bajo de fase lineal puede implementarse de manera más eficiente en una configuración multietapa de diezmador–interpolador. Más específicamente, podemos emplear una implementación multietapa de un diezmador de tamaño D, seguido de una implementación multietapa de un interpolador de tamaño I, donde $I = D$.

Vamos a mostrar el procedimiento utilizando un ejemplo para el diseño de un filtro paso bajo que tiene las mismas especificaciones que el filtro dado en el Ejemplo 11.6.1.

EJEMPLO 11.9.1

Diseñe un filtro FIR de fase lineal que satisfaga las siguientes especificaciones:

Frecuencia de muestreo:	8000 Hz
Banda de paso:	$0 \leq F \leq 75$ Hz
Banda de transición:	$75 \text{ Hz} \leq F \leq 80$ Hz
Banda eliminada:	$80 \text{ Hz} \leq F \leq 4000$ Hz
Rizado de la banda de paso:	$\delta_1 = 10^{-2}$
Rizado de la banda eliminada:	$\delta_2 = 10^{-4}$

Solución. Si hemos diseñado este filtro como un filtro FIR de fase lineal y tasa única, la longitud del filtro necesaria para cumplir las especificaciones es (a partir de la fórmula de Kaiser)

$$\hat{M} \approx 5152$$

Supongamos ahora que empleamos una implementación multitasa del filtro paso bajo basada en un factor de diezmado e interpolación $D = I = 100$. Una implementación de una sola etapa del diezmador-interpolador requiere un filtro FIR de longitud

$$\hat{M}_1 = \frac{-10\log_{10}(\delta_1\delta_2/2) - 13}{14.6\Delta f} + 1 \approx 5480$$

Sin embargo, se obtiene un ahorro significativo en la complejidad de cálculo implementando los filtros diezmador e interpolador mediante sus correspondientes filtros polifásicos. Si empleamos filtros de diezmado e interpolación (simétricos) de fase lineal, el uso de filtros polifásicos reduce la tasa de multiplicaciones en un factor de 100.

Una implementación significativamente más eficiente se obtiene empleando dos etapas de diezmado seguidas de dos etapas de interpolación. Por ejemplo, suponga que seleccionamos $D_1 = 50$, $D_2 = 2$, $I_1 = 2$ y $I_2 = 50$. Luego las longitudes de los filtros requeridas son

$$\hat{M}_1 = \frac{-10\log(\delta_1\delta_2/4) - 13}{14.6\Delta f} + 1 \approx 177$$

$$\hat{M}_1 = \frac{-10\log_{10}(\delta_1\delta_2/4) - 13}{14.6\Delta f} + 1 \approx 233$$

Por tanto, obtenemos una reducción en la longitud del filtro global de $2(5480)/2(177+233) \approx 13.36$. Además, obtenemos más reducción en la tasa de multiplicaciones utilizando filtros polifásicos. En la primera etapa de diezmado, la reducción en la tasa de multiplicaciones es de 50, mientras que en la segunda etapa la reducción en la tasa de multiplicaciones es de 100. Pueden obtenerse reducciones adicionales incrementando el número de etapas de diezmado y de interpolación.

11.9.4 Codificación subbanda de señales de voz

Se han desarrollado diversas técnicas para representar de forma eficiente señales de voz en formato digital, bien con fines de transmisión o de almacenamiento. Puesto que la mayor parte de la energía de las señales de voz está contenida en las frecuencias más bajas, sería interesante codificar la banda de frecuencias inferior con más bits que la banda de frecuencias más altas. La codificación subbanda es un método en el que la señal de voz se subdivide en varias bandas de frecuencia y cada banda se codifica digitalmente por separado.

Un ejemplo de una subdivisión en frecuencia se muestra en la Figura 11.9.4(a). Supongamos que la señal de voz se muestrea a una tasa de F_s muestras por segundo. La primera subdivisión en frecuencia divide el espectro de la señal en dos segmentos de la misma anchura, una señal paso bajo $(0 \le F \le F_s/4)$ y una señal paso alto $(F_s/4 \le F \le F_s/2)$. La segunda subdivisión en frecuencia divide la señal paso bajo de la primera etapa en dos bandas iguales, una señal paso bajo $(0 < F \le F_s/8)$ y una señal paso alto $(F_s/8 \le F \le F_s/4)$. Por último, la tercera subdivisión en frecuencia divide la señal paso bajo de la segunda etapa en dos señales con el mismo ancho de banda. Por tanto, la señal se subdivide en cuatro bandas de frecuencia que cubren tres octavas, como se muestra en la Figura 11.9.4(b).

El diezmado por un factor de 2 se realiza después de la subdivisión en frecuencia. Asignando un número diferente de bits por muestra a la señal en las cuatro subbandas, podemos conseguir una reducción en la tasa de bits de la señal de voz digitalizada.

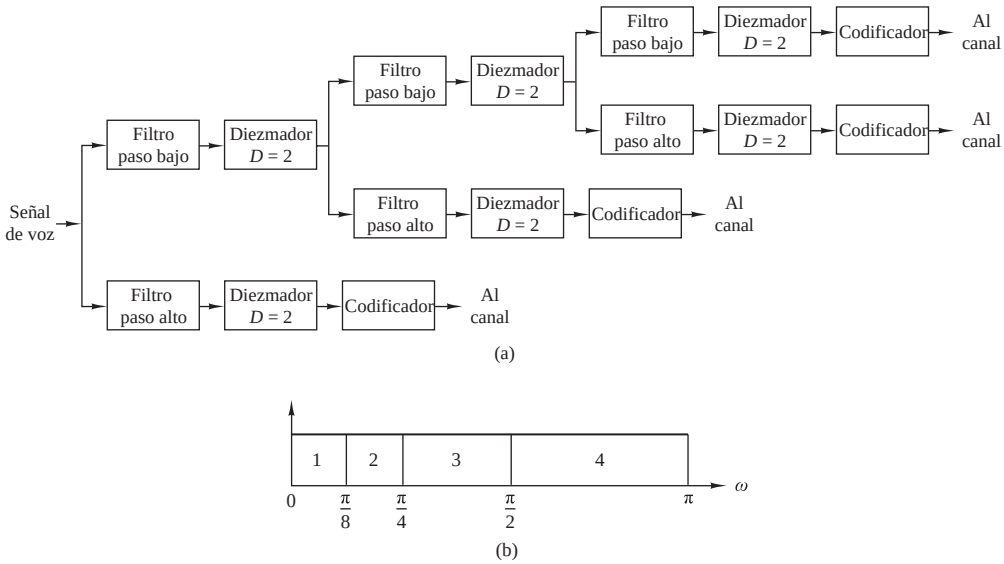


Figura 11.9.4. Diagrama de bloques de un codificador de voz subbanda.

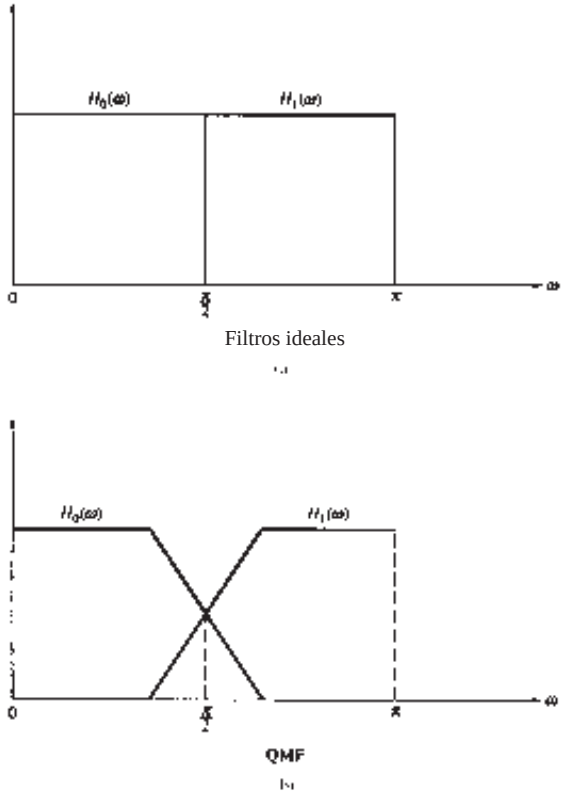


Figura 11.9.5. Características del filtro en la codificación subbanda.

El diseño del filtro es especialmente importante para conseguir un buen rendimiento en la codificación subbanda. El *aliasing* resultante del diezmado de las señales subbanda tiene que ser despreciable. Es evidente que no podemos utilizar características de filtro ideales como las mostradas en la Figura 11.9.5(a), ya que tales filtros no son físicamente implementables. Una solución especialmente práctica para el problema del *aliasing* consiste en utilizar *filtros espejo en cuadratura* (QMF), que tienen la respuesta en frecuencia mostrada en la Figura 11.9.5(b). Estos filtros se describen en la Sección 11.11.

El método de síntesis para la señal de voz codificada en subbanda es básicamente el proceso inverso de la codificación. Las señales en las bandas de frecuencia paso bajo y paso alto adyacentes se interpolan, se filtran y combinan como se muestra en la Figura 11.9.6. Se emplean una pareja de filtros espejo en cuadratura en el proceso de síntesis de la señal por cada octava de la señal.

La codificación subbanda también es un método efectivo para comprimir datos en el procesamiento de la señal imagen. Combinando la codificación subbanda con la cuantificación de vectores para cada señal subbanda, Safranek *et al.* (1988) hemos obtenido imágenes codificadas con aproximadamente $\frac{1}{2}$ bit por pixel, comparados con los 8 bits por píxel de la imagen no codificada.

En general, la codificación subbanda de señales es un método efectivo para comprimir el ancho de banda de una representación digital de la señal, cuando la energía de la señal está concentrada en una región particular de la banda de frecuencia. Las nociones sobre el procesamiento multitasa proporcionan implementaciones eficientes del codificador de subbanda.

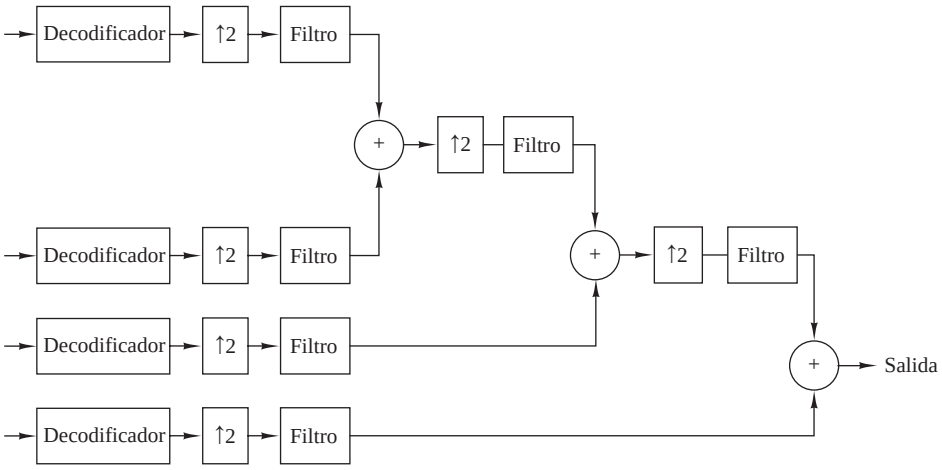


Figura 11.9.6. Síntesis de señales codificadas subbanda.

11.10 Bancos de filtros digitales

Los bancos de filtros se clasifican generalmente en dos tipos, *bancos de filtros de análisis* y *bancos de filtros de síntesis*. Un banco de filtros de análisis consta de un conjunto de filtros con funciones de sistema $\{H_k(z)\}$, dispuestos en un banco paralelo como se muestra en la Figura 11.10.1(a). La respuesta en frecuencia de este banco de filtros divide la señal en el número correspondiente de subbandas. Por otro lado, un banco de filtros de síntesis consta de filtros con funciones de sistema $\{G_k(z)\}$, ordenados como se muestra en la Figura 11.10.1(b), y las entradas $\{y_k(n)\}$ correspondientes. Las salidas de los filtros se suman para formar la señal sintetizada $\{x(n)\}$.

Los bancos de filtros se utilizan a menudo para llevar a cabo el análisis de espectros y la síntesis de señales. Cuando se emplea un banco de filtros en el cálculo de la transformada discreta de Fourier (DFT) de una secuencia $\{x(n)\}$, el banco de filtros se denomina banco de filtros DFT. Un banco de filtros de análisis que consta de N filtros $\{H_k(z),\ k = 0, 1, \ldots, N-1\}$ se denomina *banco de filtros DFT uniforme* si $H_k(z)$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$ se obtienen a partir de un filtro prototipo $H_0(z)$, donde

$$H_k(\omega) = H_0\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right), \qquad k = 1, 2, \ldots, N-1 \tag{11.10.1}$$

Así la respuesta en frecuencia de los filtros $\{H_k(z),\ k = 0, 1, \ldots, N-1\}$ se obtiene simplemente desplazando uniformemente la respuesta en frecuencia del filtro prototipo múltiplos de $2\pi/N$. En el dominio del tiempo, los filtros se caracterizan por sus respuestas al impulso, lo que se puede expresar como

$$h_k(n) = h_0(n)e^{j2\pi nk/N}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{11.10.2}$$

donde $h_0(n)$ es la respuesta al impulso del filtro prototipo, que en general puede ser un filtro FIR o IIR. Si $H_0(z)$ designa la función de transferencia del filtro prototipo, la función de transferencia del filtro k es

$$H_k(z) = H_0(ze^{-j2\pi k/N}), \qquad 1 \le k \le N-1 \tag{11.10.3}$$

La Figura 11.10.2 proporciona una ilustración conceptual de la respuesta en frecuencia de los N filtros.

El banco de filtros de análisis DFT uniforme puede implementarse como se muestra en la Figura 11.10.3(a), donde las componentes de frecuencia de la secuencia $\{x(n)\}$ se trasladan en frecuencia a paso bajo mutliplicando

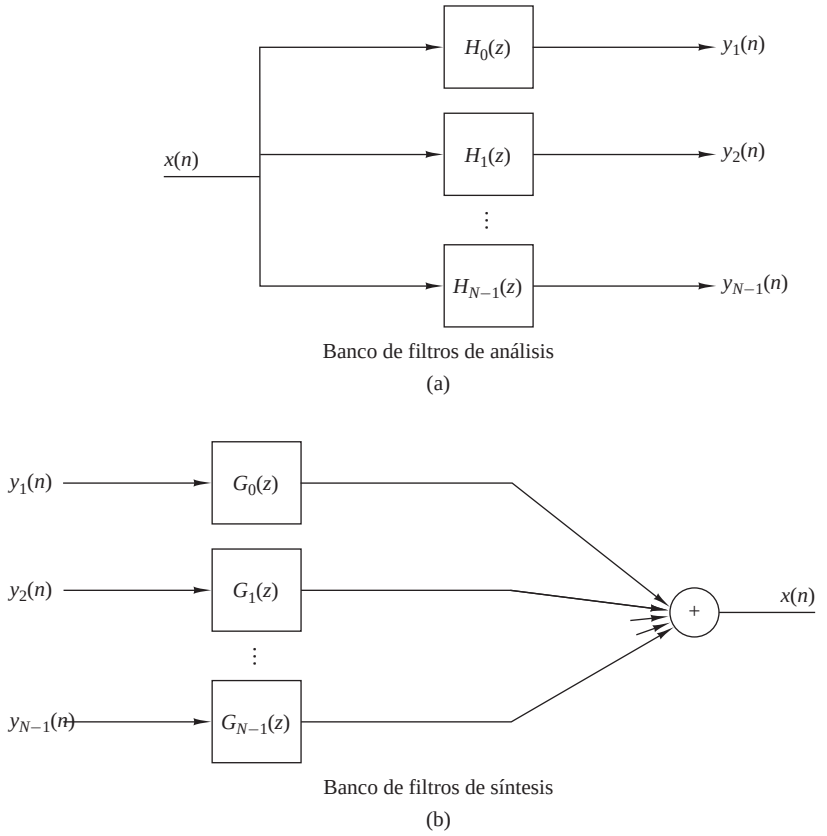


Figura 11.10.1. Banco de filtros digital.

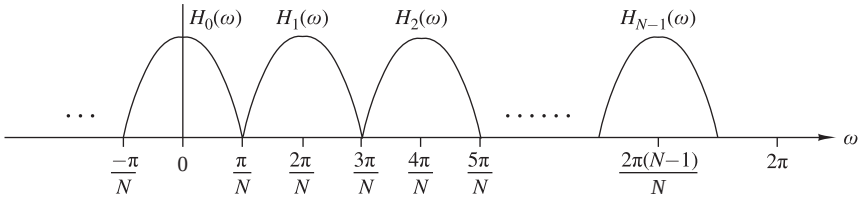


Figura 11.10.2. Ilustración de la respuesta en frecuencia de los N filtros.

$x(n)$ por las exponenciales conjugadas $\exp(-j2\pi nk/N)$, $k = 1, \ldots, N-1$, y las señales producto resultantes se pasan a través de un filtro paso bajo cuya respuesta al impulso es $h_0(n)$. Como la salida del filtro paso bajo es relativamente estrecha en lo que respecta al ancho de banda, la señal puede diezmarse por un factor $D \leq N$. La señal de salida diezmada resultante puede expresarse como

$$X_k(m) = \sum_n h_0(mD-n)x(n)e^{-j2\pi nk/N}, \qquad \begin{array}{r} k = 0, 1, \ldots, N-1 \\ m = 0, 1, \ldots \end{array} \tag{11.10.4}$$

donde $\{X_k(m)\}$ son muestras de la DFT en las frecuencias $\omega_k = 2\pi k/N$.

El filtro de síntesis correspondiente a cada elemento del banco de filtros puede interpretarse como se muestra en la Figura 11.10.3(b), donde las secuencias de entrada $\{Y_k(m), k = 0, 1, \ldots, N-1\}$ son sobremuestreadas por

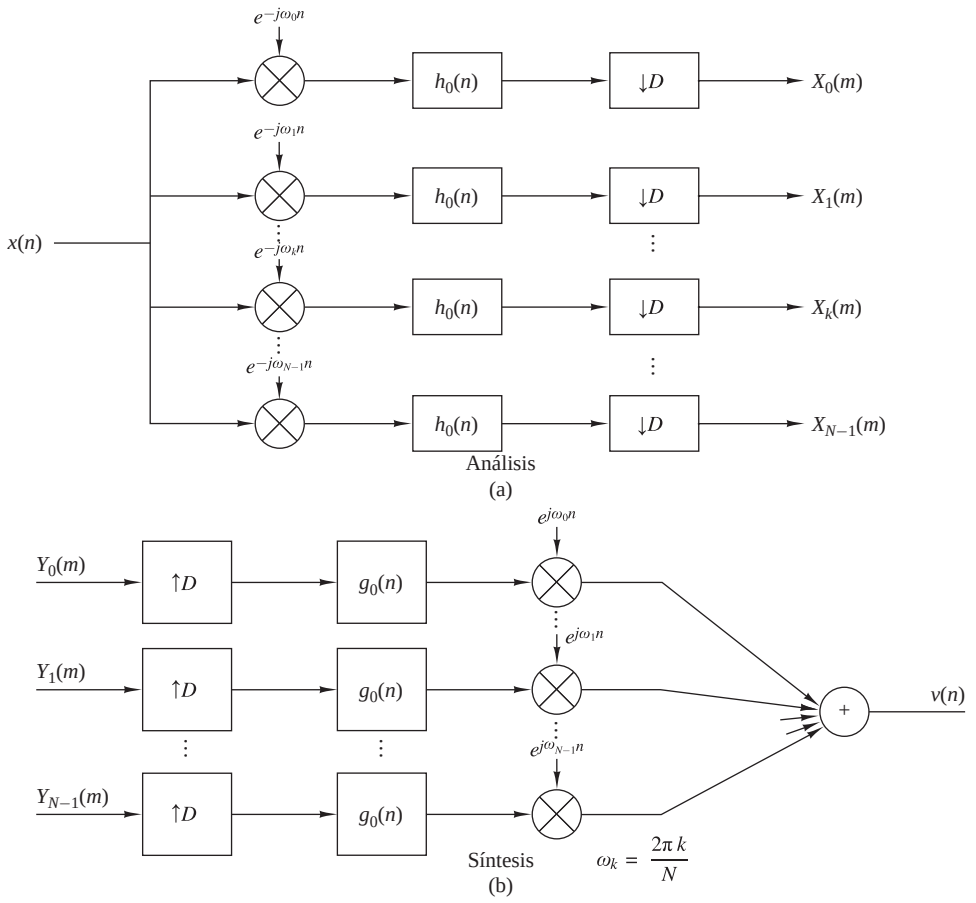


Figura 11.10.3. Banco de filtros DFT uniforme.

un factor $I = D$, filtradas para eliminar las imágenes y trasladadas en frecuencia por la multiplicación por las exponenciales complejas $\{\exp(j2\pi nk/N),\ k = 0, 1, \ldots, N-1\}$. A continuación las señales trasladadas en frecuencia de los N filtros se suman y así obtenemos la secuencia

$$\begin{aligned} v(n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi nk/N}\left[\sum_m Y_k(m) g_0(n-mI)\right] \\ &= \sum_m g_0(n-mI)\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} Y_k(m) e^{j2\pi nk/N}\right] \\ &= \sum_m g_0(n-mI) y_n(m) \end{aligned} \tag{11.10.5}$$

donde el factor $1/N$ es un factor de normalización, $\{y_n(m)\}$ representa muestras de la secuencia de la DFT inversa correspondiente a $\{Y_k(m)\}$, $\{g_0(n)\}$ es la respuesta al impulso del filtro de interpolación e $I = D$.

La relación entre la salida $\{X_k(n)\}$ del banco de filtros de análisis y la entrada $\{Y_k(m)\}$ al banco de filtros de síntesis depende de la aplicación. Normalmente, $\{Y_k(m)\}$ es una versión modificada de $\{X_k(m)\}$, donde la modificación específica es determinada por la aplicación.

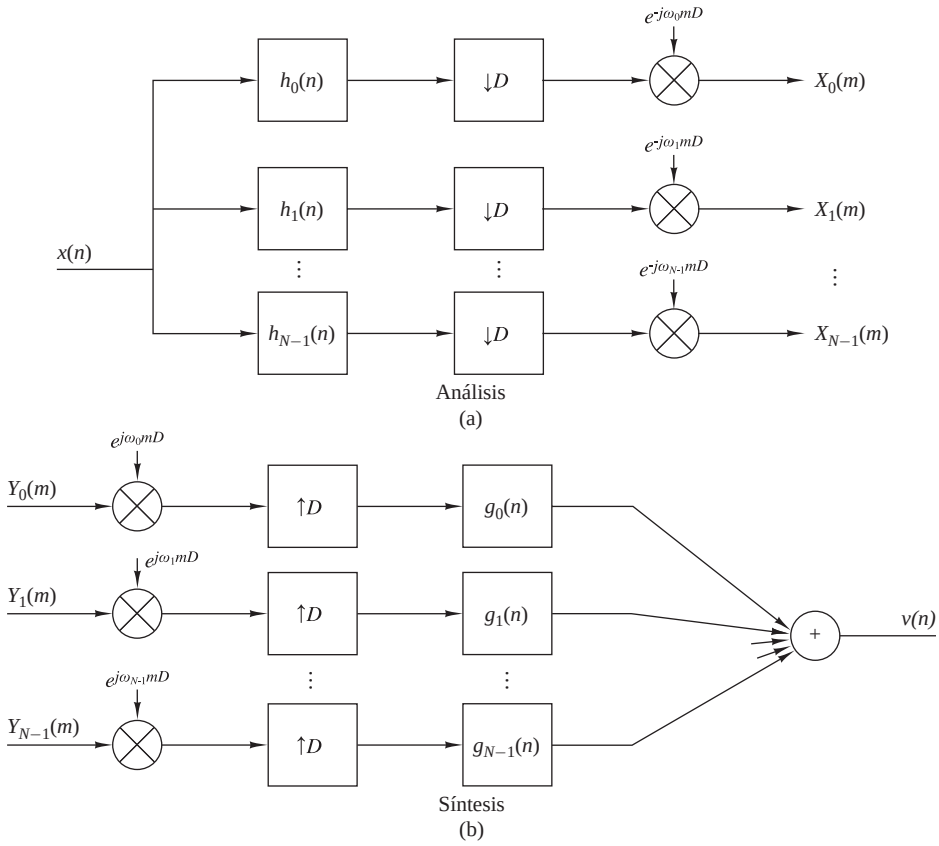


Figura 11.10.4. Realización alternativa de un banco de filtros DFT uniforme.

Una realización alternativa de los bancos de filtros de análisis y síntesis se ilustra en la Figura 11.10.4. Los filtros se implementan como filtros paso banda con respuestas al impulso

$$h_k(n) = h_0(n)e^{j2\pi nk/N}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{11.10.6}$$

La salida de cada filtro paso banda se diezma por un factor D y se mutliplica por $\exp(-j2\pi mk/N)$ para generar la secuencia DFT $\{X_k(m)\}$. La modulación mediante la exponencial compleja nos permite desplazar el espectro de la señal desde $\omega_k = 2\pi k/N$ a $\omega_0 = 0$. Así esta realización es equivalente a la realización dada en la Figura 11.10.3. La salida del banco de filtros de análisis puede escribirse como

$$X_k(m) = \left[\sum_n x(n)h_0(mD-n)e^{j2\pi k(mD-n)/N}\right] e^{-j2\pi mkD/N} \tag{11.10.7}$$

El correspondiente banco de filtros sintentizador puede implementarse como se muestra en la Figura 11.10.4-(b), donde las secuencias de entrada primero se multiplican por los factores exponenciales $[\exp(j2\pi kmD/N)]$, se sobremuestrean por el factor $I = D$ y las secuencias resultantes se filtran a través de los filtros de interpolación paso banda con las respuestas al impulso

$$g_k(n) = g_0(n)e^{j2\pi nk/N} \tag{11.10.8}$$

donde $\{g_0(n)\}$ es la respuesta al impulso del filtro prototipo. Las salidas de estos filtros se suman entonces para proporcionar

$$v(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left\{\sum_m [Y_k(m)e^{j2\pi kmI/N}]g_k(n-mI)\right\} \tag{11.10.9}$$

donde $I = D$.

En la implementación de bancos de filtros digitales, la eficiencia de cálculo puede conseguirse utilizando filtros polifásicos para los procesos de diezmado e interpolación. De particular interés es el caso donde el factor de diezmado D se selecciona para ser igual al número N de bandas de frecuencia. Cuando $D = N$, decimos que el banco de filtros se *muestrea críticamente*.

11.10.1 Estructuras polifásicas de bancos de filtros uniformes

En el banco de filtros de análisis, definimos un conjunto de $N = D$ filtros polifásicos con respuestas al impulso

$$p_k(n) = h_0(nN-k), \qquad k = 0,1,\ldots,N-1 \tag{11.10.10}$$

y el correspondiente conjunto de secuencias de entrada diezmadas

$$x_k(n) = x(nN+k), \qquad k = 0,1,\ldots,N-1 \tag{11.10.11}$$

Observe que esta definición de $\{p_k(n)\}$ implica que el conmutador para el diezmador gira en sentido horario.

La estructura del banco de filtros de análisis basada en el uso de filtros polifásicos puede obtenerse sustituyendo (11.10.10) y (11.10.11) en (11.10.7) y reordenando el sumatorio de la forma siguiente

$$X_k(m) = \sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_l p_n(l)x_n(m-l)\right]e^{-j2\pi nk/N}, \qquad k = 0,1,\ldots,D-1 \tag{11.10.12}$$

donde $N = D$. Observe que el sumatorio interno representa la convolución de $\{p_n(l)\}$ con $\{x_n(l)\}$. El sumatorio externo representa la DFT de N puntos de las salidas de filtro. La estructura del filtro correspondiente a este cálculo se ilustra en la Figura 11.10.5. Cada barrido del conmutador da lugar a N salidas, designadas como $\{r_n(m), n = 0, 1, \ldots, N-1\}$, de los N filtros polifásicos. La DFT de N puntos de esta secuencia proporciona las muestras espectrales $\{X_k(m)\}$. Para valores grandes de N, el algoritmo FFT proporciona un medio eficiente de calcular la DFT.

Suponga ahora que las muestras espectrales $\{X_k(m)\}$ se modifican de alguna manera establecida de antemano por la aplicación, para generar $\{Y_k(m)\}$. Un banco de filtros de síntesis basado en una estructura de filtros polifásicos puede implementarse de manera similar. En primer lugar, definimos la respuesta al impulso de los N $(D = I = N)$ filtros polifásicos para el filtro de interpolación como

$$q_k(n) = g_0(nN+k), \qquad k = 0,1,\ldots,N-1 \tag{11.10.13}$$

y el correspondiente conjunto de señales de salida como

$$v_k(n) = v(nN+k), \qquad k = 0,1,\ldots,N-1 \tag{11.10.14}$$

Observe que esta definición de $\{q_k(n)\}$ implica que el conmutador para la interpolación gira en sentido antihorario.

Sustituyendo (11.10.13) en (11.10.5), podemos expresar la salida $v_l(n)$ del primer filtro polifásico como

$$v_l(n) = \sum_m q_l(n-m)\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}Y_k(m)e^{j2\pi kl/N}\right], \qquad l = 0,1,\ldots,N-1 \tag{11.10.15}$$

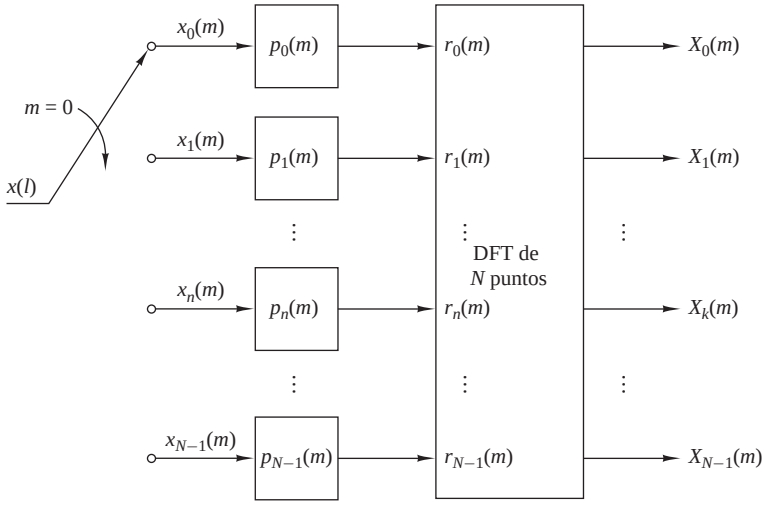


Figura 11.10.5. Estructura de banco de filtros digital para el cálculo de (11.10.12).

El término entre corchetes es la DFT inversa de N puntos de $\{Y_k(m)\}$, la cual designamos como $\{y_l(m)\}$. Luego

$$v_l(n) = \sum_m q_l(n-m)y_l(m), \qquad l = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{11.10.16}$$

La estructura de síntesis correspondiente a (11.10.16) se muestra en la Figura 11.10.6. Es interesante destacar que definiendo el filtro de interpolación polifásico como en (11.10.13), la estructura de la Figura 11.10.6 es la transpuesta del filtro de análisis polifásico mostrado en la Figura 11.10.5.

En este estudio sobre los bancos de filtros digitales hemos considerado el importante caso de los bancos de filtros DFT muestreados críticamente, donde $D = N$. En la práctica, pueden hacerse otras elecciones de D y N, pero la implementación de los filtros será más compleja. De particular importancia es el banco de filtros DFT sobremuestreado, donde $N = KD$, y D designa el factor de diezmado y K es un entero que especifica el

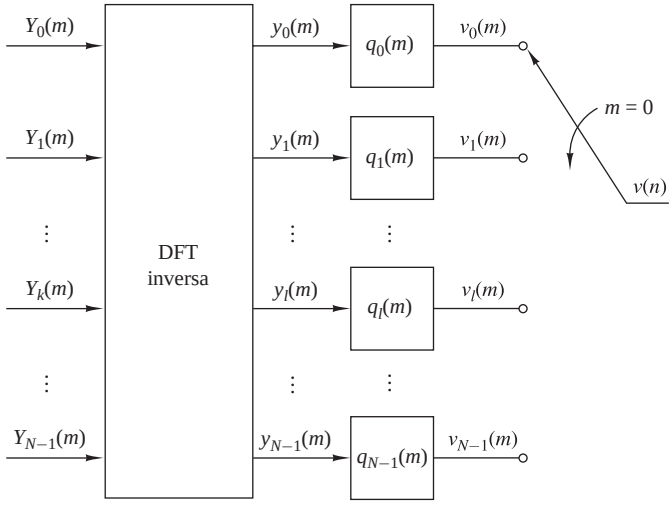


Figura 11.10.6. Estructura del banco de filtros digital para el cálculo de (11.10.16).

factor de sobremuestreo. En este caso, podemos demostrar que las estructuras de bancos de filtros polifásicos para formar filtros de análisis y síntesis pueden implementarse utilizando N subfiltros y transformadas DFT de N puntos y sus DFT inversas.

11.10.2 Transmultiplexores

Una aplicación de los bancos de filtros digitales es el diseño e implementación de transmultiplexores digitales, los cuales son dispositivos que permiten convertir señales multiplexadas por división en el tiempo (MDT) y señales multiplexadas por división en la frecuencia (MDF).

En un transmultiplexor utilizado para convertir señales MDT en señales MDF, la señal de entrada $\{x(n)\}$ es una señal mutliplexada por división en el tiempo que consta de L señales, las cuales son separadas mediante un conmutador. Cada una de estas L señales es modulada sobre una frecuencia portadora diferente para obtener una señal MDF que pueda ser transmitida. En un transmultiplexor para convertir señales MDF en señales MDT, la señal compuesta se separa filtrando las L componentes de señal, las cuales a continuación son multiplexadas por división en el tiempo.

En telefonía, se utiliza la transmisión de banda lateral única con canales espaciados que tienen un ancho de banda nominal de 4-kHz. Normalmente, se apilan doce canales en frecuencia para formar un canal de grupo básico, con un ancho de banda de 48 kHz. Las señales MDF con un ancho de banda más grande se forman por la traslación en frecuencia de múltiples grupos en bandas de frecuencia adyacentes. Vamos a centrar nuestro estudio en los transmultiplexores digitales para señales MDF y MDT de 12 canales.

En primer lugar consideremos la conversión de señales MDF en MDT. La señal analógica MDF se pasa a través de un convertidor A/D, como se muestra en la Figura 11.10.7(a). La señal digital se demodula entonces para ser una señal banda base por medio de demoduladores de banda única. La salida de cada demodulador se diezma y se aplica al conmutador del sistema MDT.

Más específicamente, supongamos que la señal MDF de 12 canales se muestrea a la frecuencia de Nyquist de 96 kHz y se pasa a través de un banco de demoduladores. El bloque de construcción básico del demodulador de señales MDF consta de un convertidor de frecuencia, un filtro paso bajo y un diezmador, como se ilustra en la Figura 11.10.7(b). La conversión en frecuencia puede implementarse de forma eficiente mediente el banco de filtros DFT descrito anteriormente. El filtro paso bajo y el diezmador se implementan mediante la estructura de filtros polifásicos. Luego la estructura básica del convertidor MDF-MDT tiene la forma de un analizador formado por un banco de filtros DFT. Puesto que la señal de cada canal ocupa un ancho de banda de 4 kHz, su frecuencia de Nyquist es de 8 kHz y, por tanto, la salida del filtro polifásico puede diezmarse por un factor de 12. En consecuencia, el conmutador MDT trabaja a una frecuencia de 12×8 kHz, es decir 96 kHz.

En la conversión MDT-MDF, la señal MDT de 12 canales se demultiplexa en 12 señales individuales, donde la frecuencia de cada señal es de 8 kHz. La señal de cada canal se interpola por un factor de 12 y se convierte en frecuencia mediante un modulador de banda lateral única, como se muestra en la Figura 11.10.8. Las salidas de los 12 moduladores de banda lateral única se suman y se aplican al convertidor D/A. De este modo se obtiene la señal MDF analógica que vamos a transmitir. Como en el caso de la conversión MDF-MDT, el interpolador y el filtro modulador se combinan y se implementan de manera eficiente mediante un filtro polifásico. La translación en frecuencia puede llevarse a cabo mediante la DFT. En consecuencia, el convertidor MDT-MDF abarca los principios básicos enumerados anteriormente en nuestro estudio sobre el banco de filtros DFT de síntesis.

11.11 Banco de filtros espejo en cuadratura de dos canales

El bloque de construcción básico en las aplicaciones de filtros espejo en cuadratura (QMF, *quadrature mirror filters*) es el banco de filtros QMF de dos canales mostrado en la Figura 11.11.1. Se trata de una estructura de filtros digitales multitasa que emplea dos diezmadores en la sección de “análisis de señales” y dos interpoladores en la sección de “síntesis de señales”. Los filtros paso bajo y paso alto en la sección de análisis presentan las respuestas

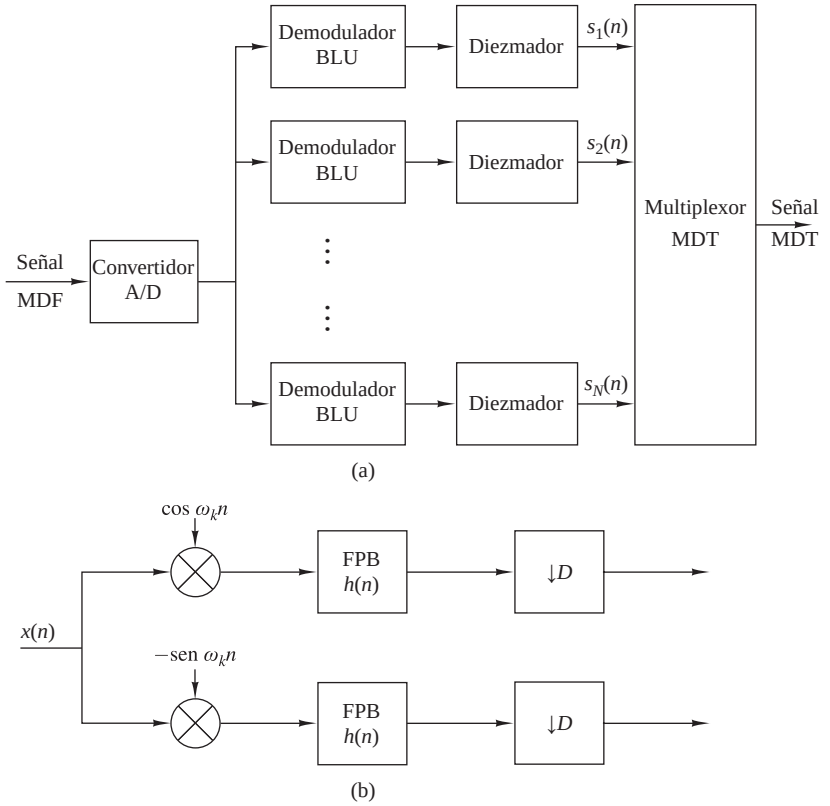


Figura 11.10.7. Diagrama de bloques de un transmultiplexor MDF-MDT.

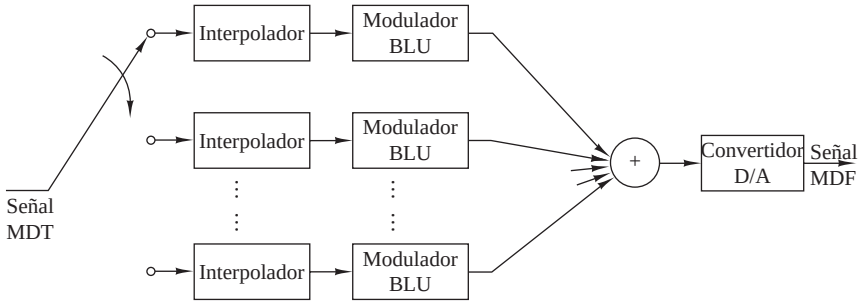


Figura 11.10.8. Diagrama de bloques de un transmultiplexor MDT-MDF.

al impulso $h_0(n)$ y $h_1(n)$, respectivamente. De forma similar, los filtros paso bajo y paso alto contenidos en la sección de síntesis presentan las respuestas al impulso $g_0(n)$ y $g_1(n)$, respectivamente.

Las transformadas de Fourier de las señales en las salidas de los dos diezmadores son

$$\begin{aligned} X_{a0}(\omega) &= \frac{1}{2}\left[X\left(\frac{\omega}{2}\right)H_0\left(\frac{\omega}{2}\right)+X\left(\frac{\omega-2\pi}{2}\right)H_0\left(\frac{\omega-2\pi}{2}\right)\right] \\ X_{a1}(\omega) &= \frac{1}{2}\left[X\left(\frac{\omega}{2}\right)H_1\left(\frac{\omega}{2}\right)+X\left(\tfrac{\omega-2\pi}{2}\right)H_1\left(\frac{\omega-2\pi}{2}\right)\right] \end{aligned} \tag{11.11.1}$$

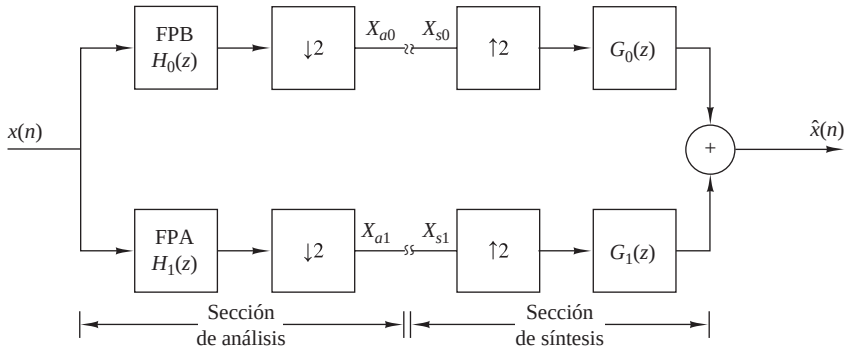


Figura 11.11.1. Banco de filtros espejo en cuadratura de dos canales.

Si $X_{s0}(\omega)$ y $X_{s1}(\omega)$ representan las dos entradas a la sección de síntesis, la salida es simplemente

$$\hat{X}(\omega) = X_{s0}(2\omega)G_0(\omega) + X_{s_1}(2\omega)G_1(\omega) \tag{11.11.2}$$

Suponga ahora que conectamos el filtro de análisis al correspondiente filtro de síntesis, de modo que $X_{a0}(\omega) = X_{s0}(\omega)$ y $X_{a1}(\omega) = X_{s1}(\omega)$. Luego sustituyendo (11.11.1) en (11.11.2), obtenemos

$$\begin{aligned}\hat{X}(\omega) &= \frac{1}{2}\left[H_0(\omega)G_0(\omega) + H_1(\omega)G_1(\omega)\right]X(\omega) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[H_0(\omega-\pi)G_0(\omega) + H_1(\omega-\pi)G_1(\omega)\right]X(\omega-\pi)\end{aligned} \tag{11.11.3}$$

El primer término de (11.11.3) es la salida deseada del banco de filtros QMF. El segundo término representa el efecto de *aliasing*, el cual deseamos eliminar.

En el dominio de la transformada z, la Ecuación (11.11.3) se expresa como

$$\begin{aligned}\hat{X}(z) &= \frac{1}{2}\left[H_0(z)G_0(z) + H_1(z)G_1(z)\right]X(z) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[H_0(-z)G_0(z) + H_1(-z)G_1(z)\right]X(-z) \\ &= Q(z)X(z) + A(z)X(-z)\end{aligned} \tag{11.11.4}$$

donde, por definición,

$$\begin{aligned}Q(z) &= \frac{1}{2}\left[H_0(z)G_0(z) + H_1(z)G_1(z)\right] \\ A(z) &= \frac{1}{2}\left[H_0(-z)G_0(z) + H_1(-z)G_1(z)\right]\end{aligned} \tag{11.11.5}$$

11.11.1 Eliminación del aliasing

Para eliminar el *aliasing*, necesitamos que $A(z) = 0$, es decir,

$$H_0(-z)G_0(z) + H_1(-z)G_1(z) = 0 \tag{11.11.6}$$

En el dominio de la frecuencia, esta condición se convierte en

$$H_0(\omega-\pi)G_0(\omega) + H_1(\omega-\pi)G_1(\omega) = 0 \tag{11.11.7}$$

Esta condición puede satisfacerse seleccionando simplemente $G_0(\omega)$ y $G_1(\omega)$ como

$$G_0(\omega) = H_1(\omega - \pi), \qquad G_1(\omega) = -H_0(\omega - \pi) \tag{11.11.8}$$

Así, el segundo término de (11.11.3) desaparece y el banco de filtros queda libre de *aliasing*.

Supongamos ahora que $H_0(\omega)$ es un filtro paso bajo y que $H_1(\omega)$ es un filtro paso alto espejo, como se muestra en la Figura 11.11.2. Así, podemos expresar $H_0(\omega)$ y $H_1(\omega)$ como

$$\begin{aligned} H_0(\omega) &= H(\omega) \\ H_1(\omega) &= H(\omega - \pi) \end{aligned} \tag{11.11.9}$$

donde $H(\omega)$ es la respuesta en frecuencia de un filtro paso bajo. En el dominio del tiempo, las relaciones correspondientes son

$$\begin{aligned} h_0(n) &= h(n) \\ h_1(n) &= (-1)^n h(n) \end{aligned} \tag{11.11.10}$$

En consecuencia, $H_0(\omega)$ y $H_1(\omega)$ presentan simetría respecto de la frecuencia $\omega = \pi/2$, como puede verse en la Figura 11.11.2. Para ser coherentes con la restricción especificada en (11.11.8), seleccionamos el filtro paso bajo $G_0(\omega)$ como

$$G_0(\omega) = H(\omega) \tag{11.11.11}$$

y el filtro paso alto $G_1(\omega)$ como

$$G_1(\omega) = -H(\omega - \pi) \tag{11.11.12}$$

En el dominio del tiempo, estas relaciones se convierten en

$$\begin{aligned} g_0(n) &= h(n) \\ g_1(n) &= (-1)^n h(n) \end{aligned} \tag{11.11.13}$$

En el dominio de la transformada z, las relaciones para eliminar el *aliasing* son:

$$\begin{aligned} H_0(z) &= H(z) \\ H_1(z) &= H(-z) \\ G_0(z) &= H(z) \\ G_1(z) &= -H(-z) \end{aligned} \tag{11.11.14}$$

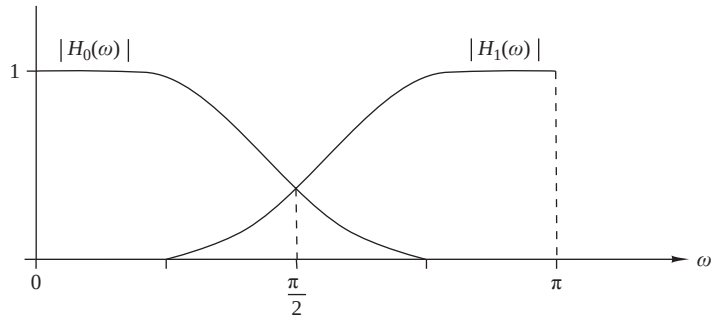


Figura 11.11.2. Características de los filtros de análisis $H_0(\omega)$ y $H_1(\omega)$.

11.11.2 Condición para una reconstrucción perfecta

Con $A(z) = 0$, considere ahora la condición para la que la salida $x(n)$ del banco de filtros QMF es idéntica a la entrada $x(n)$, excepto por un retardo arbitrario, para todas las posibles entradas. Cuando esta condición se satisface, el banco de filtros se dice que es un banco de filtros QMF de reconstrucción perfecta. Luego, necesitamos que

$$Q(z) = \frac{1}{2}\left[H_0(z)G_0(z) + H_1(z)G_1(z)\right] = z^{-k} \tag{11.11.15}$$

Utilizando las relaciones dadas en (11.11.14), la condición de reconstrucción perfecta puede expresarse como

$$H^2(z) - H^2(-z) = 2z^{-k} \tag{11.11.16}$$

o, lo que es equivalente,

$$H^2(\omega) - H^2(\omega - \pi) = 2e^{-j\omega k} \tag{11.11.17}$$

Por tanto, para conseguir una reconstrucción perfecta, la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ del filtro paso bajo del banco de filtros QMF de dos canales tiene que satisfacer la siguiente condición

$$\left|H^2(\omega) - H^2(\omega - \pi)\right| = C \tag{11.11.18}$$

donde C es una constante positiva, como por ejemplo, $C = 2$. Observe que si $H(\omega)$ satisface la condición para su módulo dada en (11.11.18) y se diseña para tener una fase lineal, entonces la salida del filtro $x(n)$ es simplemente una versión retardada de la secuencia de entrada $x(n)$. Sin embargo, la fase lineal no es una condición necesaria para conseguir una reconstrucción perfecta.

11.11.3 Forma polifásica del banco de filtros QMF

El banco de filtros QMF de dos canales libre de *aliasing* puede implementarse de forma eficiente empleando filtros polifásicos. Pensando en este objetivo, $H_0(z)$ y $H_1(z)$ pueden expresarse como

$$\begin{aligned} H_0(z) &= P_0(z^2) + z^{-1}P_1(z^2) \\ H_1(z) &= P_0(z^2) - z^{-1}P_1(z^2) \end{aligned} \tag{11.11.19}$$

donde hemos utilizado la relación dada en (11.11.14).

De forma similar, utilizando las relaciones dadas en (11.11.14), obtenemos la representación polifásica de los filtros $G_0(z)$ y $G_1(z)$ como

$$\begin{aligned} G_0(z) &= P_0(z^2) + z^{-1}P_1(z^2) \\ G_1(z) &= -\left[P_0(z^2) - z^{-1}P_1(z^2)\right] \end{aligned} \tag{11.11.20}$$

Así, obtenemos la realización polifásica del banco de filtros QMF como se muestra en la Figura 11.11.3(a). En la Figura 11.11.3(b) se muestra la implementación polifásica eficiente en lo que respecta a los cálculos correspondiente.

11.11.4 Banco de filtros FIR QMF de fase lineal

Considere ahora el uso de un filtro de fase lineal $H(\omega)$. Por tanto, $H(\omega)$ puede expresarse de la forma

$$H(\omega) = H_r(\omega)e^{-j\omega(N-1)/2} \tag{11.11.21}$$

donde N es la longitud del filtro. Así

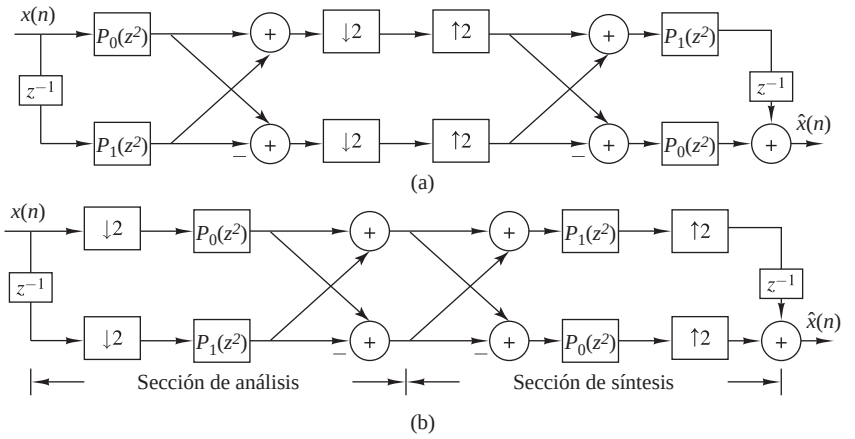


Figura 11.11.3. Implementación polifásica del banco de filtros QMF de dos canales.

$$\begin{aligned} H^2(\omega) &= H_r^2(\omega)e^{-j\omega(N-1)} \\ &= |H(\omega)|^2 e^{-j\omega(N-1)} \end{aligned} \tag{11.11.22}$$

y

$$\begin{aligned} H^2(\omega-\pi) &= H_r^2(\omega-\pi)e^{-j(\omega-\pi)(N-1)} \\ &= (-1)^{N-1}|H(\omega-\pi)|^2 e^{-j\omega(N-1)} \end{aligned} \tag{11.11.23}$$

Por tanto, la función de transferencia global del filtro QMF de dos canales, que emplea filtros FIR de fase lineal es

$$\frac{\hat{X}(\omega)}{X(\omega)} = \left[|H(\omega)|^2 - (-1)^{N-1}|H(\omega-\pi)|^2\right] e^{-j\omega(N-1)} \tag{11.11.24}$$

Fíjese en que el filtro completo presenta un retardo de $N-1$ muestras y tiene un módulo igual a

$$M(\omega) = |H(\omega)|^2 - (-1)^{N-1}|H(\omega-\pi)|^2 \tag{11.11.25}$$

Observe también que cuando N es impar, $M(\pi/2) = 0$, porque $|H(\pi/2)| = |H(3\pi/2)|$. Ésta es una propiedad no deseable en un diseño de filtros QMF. Por el contrario, cuando N es par,

$$M(\omega) = |H(\omega)|^2 + |H(\omega-\pi)|^2 \tag{11.11.26}$$

lo que evita el problema de un cero en $\omega = \pi/2$. Para N par, el QMF de dos canales ideal debe satisfacer la condición

$$M(\omega) = |H(\omega)|^2 + |H(\omega-\pi)|^2 = 1 \quad \text{para todo } \omega \tag{11.11.27}$$

lo que se deduce a partir de (11.11.25). Lamentablemente, la única respuesta en frecuencia del filtro que satisface la Ecuación (11.11.27) es la función trivial $|H(\omega)|^2 = \cos^2 a\omega$. En consecuencia, cualquier filtro FIR de fase lineal no trivial $H(\omega)$ introduce cierta distorsión en la amplitud.

La cantidad de distorsión en la amplitud introducida por el filtro FIR de fase lineal no trivial del banco de filtros QMF puede minimizarse optimizando los coeficientes del filtro FIR. Un método especialmente efectivo consiste en seleccionar los coeficientes del filtro de $H(\omega)$ tales que $M(\omega)$ sea tan plana como sea posible a la vez

que se minimiza (o restringe) la energía en la banda eliminada de $H(\omega)$. Este método lleva a la minimización del error cuadrático integral

$$J = w\int_{\omega_s}^{\pi} |H(\omega)|^2 d\omega + (1-w)\int_0^{\pi} [M(\omega)-1]^2 d\omega \tag{11.11.28}$$

donde w es un factor de ponderación en el intervalo $0 < w < 1$. Para implementar la optimización, la respuesta al impulso del filtro se restringe para ser simétrico (fase lineal). Esta optimización se puede realizar numéricamente empleando una computadora digital. Este método ha sido empleado por Johnston (1980) y Jain y Crochiere (1984) para diseñar bancos de filtros QMF de dos canales. Las tablas de coeficientes del filtro óptimo han sido tabuladas por Johnston (1980).

11.11.5 Banco de filtros IIR QMF

Como alternativa a los filtros FIR de fase lineal, podemos diseñar un filtro IIR que satisfaga la restricción de paso todo dada por (11.11.18). Para este objetivo, los filtros elípticos proporcionan diseños especialmente eficientes. Puesto que el filtro QMF introduce cierta distorsión de fase, la señal en la salida del filtro QMF puede pasarse a través de un ecualizador de fase paso todo diseñado específicamente para minimizar la distorsión de fase.

11.11.6 Reconstrucción perfecta de bancos de filtros FIR QMF de dos canales

Observe que ni los filtros FIR de fase lineal ni los filtros IIR descritos anteriormente proporcionan una reconstrucción perfecta en un banco de filtros QMF de dos canales. Sin embargo, como demostraron Smith y Barnwell (1984), puede conseguirse una reconstrucción perfecta diseñando $H(\omega)$ como un filtro FIR de media banda con fase lineal de longitud $2N-1$.

Un filtro de media banda se define como un filtro FIR de fase cero cuya respuesta al impulso $\{b(n)\}$ satisface la condición

$$b(2n) = \begin{cases} \text{constante}, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \tag{11.11.29}$$

Por tanto, todas las muestras pares son cero excepto en $n = 0$. El requisito de fase cero implica que $b(n) = b(-n)$. La respuesta en frecuencia de tal filtro es

$$B(\omega) = \sum_{n=-K}^{K} b(n)e^{-j\omega n} \tag{11.11.30}$$

donde K es impar. Además, $B(\omega)$ satisface la condición de que $B(\omega)+B(\pi-\omega)$ es igual a una constante para todas las frecuencias. La respuesta en frecuencia típica de un filtro de media banda se muestra en la Figura 11.11.4. Observe que la respuesta del filtro es simétrica con respecto a $\pi/2$, las frecuencias de corte de la banda ω_p y ω_s son simétricas respecto de $\omega = \pi/2$, y los errores de pico en la banda de paso y en la banda eliminada son iguales. Fíjese también en que el filtro puede hacerse causal introduciendo un retardo de K muestras.

Suponga ahora que diseñamos un filtro FIR de media banda de longitud $2N-1$, donde N es par y con la respuesta en frecuencia mostrada en la Figura 11.11.5(a). A partir de $B(\omega)$ construimos otro filtro de media banda cuya respuesta en frecuencia es

$$B_+(\omega) = B(\omega) + \delta e^{-j\omega(N-1)} \tag{11.11.31}$$

como se muestra en la Figura 11.11.5(b). Observe que $B_+(\omega)$ no es negativa y por tanto puede escribirse como el producto de factores espectral

$$B_+(z) = H(z)H(z^{-1})z^{-(N-1)} \tag{11.11.32}$$

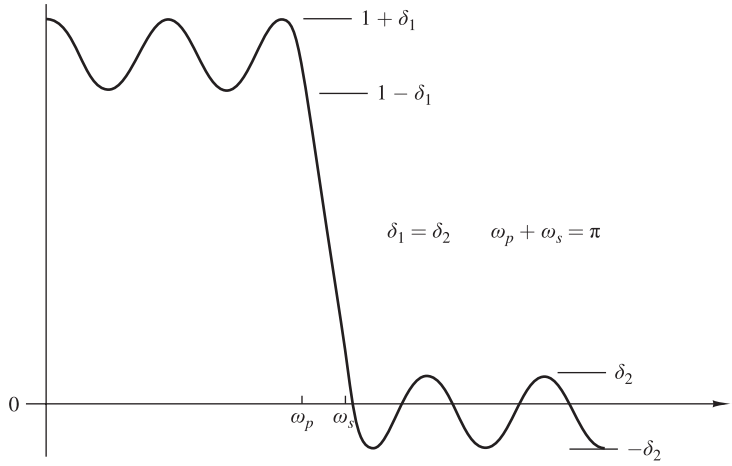


Figura 11.11.4. Respuesta en frecuencia del filtro FIR de media banda.

o, lo que es equivalente,

$$B_+(\omega) = |H(\omega)|^2 e^{-j\omega(N-1)} \tag{11.11.33}$$

donde $H(\omega)$ es la respuesta en frecuencia de un filtro FIR de longitud N con coeficientes reales. Gracias a la propiedad de simetría que presenta $B_+(\omega)$ con respecto a $\omega = \pi/2$, también tenemos que

$$B_+(z) + (-1)^{N-1} B_+(-z) = \alpha z^{-(N-1)} \tag{11.11.34}$$

o, lo que es equivalente,

$$B_+(\omega) + (-1)^{N-1} B_+(\omega - \pi) = \alpha e^{-j\omega(N-1)} \tag{11.11.35}$$

donde α es una constante. Así, sustituyendo (11.11.32) en (11.11.34), obtenemos

$$H(z)H(z^{-1}) + H(-z)H(-z^{-1}) = \alpha \tag{11.11.36}$$

Puesto que $H(z)$ satisface la Ecuación (11.11.36) y se elimina el *aliasing* cuando $G_0(z) = H_1(-z)$ y $G_1(z) = -H_0(-z)$, se concluye que estas condiciones se satisfacen eligiendo $H_1(z), G_0(z)$ y $G_1(z)$ como sigue

$$\begin{aligned} H_0(z) &= H(z) \\ H_1(z) &= -z^{-(N-1)} H_0(-z^{-1}) \\ G_0(z) &= z^{-(N-1)} H_0(z^{-1}) \\ G_1(z) &= z^{-(N-1)} H_1(z^{-1}) = -H_0(-z) \end{aligned} \tag{11.11.37}$$

Por tanto, la distorsión por *aliasing* se elimina y, puesto que $\hat{X}(\omega)/X(\omega)$ es una constante, el filtro QMF hace una reconstrucción perfecta de modo que $x(n) = \alpha x(n-N+1)$. Sin embargo, observe que $H(z)$ no es un filtro de fase lineal. Los filtros FIR $H_0(z), H_1(z), G_0(z)$ y $G_1(z)$ que componen el banco de filtros QMF de dos canales se implementan de forma eficiente mediante filtros polifásicos, como se ha demostrado anteriormente.

11.11.7 Bancos de filtros QMF de dos canales con codificación subbanda

En la Sección 11.9.4 hemos descrito un método para realizar una codificación eficiente de una señal de voz basada en la subdivisión de la señal en varias subbandas y codificando por separado cada subbanda. Por ejemplo, en la

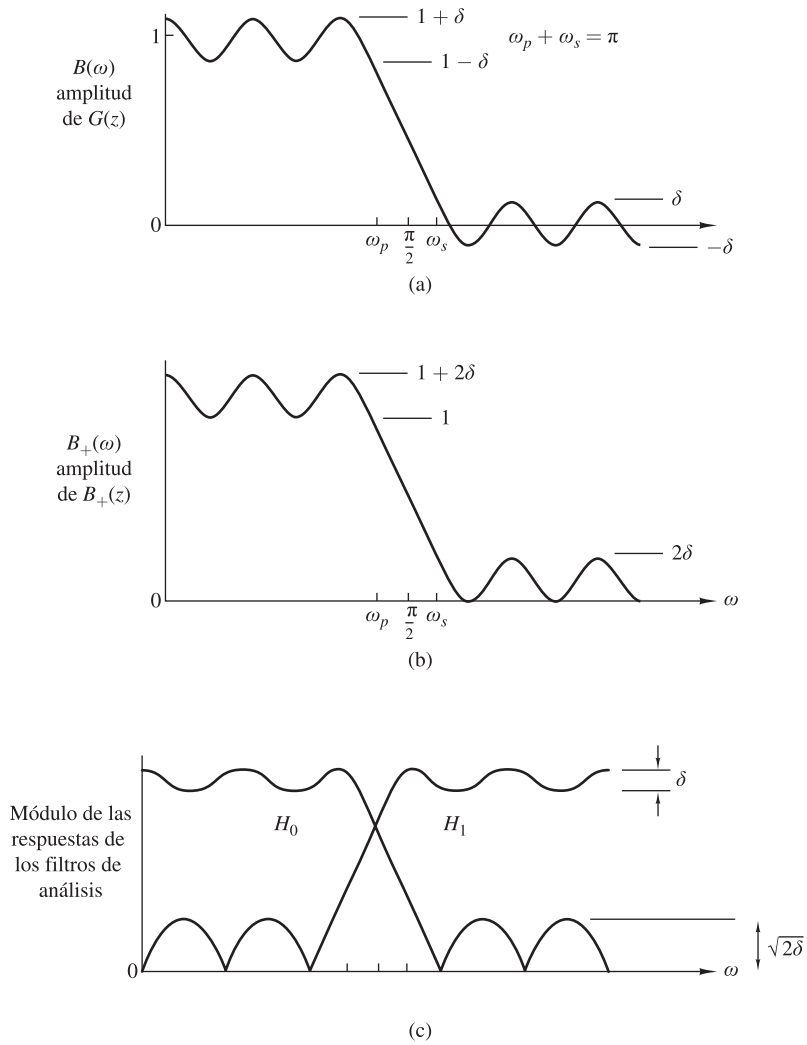


Figura 11.11.5. Respuesta en frecuencia de los filtros FIR de media banda $B(\omega)$ y $B_+(\omega)$. (Vaidyanathan (1987))

Figura 11.9.4 se ilustra la separación de la señal en cuatro subbandas, a saber, $0 \leq F \leq F_s/16$, $F_s/16 < F \leq F_s/8$, $F_s/8 < F \leq F_s/4$ y $F_s/4 < F \leq F_s/2$, donde F_s es la frecuencia de muestreo. La subdivisión en cuatro subbandas puede llevarse a cabo utilizando tres secciones de análisis de filtros QMF de dos canales. Después de codificar y transmitir a través del canal, cada señal subbanda se decodifica y reconstruye pasando las subbandas a través de tres filtros QMF de síntesis de dos canales. La configuración del sistema para la codificación subbanda que emplea cuatro subbandas se ilustra en la Figura 11.11.6.

11.12 Banco de filtros QMF de M canales

En esta sección vamos a considerar la generalización del banco de filtros QMF de M canales. La Figura 11.12.1 ilustra la estructura de un banco de filtros QMF de M canales, donde $x(n)$ es la entrada a la sección de análisis,

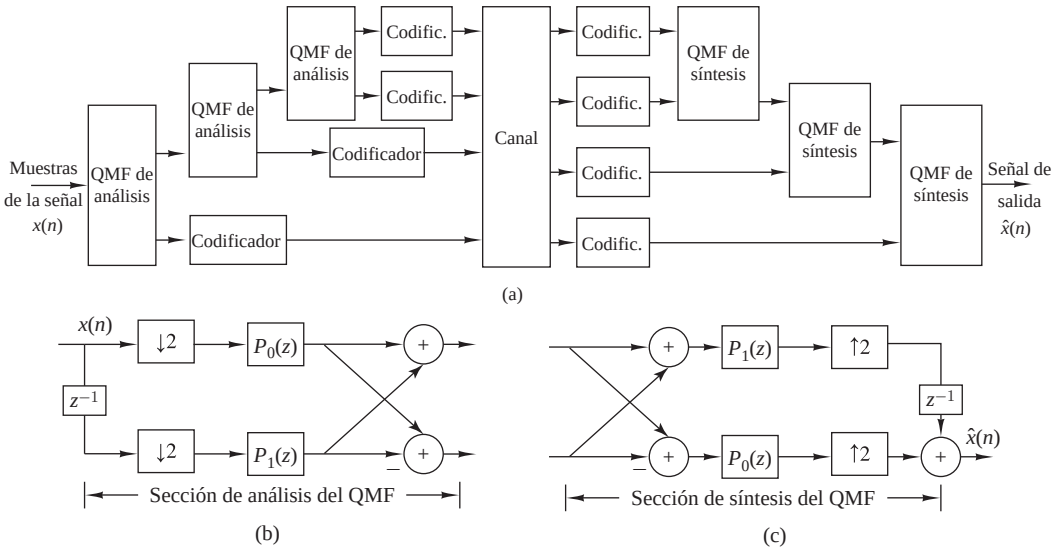


Figura 11.11.6. Sistema de codificación subbanda que utiliza bancos de filtros QMF de dos canales.

$x_k^{(a)}(n)$, $0 \le k \le M-1$, son las salidas de los filtros de análisis, $x_k^{(s)}(n)$, $0 \le k \le M-1$ son las entradas a los filtros de síntesis y $\hat{x}(n)$ es la salida de la sección de síntesis.

Las M salidas de los filtros de análisis pueden expresarse en el dominio de la transformada z como

$$X_k^{(a)}(z) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} H_k\left(z^{1/M} W_M^m\right) X\left(z^{1/M} W_M^m\right), \quad 0 \le k \le M-1 \tag{11.12.1}$$

donde $W_M = e^{-j2\pi/M}$. La salida de la sección de síntesis es

$$\hat{X}(z) = \sum_{k=0}^{M-1} X_k^{(s)}\left(z^M\right) G_k(z) \tag{11.12.2}$$

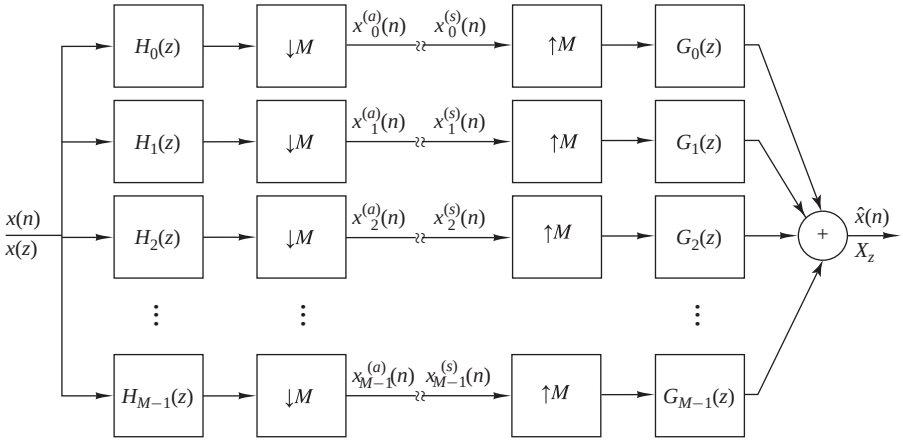


Figura 11.12.1. Banco de filtros QMF de M canales.

Como en el caso del banco de filtros QMF de dos conales, hacemos $X_k^{(a)}(z) = X_k^{(s)}(z)$. Así, si sustituimos (11.12.1) en (11.12.2), obtenemos

$$\begin{aligned}\hat{X}(z) &= \textstyle\sum_{k=0}^{M-1} G_k(z)\left[\dfrac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} H_k\left(zW_M^m\right)X\left(zW_M^m\right)\right]\\ &= \textstyle\sum_{m=0}^{M-1}\left[\dfrac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} G_k(z)H_k\left(zW_M^m\right)\right]X\left(zW_M^m\right)\end{aligned} \tag{11.12.3}$$

Es conveniente definir el término entre corchetes como

$$R_m(z) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} G_k(z)H_k(zW_M^m), \quad 0 \le m \le M-1 \tag{11.12.4}$$

Luego (11.12.3) puede expresarse como

$$\begin{aligned}\hat{X}(z) &= \textstyle\sum_{m=0}^{M-1} R_m(z)X\left(zW_N^m\right)\\ &= R_0(z)X(z) + \textstyle\sum_{m=1}^{M-1} R_m(z)X\left(zW_M^m\right)\end{aligned} \tag{11.12.5}$$

Fíjese en que el primer término de (11.12.5) es la componente sin *aliasing* del banco de filtros QMF y el segundo término es la componente con *aliasing*.

11.12.1 Condiciones para reconstrucción perfecta y eliminación del aliasing

A partir de (11.12.5), está claro que el *aliasing* se elimina forzando la condición

$$R_m(z) = 0, \quad 1 \le m \le M-1 \tag{11.12.6}$$

Con la eliminación de los términos con *aliasing*, el banco de filtros QMF de M canales se convierte en un sistema lineal invariante en el tiempo que satisface la relación de entrada–salida

$$\hat{X}(z) = R_0(z)X(z) \tag{11.12.7}$$

donde

$$R_0(z) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} H_k(z)G_k(z) \tag{11.12.8}$$

Entonces la condición para obtener una reconstrucción perfecta con un banco de filtros QMF de M canales es

$$R_0(z) = Cz^{-k} \tag{11.12.9}$$

donde C y k son constantes positivas.

11.12.2 Forma polifásica del banco de filtros QMF de M canales

Una implementación eficiente del banco de filtros QMF de M canales se consigue empleando filtros polifásicos. Para obtener la forma polifásica del banco de filtros de análisis, el filtro k $H_k(z)$ se representa como

$$H_k(z) = \sum_{m=0}^{M-1} z^{-m}P_{km}(z), \qquad 0 \le k \le M-1 \tag{11.12.10}$$

Podemos expresar las ecuaciones para el filtro polifásico M en forma matricial como

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{P}(z^M)\mathbf{a}(z) \tag{11.12.11}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(z) &= [H_0(z)\, H_1(z) \cdots H_{M-1}(z)]^t \\ \mathbf{a}(z) &= \left[1 \; z^{-1} \; z^{-2} \cdots z^{-(M-1)}\right]^t \end{aligned} \tag{11.12.12}$$

y

$$\mathbf{P}(z) = \begin{bmatrix} P_{00}(z) & P_{01}(z) & \cdots & P_{0M-1}(z) \\ P_{10}(z) & P_{11}(z) & \cdots & P_{1M-1}(z) \\ \vdots & & & \\ P_{M-1\,0}(z) & P_{M-1\,1}(z) & \cdots & P_{M-1\,M-1}(z) \end{bmatrix} \tag{11.12.13}$$

La forma polifásica del banco de filtros de análisis se muestra en la Figura 11.12.2(a), y después de aplicar la primera identidad noble obtenemos la estructura mostrada en la Figura 11.12.2(b).

La sección de síntesis puede construirse de manera similar. Suponga que utilizamos una forma (transpuesta) de tipo II (*véase* el Problema 11.15) para la representación polifásica de los filtros $\{G_k(z)\}$. Así,

$$G_k(z) = \sum_{m=0}^{M-1} z^{-(M-1-m)} Q_{km}(z^M), \qquad 0 \le k \le M-1 \tag{11.12.14}$$

Si se expresa en forma matricial, (11.12.14) se convierte en

$$\mathbf{G}(z) = z^{-(M-1)}\mathbf{Q}(z^M)\mathbf{a}(z^{-1}) \tag{11.12.15}$$

donde $\mathbf{a}(z)$ se define en (11.12.12) y

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(z) &= \begin{bmatrix} G_0(z) & G_1(z) & \cdots & G_{M-1}(z) \end{bmatrix}^t \\ \mathbf{Q}(z) &= \begin{bmatrix} Q_{00}(z) & Q_{01}(z) & \cdots & Q_{0\,M-1}(z) \\ Q_{10}(z) & Q_{11}(z) & \cdots & Q_{1\,M-1}(z) \\ \vdots & & & \\ Q_{M-1\,0}(z) & Q_{M-1\,1}(z) & \cdots & Q_{M-1\,M-1}(z) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{11.12.16}$$

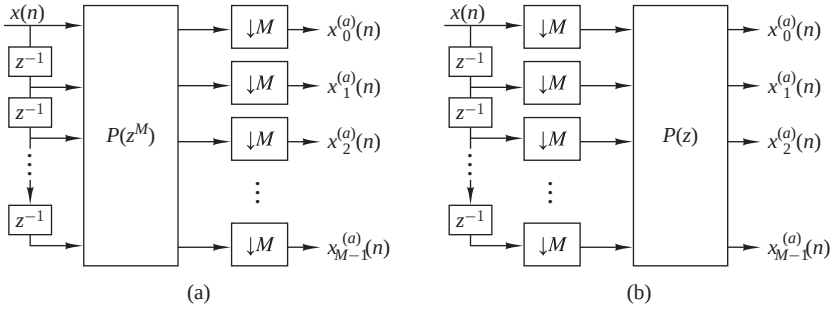


Figura 11.12.2. Estructura polifásica de la sección de análisis de un banco de filtros QMF de M canales (a) antes y (b) después de aplicar la primera identidad noble.

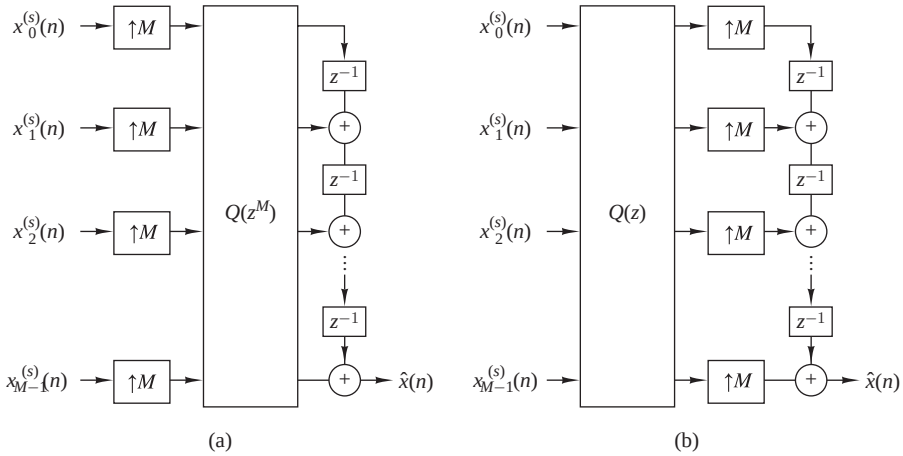


Figura 11.12.3. Estructura polifásica de la sección de síntesis de un banco de filtros QMF de M canales (a) antes y (b) después de aplicar la primera identidad noble.

Por tanto, la sección de síntesis del banco de filtros QMF de M canales se implementa como se muestra en la Figura 11.11.3. Combinando las Figuras 11.12.2(b) y 11.12.3(b), obtenemos la estructura polifásica del banco de filtros QMF de M canales mostrada en la Figura 11.12.4.

A partir de la estructura del banco de filtros QMF de M canales mostrada en la Figura 11.12.4, fíjese en que la condición de reconstrucción perfecta puede reestablecerse como

$$\mathbf{Q}(z)\mathbf{P}(z) = Cz^{-k}\mathbf{I} \tag{11.12.17}$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad $M \times M$. Por tanto, si la matriz polifásica $\mathbf{P}(z)$ es conocida, entonces la matriz de síntesis polifásica $\mathbf{Q}(z)$ es

$$\mathbf{Q}(z) = Cz^{-k}[\mathbf{P}(z)]^{-1} \tag{11.12.18}$$

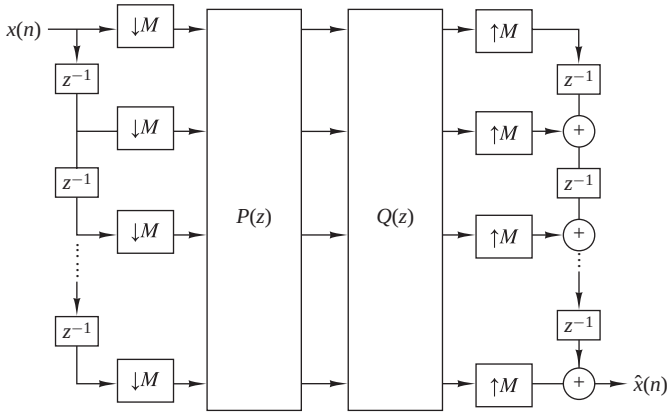


Figura 11.12.4. Realización polifásica del banco de filtros QMF de M canales.

EJEMPLO 11.12.1

Suponga que la matriz polifásica para un banco de filtros FIR QMF de tres canales con reconstrucción perfecta es

$$\mathbf{P}(z^3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine los filtros de análisis y de síntesis del banco de filtros QMF.

Solución. Los filtros de análisis están dados por (11.12.11) como

$$\begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \\ H_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \\ z^{-2} \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$H_0(z) = 1 + z^{-1} + 2z^{-2}, \qquad H_1(z) = 2 + 3z^{-1} + z^{-2}, \qquad H_2(z) = 1 + 2z^{-1} + z^{-2}$$

La inversa de $\mathbf{P}(z^3)$ es

$$\left[\mathbf{P}(z^3)\right]^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos escalar esta inversa por el factor 2, de modo que

$$\mathbf{Q}(z^3) = 2[\mathbf{P}(z^3)]^{-1}$$

Luego aplicando (11.12.15), obtenemos los filtros de síntesis como

$$\begin{bmatrix} G_0(z) \\ G_1(z) \\ G_2(z) \end{bmatrix} = z^{-2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$G_0(z) = -5 + 3z^{-1} + z^{-2}, \qquad G_1(z) = 3 - z^{-1} - z^{-2}, \qquad G_3(z) = 1 - z^{-1} + z^{-2}$$

Vaidyanathan (1992) aborda el diseño de bancos de filtros QMF de M canales con reconstrucción perfecta seleccionando los filtros de análisis $H_k(z)$ para que sean filtros FIR con una estructura polifásica paraunitaria, es decir,

$$\tilde{\mathbf{P}}(z)\mathbf{P}(z) = d\mathbf{I}, \qquad d > 0 \tag{11.12.19}$$

donde $\tilde{\mathbf{P}}(z)$ es el paraconjugado de $\mathbf{P}(z)$. Es decir, $\tilde{\mathbf{P}}(z)$ está formado por la transpuesta de $\mathbf{P}(1/z)$, con los coeficientes de $\mathbf{P}(z)$ reemplazados por sus conjugados complejos. Por tanto, los filtros polifásicos en la sección de síntesis se diseñan para satisfacer

$$\mathbf{Q}(z) = Cz^{-k}\tilde{\mathbf{P}}(z), \qquad C > 0, k > 0 \tag{11.12.20}$$

Es posible demostrar (*véase* Vaidyanathan *et al.* (1989)) que cualquier matriz paraunitaria FIR de grado L $\mathbf{P}(z)$ puede escribirse en forma de producto como

$$\mathbf{P}(z) = \mathbf{V}_L(z)\mathbf{V}_{L-1}(z)\cdots\mathbf{V}_1(z)\mathbf{U} \tag{11.12.21}$$

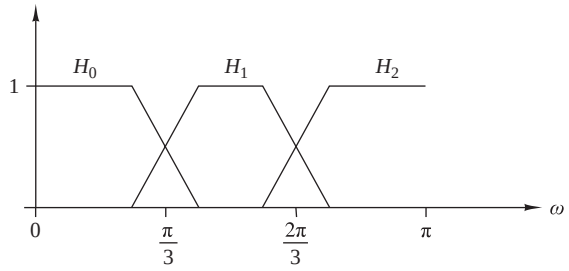


Figura 11.12.5. Módulo de la respuesta de los filtros de análisis en un banco de filtros QMF con $M = 3$.

donde $\mathbf{U}$ es una matriz unitaria y $\{\mathbf{V}_m(z)\}$ son matrices paraunitarias de la forma

$$\mathbf{V}_m(z) = \mathbf{I} - \upsilon_m \upsilon_m^H + z^{-1} \upsilon_m \upsilon_m^H \tag{11.12.22}$$

donde υ_m es un vector de M dimensiones de norma unidad. Entonces, el diseño de los filtros de síntesis se reduce a la optimización de los componentes de υ_m y $\mathbf{u}_i$ minimizando una función objetivo, que puede ser una generalización de la función objetivo del filtro QMF de dos canales dada por (11.11.28). En particular, podemos minimizar la función objetivo

$$J = \sum_{k=0}^{M-1} \int_{\text{banda eliminada } k} |H_k(\omega)|^2 d\omega \tag{11.12.23}$$

empleando una técnica de optimización no lineal para determinar los componentes de υ_m y $\mathbf{u}_i$. Por tanto, los vectores υ_m y $\mathbf{u}_i$ determinan por completo $\mathbf{P}(z)$ y, en consecuencia, los filtros de análisis $H_k(z)$. Los filtros de síntesis se determinan entonces a partir de (11.12.20).

Considere por ejemplo el diseño de un banco de filtros QMF de tres canales con reconstrucción perfecta cuyos módulos de las respuestas sean los mostrados en la Figura 11.12.5. El procedimiento de diseño descrito anteriormente proporciona los módulos de las respuestas de los filtros de análisis que se muestran en la Figura 11.12.6. La longitud del filtro es $N = 14$. Observe que la atenuación en la banda eliminada de los filtros es de aproximadamente 20 dB.

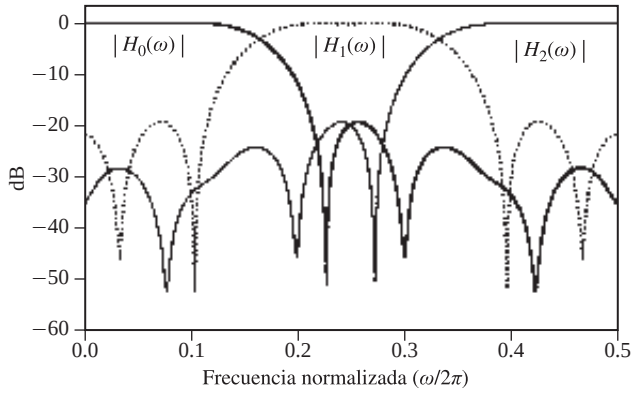


Figura 11.12.6. Módulo de la respuesta de los filtros de análisis optimizados para un banco de filtros QMF con $M = 3$ y reconstrucción perfecta FIR. (*De Multirate Systems and Filter Banks*, por P.P. Vaidyanathan, ©1993, Prentice Hall. Reimpreso con permiso del editor).

11.13 Resumen y referencias

La necesidad de convertir la frecuencia de muestreo surge habitualmente de las aplicaciones de tratamiento digital de señales. En este capítulo nos hemos ocupado en primer lugar de la reducción de la frecuencia de muestreo (diezmado) y del incremento de la misma (interpolación) por factores enteros, y luego hemos mostrado cómo se pueden combinar ambos procesos para obtener una conversión de la frecuencia de muestreo por un factor racional. A continuación, hemos descrito un método para convertir la frecuencia de muestreo por un factor arbitrario. En el caso especial en que la señal que va a remuestrearse es una señal paso banda, hemos presentado diversos métodos para convertir la frecuencia de muestreo.

En general, la implementación de convertidores de la frecuencia de muestreo requiere el uso de un filtro lineal y variante en el tiempo. Hemos descrito métodos para implementar tales filtros, incluyendo estructuras de filtros polifásicos, que son especialmente sencillas de implementar. También hemos abordado el uso de implementaciones multietapa para conversión de tasa múltiple como forma de simplificar la complejidad del filtro requerido para cumplir las especificaciones.

Hemos descrito también una serie de aplicaciones que emplean procesamiento de señales multitasa, incluyendo la implementación de filtros de banda estrecha, desplazadores de fase, bancos de filtros, codificadores subbanda de voz, filtros espejo en cuadratura y transmultiplexores. Éstas son sólo unas pocas de las aplicaciones que pueden encontrarse en el mundo real en las que se emplea el procesamiento digital multitasa.

El primer estudio exhaustivo sobre el procesamiento de señales multitasa apareció en el libro de Crochiere y Rabiner (1983). Dentro de la literatura técnica, podemos citar los documentos de Schafer y Rabiner (1973), y de Crochiere y Rabiner (1975, 1976, 1981, 1983). El uso de métodos de interpolación para llevar a cabo la conversión de la frecuencia de muestreo por un factor arbitrario se aborda en los estudios de Ramstad (1984). Un tutorial sobre los filtros digitales multitasa y los bancos de filtros, incluyendo los filtros espejo en cuadratura puede verse en Vetterli (1987), y en Vaidyanathan (1990, 1993), donde se citan muchas referencias a diversas aplicaciones. Una amplia introducción sobre los métodos de transmultiplexación digital puede encontrarse en Scheuermann y Gockler (1981). La codificación subbanda de voz se ha abordado en muchas publicaciones. El trabajo pionero sobre este tema fue hecho por Crochiere (1977, 1981) y por Garland y Esteban (1980). La codificación subbanda también se ha aplicado a la codificación de imágenes. Tenemos que mencionar también los estudios de Vetterli (1984), Woods y O'Neil (1986), Smith y Eddins (1988), y Safranek *et al.* (1988), que son sólo unos pocos ejemplos. Para terminar, queremos hacer hincapié en que el procesamiento digital multitasa continúa siendo un área de investigación activa.

Problemas

11.1 Sea la señal analógica $x_a(t)$ de banda limitada en el intervalo $900 \leq F \leq 1100$ Hz. Esta señal se emplea como entrada al sistema mostrado en la Figura P.11.1. En este sistema, $H(\omega)$ es un filtro paso bajo ideal con una frecuencia de corte $F_c = 125$ Hz.

(a) Determine y dibuje los espectros de las señales $x(n)$, $w(n)$, $v(n)$ e $y(n)$.

(b) Demuestre que es posible obtener $y(n)$ muestreando $x_a(t)$ con un período $T = 4$ milisegundos.

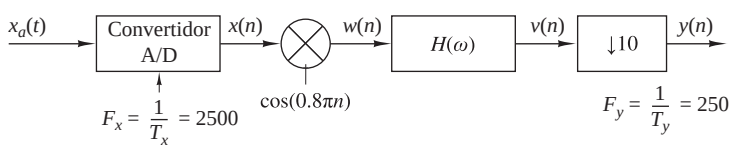


Figura P.11.1.

11.2 Considere la señal $x(n) = a^n u(n)$, $|a| < 1$.

(a) Determine el espectro $X(\omega)$.

(b) La señal $x(n)$ se aplica a un diezmador que reduce la frecuencia por un factor de 2. Determine el espectro de salida.

(c) Demuestre que el espectro del apartado (b) es simplemente la transformada de Fourier de $x(2n)$.

11.3 La secuencia $x(n)$ se obtiene muestreando una señal analógica de período T. A partir de esta señal se obtiene una nueva señal, que tiene un período de muestreo de $T/2$, utilizando un método de interpolación lineal descrito por la ecuación

$$y(n) = \begin{cases} x(n/2), & n \text{ par} \\ \dfrac{1}{2}\left[x\left(\dfrac{n-1}{2}\right) + x\left(\dfrac{n+1}{2}\right)\right], & n \text{ impar} \end{cases}$$

(a) Demuestre que este esquema de interpolación lineal puede implementarse mediante elementos básicos de tratamiento digital de señales.

(b) Determine el espectro de $y(n)$ si el espectro de $x(n)$ es

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \le |\omega| \le 0.2\pi \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(c) Determine el espectro de $y(n)$ si el espectro de $x(n)$ es

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & 0.7\pi \le |\omega| \le 0.9\pi \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

11.4 Considere la señal $x(n)$ cuya transformada de Fourier es

$$X(\omega) = 0, \quad \omega_n < |\omega| \le \pi$$
$$f_m < |f| \le \tfrac{1}{2}$$

(a) Demuestre que la señal $x(n)$ se puede recuperar a partir de sus muestras $x(mD)$ si la frecuencia de muestreo es $\omega_s = 2\pi/D \le 2\omega_m (f_s = 1/D \ge 2f_m)$.

(b) Demuestre que $x(n)$ puede reconstruirse utilizando la fórmula

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kD) h_r(n - kD)$$

donde

$$h_r(n) = \frac{\operatorname{sen}(2\pi f_c n)}{2\pi n}, \qquad \begin{array}{l} f_m < f_c < f_s - f_m \\ \omega_m < \omega_c < \omega_s - \omega_m \end{array}$$

(c) Demuestre que la interpolación de banda limitada del apartado (b) puede llevarse a cabo a través de un proceso de dos pasos, siendo el primero de ellos el incremento de la frecuencia de muestreo por un factor D por medio de la inserción de $(D-1)$ muestras de valor cero entre muestras sucesivas de la señal diezmada $x_a(n) = x(nD)$, y el segundo el filtrado de la señal resultante utilizando un filtro paso bajo ideal con una frecuencia de corte ω_c.

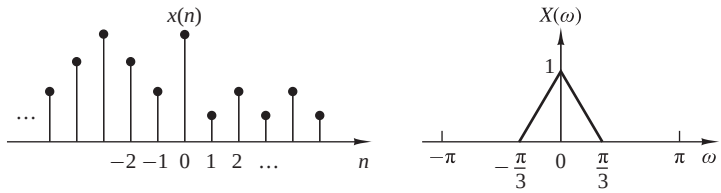


Figura P.11.5.

11.5 En este problema queremos ilustrar los conceptos de muestreo y diezmado para señales discretas en el tiempo. Para ello, considere una señal $x(n)$ con la transformada de Fourier $X(\omega)$ mostrada en la Figura P.11.5.

(a) Muestreando $x(n)$ con un período de muestreo $D = 2$ se obtiene la señal

$$x_s(n) = \begin{cases} x(n), & n = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots \\ 0, & n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots \end{cases}$$

Calcule y dibuje la señal $x_s(n)$ y su transformada de Fourier $X_s(\omega)$. ¿Podemos reconstruir $x(n)$ a partir de $x_s(n)$? ¿Cómo?

(b) Diezmando $x(n)$ por un factor $D = 2$ se genera la señal

$$x_d(n) = x(2n), \qquad \text{para todo } n$$

Demuestre que $X_d(\omega) = X_s(\omega/2)$. Dibuje la señal $x_d(n)$ y su transformada $X_d(\omega)$. ¿Perdemos información al diezmar la señal muestreada $x_s(n)$?

11.6 Diseñe un diezmador que submuestree una señal de entrada $x(n)$ por un factor $D = 5$. Utilice el algoritmo de Remez para determinar los coeficientes del filtro FIR que tiene un rizado de 0.1 dB en la banda de paso $(0 \leq \omega \leq \pi/5)$ y una atenuación de al menos 30 dB en la banda eliminada. Determine también la correspondiente estructura de filtros polifásicos para implementar el diezmador.

11.7 Diseñe un interpolador que aumente la frecuencia de muestreo por un factor $I = 2$. Utilice el algoritmo de Remez para determinar los coeficientes del filtro FIR que presenta un rizado de 0.1 dB en la banda de paso $(0 \leq \omega \leq \pi/2)$ y una atenuación de al menos 30 dB en la banda eliminada. Determine también la correspondiente estructura de filtros polifásicos para implementar el interpolador.

11.8 Diseñe un convertidor de la frecuencia de muestreo que reduzca dicha frecuencia de muestreo en un factor de $\frac{2}{5}$. Utilice el algoritmo de Remez para determinar los coeficientes del filtro FIR que presenta un rizado de 0.1 dB en la banda de paso y una atenuación de al menos 30 dB en la banda eliminada. Especifique los conjuntos de coeficientes variantes en el tiempo $g(n,m)$ y los correspondientes coeficientes de la realización del filtro polifásico del convertidor de la frecuencia de muestreo.

11.9 Considere las dos diferentes formas de conectar en cascada un diezmador y un interpolador como se muestra en la Figura P.11.9.

(a) Si $D = I$, demuestre que las salidas de las dos configuraciones son diferentes, y que, por tanto, en general, los dos sistemas no son idénticos.

(b) Demuestre que los dos sistemas son idénticos si y sólo si D e I son relativamente primos.

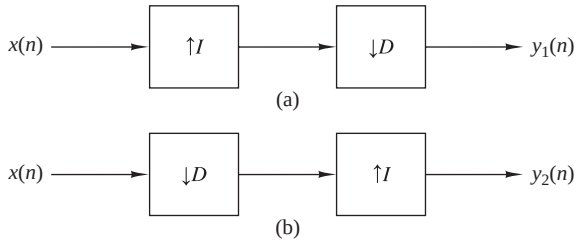


Figura P.11.9.

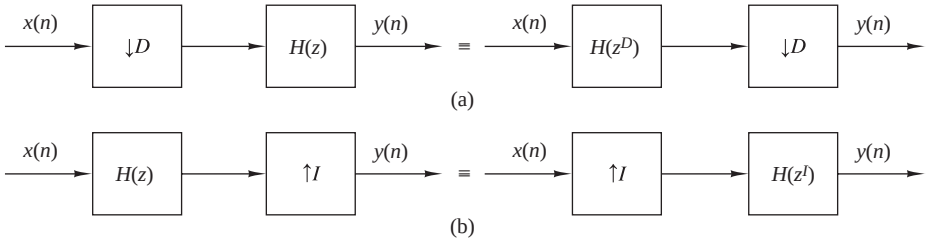


Figura P.11.10.

11.10 Demuestre la equivalencia de las dos configuraciones de diezmador e interpolador mostradas en la Figura P.11.10 (identidades nobles) (*véase* Vaidyanathan, 1990).

11.11 Considere un filtro digital arbitrario con la función de transferencia

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

(a) Realice una descomposición polifásica de dos componentes de $H(z)$ agrupando las muestras pares $h_0(n) = h(2n)$ y las muestras impares $h_1(n) = h(2n+1)$. Demuestre a continuación que $H(z)$ se puede expresar como

$$H(z) = H_0(z^2) + z^{-1} H_1(z^2)$$

y determine $H_0(z)$ y $H_1(z)$.

(b) Generalize el resultado del apartado (a) demostrando que $H(z)$ puede descomponerse en una estructura de filtros polifásicos de D componentes con una función de transferencia

$$H(z) = \sum_{k=0}^{D-1} z^{-k} H_k(z^D)$$

Determine $H_k(z)$.

(c) Para el filtro IIR cuya función de transferencia es

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

determine $H_0(z)$ y $H_1(z)$ para la descomposición en dos componentes.

11.12 Una secuencia $x(n)$ se sobremuestrea por un factor $I = 2$, se pasa a través de un sistema LTI $H_1(z)$, y luego se submuestrea por un factor $D = 2$. ¿Podemos reemplazar este proceso por un único sistema LTI $H_2(z)$? Si su respuesta es afirmativa, determine la función de sistema correspondiente.

11.13 Dibuje las señales y sus correspondientes espectros de un proceso de conversión de la frecuencia de muestreo por un factor (a) $I/D = 5/3$ y por un factor (b) $I/D = 3/5$. Suponga que el espectro de la señal de entrada $x(n)$ ocupa el intervalo completo $-\pi \leq \omega_x \leq \pi$.

11.14 Queremos diseñar un diezmador eficiente no recursivo para $D = 8$ utilizando la descomposición en factores

$$H(z) = [(1+z^{-1})(1+z^{-2})(1+z^{-4})\dots(1+z^{-2^{K-1}})]^5$$

(a) Deduzca una implementación eficiente utilizando filtros con la función de sistema $H_k(z) = (1+z^{-1})^5$.

(b) Demuestre que cada etapa del diezmador obtenido puede implementarse de forma más eficiente utilizando una descomposición polifásica.

11.15 Considere una descomposición polifásica alternativa definiendo nuevos filtros polifásicos $Q_m(z^N)$ como

$$H(z) = \sum_{m=0}^{N-1} z^{-(N-1-m)} Q_m(z^N)$$

Esta descomposición polifásica se denomina forma de tipo II para diferenciarla de la descomposición convencional basada en los filtros polifásicos $P_m(z^N)$.

(a) Demuestre que los filtros polifásicos en la forma de tipo II $Q_m(z)$ están relacionados con los filtros polifásicos $P_m(z^N)$ de la manera siguiente:

$$Q_m(z^N) = P_{N-1-m}(z^N)$$

(b) Dibuje la estructura de filtros polifásicos para $H(z)$ basada en los filtros polifásicos $Q_m(z^N)$ y, demuestre a continuación que esta estructura es una forma transpuesta alternativa.

11.16 Determine la forma transpuesta para el diezmador $D = 3$ mostrado en la Figura 11.5.9.

11.17 Diseñe un diezmador de dos etapas para las especificaciones siguientes:

	$D = 100$
Banda de paso:	$0 \leq F \leq 50$
Banda de transición:	$50 \leq F \leq 55$
Frecuencia de muestreo de entrada:	10,000 Hz
Rizado:	$\delta_1 = 10^{-1}, \delta_2 = 10^{-3}$

11.18 Diseñe un filtro FIR de fase lineal que satisfaga las siguientes especificaciones basadas en una estructura multitasa de una sola etapa y de dos etapas:

Frecuencia de muestreo:	10,000 Hz
Banda de paso:	$0 \leq F \leq 60$
Banda de transición:	$60 \leq F \leq 65$
Rizado:	$\delta_1 = 10^{-1}, \delta_2 = 10^{-3}$

11.19 Demuestre que los coeficientes impares y pares de un filtro de media banda que satisface la expresión (11.11.35) siempre son iguales a cero.

11.20 Diseñe interpoladores de una etapa y de dos etapas que cumplan las siguientes especificaciones:

	$I = 20$
Frecuencia de muestreo de entrada:	10,000 Hz
Banda de paso:	$0 \leq F \leq 90$
Banda de transición:	$90 \leq F \leq 100$
Rizado:	$\delta_1 = 10^{-2}, \delta_2 = 10^{-3}$

11.21 Utilizando la expresión (11.10.15) deduzca las ecuaciones correspondientes a la estructura de la sección de síntesis polifásica mostrada en la Figura 11.10.6.

11.22 Demuestre que la forma transpuesta de un interpolador de L etapas que permite aumentar la frecuencia de muestreo por un factor entero I es equivalente a un diezmador de L etapas que hace que la frecuencia de muestreo disminuya en un factor $D = I$.

11.23 Dibuje la estructura del filtro polifásico que proporciona un avance temporal de $(k/I)T_x$ en una secuencia $x(n)$.

11.24 Demuestre las siguientes expresiones para un interpolador de orden I.

(a) La respuesta al impulso $h(n)$ se puede expresar como

$$h(n) = \sum_{k=0}^{I-1} p_k(n-k)$$

donde

$$p_k(n) = \begin{cases} p_k(n/I), & n = 0, \pm I, \pm 2I, \ldots \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(b) $H(z)$ se puede expresar como

$$H(z) = \sum_{k=0}^{I-1} z^{-k} p_k(z)$$

(c) $P_k(z) = \dfrac{1}{I} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{I-1} h(n) e^{j2\pi l(n-k)/I} z^{-(n-k)/I}$

$$P_k(\omega) = \frac{1}{I} \sum_{l=0}^{I-1} H\left(\omega - \frac{2\pi l}{I}\right) e^{j(\omega - 2\pi l)k/I}$$

11.25 Considere la interpolación de una señal por un factor I. El filtro de interpolación con la función de transferencia $H(z)$ se implementa mediante la estructura de filtros polifásicos basada en una descomposisión alternativa (tipo II), a saber

$$H(z) = \sum_{m=0}^{I-1} z^{-(I-1-m)} Q_m(z^I)$$

Determine y dibuje la estructura del interpolador que emplea los filtros polifásicos $Q_m(z)$, $0 \leq m \leq I-1$.

11.26 En las estructuras de filtros polifásicos para un banco de filtros DFT uniforme descritas en la Sección 11.10.1, los filtros polifásicos de la sección de análisis se han definido de acuerdo con la Ecuación (11.10.10). En lugar de esta definición, suponga que definimos los filtros polifásicos de N bandas para el filtro prototipo paso bajo, $H_0(z)$, como

$$H_0(z) = \sum_{i=0}^{N-1} z^{-i} P_i(z^N)$$

donde

$$P_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_0(nN+i) z^{-n}, \qquad 0 \le i \le N-1$$

Por tanto,

$$H_k(z) = H_0(z e^{-j2\pi k/N}) = H_0(z W_N^k)$$

donde $W_N = e^{-j2\pi/N}$.

(a) Demuestre que los filtros $H_k(z)$, $1 \le k \le N-1$, pueden expresarse como

$$H_k(z) = \begin{bmatrix} 1 & W_N^{-k} & W_N^{-2k} & \cdots & W_N^{-(N-1)k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0(z^N) \\ z^{-1} P_1(z^N) \\ \vdots \\ z^{-(N-1)} P_{N-1}(z^N) \end{bmatrix}$$

(b) Demuestre que

$$\begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \\ \vdots \\ H_{N-1}(z) \end{bmatrix} = N \mathbf{W}^{-1} \begin{bmatrix} P_0(z^N) \\ z^{-1} P_1(z^N) \\ \vdots \\ z^{-(N-1)} P_{N-1}(z^N) \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{W}$ es la matriz DFT

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{(N-1)} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

(c) Dibuje la sección de análisis del banco de filtros DFT uniforme.

(d) Determine y dibuje la sección de síntesis del banco de filtros DFT uniforme.

11.27 El filtro prototipo de un banco uniforme de filtros DFT de cuatro canales está caracterizado por la función de transferencia

$$H_0(z) = 1 + z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-4}$$

(a) Determine las funciones de transferencia de los filtros $H_1(z)$, $H_2(z)$ y $H_3(z)$ de la sección de análisis.

(b) Determine las funciones de transferencia de los filtros de la sección de síntesis.

(c) Dibuje las secciones de análisis y de síntesis del banco de filtros DFT uniforme.

11.28 Considere la siguiente función de transferencia del filtro FIR:

$$H(z) = -3 + 19z^{-2} + 32z^{-3} + 19z^{-4} - 3z^{-6}$$

(a) Demuestre que $H(z)$ es un filtro de fase lineal.

(b) Demuestre que $H(z)$ es un filtro de media banda.

(c) Dibuje el módulo y la fase de la respuesta del filtro.

11.29 El filtro de análisis $H_0(z)$ de un filtro QMF de dos canales tiene la función de transferencia

$$H_0(z) = 1 + z^{-1}$$

(a) Determine los filtros polifásicos $P_0(z^2)$ y $P_1(z^2)$.

(b) Determine el filtro de análisis $H_1(z)$ y dibuje la sección de análisis de dos canales que emplean los filtros polifásicos.

(c) Determine los filtros de síntesis $G_0(z)$ y $G_1(z)$, y dibuje el filtro QMF de dos canales completo basado en filtros polifásicos.

(d) Demuestre que el banco de filtros QMF da lugar a una reconstrucción perfecta.

11.30 Los filtros de análisis de un banco de filtros QMF de tres canales tienen las funciones de transferencia

$$\begin{aligned} H_0(z) &= 1 + z^{-1} + z^{-2} \\ H_1(z) &= 1 - z^{-1} + z^{-2} \\ H_2(z) &= 1 - z^{-2} \end{aligned}$$

(a) Determine la matriz polifásica $\mathbf{P}(z^3)$ y exprese los filtros de análisis en la forma (11.12.11).

(b) Determine los filtros de síntesis $G_0(z)$, $G_1(z)$ y $G_2(z)$ que dan lugar a una reconstrucción perfecta.

(c) Dibuje el banco de filtros QMF de tres canales que emplea filtros polifásicos en las secciones de análisis y de síntesis.

11.31 *Análisis en frecuencia* Considere el sistema de la Figura P.11.31(a).

(a) Dibuje el espectro de la señal $y(n) = y_R(n) + jy_I(n)$ si la señal de entrada $x(n)$ tiene el espectro mostrado en la Figura P.11.31(b).

(b) Suponga que estamos interesados en el análisis de las frecuencias de la banda $f_0 \leq f \leq f_0 + \Delta f$, donde $f_0 = \pi/6$ y $\Delta f = \pi/3$. Determine la frecuencia de corte de un filtro paso bajo y el factor de diezmado D necesarios para mantener la información contenida en esta banda de frecuencias.

(c) Suponga que

$$x(n) = \sum_{k=0}^{p-1} \left(1 - \frac{k}{2p}\right) \cos 2\pi f_k n$$

donde $p = 40$ y $f_k = k/p$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$. Calcule y dibuje la DFT de 1024 puntos de $x(n)$.

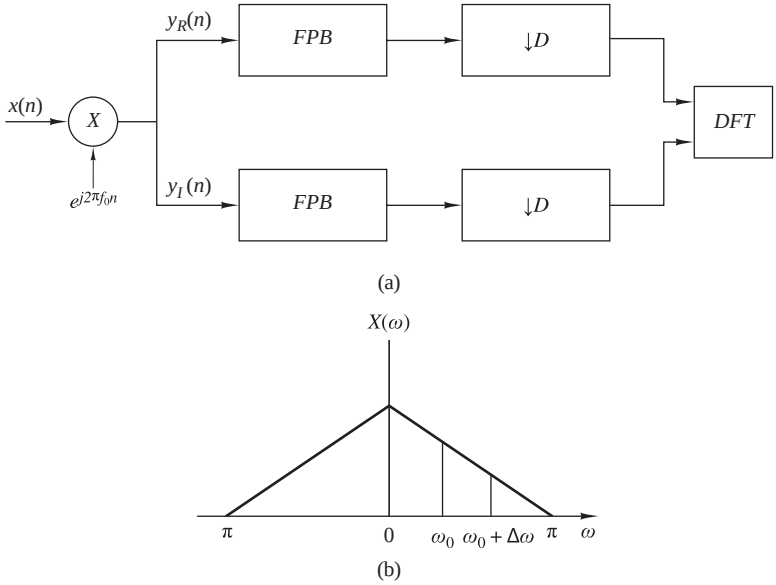


Figura P.11.31.

(d) Repita el apartado (b) para la señal $x(n)$ dada en el apartado (c) utilizando un filtro FIR paso bajo y de fase lineal diseñado adecuadamente para determinar la señal diezmada $s(n) = s_R(n) + js_I(n)$.

(e) Calcule la DFT de 1024 puntos de $s(n)$ e investigue si ha obtenido los resultados esperados.

12

Predicción lineal y filtros lineales óptimos

El diseño de filtros para realizar estimaciones de señales es un problema que frecuentemente surge en el diseño de sistemas de comunicaciones, sistemas de control, en geofísica y en muchas otras aplicaciones y disciplinas. En este capítulo, vamos a abordar el problema de diseñar el filtro óptimo desde un punto de vista estadístico. Los filtros se restringen a los lineales y los criterios de optimización se basan en la minimización del error cuadrático medio. En consecuencia, sólo son necesarios los parámetros estadísticos de segundo orden (la autocorrelación y la correlación cruzada) de un proceso estacionario para poder determinar los filtros óptimos.

Dentro de este tratamiento se incluye el diseño de filtros óptimos para predicción lineal. La predicción lineal es un tema especialmente importante en el tratamiento digital de señales, con aplicaciones en una amplia variedad de áreas, como por ejemplo el tratamiento de señales de voz, el tratamiento de imágenes y la supresión del ruido en sistemas de comunicaciones. Como podremos ver, la determinación del filtro lineal óptimo para predicción requiere la solución de un conjunto de ecuaciones lineales que tienen cierta propiedad de simetría especial. Para resolver estas ecuaciones lineales, describimos dos algoritmos, el algortimo de Levinson–Durbin y el algoritmo de Schur, el cual proporciona la solución para las ecuaciones a través de procedimientos de cálculo eficientes que aplican las propiedades de simetría.

La última sección del capítulo se ocupa de una importante clase de filtros óptimos conocida como filtros de Wiener. El uso de estos filtros está muy extendido en muchas aplicaciones que implican la estimación de señales distorsionadas a causa de ruido aditivo.

12.1 Señales aleatorias, funciones de correlación y espectros de potencia

Vamos a comenzar con un breve repaso de la caracterización de las señales aleatorias en función de medias estadísticas tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia. Suponemos que el lector posee ciertos conocimientos sobre teoría de la probabilidad y procesos aleatorios en el nivel que se proporciona en los textos de Helstrom (1990), Peebles (1987) y Stark y Woods (1994).

12.1.1 Procesos aleatorios

Muchos fenómenos físicos que pueden encontrarse en la naturaleza se caracterizan mejor utilizando parámetros estadísticos. Por ejemplo, los fenómenos metereológicos como la temperatura y la presión del aire fluctúan aleatoriamente como una función del tiempo. Las tensiones de ruido térmico generadas en las resistencias de los dispositivos electrónicos, como por ejemplo un receptor de radio o de televisión, también son fenómenos que fluctúan aleatoriamente. Estos son sólo unos pocos ejemplos de señales aleatorias. Tales señales suelen modelarse como señales de energía y duración infinitas.

Suponga que tomamos el conjunto de formas de onda correspondientes a la temperatura del aire en diferentes ciudades del mundo. Para cada ciudad, disponemos de la correspondiente forma de onda, que es una función del tiempo como se ilustra en la Figura 12.1.1. El conjunto de todas las posibles formas de onda se denomina *conjunto* de funciones temporales o, lo que es lo mismo, *proceso aleatorio*. La forma de onda para la temeperatura en cualquier ciudad es una *realización* o *función muestra* del proceso aleatorio.

Del mismo modo, la tensión de ruido térmico generada en una resistencia es una realización o función muestra del proceso aleatorio que consta de todas las formas de onda de tensión de ruido generadas por el conjunto de todas las resistencias.

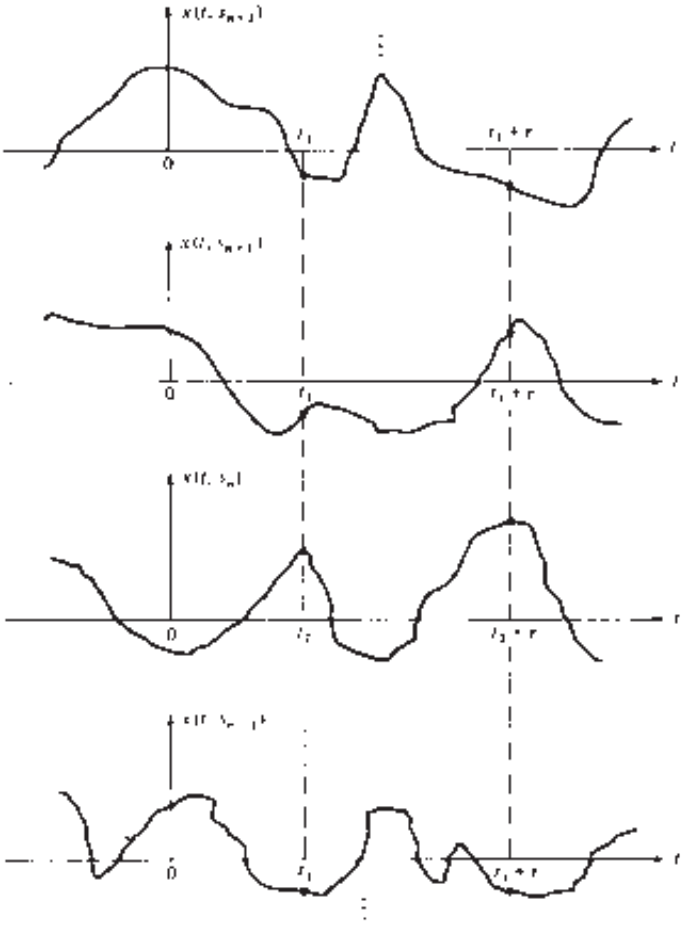


Figura 12.1.1. Funciones de ejemplo de un proceso aleatorio.

El conjunto de todas las posibles formas de onda de ruido de un proceso aleatorio se designa como $X(t,S)$, donde t representa el índice de tiempo y S representa el conjunto (espacio de muestras) de todas las posibles funciones de muestra. Una única forma de onda del conjunto se designa por $x(t,s)$. Normalmente, no emplearemos la variables s (o S) por hacer más cómoda la notación, de modo que el proceso alaetorio se designará como $X(t)$ y una única realización se designará mediante $x(t)$.

Una vez definido un proceso aleatorio $X(t)$ como un conjunto de funciones muestra, consideremos los valores del proceso para cualquier conjunto de instantes de tiempo $t_1 > t_2 > \cdots > t_n$, donde n es cualquier entero positivo. En general, las muestras $X_{t_i} \equiv x(t_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ son n variables aleatorias caracterizadas estadísticamente por su función de densidad de probabilidad conjunta designada como $p(x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots, x_{t_n})$ para cualquier n.

12.1.2 Procesos aleatorios estacionarios

Suponga que disponemos de n muestras del proceso aleatorio $X(t)$ en $t = t_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, y de otro conjunto de n muestras desplazadas en el tiempo respecto del primer conjunto una cantidad τ. Luego el segundo conjunto de muestras es $X_{t_i+\tau} \equiv X(t_i + \tau)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, como se muestra en la Figura 12.1.1. Este segundo conjunto de n variables aleatorias se caracteriza por su función de densidad de probabilidad conjunta $p(x_{t_i+\tau}, \ldots, x_{t_n+\tau})$. Las funciones de densidad de probabilidad conjuntas de los dos conjuntos de variables aleatorias pueden o no ser idénticas. Si son idénticas, entonces

$$p(x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots, x_{t_n}) = p(x_{t_1+\tau}, x_{t_2+\tau}, \ldots, x_{t_n+\tau}) \tag{12.1.1}$$

para todo τ y todo n, y se dice que el proceso aleatorio es *estacionario en sentido estricto*. En otras palabras, las propiedades estadísticas de un proceso aleatorio estacionario son invariantes ante una translación del eje de tiempos. Por el contrario, si las funciones de densidad de probabilidad conjuntas son diferentes, el proceso aleatorio no será estacionario.

12.1.3 Promedios estadísticos

Consideremos un proceso aleatorio $X(t)$ muestreado en los instantes de tiempo $t = t_i$. Así, $X(t_i)$ es una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad es $p(x_{t_i})$. El *momento* de primer orden de la variable aleatoria se define como el *valor esperado* de $X^l(t_i)$, es decir,

$$E(X_{t_i}^l) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{t_i}^l p(x_{t_i}) dx_{t_i} \tag{12.1.2}$$

En general, el valor del momento de primer orden depende del instante de tiempo t_i, si la función de densidad de probabilidad de X_{t_i} depende de t_i. Sin embargo, cuando el proceso es estacionario, $p(x_{t_i+\tau}) = p(x_{t_i})$ para todo τ. Luego la función de densidad de probabilidad es independiente del tiempo y, en consecuencia, el momento de primer orden es independiente del tiempo (una constante).

Consideremos ahora las dos variables aleatorias $X_{t_i} = X(t_i)$, $i = 1, 2$, correspondientes a las muestras de $X(t)$ tomadas en $t = t_1$ y $t = t_2$. La correlación estadística entre X_{t_1} y X_{t_2} se mide mediante el momento conjunto

$$E(X_{t_1} X_{t_2}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_{t_1} x_{t_2} p(x_{t_1} x_{t_2})\, dx_1\, dx_2 \tag{12.1.3}$$

Dado que el momento conjunto depende de los instantes de tiempo t_1 y t_2, se designa como $\gamma_{xx}(t_1, t_2)$ y se denomina *función de autocorrelación* del proceso aleatorio. Cuando el proceso $X(t)$ es estacionario, la función de densidad de probabilidad conjunta de la pareja (X_{t_1}, X_{t_2}) es idéntica a la función de densidad de probabilidad conjunta de la pareja $(X_{t_1+\tau}, X_{t_2+\tau})$ para cualquier τ arbitraria. Esto implica que la función de autocorrelación

$X(t)$ depende de la diferencia de tiempos $t_1 - t_2 = \tau$. Por tanto, para un proceso aleatorio real estacionario, la función de autocorrelación es

$$\gamma_{xx}(\tau) = E[X_{t_1+\tau} X_{t_1}] \tag{12.1.4}$$

Por otro lado,

$$\gamma_{xx}(-\tau) = E(X_{t_1-\tau} X_{t_1}) = E(X_{t_1'} X_{t_1'+\tau}) = \gamma_{xx}(\tau) \tag{12.1.5}$$

Por tanto, $\gamma_{xx}(\tau)$ es una función par. Observe también que $\gamma_{xx}(0) = E(X_{t_1}^2)$ es la *potencia media* del proceso aleatorio.

Existen procesos no estacionarios con la propiedad de que el valor medio del proceso es una constante y la función de autocorrelación satisface la propiedad $\gamma_{xx}(t_1, t_2) = \gamma_{xx}(t_1 - t_2)$. Un proceso así se dice que es *estacionario en sentido amplio*. Evidentemente, la estacionariedad en sentido amplio es una condición menos restrictiva que la condición de estacionariedad en sentido estricto. En nuestro estudio sólo vamos a requerir que los procesos sean estacionarios en sentido amplio.

Relacionada con la función de autocorrelación tenemos la autocovarianza , que se define como

$$\begin{aligned} c_{xx}(t_1,t_2) &= E\{[X_{t_1} - m(t_1)][X_{t_2} - m(t_2)]\} \\ &= \gamma_{xx}(t_1,t_2) - m(t_1)m(t_2) \end{aligned} \tag{12.1.6}$$

donde $m(t_1) = E(X_{t_1})$ y $m(t_2) = E(X_{t_2})$ son los valores medios de X_{t_1} y X_{t_2}, respectivamente. Cuando el proceso es estacionario,

$$c_{xx}(t_1,t_2) = c_{xx}(t_1 - t_2) = c_{xx}(\tau) = \gamma_{xx}(\tau) - m_x^2 \tag{12.1.7}$$

donde $\tau = t_1 - t_2$. Además, la varianza del proceso es $\sigma_x^2 = c_{xx}(0) = \gamma_{xx}(0) - m_x^2$.

12.1.4 Promedios estadísticos para procesos aleatorios conjuntos

Sean $X(t)$ e $Y(t)$ dos procesos aleatorios y sean $X_{t_i} \equiv X(t_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, e $Y_{t_j'} \equiv Y(t_j')$, $j = 1, 2, \ldots, m$, las variables aleatorias en los instantes $t_1 > t_2 > \cdots > t_n$ y $t_1' > t_2' > \cdots > t_m'$, respectivamente. Los dos conjuntos de variables aleatorias se caracterizan estadísticamente por la función de densidad de probabilidad conjunta

$$p(x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots, x_{t_n}, y_{t_1'}, y_{t_2'}, \ldots, y_{t_m'})$$

para cualquier conjunto de instantes de tiempo $\{t_i\}$ y $\{t_j'\}$ y para cualquier valor entero positivo de m y n.

La *función de correlación cruzada* de $X(t)$ e $Y(t)$, designada como $\gamma_{xy}(t_1, t_2)$, se define como el momento conjunto

$$\gamma_{xy}(t_1,t_2) \equiv E(X_{t_1} Y_{t_2}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_{t_1} y_{t_2} p(x_{t_1}, y_{t_2}) dx_{t_1} dy_{t_2} \tag{12.1.8}$$

y la covarianza cruzada es

$$c_{xy}(t_1,t_2) = \gamma_{xy}(t_1,t_2) - m_x(t_1)m_y(t_2) \tag{12.1.9}$$

Cuando los procesos aleatorios son conjunta e individualmente estacionarios, tenemos $\gamma_{xy}(t_1, t_2) = \gamma_{xy}(t_1 - t_2)$ y $c_{xy}(t_1, t_2) = c_{xy}(t_1 - t_2)$. En este caso,

$$\gamma_{xy}(-\tau) = E(X_{t_1} Y_{t_1+\tau}) = E(X_{t_1'-\tau} Y_{t_1'}) = \gamma_{yx}(\tau) \tag{12.1.10}$$

Los procesos aleatorios $X(t)$ e $Y(t)$ se dice que son estadísticamente independientes si y sólo si

$$p(x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots, x_{t_n}, y_{t_1'}, y_{t_2'}, \ldots, y_{t_m'}) = p(x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}) p(y_{t_1'}, \ldots, y_{t_m'})$$

para todas las elecciones de t_i, t_i' y para todos los enteros positivos n y m. Se dice que los procesos son incorrelados si

$$\gamma_{xy}(t_1,t_2) = E(X_{t_1})E(Y_{t_2}) \tag{12.1.11}$$

de modo que $c_{xy}(t_1, t_2) = 0$.

Un proceso aleatorio complejo $Z(t)$ se define como

$$Z(t) = X(t) + jY(t) \tag{12.1.12}$$

donde $X(t)$ e $Y(t)$ son procesos aleatorios. La función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias conjugadas $Z_{t_i} \equiv Z(t_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ queda determinada por la función de densidad de probabilidad conjunta de las componentes (X_{t_i}, Y_{t_i}), $i = 1, 2, \ldots, n$. Luego la función de densidad de probabilidad que caracteriza Z_{t_i}, $i = 1, 2, \ldots, n$ es

$$p(x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots, x_{t_n}, y_{t_1}, y_{t_2}, \ldots, y_{t_n})$$

Un proceso aleatorio complejo $Z(t)$ puede encontrarse en la representación de las componentes en fase y en cuadratura del equivalente paso bajo de una señal aleatoria de banda estrecha o de ruido. Una característica importante de un proceso así es su función de autocorrelación, la cual se define como

$$\begin{aligned}\gamma_{zz}(t_1,t_2) &= E(Z_{t_1}Z_{t_2}^*)\\ &= E[(X_{t_1} + jY_{t_1})(X_{t_2} - jY_{t_2})]\\ &= \gamma_{xx}(t_1,t_2) + \gamma_{yy}(t_1,t_2) + j[\gamma_{yx}(t_1,t_2) - \gamma_{xy}(t_1,t_2)]\end{aligned} \tag{12.1.13}$$

Cuando los procesos aleatorios $X(t)$ e $Y(t)$ son conjunta e individualmente estacionarios, la función de autocorrelación de $Z(t)$ se convierte en

$$\gamma_{zz}(t_1,t_2) = \gamma_{zz}(t_1 - t_2) = \gamma_{zz}(\tau)$$

donde $\tau = t_1 - t_2$. El conjugado complejo de (12.1.13) es

$$\gamma_{zz}^*(\tau) = E(Z_{t_1}^* Z_{t_1-\tau}) = \gamma_{zz}(-\tau) \tag{12.1.14}$$

Supongamos ahora que $Z(t) = X(t) + jY(t)$ y $W(t) = U(t) + jV(t)$ son dos procesos aleatorios complejos. Su función de correlación cruzada se define como

$$\begin{aligned}\gamma_{zw}(t_1,t_2) &= E(Z_{t_1}W_{t_2}^*)\\ &= E[(X_{t_1} + jY_{t_1})(U_{t_2} - jV_{t_2})]\\ &= \gamma_{xu}(t_1,t_2) + \gamma_{yv}(t_1,t_2) + j[\gamma_{yu}(t_1,t_2) - \gamma_{xv}(t_1,t_2)]\end{aligned} \tag{12.1.15}$$

Cuando $X(t)$, $Y(t)$, $U(t)$ y $V(t)$ son estacionarios dos a dos, las funciones de correlación cruzada dadas por (12.1.15) se transforman en funciones de la diferencia temporal $\tau = t_1 - t_2$. Además, tenemos que

$$\gamma_{zw}^*(\tau) = E(Z_{t_1}^* W_{t_1-\tau}) = E(Z_{t_1+\tau}^* W_{t_1}) = \gamma_{wz}(-\tau) \tag{12.1.16}$$

12.1.5 Espectro de densidad de potencia

Un proceso aleatorio estacionario es una señal de energía infinita y por tanto su transformada de Fourier no existe. La característica espectral de un proceso aleatorio se obtiene de acuerdo con el teorema de Wiener–Khintchine, calculando la transformada de Fourier de la función de autocorrelación. Es decir, la distribución de potencia con la frecuencia está dada por la función

$$\Gamma_{xx}(F) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}(\tau) e^{-j2\pi F\tau} d\tau \tag{12.1.17}$$

La transformada inversa de Fourier está dada por

$$\gamma_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{xx}(F) e^{j2\pi F\tau} dF \tag{12.1.18}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \gamma_{xx}(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{xx}(F) dF \\ &= E(X_t^2) \geq 0 \end{aligned} \tag{12.1.19}$$

Puesto que $E(X_t^2) = \gamma_{xx}(0)$ representa la potencia media del proceso aleatorio, que es el área bajo $\Gamma_{xx}(F)$, se deduce que $\Gamma_{xx}(F)$ es la distribución de potencia como una función de la frecuencia. Por esta razón, $\Gamma_{xx}(F)$ se conoce como *espectro de densidad de potencia* del proceso aleatorio.

Si el proceso aleatorio es real, $\gamma_{xx}(\tau)$ es real y par, y por tanto, $\Gamma_{xx}(F)$ es real y par. Si el proceso aleatorio es complejo, $\gamma_{xx}(\tau) = \gamma_{xx}^*(-\tau)$ y, por tanto

$$\begin{aligned} \Gamma_{xx}^*(F) &= \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}^*(\tau) e^{j2\pi F\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}^*(-\tau) e^{-j2\pi F\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}(\tau) e^{-j2\pi F\tau} d\tau = \Gamma_{xx}(F) \end{aligned}$$

Por tanto, $\Gamma_{xx}(F)$ siempre es real.

La definición del espectro de densidad de potencia puede extenderse a dos procesos aleatorios conjuntamente estacioarios $X(t)$ e $Y(t)$, que tienen una función de correlación cruzada $\gamma_{xy}(\tau)$. La transformada de Fourier de $\gamma_{xy}(\tau)$ es

$$\Gamma_{xy}(F) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{xy}(\tau) e^{-j2\pi F\tau} d\tau \tag{12.1.20}$$

que es el *espectro de densidad de potencia cruzada*. Puede demostrarse fácilmente que $\Gamma_{xy}^*(F) = \Gamma_{yx}(-F)$. Para procesos aleatorios reales, la condición es $\Gamma_{yx}(F) = \Gamma_{xy}(-F)$.

12.1.6 Señales aleatorias discretas en el tiempo

Esta caracterización de señales aleatorias continuas en el tiempo puede trasladarse fácilmente a señales discretas en el tiempo. Tales señales se obtienen normalmente muestreando uniformemente un proceso aleatorio continuo en el tiempo.

Un proceso aleatorio discreto en el tiempo $X(n)$ consta de un conjunto de secuencias muestra $x(n)$. Las propiedades estadísticas de $X(n)$ son similares a la caracterización de $X(t)$, con la restricción de que n es ahora una variable entera (tiempo). Más específicamente, establezcamos ahora la forma para los momentos que utilizamos en este texto.

El momento de primer orden de $X(n)$ se define como

$$E(X_n^l) = \int_{-\infty}^{\infty} x_n^l p(x_n) dx_n \tag{12.1.21}$$

y la secuencia de autocorrelación es

$$\gamma_{xx}(n,k) = E(X_n X_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_n x_k p(x_n, x_k) dx_n dx_k \tag{12.1.22}$$

De forma similar, la autocovarianza es

$$c_{xx}(n,k) = \gamma_{xx}(n,k) - E(X_n)E(X_k) \tag{12.1.23}$$

Para un proceso estacionario, tenemos las formas especiales $(m = n-k)$

$$\begin{aligned} \gamma_{xx}(n-k) &= \gamma_{xx}(m) \\ c_{xx}(n-k) &= c_{xx}(m) = \gamma_{xx}(m) - m_x^2 \end{aligned} \tag{12.1.24}$$

donde $m_x = E(X_n)$ es la media del proceso aleatorio. La varianza se define como $\sigma^2 = c_{xx}(0) = \gamma_{xx}(0) - m_x^2$.

Para un proceso estacionario complejo $Z(n) = X(n) + jY(n)$, tenemos

$$\gamma_{zz}(m) = \gamma_{xx}(m) + \gamma_{yy}(m) + j[\gamma_{yx}(m) - \gamma_{xy}(m)] \tag{12.1.25}$$

y la correlación cruzada de dos secuencias complejas es

$$\gamma_{zw}(m) = \gamma_{xu}(m) + \gamma_{yv}(m) + j[\gamma_{yu}(m) - \gamma_{xv}(m)] \tag{12.1.26}$$

Como en el caso de un proceso aleatorio continuo en el tiempo, un proceso aleatorio discreto en el tiempo tiene energía infinita pero una potencia media finita y está dada por

$$E(X_n^2) = \gamma_{xx}(0) \tag{12.1.27}$$

Utilizando el teorema de Wiener–Khintchine, obtenemos el espectro de densidad de potencia del proceso aleatorio discreto en el tiempo calculando la transformada de Fourier de la autocorrelación $\gamma_{xx}(m)$, es decir,

$$\Gamma_{xx}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}(m) e^{-j2\pi fm} \tag{12.1.28}$$

La transformada inversa es

$$\gamma_{xx}(m) = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(f) e^{j2\pi fm} df \tag{12.1.29}$$

Observe que la potencia media es

$$\gamma_{xx}(0) = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(f) df \tag{12.1.30}$$

de modo que $\Gamma_{xx}(f)$ es la distribución de potencia en función de la frecuencia, es decir, $\Gamma_{xx}(f)$ es el espectro de densidad de potencia del proceso aleatorio $X(n)$. Las propiedades que hemos establecido para $\Gamma_{xx}(F)$ también se cumplen para $\Gamma_{xx}(f)$.

12.1.7 Promedios temporales para un proceso aleatorio discreto en el tiempo

Aunque hemos caracterizado un proceso aleatorio en función de promedios estadísticos, como la media y la autocorrelación, en la práctica, normalmente dispondremos de una sola realización del proceso aleatorio. Consideremos el problema de obtener los promedios del proceso aleatorio a partir de una sola realización. Para conseguir esto, el proceso aleatorio tiene que ser *ergódico*.

Por definición, un proceso aleatorio $X(n)$ es ergódico si, con probabilidad 1, todos los promedios estadísticos pueden determinarse a partir de una sola función muestra del proceso. En efecto, el proceso aleatorio es ergódico si los promedios temporales obtenidos a partir de una sola realización son iguales a los promedios estadísticos

del conjunto. Bajo esta condición, podemos intentar estimar los promedios del conjunto utilizando promedios temporales de una sola realización.

Para ilustrar este punto, consideremos la estimación de la media y de la autocorrelación del proceso aleatorio a partir de una sola realización $x(n)$. Como sólo estamos interesados en estos dos momentos, definimos la ergodicidad con respecto a estos parámetros. Para obtener información detallada sobre los requisitos de ergodicidad respecto de la media y ergodicidad respecto de la autocorrelación que se proporcionan a continuación, el lector puede consultar el libro de Papoulis (1984).

12.1.8 Procesos ergódicos respecto de la media

Dado un proceso aleatorio estacionario $X(n)$ con media

$$m_x = E(X_n)$$

definimos la *media temporal* como

$$\hat{m}_x = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n) \tag{12.1.31}$$

En general, interpretamos el valor de $\hat{m}_x$ dado en (12.1.31) como un estimado de la media estadística, cuyo valor variará con las diferentes realizaciones del proceso aleatorio. Dado que $\hat{m}_x$ es una variable aleatoria con una función de densidad de probabilidad $p(\hat{m}_x)$, calculamos el valor esperado de $\hat{m}_x$ sobre todas las realizaciones posibles de $X(n)$. Como el sumatorio y la esperanza son operaciones lineales, podemos intercambiarlas, de modo que

$$E(\hat{m}_x) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} E[x(n)] = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} m_x = m_x \tag{12.1.32}$$

Dado que el valor medio de la estimación es igual a la media estadística, decimos que el estimado $\hat{m}_x$ no está polarizado.

A continuación calculamos la varianza de $\hat{m}_x$. Tenemos

$$\mathrm{var}(\hat{m}_x) = E(|\hat{m}_x|^2) - |m_x|^2$$

Pero

$$\begin{aligned} E(|\hat{m}_x|^2) &= \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{n=-N}^{N} \sum_{k=-N}^{N} E[x^*(n)x(k)] \\ &= \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{n=-N}^{N} \sum_{k=-N}^{N} \gamma_{xx}(k-n) \\ &= \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|m|}{2N+1}\right) \gamma_{xx}(m) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(\hat{m}_x) &= \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|m|}{2N+1}\right) \gamma_{xx} - |m_x|^2 \\ &= \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|m|}{2N+1}\right) c_{xx}(m) \end{aligned} \tag{12.1.33}$$

Si $\text{var}(m_x) \to 0$ cuando $N \to \infty$, el estimado converge con probabilidad 1 a la media estadística m_x. Por tanto, el proceso $X(n)$ es ergódico respecto de la media si

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|m|}{2N+1}\right) c_{xx}(m) = 0 \tag{12.1.34}$$

Bajo esta condición, el estimado $\hat{m}_x$ en el límite cuando $N \to \infty$ se hace igual a la media estadística, es decir,

$$m_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n) \tag{12.1.35}$$

Luego la media temporal en el límite cuando $N \to \infty$, es igual a la media del conjunto.

Una condición suficiente para (12.1.34) es que si

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_{xx}(m)| < \infty \tag{12.1.36}$$

lo que implica que $c_{xx}(m) \to 0$ cuando $m \to \infty$. Esta condición se cumple para la mayoría de los procesos de media cero que pueden encontrarse en el mundo real.

12.1.9 Procesos ergódicos respecto de la correlación

Consideremos ahora el estimado de la autocorrelación $\gamma_{xx}(m)$ a partir de una sola realización del proceso. Continuando con la notación anterior, designamos el estimado (en general, para una señal compleja) como

$$r_{xx}(m) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x^*(n)x(n+m) \tag{12.1.37}$$

De nuevo, consideremos $r_{xx}(m)$ como una variable aleatoria para cualquier m dado, ya que es una función de una realización particular. El valor esperado (valor medio de todas las realizaciones) es

$$\begin{aligned} E[r_{xx}(m)] &= \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} E[x^*(n)x(n+m)] \\ &= \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \gamma_{xx}(m) = \gamma_{xx}(m) \end{aligned} \tag{12.1.38}$$

Por tanto, el valor esperado de la autocorrelación temporal es igual a la media estadística. Por tanto, tenemos un estimado no polarizado de $\gamma_{xx}(m)$.

Para determinar la varianza del estimado $r_{xx}(m)$, calculamos el valor esperado de $|r_{xx}(m)|^2$ y restamos el cuadrado del valor medio. Así

$$\text{var}[r_{xx}(m)] = E[|r_{xx}(m)|^2] - |\gamma_{xx}(m)|^2 \tag{12.1.39}$$

Pero

$$E[|r_{xx}(m)|^2] = \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{n=-N}^{N} \sum_{k=-N}^{N} E[x^*(n)x(n+m)x(k)x^*(k+m)] \tag{12.1.40}$$

El valor esperado del término $x^*(n)x(n+m)x(k)x^*(k+m)$ es sólo la autocorrelación de un proceso aleatorio definido como

$$v_m(n) = x^*(n)x(n+m)$$

Puesto que (12.1.40) puede escribirse como

$$\begin{aligned} E[|r_{xx}(m)|^2] &= \frac{1}{(2N+1)^2}\sum_{n=-N}^{N}\sum_{k=-N}^{N}\gamma_{vv}^{(m)}(n-k) \\ &= \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-2N}^{2N}\left(1-\frac{|n|}{2N+1}\right)\gamma_{vv}^{(m)}(n) \end{aligned} \tag{12.1.41}$$

y la varianza es

$$\operatorname{var}[r_{xx}(m)] = \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-2N}^{2N}\left(1-\frac{|n|}{2N+1}\right)\gamma_{vv}^{(m)}(n) - |\gamma_{xx}(m)|^2 \tag{12.1.42}$$

Si $\operatorname{var}[r_{xx}(m)] \to 0$ cuando $N \to \infty$, el estimado $r_{xx}(m)$ converge con probabilidad 1 a la autocorrelación estadística $\gamma_{xx}(m)$. Bajo estas condiciones, el proceso es ergódico respecto de la correlación y la correlación temporal es idéntica a la media estadística, es decir,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}x^*(n)x(n+m) = \gamma_{xx}(m) \tag{12.1.43}$$

En nuestro estudio de las señales aleatorias, suponemos que los procesos aletorios son ergódicos respecto de la media y ergódicos respecto de la correlación, por lo que podemos trabajar con promedios temporales de la media y la autocorrelación obtenidos a partir de una sola realización del proceso.

12.2 Representación de innovaciones de un proceso aleatorio estacionario

En esta sección demostramos que un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio puede representarse como la salida de un sistema lineal causalmente invertible y causal excitado por un proceso de ruido blanco. La condición de que el sistema es causalmente invertible también nos permite representar el proceso aleatorio estacionario en sentido amplio mediante la salida del sistema inverso, que es un proceso de ruido blanco.

Considere un proceso estacionario en sentido amplio $\{x(n)\}$ con autocorrelación $\{\gamma_{xx}(m)\}$ y densidad espectral de potencia $\Gamma_{xx}(f)$, $|f| \le \frac{1}{2}$. Supongamos que $\Gamma_{xx}(f)$ es real y continua para todo $|f| \le \frac{1}{2}$. La transformada z de la autocorrelación $\{\gamma_{xx}(m)\}$ es

$$\Gamma_{xx}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\gamma_{xx}(m)z^{-m} \tag{12.2.1}$$

a partir de la cual obtenemos la densidad espectral de potencia evaluando $\Gamma_{xx}(z)$ sobre la circunferencia unidad [es decir, sustituyendo $z = \exp(j2\pi f)$].

Ahora suponemos que $\log\Gamma_{xx}(z)$ es analítica (posee derivadas de todos los órdenes) en una región anular del plano z que incluye la circunferencia unidad (es decir, $r_1 < |z| < r_2$ donde $r_1 < 1$ y $r_2 > 1$). Luego, $\log\Gamma_{xx}(z)$ se puede expandir en una serie de Laurent de la forma

$$\log\Gamma_{xx}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}v(m)z^{-m} \tag{12.2.2}$$

donde los $\{v(m)\}$ son los coeficientes de las series. Podemos interpretar $\{v(m)\}$ como la secuencia cuya transformada z es $V(z) = \log\Gamma_{xx}(z)$. Del mismo modo, podemos evaluar $\log\Gamma_{xx}(z)$ sobre la circunferencia unidad,

$$\log\Gamma_{xx}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}v(m)e^{-j2\pi fm} \tag{12.2.3}$$

de modo que los $\{v(m)\}$ son los coeficientes de Fourier de la expansión en serie de Fourier de la función periódica $\log \Gamma_{xx}(f)$. Por tanto,

$$v(m) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [\log \Gamma_{xx}(f)] e^{j2\pi fm}\, df, \qquad m = 0, \pm 1, \ldots \tag{12.2.4}$$

Observe que $v(m) = v(-m)$, ya que $\Gamma_{xx}(f)$ es una función real y par de f.

A partir de (12.2.2), se deduce que

$$\begin{aligned} \Gamma_{xx}(z) &= \exp\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} v(m) z^{-m}\right] \\ &= \sigma_w^2 H(z) H(z^{-1}) \end{aligned} \tag{12.2.5}$$

donde, por definición, $\sigma_w^2 = \exp[v(0)]$ y

$$H(z) = \exp\left[\sum_{m=1}^{\infty} v(m) z^{-m}\right], \qquad |z| > r_1 \tag{12.2.6}$$

Si se evalúa (12.2.5) sobre la circunferencia unidad, obtenemos la representación equivalente de la densidad espectral de potencia como

$$\Gamma_{xx}(f) = \sigma_w^2 |H(f)|^2 \tag{12.2.7}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \log \Gamma_{xx}(f) &= \log \sigma_w^2 + \log H(f) + \log H^*(f) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} v(m) e^{-j2\pi fm} \end{aligned}$$

A partir de la definición de $H(z)$ dada por (12.2.6), es evidente que la parte causal de la serie de Fourier de (12.2.3) está asociada con $H(z)$ y la parte anticausal está asociada con $H(z^{-1})$. Los coeficientes de la serie de Fourier $\{v(m)\}$ son los *coeficientes cepstrales* y la secuencia $\{v(m)\}$ es el cepstro de la secuencia $\{\gamma_{xx}(m)\}$, como se ha definido en la Sección 4.2.7.

El filtro con la función de sistema $H(z)$ dada por (12.2.6) es analítica en la región $|z| > r_1 < 1$. Por tanto, en esta región, tiene una expansión en serie de Taylor como un sistema causal de la forma

$$H(z) = \sum_{m=0}^{\infty} h(n) z^{-n} \tag{12.2.8}$$

La salida de este filtro en respuesta a un ruido blanco de entrada $w(n)$ con densidad espectral de potencia σ_w^2 es un proceso aleatorio estacionario $\{x(n)\}$ con densidad espectral de potencia $\Gamma_{xx}(f) = \sigma_w^2 |H(f)|^2$. En consecuencia, el proceso aleatorio estacionario $\{x(n)\}$ con densidad espectral de potencia $\Gamma_{xx}(f)$ puede transformarse en un proceso de ruido blanco pasando $\{x(n)\}$ a través de un filtro lineal con función de sistema $1/H(z)$. Este filtro se conoce como *filtro blanqueador de ruido*. Su salida, designada como $\{w(n)\}$ se denomina *proceso de innovaciones* asociado con el proceso aleatorio estacionario $\{x(n)\}$. Estas dos relaciones se ilustran en la Figura 12.2.1.

La representación del proceso estocástico estacionario $\{x(n)\}$ como la salida de un filtro IIR con la función de sistema $H(z)$ dada por (12.2.8) y excitado por una secuencia de ruido blanco $\{w(n)\}$ es conocida como *representación de Wold*.

12.2.1 Espectros de potencia racionales

Ahora vamos a centrarnos en el caso en el que la densidad espectral de potencia del proceso aleatorio estacionario $\{x(n)\}$ es una función racional, que se expresa como

$$\Gamma_{xx}(z) = \sigma_w^2 \frac{B(z)B(z^{-1})}{A(z)A(z^{-1})}, \qquad r_1 < |z| < r_2 \tag{12.2.9}$$

donde los polinomios $B(z)$ y $A(z)$ tienen raíces que caen dentro de la circunferencia unidad en el plano z. Luego el filtro lineal $H(z)$ para generar el proceso aleatorio $\{x(n)\}$ a partir de la secuencia de ruido blanco $\{w(n)\}$ también es racional y se expresa como

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{q} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}} \qquad |z| > r_1 \tag{12.2.10}$$

donde $\{b_k\}$ y $\{a_k\}$ son los coeficientes del filtro que determinan la ubicación de los ceros y los polos de $H(z)$, respectivamente. Luego $H(z)$ es causal, estable y de fase mínima. Su recíproco $1/H(z)$ también es un sistema lineal causal, estable y de fase mínima. Por tanto, el proceso aleatorio $\{x(n)\}$ representa únicamente las propiedades estadísticas del proceso de innovaciones $\{w(n)\}$, y viceversa.

Para el sistema lineal con la función de sistema racional $H(z)$ dada por (12.2.10), la salida $x(n)$ está relacionada con la entrada $w(n)$ por la ecuación en diferencias

$$x(n) + \sum_{k=1}^{p} a_k x(n-k) = \sum_{k=0}^{q} b_k w(n-k) \tag{12.2.11}$$

Vamos a distinguir tres casos específicos.

Proceso auto-regresivo (AR) $b_0 = 1$, $b_k = 0$, $k > 0$. En este caso, el filtro lineal $H(z) = 1/A(z)$ es un filtro de sólo polos y la ecuación en diferencias correspondiente a la relación de entrada–salida es

$$x(n) + \sum_{k=1}^{p} a_k x(n-k) = w(n) \tag{12.2.12}$$

A su vez, el filtro blanqueador de ruido para generar el proceso de innovaciones es un filtro de sólo ceros.

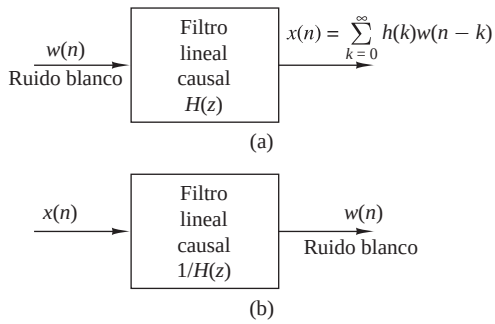


Figura 12.2.1. Filtros para generar (a) el proceso aleatorio $x(n)$ a partir de ruido blanco y (b) del filtro inverso.

Proceso de media móvil $a_k = 0$, $k \geq 1$. En este caso, el filtro lineal $H(z) = B(z)$ es un filtro de sólo ceros y la ecuación en diferencias correspondiente a la relación de entrada–salida es

$$x(n) = \sum_{k=0}^{q} b_k w(n-k) \tag{12.2.13}$$

El filtro blanqueador de ruido para el proceso de media móvil es un filtro de sólo polos.

Proceso de media móvil auto-regresivo (ARMA). En este caso, el filtro lineal $H(z) = B(z)/A(z)$ tiene polos y ceros finitos en el plano z y la correspondiente ecuación en diferencias dada por (12.2.11). El sistema inverso para generar el proceso de innovaciones a partir de $x(n)$ es también un sistema de polos y ceros de la forma $1/H(z) = A(z)/B(z)$.

12.2.2 Relaciones entre los parámetros del filtro y la autocorrelación

Si la densidad espectral de potencia del proceso aleatorio estacionario es una función racional, existe una relación básica entre la autocorrelación $\{\gamma_{xx}(m)\}$ y los parámetros $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ del filtro lineal $H(z)$ que genera el proceso filtrando el ruido blanco $w(n)$. Esta relación puede obtenerse multiplicando la ecuación en diferencias dada en (12.2.11) por $x^*(n-m)$ y tomando el valor esperado en ambos lados de la ecuación resultante. Así, tenemos

$$\begin{aligned} E[x(n)x^*(n-m)] &= -\sum_{k=1}^{p} a_k E[x(n-k)x^*(n-m)] \\ &\quad + \sum_{k=0}^{q} b_k E[w(n-k)x^*(n-m)] \end{aligned} \tag{12.2.14}$$

Por tanto,

$$\gamma_{xx}(m) = -\sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{xx}(m-k) + \sum_{k=0}^{q} b_k \gamma_{wx}(m-k) \tag{12.2.15}$$

donde $\gamma_{wx}(m)$ es la correlación cruzada entre $w(n)$ y $x(n)$.

La correlación cruzada $\gamma_{wx}(m)$ está relacionada con la respuesta al impulso del filtro. Es decir,

$$\begin{aligned} \gamma_{wx}(m) &= E[x^*(n)w(n+m)] \\ &= E\left[\sum_{k=0}^{\infty} h(k)w^*(n-k)w(n+m)\right] \\ &= \sigma_w^2 h(-m) \end{aligned} \tag{12.2.16}$$

donde, en el último paso, hemos utilizado el hecho de que la secuencia $w(n)$ es ruido blanco. Por tanto,

$$\gamma_{wx}(m) = \begin{cases} 0, & m > 0 \\ \sigma_w^2 h(-m), & m \leq 0 \end{cases} \tag{12.2.17}$$

Combinando (12.2.17) con (12.2.15), obtenemos la relación deseada:

$$\gamma_{xx}(m) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{xx}(m-k), & m > q \\ -\sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{xx}(m-k) + \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-m} h(k) b_{k+m}, & 0 \leq m \leq q \\ \gamma_{xx}^*(-m), & m < 0 \end{cases} \tag{12.2.18}$$

Esto representa una relación no lineal entre $\gamma_{xx}(m)$ y los parámetros $\{a_k\}$, $\{b_k\}$.

La relación dada en (12.2.18) se aplica, en general, a los procesos de media móvil auto-regresivos. En el caso de un proceso auto-regresivo, (12.2.18) se simplifica como sigue

$$\gamma_{xx}(m) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{xx}(m-k), & m > 0 \\ -\sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{xx}(m-k) + \sigma_w^2, & m = 0 \\ \gamma_{xx}^*(-m), & m < 0 \end{cases} \tag{12.2.19}$$

Por tanto, tenemos una relación lineal entre $\gamma_{xx}(m)$ y los parámetros $\{a_k\}$. Estas ecuaciones, conocidas como ecuaciones de *Yule–Walker*, pueden expresarse en forma matricial como sigue

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}(-1) & \gamma_{xx}(-2) & \cdots & \gamma_{xx}(-p) \\ \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}(-1) & \cdots & \gamma_{xx}(-p+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{xx}(p) & \gamma_{xx}(p-1) & \gamma_{xx}(p-2) & \cdots & \gamma_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_w^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12.2.20}$$

Esta matriz de correlación tiene la propiedad de simetría de Toeplitz, y por tanto puede invertirse de forma eficiente utilizando los algoritmos descritos en la Sección 12.4.

Por último, haciendo $a_k = 0$, $1 \le k \le p$ y $h(k) = b_k$, $0 \le k \le q$, en (12.2.18), obtenemos la relación para la autocorrelación en el caso de un proceso de media móvil, a saber

$$\gamma_{xx}(m) = \begin{cases} \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q} b_k b_{k+m}, & 0 \le m \le q \\ 0, & m > q \\ \gamma_{xx}^*(-m), & m < 0 \end{cases} \tag{12.2.21}$$

12.3 Predicción lineal directa e inversa

La predicción lineal es un tema importante en el tratamiento digital de señales de muchas aplicaciones prácticas. En esta sección vamos a considerar el problema de predecir linealmente el valor de un proceso aleatorio estacionario en un instante de tiempo anterior o posterior. Esta formulación lleva a las estructuras de filtros en celosía y a algunas interesantes conexiones con los modelos de señales paramétricos.

12.3.1 Predicción lineal directa

Comencemos por el problema de predecir un valor futuro (predicción directa) de un proceso aleatorio estacionario a partir de la observación de los valores pasados del proceso. En particular, consideremos el *predictor lineal directo de una muestra*, que forma la predicción del valor $x(n)$ mediante una combinación lineal ponderada de los valores pasados $x(n-1), x(n-2), \ldots, x(n-p)$. Así, el valor linealmente predicho de $x(n)$ es

$$\hat{x}(n) = -\sum_{k=1}^{p} a_p(k) x(n-k) \tag{12.3.1}$$

donde los $\{-a_p(k)\}$ representan los pesos en la combinación lineal. Estos pesos son los *coeficientes de predicción* del predictor lineal directo de una muestra de *orden p*. El signo negativo de la definición de $x(n)$ se usa por comodidad matemática y conforme a las prácticas actuales de la literatura técnica.

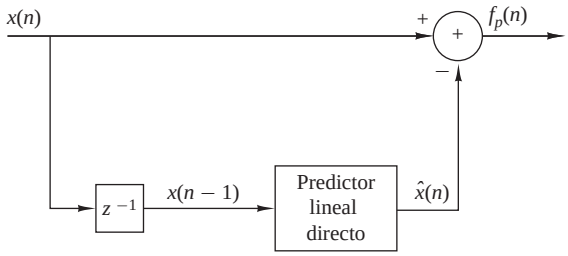


Figura 12.3.1. Predicción lineal directa.

La diferencia entre el valor de $x(n)$ y el valor predicho de $x(n)$ es el *error de predicción directo*, designado por $f_p(n)$:

$$\begin{aligned} f_p(n) &= x(n) - \hat{x}(n) \\ &= x(n) + \sum_{k=1}^{p} a_p(k)x(n-k) \end{aligned} \tag{12.3.2}$$

Podemos ver la predicción lineal como un equivalente al filtrado lineal donde el predictor se integra en el filtro lineal, como se muestra en la Figura 12.3.1. Se trata de un *filtro de error de predicción* con la secuencia de entrada $\{x(n)\}$ y la secuencia de salida $\{f_p(n)\}$. Una realización equivalente para el filtro de error de predicción se muestra en la Figura 12.3.2. Esta realización es un filtro FIR en la forma directa con la función de sistema

$$A_p(z) = \sum_{k=0}^{p} a_p(k)z^{-k} \tag{12.3.3}$$

donde, por definición, $a_p(0) = 1$.

Como se ha demostrado en la Sección 9.2.4, el filtro FIR en la forma directa es equivalente a un filtro en celosía de sólo ceros. El filtro en celosía generalmente se describe mediante el siguiente conjunto de *ecuaciones recursivas con respecto al orden*:

$$\begin{aligned} f_0(n) &= g_0(n) = x(n) \\ f_m(n) &= f_{m-1}(n) + K_m g_{m-1}(n-1) \quad m = 1, 2, \ldots, p \\ g_m(n) &= K_m^* f_{m-1}(n) + g_{m-1}(n-1) \quad m = 1, 2, \ldots, p \end{aligned} \tag{12.3.4}$$

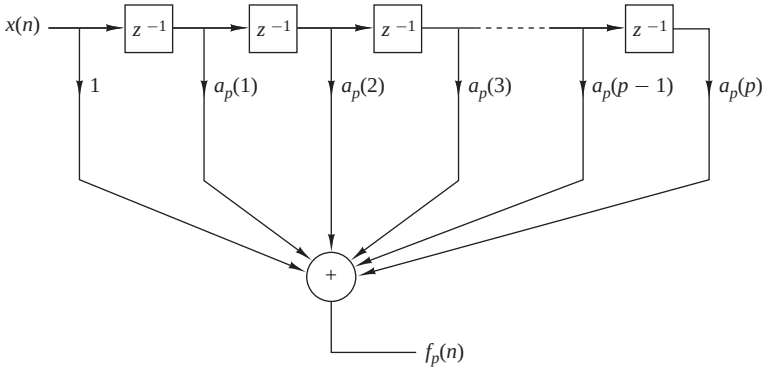


Figura 12.3.2. Filtro de error de predicción.

donde $\{K_m\}$ son los coeficientes de reflexión y $g_m(n)$ es el error de predicción inverso que se define en la siguiente sección. Observe que para datos complejos, el conjugado de K_m se utiliza en la ecuación para $g_m(n)$. La Figura 12.3.3 muestra el diagrama de bloques de un filtro en celosía de p etapas junto con una etapa típica que ilustra los cálculos dados por (12.3.4).

Como consecuencia de la equivalencia entre la forma directa del filtro FIR de error de predicción y el filtro FIR en celosía, la salida del filtro en celosía de p etapas se expresa como

$$f_p(n) = \sum_{k=0}^{p} a_p(k)x(n-k), \qquad a_p(0) = 1 \tag{12.3.5}$$

Dado que (12.3.5) es una suma de convolución, la transformada z es

$$F_p(z) = A_p(z)X(z) \tag{12.3.6}$$

o, lo que es equivalente,

$$A_p(z) = \frac{F_p(z)}{X(z)} = \frac{F_p(z)}{F_0(z)} \tag{12.3.7}$$

El valor cuadrático medio del error de predicción lineal directa $f_p(n)$ es

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_p^f &= E[|f_p(n)|^2] \\ &= \gamma_{xx}(0) + 2\Re\left[\sum_{k=1}^{p} a_p^*(k)\gamma_{xx}(k)\right] + \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} a_p^*(l)a_p(k)\gamma_{xx}(l-k) \end{aligned} \tag{12.3.8}$$

$\mathscr{E}_p^f$ es una función cuadrática de los coeficientes del predictor y su minimización lleva al conjunto de ecuaciones lineales

$$\gamma_{xx}(l) = -\sum_{k=1}^{p} a_p(k)\gamma_{xx}(l-k), \qquad l = 1, 2, \ldots, p \tag{12.3.9}$$

Éstas son las *ecuaciones normales* para los coeficientes del predictor lineal. El error de predicción cuadrático medio mínimo es simplemente

$$\text{mín}[\mathscr{E}_p^f] \equiv E_p^f = \gamma_{xx}(0) + \sum_{k=1}^{p} a_p(k)\gamma_{xx}(-k) \tag{12.3.10}$$

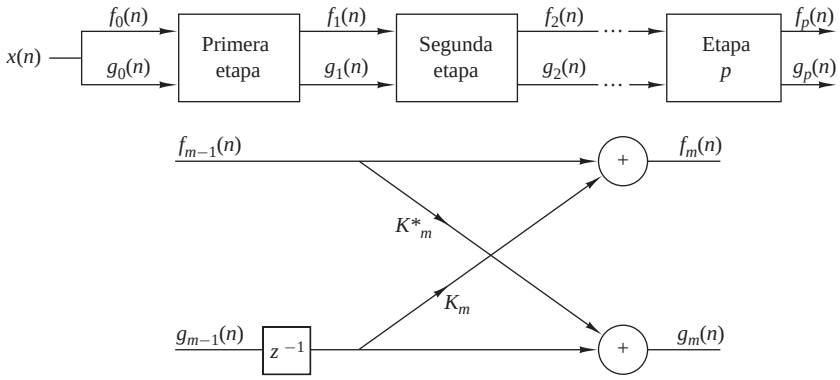


Figura 12.3.3. Filtro en celosía de p etapas.

En la siguiente sección ampliamos el desarrollo anterior al problema de predecir el valor de una serie temporal en la dirección opuesta, es decir, hacia atrás en el tiempo.

12.3.2 Predicción lineal inversa

Supongamos que tenemos la secuencia de datos $x(n), x(n-1), \ldots, x(n-p+1)$ de un proceso aleatorio estacionario y deseamos predecir el valor $x(n-p)$ del proceso. En este caso, empleamos un *predictor lineal inverso de una muestra* de orden p. Por tanto,

$$\hat{x}(n-p) = -\sum_{k=0}^{p-1} b_p(k)x(n-k) \tag{12.3.11}$$

La diferencia entre el valor $x(n-p)$ y el estimado $\hat{x}(n-p)$ es el *error de predicción inverso*, designado como $g_p(n)$:

$$\begin{aligned} g_p(n) &= x(n-p) + \sum_{k=0}^{p-1} b_p(k)x(n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{p} b_p(k)x(n-k), \qquad b_p(p) = 1 \end{aligned} \tag{12.3.12}$$

El predictor lineal inverso puede implementarse utilizando la estructura en forma directa del filtro FIR similar a la estructura mostrada en la Figura 12.3.1 o una estructura en celosía. La estructura en celosía mostrada en la Figura 12.3.3 proporciona el predictor lineal inverso, así como el predictor lineal directo.

Los coeficientes de ponderación del predictor lineal inverso son los complejos conjugados de los coeficientes del predictor lineal directo, pero en orden inverso. Así, tenemos

$$b_p(k) = a_p^*(p-k), \qquad k = 0, 1, \ldots, p \tag{12.3.13}$$

En el dominio z, la suma de convolución dada en (12.3.12), se transforma en

$$G_p(z) = B_p(z)X(z) \tag{12.3.14}$$

o, lo que es equivalente,

$$B_p(z) = \frac{G_p(z)}{X(z)} = \frac{G_p(z)}{G_0(z)} \tag{12.3.15}$$

donde $B_p(z)$ representa la función de sistema del filtro FIR con coeficientes $b_p(k)$.

Como $b_p(k) = a^*(p-k)$, $G_p(z)$ está relacionado con $A_p(z)$

$$\begin{aligned} B_p(z) &= \sum_{k=0}^{p} b_p(k)z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{p} a_p^*(p-k)z^{-k} \\ &= z^{-p}\sum_{k=0}^{p} a_p^*(k)z^{k} \\ &= z^{-p}A_p^*(z^{-1}) \end{aligned} \tag{12.3.16}$$

La relación (12.3.16) implica que los ceros del filtro FIR cuya función de sistema es $B_p(z)$ son simplemente los recíprocos (conjugados) de los ceros de $A_p(z)$. Por tanto, $B_p(z)$ es el *polinomio inverso* o recíproco de $A_p(z)$.

Ahora que hemos establecido estas interesantes relaciones entre los predictores directo e inverso de una sola muestra, volvamos sobre las ecuaciones en celosía recursivas dadas en (12.3.4) y transformémoslas al dominio z. Así, tenemos

$$\begin{aligned} F_0(z) &= G_0(z) = X(z) \\ F_m(z) &= F_{m-1}(z) + K_m z^{-1} G_{m-1}(z), \quad m = 1,2,\ldots,p \\ G_m(z) &= K_m^* F_{m-1}(z) + z^{-1} G_{m-1}(z), \quad m = 1,2,\ldots,p \end{aligned} \tag{12.3.17}$$

Si dividimos cada ecuación entre $X(z)$, obtenemos los resultados deseados en la forma

$$\begin{aligned} A_0(z) &= B_0(z) = 1 \\ A_m(z) &= A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z), \quad m = 1,2,\ldots,p \\ B_m(z) &= K_m^* A_{m-1}(z) + z^{-1} B_{m-1}(z), \quad m = 1,2,\ldots,p \end{aligned} \tag{12.3.18}$$

Así, un filtro en celosía se describe en el dominio z mediante la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} A_m(z) \\ B_m(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & K_m z^{-1} \\ K_m^* & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{m-1}(z) \\ B_{m-1}(z) \end{bmatrix} \tag{12.3.19}$$

Las relaciones dadas en (12.3.18) para $A_m(z)$ y $B_m(z)$ nos permiten obtener los coeficientes del filtro FIR en forma directa $\{a_m(k)\}$ a partir de los coeficientes de reflexión $\{K_m\}$, y viceversa. Estas relaciones se han proporcionado en la Sección 9.2.4 en las Ecuaciones (9.2.51) hasta (9.2.53).

La estructura en celosía con parámetros $K_1, K_2, \ldots, K_p$ corresponde a una clase de filtros FIR en la forma directa de orden p con funciones de sistema $A_1(z), A_2(z), \ldots, A_p(z)$. Es interesante observar que una caracterización de esta clase de filtros FIR de orden p en la forma directa requiere $p(p+1)/2$ coeficientes del filtro. En contraste, la caracterización en forma de celosía sólo requiere los p coeficientes de reflexión $\{K_i\}$. La razón de que la estructura en celosía proporcione una representación más compacta para la clase de filtros FIR de orden p es que la adición de etapas a la celosía no altera los parámetros de las etapas anteriores. Por otro lado, añadir una etapa p a una celosía con $(p-1)$ etapas es equivalente a incrementar la longitud de un filtro FIR en un coeficiente. El filtro FIR resultante con función de sistema $A_p(z)$ tiene coeficientes totalmente diferentes de los coeficientes del filtro FIR de orden inferior con una función de sistema $A_{p-1}(z)$.

La fórmula para determinar los coeficientes del filtro $\{a_p(k)\}$ de forma recursiva se deduce fácilmente a partir de las relaciones polinómicas dadas en (12.3.18). Así, tenemos

$$\begin{aligned} A_m(z) &= A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z) \\ \sum_{k=0}^{m} a_m(k) z^{-k} &= \sum_{k=0}^{m-1} a_{m-1}(k) z^{-k} + K_m \sum_{k=0}^{m-1} a_{m-1}^*(m-1-k) z^{-(k+1)} \end{aligned} \tag{12.3.20}$$

Igualando los coeficientes de las potencias iguales de z^{-1} y teniendo en cuenta que $a_m(0) = 1$ para $m = 1, 2, \ldots, p$, obtenemos la ecuación recursiva deseada para los coeficientes del filtro FIR en la forma

$$\begin{aligned} a_m(0) &= 1 \\ a_m(m) &= K_m \\ a_m(k) &= a_{m-1}(k) + K_m a_{m-1}^*(m-k) \\ &= a_{m-1}(k) + a_m(m) a_{m-1}^*(m-k), \quad \begin{matrix} 1 \le k \le m-1 \\ m = 1,2,\ldots,p \end{matrix} \end{aligned} \tag{12.3.21}$$

La fórmula de conversión de los coeficientes del filtro FIR en la forma directa $\{a_p(k)\}$ en los coeficientes de reflexión de la celosía $\{K_i\}$ es también muy simple. Para la celosía de p etapas obtenemos de forma inmediata los coeficientes de reflexión $K_p = a_p(p)$. Para obtener $K_{p-1}, \ldots, K_1$, necesitamos los polinomios $A_m(z)$ para $m = p-1, \ldots, 1$. A partir de (12.3.19), obtenemos

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m B_m(z)}{1 - |K_m|^2}, \qquad m = p, \ldots, 1 \tag{12.3.22}$$

que es sólo una recursión en orden descendente. A continuación calculamos todos los polinomios de grado inferior $A_m(z)$ comenzando por $A_{p-1}(z)$ y obtenemos los coeficientes de reflexión de la celosía deseada a partir de la relación $K_m = a_m(m)$. Observe que el procedimiento funciona siempre y cuando $|K_m| \neq 1$ para $m = 1, 2, \ldots, p-1$. A partir de esta recursión descendente para los polinomios, es relativamente fácil obtener una fórmula para calcular de forma recursiva y directa K_m, $m = p-1, \ldots, 1$. Para $m = p-1, \ldots, 1$, tenemos

$$\begin{aligned} K_m &= a_m(m) \\ a_{m-1}(k) &= \frac{a_m(k) - K_m b_m(k)}{1 - |K_m|^2} \\ &= \frac{a_m(k) - a_m(m) a_m^*(m-k)}{1 - |a_m(m)|^2} \end{aligned} \tag{12.3.23}$$

que es sólo la recursión de la prueba de estabilidad de Schur–Cohn para el polinomio $A_m(z)$.

Como ya hemos mencionado, la ecuación recursiva dada en (12.3.23) falla si cualquier parámetro de la celosía cumple que $|K_m| = 1$. Si esto ocurre, es indicativo de que el polinomio $A_{m-1}(z)$ tiene una raíz sobre la circunferencia unidad. Una raíz así puede descomponerse en factores a partir de $A_{m-1}(z)$ y del proceso iterativo especificado en (12.3.23) que lleva a un sistema de orden reducido.

Por último, considere la minimización del error cuadrático medio en un predictor lineal inverso. El error de predicción inverso es

$$\begin{aligned} g_p(n) &= x(n-p) + \sum_{k=0}^{p-1} b_p(k) x(n-k) \\ &= x(n-p) + \sum_{k=1}^{p} a_p^*(k) x(n-p+k) \end{aligned} \tag{12.3.24}$$

y su valor cuadrático medio es

$$\mathscr{E}_p^b = E[|g_p(n)|^2] \tag{12.3.25}$$

La minimización de $\mathscr{E}_p^b$ con respecto a los coeficientes de predicción proporciona el mismo conjunto de ecuaciones lineales que (12.3.9). Por tanto, el error cuadrático medio mínimo (MSE, *minimum mean-square error*) es

$$\text{mín}[\mathscr{E}_p^b] \equiv E_p^b = E_p^f \tag{12.3.26}$$

el cual queda determinado por la Ecuación (12.3.10).

12.3.3 Coeficientes de reflexión óptimos para los predictores en celosía directo e inverso

En las Secciones 12.3.1 y 12.3.2, hemos obtenido el conjunto de ecuaciones lineales que proporcionan los coeficientes del predictor que minimizan el valor cuadrático medio del error de predicción. En esta sección,

vamos a abordar el problema de optimizar los coeficientes de reflexión en el predictor en celosía y de expresarlos en función de los errores de predicción directo e inverso.

El error de predicción directo en el filtro en celosía se expresa como

$$f_m(n) = f_{m-1}(n) + K_m g_{m-1}(n-1) \tag{12.3.27}$$

La minimización de $E[|f_m(n)|^2]$ con respecto al coeficiente de reflexión K_m proporciona el resultado

$$K_m = \frac{-E[f_{m-1}(n)g^*_{m-1}(n-1)]}{E[|g_{m-1}(n-1)|^2]} \tag{12.3.28}$$

o, lo que es equivalente,

$$K_m = \frac{-E[f_{m-1}(n)g^*_{m-1}(n-1)]}{\sqrt{E^f_{m-1}E^b_{m-1}}} \tag{12.3.29}$$

donde $E^f_{m-1} = E^b_{m-1} = E[|g_{m-1}(n-1)|^2] = E[|f_{m-1}(n)|^2]$.

Observe que la elección óptima de los coeficientes de reflexión en el predictor en celosía es la negación de los coeficientes de la correlación cruzada (normalizada) entre los errores de predicción directo e inverso en la celosía.[1] Dado que a partir de (12.3.28) es evidente que $|K_m| \leq 1$, se deduce que el valor cuadrático medio mínimo del error de predicción, que se puede expresar en forma recursiva como

$$E^f_m = (1 - |K_m|^2)E^f_{m-1} \tag{12.3.30}$$

es una secuencia monótonamente decreciente.

12.3.4 Relación entre un proceso auto-regresivo y la predicción lineal

Los parámetros de un proceso auto-regresivo AR(p) están íntimamente relacionados con un predictor de orden p para el mimso proceso. Recordemos que en un proceso auto-regresivo AR(p), la autocorrelación $\{\gamma_{xx}(m)\}$ está relacionada con los parámetros $\{a_k\}$ por medio de las ecuaciones de Yule–Walker dadas en (12.2.19) o (12.2.20). Las ecuaciones correspondientes para el predictor de orden p están dadas por (12.3.9) y (12.3.10).

Una comparación directa de estos dos conjuntos de relaciones revela que existe una correspondencia uno-a-uno entre los parámetros $\{a_k\}$ del proceso auto-regresivo AR(p) y los coeficientes del predictor $\{a_p(k)\}$ de orden p. De hecho, si el proceso subyacente $\{x(n)\}$ es un proceso auto-regresivo AR(p), los coeficientes de predicción del predictor de orden p son idénticos a $\{a_k\}$. Además, el error cuadrático medio en el predictor de orden p, E^f_p, es idéntico a σ^2_w, la varianza del proceso de ruido blanco. En este caso, el filtro del error de predicción es un filtro blanqueador de ruido que produce la secuencia de innovaciones $\{w(n)\}$.

12.4 Solución de las ecuaciones normales

En la sección anterior hemos visto que la minimización del valor cuadrático medio del error de predicción directo da lugar a un conjunto de ecuaciones lineales para los coeficientes del predictor definido por (12.3.9). Estas ecuaciones, denominadas ecuaciones normales, pueden expresarse en la forma compacta

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p} a_p(k)\gamma_{xx}(l-k) = 0 \quad & l = 1, 2, \ldots, p \\ & a_p(0) = 1 \end{aligned} \tag{12.4.1}$$

[1] Los coeficientes de la correlación cruzada normalizados entre los errores de predicción directo e inverso en la celosía (es decir, $\{-K_m\}$) con frecuencia se denominan coeficientes de la correlación parcial.

El error cuadrático medio mínimo resultante queda definido por (12.3.10). Si añadimos (12.3.10) a las ecuaciones normales dadas por (12.4.1) obtenemos el conjunto de *ecuaciones normales aumentadas*, que pueden escribirse como

$$\sum_{k=0}^{p} a_p(k)\gamma_{xx}(l-k) = \begin{cases} E_p^f, & l=0 \\ 0, & l=1,2,\ldots,p \end{cases} \tag{12.4.2}$$

Observe también que si el proceso aleatorio es un proceso auto-regresivo AR(p), el error cuadrático medio mínimo es $E_p^f = \sigma_w^2$.

En esta sección se describen dos algoritmos de cálculo eficiente para resolver las ecuaciones normales. Uno de ellos, debido originalmente a Levinson (1947) y modificado por Durbin (1959), es el algoritmo de Levinson–Durbin. Este algoritmo es adecuado para el procesamiento en serie y tiene una complejidad de cálculo de $O(p^2)$. El segundo algoritmo, debido a Schur (1917), también calcula los coeficientes de reflexión mediante $O(p^2)$ operaciones, pero empleando procesadores paralelo, los cálculos se pueden realizar en un tiempo $O(p)$. Ambos algoritmos aplican la propiedad de simetría de Toeplitz inherente a la matriz de autocorrelación.

Comenzamos por el algoritmo de Levinson–Durbin.

12.4.1 Algoritmo de Levinson–Durbin

El algoritmo de Levinson-Durbin es un algoritmo de cálculo eficiente que permite resolver las ecuaciones normales dadas en (12.4.1) para los coeficientes de predicción. Este algoritmo aplica la propiedad de simetría especial de la matriz de autocorrelación

$$\Gamma_p = \begin{bmatrix} \gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}^*(1) & \cdots & \gamma_{xx}^*(p-1) \\ \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(0) & \cdots & \gamma_{xx}^*(p-2) \\ \vdots & \vdots & & \\ \gamma_{xx}(p-1) & \gamma_{xx}(p-2) & \cdots & \gamma_{xx}(0) \end{bmatrix} \tag{12.4.3}$$

Observe que $\Gamma_p(i,j) = \Gamma_p(i-j)$, por lo que la matriz de autocorrelación es una *matriz de Toeplitz*. Como $\Gamma_p(i,j) = \Gamma_p^*(j,i)$, la matriz también es hermitiana.

La clave del método de solución de Levinson–Durbin, que aplica la propiedad de Toeplitz de la matriz está en trabajar recursivamente, comenzando por un predictor de orden $m = 1$ (un coeficiente), y aumentando a continuación el orden recursivamente, empleando las soluciones de orden inferior para obtener la solución correspondiente al predictor de orden inmediatamente superior. Luego la solución para el predictor de primer orden obtenida resolviendo la Ecuación (12.4.1) es

$$a_1(1) = -\frac{\gamma_{xx}(1)}{\gamma_{xx}(0)} \tag{12.4.4}$$

y el error cuadrático medio mínimo es

$$\begin{aligned} E_1^f &= \gamma_{xx}(0) + a_1(1)\gamma_{xx}(-1) \\ &= \gamma_{xx}(0)[1-|a_1(1)|^2] \end{aligned} \tag{12.4.5}$$

Recuerde que $a_1(1) = K_1$, el primer coeficiente de reflexión del filtro en celosía.

El siguiente paso consiste en obtener los coeficientes $\{a_2(1),\ a_2(2)\}$ del predictor de segundo orden y expresar la solución en función de $a_1(1)$. Las dos ecuaciones obtenidas a partir de (12.4.1) son

$$\begin{aligned} a_2(1)\gamma_{xx}(0) + a_2(2)\gamma_{xx}^*(1) &= -\gamma_{xx}(1) \\ a_2(1)\gamma_{xx}(1) + a_2(2)\gamma_{xx}(0) &= -\gamma_{xx}(2) \end{aligned} \tag{12.4.6}$$

Utilizando la solución dada en (12.4.4) para eliminar $\gamma_{xx}(1)$, obtenemos la solución

$$a_2(2) = -\frac{\gamma_{xx}(2) + a_1(1)\gamma_{xx}(1)}{\gamma_{xx}(0)[1 - |a_1(1)|^2]} = -\frac{\gamma_{xx}(2) + a_1(1)\gamma_{xx}(1)}{E_1^f}$$

$$a_2(1) = a_1(1) + a_2(2)a_1^*(1) \tag{12.4.7}$$

Así hemos obtenido los coeficientes del predictor de segundo orden. De nuevo, tenga en cuenta que $a_2(2) = K_2$, el segundo coeficiente de reflexión del filtro en celosía.

Continuando con este mismo método, podemos expresar los coeficientes del predictor de orden m en función de los coeficientes del predictor de orden $(m-1)$. Por tanto, podemos expresar el vector de coeficientes $\mathbf{a}_m$ como la suma de dos vectores, es decir,

$$\mathbf{a}_m = \begin{bmatrix} a_m(1) \\ a_m(2) \\ \vdots \\ a_m(m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{m-1} \\ \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{m-1} \\ \\ \cdots \\ K_m \end{bmatrix} \tag{12.4.8}$$

donde $\mathbf{a}_{m-1}$ es el vector de coeficientes del predictor de orden $(m-1)$ y el vector $\mathbf{d}_{m-1}$ y el escalar K_m tienen que ser determinados. Partimos de nuevo de la matriz de autocorrelación $m \times m$ Γ_{xx}

$$\Gamma_m = \begin{bmatrix} \Gamma_{m-1} & \gamma_{m-1}^{b^*} \\ \gamma_{m-1}^{bt} & \gamma_{xx}(0) \end{bmatrix} \tag{12.4.9}$$

donde $\gamma_{m-1}^{bt} = [\gamma_{xx}(m-1)\ \gamma_{xx}(m-2)\ \cdots\ \gamma_{xx}(1)] = (\gamma_{m-1}^{b})^t$, el asterisco (*) designa el complejo conjugado y γ_m^t designa la transpuesta de γ_m. El superíndice b de γ_{m-1} designa el vector $\gamma_{m-1}^t = [\gamma_{xx}(1)\ \gamma_{xx}(2)\ \cdots\ \gamma_{xx}(m-1)]$ con los elementos tomados en orden inverso.

La solución a la ecuación $\Gamma_m \mathbf{a}_m = -\gamma_m$ puede expresarse como

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{m-1} & \gamma_{m-1}^{b^*} \\ \gamma_{m-1}^{bt} & \gamma_{xx}(0) \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{m-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{m-1} \\ K_m \end{bmatrix} \right\} = -\begin{bmatrix} \gamma_{m-1} \\ \gamma_{xx}(m) \end{bmatrix} \tag{12.4.10}$$

Éste es el paso clave en el algoritmo de Levinson–Durbin. A partir de (12.4.10), obtenemos las dos ecuaciones siguientes,

$$\Gamma_{m-1}\mathbf{a}_{m-1} + \Gamma_{m-1}\mathbf{d}_{m-1} + K_m \gamma_{m-1}^{b*} = -\gamma_{m-1} \tag{12.4.11}$$

$$\gamma_{m-1}^{bt}\mathbf{a}_{m-1} + \gamma_{m-1}^{bt}\mathbf{d}_{m-1} + K_m \gamma_{xx}(0) = -\gamma_{xx}(m) \tag{12.4.12}$$

Dado que $\Gamma_{m-1}\mathbf{a}_{m-1} = -\gamma_{m-1}$, (12.4.11) proporciona la solución

$$\mathbf{d}_{m-1} = -K_m \Gamma_{m-1}^{-1} \gamma_{m-1}^{b^*} \tag{12.4.13}$$

Pero $\gamma_{m-1}^{b^*}$ es simplemente γ_{m-1} con los elementos tomados en orden inverso y conjugados. Por tanto, la solución de (12.4.13) es simplemente

$$\mathbf{d}_{m-1} = K_m \mathbf{a}_{m-1}^{b^*} = K_m \begin{bmatrix} a_{m-1}^*(m-1) \\ a_{m-1}^*(m-2) \\ \vdots \\ a_{m-1}^*(1) \end{bmatrix} \tag{12.4.14}$$

La ecuación escalar (12.4.12) ahora se puede utilizar para obtener K_m. Si eliminamos $\mathbf{d}_{m-1}$ en (12.4.12) utilizando (12.4.14), obtenemos

$$K_m[\gamma_{xx}(0) + \gamma_{m-1}^{bt}\mathbf{a}_{m-1}^{b^*}] + \gamma_{m-1}^{bt}\mathbf{a}_{m-1} = -\gamma_{xx}(m)$$

Luego,

$$K_m = -\frac{\gamma_{xx}(m) + \gamma_{m-1}^{bt}\mathbf{a}_{m-1}}{\gamma_{xx}(0) + \gamma_{m-1}^{bt}\mathbf{a}_{m-1}^{b^*}} \tag{12.4.15}$$

Por tanto, sustituyendo las soluciones dadas en (12.4.14) y (12.4.15) en (12.4.8), obtenemos la recursión deseada para los coeficientes del predictor en el algoritmo de Levinson–Durbin como

$$a_m(m) = K_m = -\frac{\gamma_{xx}(m) + \gamma_{m-1}^{bt}\mathbf{a}_{m-1}}{\gamma_{xx}(0) + \gamma_{m-1}^{bt}\mathbf{a}_{m-1}^{b^*}} = -\frac{\gamma_{xx}(m) + \gamma_{m-1}^{bt}\mathbf{a}_{m-1}}{E_{m-1}^f} \tag{12.4.16}$$

$$\begin{aligned} a_m(k) &= a_{m-1}(k) + K_m a_{m-1}^*(m-k) \\ &= a_{m-1}(k) + a_m(m)a_{m-1}^*(m-k), \qquad \begin{matrix} k = 1, 2, \ldots, m-1 \\ m = 1, 2, \ldots, p \end{matrix} \end{aligned} \tag{12.4.17}$$

El lector debe fijarse en que la relación recursiva dada en (12.4.17) es idéntica a la relación recursiva dada en (12.3.21) para los coeficientes del predictor, obtenida a partir de los polinomios $A_m(z)$ y $B_m(z)$. Además, K_m es el coeficiente de reflexión de la etapa m del predictor en celosía. Este desarrollo ilustra claramente que el algoritmo de Levinson–Durbin proporciona los coeficientes de reflexión para el filtro de predicción en celosía óptimo, así como los coeficientes del predictor FIR óptimo en la forma directa.

Por último, determinemos la expresión para el error cuadrático medio mínimo. Para el predictor de orden m, tenemos

$$\begin{aligned} E_m^f &= \gamma_{xx}(0) + \sum_{k=1}^{m} a_m(k)\gamma_{xx}(-k) \\ &= \gamma_{xx}(0) + \sum_{k=1}^{m} [a_{m-1}(k) + a_m(m)a_{m-1}^*(m-k)]\gamma_{xx}(-k) \\ &= E_{m-1}^f[1 - |a_m(m)|^2] = E_{m-1}^f(1 - |K_m|^2), \qquad m = 1, 2, \ldots, p \end{aligned} \tag{12.4.18}$$

donde $E_0^f = \gamma_{xx}(0)$. Puesto que los coeficientes de reflexión satisfacen la propiedad de que $|K_m| \leq 1$, el error cuadrático medio mínimo para la secuencia de predictores satisface la condición

$$E_0^f \geq E_1^f \geq E_2^f \geq \cdots \geq E_p^f \tag{12.4.19}$$

Esto lleva a la demostración del algoritmo de Levinson–Durbin para resolver las ecuaciones lineales $\Gamma_m\mathbf{a}_m = -\gamma_m$, para $m = 0, 1, \ldots, p$. Observe que las ecuaciones lineales tienen la propiedad especial de que el vector del lado derecho de la ecuación aparece también como un vector en Γ_m. En el caso más general, en que el vector del lado derecho es algún otro vector, por ejemplo $\mathbf{c}_m$, el conjunto de ecuaciones lineales puede resolverse recursivamente introduciendo una segunda ecuación recursiva para resolver las ecuaciones lineales más generales $\Gamma_m\mathbf{b}_m = \mathbf{c}_m$. El resultado es el algoritmo de *Levinson–Durbin generalizado* (*véase* el Problema 12.12).

La recursión de Levinson–Durbin dada por (12.4.17) requiere $O(m)$ multiplicaciones y sumas (operaciones) para pasar de la etapa m a la etapa $m+1$. Por tanto, para p etapas, se necesitan $1+2+3+\cdots+p(p+1)/2$, o $O(p^2)$ operaciones para obtener los coeficientes del filtro de predicción, o coeficientes de reflexión, frente a las $O(p^3)$ operaciones necesarias si no se aplica la propiedad de Toeplitz de la matriz de correlación.

Si el algoritmo de Levinson–Durbin se implementa en una computadora serie o en un procesador de señales, el tiempo de cálculo necesario es del orden de $O(p^2)$ unidades de tiempo. Por el contrario, si el procesamiento se realiza en paralelo empleando tantos procesadores como sea necesario para aplicar el paralelismo completo al algoritmo, tanto las multiplicaciones como las sumas necesarias para calcular (12.4.17) pueden realizarse simultáneamente. Por tanto, este cálculo se puede realizar en $O(p)$ unidades de tiempo. Sin embargo, el cálculo especificado en (12.4.16) para obtener los coeficientes de reflexión necesita tiempo adicional. Efectivamente, los productos internos que precisan los vectores $\mathbf{a}_{m-1}$ y γ_{m-1}^b pueden calcularse simultáneamente empleando procesadores paralelo. Sin embargo, la suma de estos productos no puede realizarse simultáneamente, y requiere $O(\log p)$ unidades de tiempo. Por tanto, los cálculos implicados en el algoritmo de Levinson–Durbin, cuando se realizan en p procesadores paralelo, pueden llevarse a cabo en $O(p \log p)$ unidades de tiempo.

En la siguiente sección se describe el algoritmo debido a Schur (1917), que evita el cálculo de los productos internos y, por tanto, es más adecuado para el cálculo en paralelo de los coeficientes de reflexión.

12.4.2 El algoritmo de Schur

El algoritmo de Schur está íntimamente relacionado con una prueba recursiva que permite determinar que una matriz de correlación es definida positiva. Más específicamente, considere la matriz de autocorrelación Γ_{p+1} asociada a las ecuaciones normales aumentadas dadas por (12.4.2). A partir de los elementos de esta matriz formamos la función

$$R_0(z) = \frac{\gamma_{xx}(1)z^{-1} + \gamma_{xx}(2)z^{-2} + \cdots + \gamma_{xx}(p)z^{-p}}{\gamma_{xx}(0) + \gamma_{xx}(1)z^{-1} + \cdots + \gamma_{xx}(p)z^{-p}} \tag{12.4.20}$$

y la secuencia de funciones $R_m(z)$ definida recursivamente como

$$R_m(z) = \frac{R_{m-1}(z) - R_{m-1}(\infty)}{z^{-1}[1 - R_{m-1}^*(\infty)R_{m-1}(z)]}, \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{12.4.21}$$

El teorema de Schur establece que una condición necesaria y suficiente para que la matriz de correlación sea definida positiva es que $|R_m(\infty)| < 1$ para $m = 1, 2, \ldots, p$.

Vamos a demostrar que la condición de definición positiva de la matriz de autocorrelación Γ_{p+1} es equivalente a la condición de que los coeficientes de reflexión del filtro en celosía equivalente satisfagan la condición $|K_m| < 1$, $m = 1, 2, \ldots, p$.

En primer lugar, fíjese en que $R_0(\infty) = 0$. Luego a partir de (12.4.21) tenemos

$$R_1(z) = \frac{\gamma_{xx}(1) + \gamma_{xx}(2)z^{-1} + \cdots + \gamma_{xx}(p)z^{-p+1}}{\gamma_{xx}(0) + \gamma_{xx}(1)z^{-1} + \cdots + \gamma_{xx}(p)z^{-p}} \tag{12.4.22}$$

Por tanto, $R_1(\infty) = \gamma_{xx}(1)/\gamma_{xx}(0)$. Observe que $R_1(\infty) = -K_1$.

En segundo lugar, calculamos $R_2(z)$ según (12.4.21) y evaluamos el resultado en $z = \infty$. Así obtenemos

$$R_2(\infty) = \frac{\gamma_{xx}(2) + K_1\gamma_{xx}(1)}{\gamma_{xx}(0)(1 - |K_1|^2)}$$

De nuevo, observe que $R_2(\infty) = -K_2$. Continuando con este procedimiento, hallamos que $R_m(\infty) = -K_m$, para $m = 1, 2, \ldots, p$. Por tanto, la condición $|R_m(\infty)| < 1$ para $m = 1, 2, \ldots, p$, es idéntica a la condición $|K_m| < 1$ para $m = 1, 2, \ldots, p$, y asegura la definición positiva de la matriz de autocorrelación Γ_{p+1}.

Dado que los coeficientes de reflexión pueden obtenerse a partir de la secuencia de funciones $R_m(z)$, $m = 1, 2, \ldots, p$, disponemos de otro método para resolver las ecuaciones normales. Este método es el *algoritmo de Schur.*

Algoritmo de Schur. En primer lugar expresamos de nuevo $R_m(z)$ como

$$R_m(z) = \frac{P_m(z)}{Q_m(z)}, \qquad m = 0, 1, \ldots, p \tag{12.4.23}$$

donde

$$\begin{aligned} P_0(z) &= \gamma_{xx}(1)z^{-1} + \gamma_{xx}(2)z^{-2} + \cdots + \gamma_{xx}(p)z^{-p} \\ Q_0(z) &= \gamma_{xx}(0) + \gamma_{xx}(1)z^{-1} + \cdots + \gamma_{xx}(p)z^{-p} \end{aligned} \tag{12.4.24}$$

Dado que $K_0 = 0$ y $K_m = -R_m(\infty)$ para $m = 1, 2, \ldots, p$, la ecuación recursiva (12.4.21) implica las siguientes ecuaciones recursivas para los polinomios $P_m(z)$ y $Q_m(z)$:

$$\begin{bmatrix} P_m(z) \\ Q_m(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & K_{m-1} \\ K_{m-1}^* z^{-1} & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{m-1}(z) \\ Q_{m-1}(z) \end{bmatrix}, \qquad m = 1, 2, \ldots, p \tag{12.4.25}$$

Así tenemos

$$\begin{aligned} P_1(z) &= P_0(z) = \gamma_{xx}(1)z^{-1} + \gamma_{xx}(2)z^{-2} + \cdots + \gamma_{xx}(p)z^{-p} \\ Q_1(z) &= z^{-1}Q_0(z) = \gamma_{xx}(0)z^{-1} + \gamma_{xx}(1)z^{-2} + \cdots + \gamma_{xx}(p)z^{-p-1} \end{aligned} \tag{12.4.26}$$

y

$$K_1 = -\left.\frac{P_1(z)}{Q_1(z)}\right|_{z=\infty} = -\frac{\gamma_{xx}(1)}{\gamma_{xx}(0)} \tag{12.4.27}$$

A continuación se obtienen los coeficientes de reflexión K_2 determinando $P_2(z)$ y $Q_2(z)$ a partir de (12.4.25), dividiendo $P_2(z)$ entre $Q_2(z)$ y evaluando el resultado en $z = \infty$. Por tanto, hemos hallado que

$$\begin{aligned} P_2(z) &= P_1(z) + K_1 Q_1(z) \\ &= [\gamma_{xx}(2) + K_1\gamma_{xx}(1)]z^{-2} + \cdots \\ &\quad + [\gamma_{xx}(p) + K_1\gamma_{xx}(p-1)]z^{-p} \\ Q_2(z) &= z^{-1}[Q_1(z) + K_1^* P_1(z)] \\ &= [\gamma_{xx}(0) + K_1^*\gamma_{xx}(1)]z^{-2} + \cdots \\ &\quad + [\gamma_{xx}(p-2) + K_1^*\gamma_{xx}(p-1)]z^{-p} \end{aligned} \tag{12.4.28}$$

donde se han eliminado los términos que implican z^{-p-1}. Luego podemos ver que la ecuación recursiva dada por (12.4.25) es equivalente a la Ecuación (12.4.21).

Basándonos en estas relaciones, el algoritmo de Schur se describe en el siguiente procedimiento recursivo.

Inicialización. Partimos de la matriz generadora $2x(p+1)$

$$\mathbf{G}_0 = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(2) & \cdots & \gamma_{xx}(p) \\ \gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(2) & \cdots & \gamma_{xx}(p) \end{bmatrix} \tag{12.4.29}$$

donde los elementos de la primera fila son los coeficientes de $P_0(z)$ y los elementos de la segunda fila son los coeficientes de $Q_0(z)$.

Paso 1. Desplazamos la segunda fila de la matriz generadora hacia la derecha una posición y descartamos el último elemento de esta fila. En la posición que queda vacante se coloca un cero. Así obtenemos una nueva matriz generadora,

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(2) & \cdots & \gamma_{xx}(p) \\ 0 & \gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(1) & \cdots & \gamma_{xx}(p-1) \end{bmatrix} \tag{12.4.30}$$

La relación (negativa) de los elementos de la segunda fila proporcionan el coeficiente de reflexión $K_1 = -\gamma_{xx}(1)/\gamma_{xx}(0)$.

Paso 2. Multiplicamos la matriz generadora por la matriz 2×2

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 & K_1 \\ K_1^* & 1 \end{bmatrix} \tag{12.4.31}$$

Así, obtenemos

$$\mathbf{V}_1\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma_{xx}(2) + K_1\gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(p) + K_1\gamma_{xx}(p-1) \\ 0 & \gamma_{xx}(0) + K_1^*\gamma_{xx}(1) & \cdots & \gamma_{xx}(p-1) + K_1^*\gamma_{xx}(p) \end{bmatrix} \tag{12.4.32}$$

Paso 3. Desplazamos la segunda fila de $\mathbf{V}_1\mathbf{G}_1$ una posición hacia la derecha y luego formamos la nueva matriz generadora

$$\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma_{xx}(2) + K_1\gamma_{xx}(1) & \cdots & \gamma_{xx}(p) + K_1\gamma_{xx}(p-1) \\ 0 & 0 & \gamma_{xx}(0) + K_1^*\gamma_{xx}(1) & \cdots & \gamma_{xx}(p-2) + K_1^*\gamma_{xx}(p-1) \end{bmatrix} \tag{12.4.33}$$

La relación negativa de los elementos de la tercera columna de G_2 proporciona K_2.

Los pasos 2 y 3 se repiten hasta obtener los p coeficientes de reflexión. En general, la matriz 2×2 del Paso 2 es

$$\mathbf{V}_m = \begin{bmatrix} 1 & K_m \\ K_m^* & 1 \end{bmatrix} \tag{12.4.34}$$

y la multiplicación de $\mathbf{V}_m$ por $\mathbf{G}_m$ proporciona $\mathbf{V}_m\mathbf{G}_m$. En el Paso 3, desplazamos la segunda fila de $\mathbf{V}_m\mathbf{G}_m$ una posición hacia la derecha y obtenemos la nueva matriz generadora $\mathbf{G}_{m+1}$.

Observe que la operación de desplazamiento de la segunda fila en cada iteración es equivalente a multiplicar por el operador de retardo z^{-1} en la segunda ecuación recursiva de (12.4.25). Fijese también en que la división del polinomio $P_m(z)$ entre el polinomio $Q_m(z)$ y la evaluación del cociente en $z = \infty$ es equivalente a dividir los elementos de la columna $(m+1)$st de $\mathbf{G}_m$. El cálculo de los p coeficientes de reflexión puede conseguirse utilizando procesadores paralelo en $O(p)$ unidades de tiempo. A continuación se describe una arquitectura *pipeline* que permite realizar estos cálculos.

Otra forma de demostrar la relación del algoritmo de Schur con el algoritmo de Levinson–Durbin y el correspondiente predictor en celosía consiste en determinar la salida del filtro en celosía obtenido cuando la secuencia de entrada es la secuencia de correlación $\{\gamma_{xx}(m), m = 0, 1, \ldots\}$. La primera entrada al filtro en celosía es $\gamma_{xx}(0)$, la segunda entrada es $\gamma_{xx}(1)$, etc., [es decir, $f_0(n) = \gamma_{xx}(n)$]. Después del retardo de la primera etapa, tenemos $g_0(n-1) = \gamma_{xx}(n-1)$. Por tanto, para $n = 1$, la relación $f_0(1)/g_0(0) = \gamma_{xx}(1)/\gamma_{xx}(0)$, que es el negativo del coeficiente de reflexión K_1. Alternativamente, podemos escribir esta relación como

$$f_0(1) + K_1 g_0(0) = \gamma_{xx}(1) + K_1\gamma_{xx}(0) = 0$$

Además, $g_0(0) = \gamma_{xx}(0) = E_0^f$. En el instante $n = 2$, la entrada a la segunda etapa es, según (12.3.4),

$$f_1(2) = f_0(2) + K_1 g_0(1) = \gamma_{xx}(2) + K_1 \gamma_{xx}(1)$$

y después de la unidad de retardo de la segunda etapa, tenemos

$$g_1(1) = K_1^* f_0(1) + g_0(0) = K_1^* \gamma_{xx}(1) + \gamma_{xx}(0)$$

Ahora la relación $f_1(2)/g_1(1)$ es

$$\frac{f_1(2)}{g_1(1)} = \frac{\gamma_{xx}(2) + K_1\gamma_{xx}(1)}{\gamma_{xx}(0) + K_1^*\gamma_{xx}(1)} = \frac{\gamma_{xx}(2) + K_1\gamma_{xx}(1)}{E_1^f} = -K_2$$

Por tanto,

$$f_1(2) + K_2 g_1(1) = 0$$
$$g_1(1) = E_1^f$$

Continuando de esta forma, podemos demostrar que en la entrada de la etapa en celosía m, se cumple la relación $f_{m-1}(m)/g_{m-1}(m-1) = -K_m$ y $g_{m-1}(m-1) = E_{m-1}^f$. En consecuencia, los coeficientes del filtro en celosía obtenidos a partir del algoritmo de Levinson son idénticos a los coeficientes obtenidos mediante el algoritmo de Schur. Además, la estructura de filtro en celosía proporciona un método para calcular los coeficientes de reflexión del predictor en celosía.

Arquitectura pipeline para implementar el algoritmo de Schur. Kung y Hu (1983) desarrollaron un procesador pipeline de tipo celosía para implementar el algoritmo de Schur. El procesador consta de una cascada de p etapas de tipo celosía, donde cada etapa consta de dos elementos de procesamiento (EP), los cuales designamos como elementos de procesamiento superior $A_1, A_2, \ldots, A_p$, y elementos de procesamiento inferior $B_1, B_2, \ldots, B_p$, como se muestra en la Figura 12.4.1. El elemento de procesamiento (PE) designado como A_1 se asigna a la tarea de realizar divisiones. Los restantes elementos de procesamiento realizan una multiplicación y una suma por iteración (un ciclo de reloj).

Inicialmente, los elementos de procesamiento superiores están cargados con los elementos de la primera fila de la matriz generadora $\mathbf{G}_0$, como se muestra en la Figura 12.4.1. Los elementos de procesamiento inferiores están cargados con elementos de la segunda fila de la matriz generadora $\mathbf{G}_0$. El proceso de cálculo comienza con el elemento de procesamiento de división, A_1, que calcula el primer coeficiente de reflexión como $K_1 =$

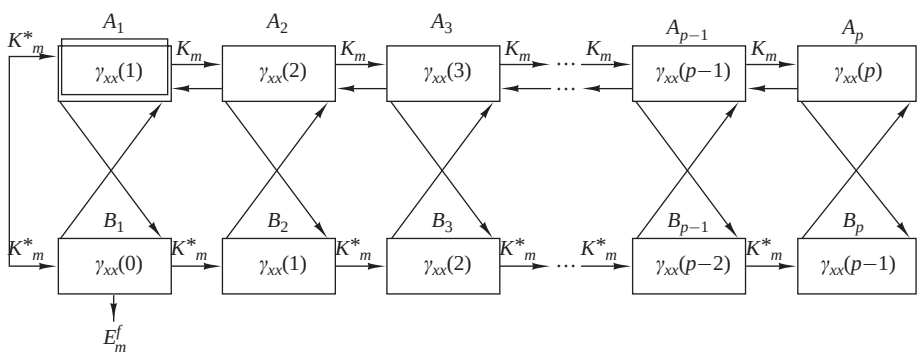


Figura 12.4.1. Procesador paralelo en pipeline para el cáculo de los coeficientes de reflexión.

$-\gamma_{xx}(1)/\gamma_{xx}(0)$. El valor de K_1 se envía simlutáneamente a todos los demás elementos de procesamiento de las ramas superior en inferior.

El segundo paso del cálculo consiste en actualizar los contenidos de todos los elementos de procesamiento de manera simultánea. Los contenidos de los elementos de procesamiento superiores e inferiores se actualizan como sigue:

$$\text{EP } A_m\text{: } A_m \leftarrow A_m + K_1 B_m, \quad m = 2, 3, \ldots, p$$
$$\text{EP } B_m\text{: } B_m \leftarrow B_m + K_1^* A_m, \quad m = 1, 2, \ldots, p$$

El tercer paso implica desplazar los contenidos de los elementos de procesamiento superiores una posición hacia la izquierda. Así, tenemos

$$\text{EP } A_m\text{: } A_{m-1} \leftarrow A_m, \qquad m = 2, 3, \ldots, p$$

En este punto, el EP A_1 contiene $\gamma_{xx}(2) + K_1\gamma_{xx}(1)$ mientras que el EP B_1 contiene $\gamma_{xx}(0) + K_1^*\gamma_{xx}(1)$. Por tanto, el procesador A_1 está preparado para iniciar el segundo ciclo calculando el segundo coeficiente de reflexión $K_2 = -A_1/B_1$. Los tres pasos del cálculo que comienzan con la división A_1/B_1 se repiten hasta que se han calculado los p coeficientes de reflexión. Observe que el EP B_1 proporciona el error cuadrático medio mínimo E_m^f de cada iteración.

Si τ_d designa el tiempo para el EP A_1 para realizar una división (compleja) y τ_{ma} es el tiempo necesario para realizar una multiplicación (compleja) y una suma, el tiempo necesario para calcular los p coeficientes de reflexión es $p(\tau_d + \tau_{\text{ma}})$ con el algoritmo de Schur.

12.5 Propiedades de los filtros lineales de error de predicción

Los filtros de predicción lineal poseen varias propiedades importantes que vamos a describir a continuación. Empezamos demostrando que el filtro de error de predicción directa es un filtro de fase mínima.

Propiedad de fase mínima del filtro de error de predicción directa. Ya hemos demostrado que los coeficientes de reflexión $\{K_i\}$ son los coeficientes de correlación y, por tanto, $|K_i| \leq 1$ para todo i. Esta condición y la relación $E_m^f = (1 - |K_m|^2)E_{m-1}^f$ pueden utilizarse para demostrar que los ceros del filtro de error de predicción están todos ellos dentro de la circunferencia unidad o sobre la circunferencia unidad.

En primer lugar, demostramos que si $E_p^f > 0$, los ceros están en $|z_i| < 1$ para todo i. Realizamos la demostración por inducción. Evidentemente, para $p = 1$, la función de sistema del filtro de error de predicción es

$$A_1(z) = 1 + K_1 z^{-1} \tag{12.5.1}$$

Por tanto, $z_1 = -K_1$ y $E_1^f = (1 - |K_1|^2)E_0^f > 0$. Supongamos ahora que la hipótesis es cierta para $p - 1$. Por tanto, si z_i es una raíz de $A_p(z)$, tenemos a partir de las expresiones (12.3.16) y (12.3.18),

$$\begin{aligned} A_p(z_i) &= A_{p-1}(z_i) + K_p z_i^{-1} B_{p-1}(z_i) \\ &= A_{p-1}(z_i) + K_p z_i^{-p} A_{p-1}^*\left(\frac{1}{z_i}\right) = 0 \end{aligned} \tag{12.5.2}$$

Por tanto,

$$\frac{1}{K_p} = -\frac{z_i^{-p} A_{p-1}^*(1/z_i)}{A_{p-1}(z_i)} \equiv Q(z_i) \tag{12.5.3}$$

Observe que la función $Q(z)$ es paso todo. En general, una función paso todo de la forma

$$P(z) = \prod_{k=1}^{N} \frac{zz_k^* + 1}{z + z_k}, \qquad |z_k| < 1 \tag{12.5.4}$$

satisface la propiedad de que $|P(z)| > 1$ para $|z| < 1$, $|P(z)| = 1$ para $|z| = 1$, y $|P(z)| < 1$ para $|z| > 1$. Puesto que $Q(z) = -P(z)/z$, se deduce que $|z_i| < 1$ si $|Q(z)| > 1$. Evidentemente, éste es el caso, ya que $Q(z_i) = 1/K_p$ y $E_p^f > 0$.

Por el contrario, supongamos que $E_{p-1}^f > 0$ y $E_p^f = 0$. En este caso, $|K_p| = 1$ y $|Q(z_i)| = 1$. Como el error cuadrático medio mínimo es cero, el proceso aleatorio $x(n)$ se dice que es *predecible* o *determinístico*. Específicamente, un proceso aleatorio puramente sinusoidal de la forma

$$x(n) = \sum_{k=1}^{M} \alpha_k e^{j(n\omega_k + \theta_k)} \tag{12.5.5}$$

donde las fases $\{\theta_k\}$ son estadísticamente independientes y están uniformemente distribuidas en el intervalo $(0, 2\pi)$ y tienen la autocorrelación

$$\gamma_{xx}(m) = \sum_{k=1}^{M} \alpha_k^2 e^{jm\omega_k} \tag{12.5.6}$$

y el espectro de densidad de potencia

$$\Gamma_{xx}(f) = \sum_{k=1}^{M} \alpha_k^2 \delta(f - f_k), \qquad f_k = \frac{\omega_k}{2\pi} \tag{12.5.7}$$

Este proceso es predecible con un predictor de orden $p \geq M$.

Para demostrar la validez de la afirmación, considere que pasamos el proceso a través de un filtro de error de predicción de orden $p \geq M$. El error cuadrático medio en la salida de este filtro es

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_p^f &= \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(f) |A_p(f)|^2 df \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \left[\sum_{k=1}^{M} \alpha_k^2 \delta(f - f_k) \right] |A_p(f)|^2 df \\ &= \sum_{k=1}^{M} \alpha_k^2 |A_p(f_k)|^2 \end{aligned} \tag{12.5.8}$$

Seleccionando M de los p ceros del filtro de error de predicción de modo que coincidan con las frecuencias $\{f_k\}$, el error cuadrático medio $\mathscr{E}_p^f$ puede forzarse para que sea igual a cero. Los restantes $p - M$ ceros se pueden seleccionar arbitrariamente en cualquier posición interior de la circunferencia unidad.

Por último, el lector puede demostrar que si un proceso aleatorio es una mezcla de una densidad espectral de potencia continua y un espectro discreto, el filtro de error de predicción tiene que tener todas sus raíces en el interior de la circunferencia unidad.

Propiedad de fase máxima del filtro de error de predicción inverso. La función de sistema para el filtro de error de predicción inverso de orden p es

$$B_p(z) = z^{-p} A_p^*(z^{-1}) \tag{12.5.9}$$

En consecuencia, las raíces de $B_p(z)$ son las recíprocas de las raíces del filtro de error de predicción directo cuya función de sistema es $A_p(z)$. Por tanto, si $A_p(z)$ es de fase mínima, entonces $B_p(z)$ es de fase máxima. Sin embargo, si el proceso $x(n)$ es predecible, todas las raíces de $B_p(z)$ estarán sobre la circunferencia unidad.

Propiedad de blanqueo. Suponga que el proceso aleatorio $x(n)$ es un proceso aleatorio estacionario auto-regresivo AR(p) que se genera pasando un ruido blanco cuya varianza es σ_w^2 a través de un filtro de sólo polos cuya función de sistema es

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}} \tag{12.5.10}$$

Entonces el filtro de error de predicción de orden p tiene la función de sistema

$$A_p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{p} a_p(k) z^{-k} \tag{12.5.11}$$

donde los coeficientes del predictor cumplen que $a_p(k) = a_k$. La respuesta de un filtro de error de predicción es una secuencia de ruido blanco $\{w(n)\}$. En este caso, el filtro de error de predicción blanquea el proceso aleatorio de entrada $x(n)$ y se denomina filtro blanqueador, como se ha indicado en la Sección 12.3.4.

De forma más general, incluso aunque el proceso de entrada $x(n)$ no sea un proceso auto-regresivo, el filtro de error de predicción intenta eliminar la correlación entre las muestras de la señal del proceso de entrada. Cuando el orden del predictor se incrementa, la salida del mismo $\hat{x}(n)$ se aproxima cada vez más a $x(n)$ y, en consecuencia, la diferencia $f(n) = \hat{x}(n) - x(n)$ se aproxima a una secuencia de ruido blanco.

Ortogonalidad de los errores de la predicción inversa. Los errores de la predicción inversa $\{g_m(k)\}$ procedentes de diferentes etapas de un filtro FIR en celosía son ortogonales. Es decir,

$$E[g_m(n) g_l^*(n)] = \begin{cases} 0, & 0 \le l \le m-1 \\ E_m^b, & l = m \end{cases} \tag{12.5.12}$$

Esta propiedad puede demostrarse fácilmente sustituyendo $g_m(n)$ y $g_l^*(n)$ en (12.5.12) y calculando el valor esperado. Así

$$\begin{aligned} E[g_m(n) g_l^*(n)] &= \sum_{k=0}^{m} b_m(k) \sum_{j=0}^{l} b_l^*(j) E[x(n-k) x^*(n-j)] \\ &= \sum_{j=0}^{l} b_l^*(j) \sum_{k=0}^{m} b_m(k) \gamma_{xx}(j-k) \end{aligned} \tag{12.5.13}$$

Pero las ecuaciones normales del predictor lineal inverso requieren que

$$\sum_{k=0}^{m} b_m(k) \gamma_{xx}(j-k) = \begin{cases} 0, & j = 1, 2, \ldots, m-1 \\ E_m^b, & j = m \end{cases} \tag{12.5.14}$$

Por tanto,

$$E[g_m(n) g_l^*(n)] = \begin{cases} E_m^b = E_m^f, & m = l \\ 0, & 0 \le l \le m-1 \end{cases} \tag{12.5.15}$$

Propiedades adicionales. Existen otras propiedades interesantes relacionadas con los errores de predicción directo e inverso en los filtros FIR en celosía, las cuales se indican a continuación para datos reales. Las correspondientes demostraciones se dejan como ejercicio para el lector.

(a) $E[f_m(n)x(n-i)] = 0, \qquad 1 \le i \le m$

(b) $E[g_m(n)x(n-i)] = 0, \qquad 0 \le i \le m-1$

(c) $E[f_m(n)x(n)] = E[g_m(n)x(n-m)] = E_m$

(d) $E[f_i(n)f_j(n)] = E_{\max}(i,j)$

(e) $E[f_i(n)f_j(n-t)] = 0$, for $\begin{cases} 1 \le t \le i-j, & i > j \\ -1 \ge t \ge i-j, & i < j \end{cases}$

(f) $E[g_i(n)g_j(n-t)] = 0$, for $\begin{cases} 0 \le t \le i-j, & i > j \\ 0 \ge t \ge i-j+1, & i < j \end{cases}$

(g) $E[f_i(n+i)f_j(n+j)] = \begin{cases} E_i, & i = j \\ 0, & i \ne j \end{cases}$

(h) $E[g_i(n+i)g_j(n+j)] = E_{\max\ (i,j)}$

(i) $E[f_i(n)g_j(n)] = \begin{cases} K_j E_i, & i \ge j, \qquad i,j \ge 0, \qquad K_0 = 1 \\ 0, & i < j \end{cases}$

(j) $E[f_i(n)g_i(n-1)] = -K_{i+1}E_i$

(k) $E[g_i(n-1)x(n)] = E[f_i(n+1)x(n-1)] = -K_{i+1}E_i$

(l) $E[f_i(n)g_j(n-1)] = \begin{cases} 0, & i > j \\ -K_{j+1}E_i, & i \le j \end{cases}$

12.6 Filtros auto-regresivos en celosía y auto-regresivos de media móvil en celosía-escalera

En la Sección 12.3 hemos visto la relación entre los filtros de sólo ceros en celosía y la predicción lineal. El predictor lineal con función de transferencia

$$A_p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{p} a_p(k) z^{-k} \tag{12.6.1}$$

cuando se excita con un proceso aleatorio de entrada $\{x(n)\}$, genera una salida que se aproxima a una secuencia de ruido blanco si $p \to \infty$. Por otro lado, si el proceso de entrada es un proceso AR(p), la salida de $A_p(z)$ es ruido blanco. Dado que $A_p(z)$ genera un proceso de media móvil MA(p) cuando se excita con una secuencia de ruido blanco, la celosía de sólo ceros en ocasiones se denomina celosía de media móvil (MA).

En la siguiente sección, se desarrolla la estructura en celosía del filtro inverso $1/A_p(z)$, denominada celosía auto-regresiva (AR) y la estructura en celosía–escalera para un proceso auto-regresivo de media móvil (ARMA).

12.6.1 Estructura auto-regresiva en celosía

Consideremos un sistema de sólo polos con la función de sistema

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_p(k) z^{-k}} \tag{12.6.2}$$

La ecuación en diferencias para este sistema IIR es

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{p} a_p(k) y(n-k) + x(n) \tag{12.6.3}$$

Supongamos ahora que intercambiamos los papeles de la entrada y de la salida [es decir, intercambiamos $x(n)$ con $y(n)$ en la expresión (12.6.3)], obteniendo la ecuación en diferencias

$$x(n) = -\sum_{k=1}^{p} a_p(k) x(n-k) + y(n)$$

o, lo que es equivalente,

$$y(n) = x(n) + \sum_{k=1}^{p} a_p(k) x(n-k) \tag{12.6.4}$$

Observe que (12.6.4) es una ecuación en diferencias para un sistema FIR con una función de sistema $A_p(z)$. Luego un sistema IIR de sólo polos puede convertirse en un sistema de sólo ceros intercambiando los papeles de la entrada y de la salida.

Basándonos en esta observación, podemos obtener la estructura de una forma en celosía AR(p) a partir de una celosía MA(p) intercambiando la entrada y la salida. Puesto que la celosía MA(p) tiene $y(n) = f_p(n)$ como salida y $x(n) = f_0(n)$ como entrada, tenemos

$$\begin{aligned} x(n) &= f_p(n) \\ y(n) &= f_0(n) \end{aligned} \tag{12.6.5}$$

Estas definiciones dictan que las magnitudes $\{f_m(n)\}$ se han calculado en sentido descendente. Este cálculo puede llevarse a cabo reordenando la ecuación recursiva para $\{f_m(n)\}$ en (12.3.4) y obteniendo $f_{m-1}(n)$ en función de $f_m(n)$. Así, obtenemos

$$f_{m-1}(n) = f_m(n) - K_m g_{m-1}(n-1), \qquad m = p, p-1, \ldots, 1$$

La ecuación para $g_m(n)$ no varía. El resultado de estos cambios es el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} x(n) &= f_p(n) \\ f_{m-1}(n) &= f_m(n) - K_m g_{m-1}(n-1) \\ g_m(n) &= K_m^* f_{m-1}(n) + g_{m-1}(n-1) \\ y(n) &= f_0(n) = g_0(n) \end{aligned} \tag{12.6.6}$$

La estructura correspondiente para la celosía AR(p) se muestra en la Figura 12.6.1. Observe que la estructura en celosía de sólo polos tiene un camino de sólo ceros con la entrada $g_0(n)$ y la salida $g_p(n)$, que es idéntico al

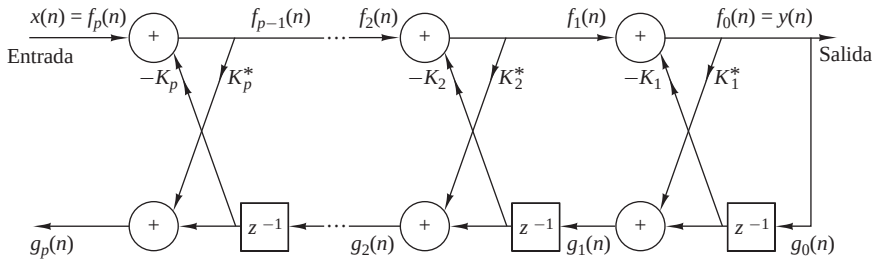


Figura 12.6.1. Estructura en celosía para un sistema de sólo polos.

camino de sólo ceros de la estructura en celosía MA(p). Esto no debe sorprendernos, ya que la ecuación para $g_m(n)$ es idéntica en las dos estructuras en celosía.

Observe también que las estructuras en celosía AR(p) y MA(p) se caracterizan por los mismos parámetros, a saber, los coeficientes de reflexión $\{K_i\}$. En consecuencia, las ecuaciones dadas en (12.3.21) y (12.3.23) para realizar la conversión entre los parámetros del sistema $\{a_p(k)\}$ en las realizaciones de la forma directa del sistema de sólo ceros $A_p(z)$ y los parámetros de la celosía $\{K_i\}$ de la estructura en celosía MA(p) se aplican también a las estructuras de sólo polos.

12.6.2 Procesos auto-regresivos de media móvil y filtros en celosía-escalera

La celosía de sólo polos proporciona el bloque de construcción básico de las estructuras de tipo celosía que implementan sistemas IIR que contienen tanto polos como ceros. Para construir la estructura apropiada, consideremos un sistema IIR cuya función de sistema es

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{q} c_q(k) z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_p(k) z^{-k}} = \frac{C_q(z)}{A_p(z)} \tag{12.6.7}$$

Sin perder generalidad, suponemos que $p \geq q$.

Este sistema queda descrito por las ecuaciones en diferencias

$$\begin{aligned} v(n) &= -\sum_{k=1}^{p} a_p(k) v(n-k) + x(n) \\ y(n) &= \sum_{k=0}^{q} c_q(k) v(n-k) \end{aligned} \tag{12.6.8}$$

obtenidas viendo el sistema como una cascada de un sistema de sólo polos seguido de un sistema de sólo ceros. A partir de la expresión (12.6.8), observamos que la salida $y(n)$ es simplemente una combinación lineal de las salidas retardadas del sistema de sólo polos.

Puesto que los ceros resultan de formar una combinación lineal de las salidas anteriores, podemos trasladar esta observación a la construcción del sistema de polos y ceros utilizando la estructura en celosía de sólo polos como bloque de construcción básico. Hemos visto que $g_m(n)$ en la celosía de sólo polos puede expresarse como una combinación lineal de las salidas presente y pasadas. De hecho, el sistema

$$H_b(z) \equiv \frac{G_m(z)}{Y(z)} = B_m(z) \tag{12.6.9}$$

es un sistema de sólo ceros. Por tanto, cualquier combinación lineal de $\{g_m(n)\}$ también es un filtro de sólo ceros.

Comenzamos con un filtro en celosía de sólo polos con coeficientes K_m, $1 \leq m \leq p$, y añadimos una *escalera* tomando como salida una combinación lineal ponderada de $\{g_m(n)\}$. El resultado es un filtro de polos y ceros que tiene ls estructura en *celosía-escalera* mostrada en la Figura 12.6.2. Su salida es

$$y(n) = \sum_{k=0}^{q} \beta_k g_k(n) \tag{12.6.10}$$

donde $\{\beta_k\}$ son los parámetros que determinan los ceros del sistema. La función de sistema correspondiente a (12.6.10) es

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{q} \beta_k \frac{G_k(z)}{X(z)} \tag{12.6.11}$$

Dado que $X(z) = F_p(z)$ y $F_0(z) = G_0(z)$, la Ecuación (12.6.11) puede expresarse como

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{k=0}^{q} \beta_k \frac{G_k(z)}{G_0(z)} \frac{F_0(z)}{F_p(z)} \\ &= \frac{1}{A_p(z)} \sum_{k=0}^{q} \beta_k B_k(z) \end{aligned} \tag{12.6.12}$$

Por tanto,

$$C_q(z) = \sum_{k=0}^{q} \beta_k B_k(z) \tag{12.6.13}$$

Ésta es la relación deseada que se puede emplear para determinar los coeficientes ponderados $\{\beta_k\}$ como se ha demostrado anteriormente en la Sección 9.3.5.

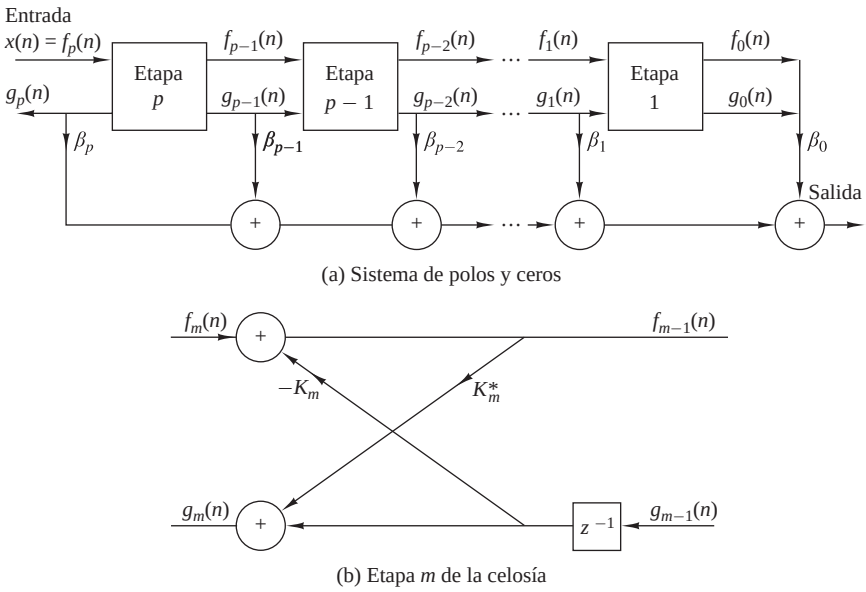


Figura 12.6.2. Estructura en celosía-escalera para el sistema de polos y ceros.

Dados los polinomios $C_q(z)$ y $A_p(z)$, donde $p \geq q$, los coeficientes de reflexión $\{K_i\}$ se determinan primero a partir de los coeficientes $\{a_p(k)\}$. Por medio de la relación recursiva dada por (12.3.22), también obtenemos los polinomios $B_k(z)$, $k = 1, 2, \ldots, p$. Así los parámetros de la escalera se pueden obtener a partir de (12.6.13), la cual puede expresarse como

$$\begin{aligned} C_m(z) &= \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k B_k(z) + \beta_m B_m(z) \\ &= C_{m-1}(z) + \beta_m B_m(z) \end{aligned} \tag{12.6.14}$$

o, lo que es equivalente,

$$C_{m-1}(z) = C_m(z) - \beta_m B_m(z), \qquad m = p, p-1, \ldots, 1 \tag{12.6.15}$$

Ejecutando esta relación recursiva inversa, podemos generar todos los polinomios de grado inferior, $C_m(z)$, $m = p-1, \ldots, 1$. Como $b_m(m) = 1$, los parámetros β_m se determinan a partir de (12.6.15) haciendo

$$\beta_m = c_m(m), \qquad m = p, p-1, \ldots, 1, 0$$

Cuando se excita mediante una secuencia de ruido blanco, este filtro en celosía-escalera genera un proceso auto-regresivo de media móvil ARMA(p,q) que tiene el siguiente espectro de densidad de potencia

$$\Gamma_{xx}(f) = \sigma_w^2 \frac{|C_q(f)|^2}{|A_p(f)|^2} \tag{12.6.16}$$

y una función de autocorrelación que satisface (12.2.18), donde σ_w^2 es la varianza de la secuencia de ruido blanco de entrada.

12.7 Filtros de Wiener para filtrado y predicción

En muchas aplicaciones prácticas disponemos de una señal de entrada $\{x(n)\}$, que consta de la suma de una señal deseada $\{s(n)\}$ y un ruido o interferencia no deseado $\{w(n)\}$, y precisamos diseñar un filtro que suprima las interferencias no deseadas. En un caso así, el objetivo es diseñar un sistema que filtre la interferencia aditiva a la vez que se conservan las características de la señal deseada $\{s(n)\}$.

En esta sección vamos a abordar el problema de la estimación de una señal en presencia de ruido aditivo. El estimador está restringido a un filtro lineal cuya respuesta al impulso es $\{h(n)\}$, diseñado de modo que su salida se aproxime a una determinada señal deseada $\{d(n)\}$. La Figura 12.7.1 ilustra el problema de la estimación lineal.

La secuencia de entrada al filtro es $x(n) = s(n) + w(n)$ y la secuencia de salida es $y(n)$. La diferencia entre la señal deseada y la salida del filtro es la secuencia de error $e(n) = d(n) - y(n)$.

Vamos a distinguir tres casos especiales:

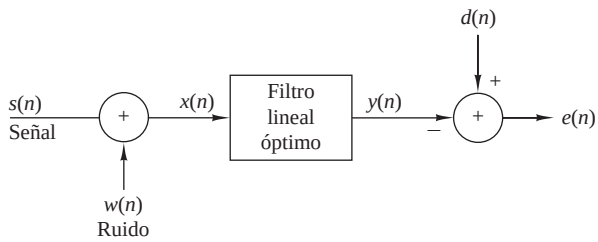


Figura 12.7.1. Modelo del problema de la estimación lineal.

1. Si $d(n) = s(n)$, el problema de estimación lineal se traduce en un problema de *filtrado*.
2. Si $d(n) = s(n+D)$, donde $D > 0$, el problema de estimación lineal se traduce en un problema de *predicción* de señal. Observe que este problema es diferente de la predicción tratada anteriormente en el capítulo, donde $d(n) = x(n+D)$, $D \geq 0$.
3. Si $d(n) = s(n-D)$, donde $D > 0$, el problema de estimación lineal se traduce en un problema de *suavizado* de la señal.

Este estudio se va a centrar en los casos de filtrado y predicción.

El criterio seleccionado para optimizar la respuesta al impulso del filtro $\{h(n)\}$ es la minimización del error cuadrático medio. Este criterio tiene las ventajas de la simplicidad y trazabilidad matemática.

Las suposiciones básicas son: las secuencias $\{s(n)\}$, $\{w(n)\}$ y $\{d(n)\}$ tienen media cero y son estacionarias en sentido amplio. Se supone que el filtro lineal será FIR o IIR. Si es de tipo IIR, suponemos que los datos de entrada $\{x(n)\}$ están disponibles en un intervalo pasado infinito. Comenzamos diseñando el filtro FIR óptimo. El filtro lineal óptimo, en el sentido de tener un error cuadrático medio mínimo, se conoce como *filtro de Wiener*.

12.7.1 Filtro FIR de Wiener

Suponga que el filtro está restringido para tener una longitud M con coeficientes $\{h_k, 0 \leq k \leq M-1)$. Puesto que su salida $y(n)$ depende del registro de datos finito $x(n)$, $x(n-1), \ldots, x(n-M+1)$,

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) \tag{12.7.1}$$

El valor cuadrático medio del error entre la salida deseada $d(n)$ e $y(n)$ es

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_M &= E|e(n)|^2 \\ &= E\left| d(n) - \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) \right|^2 \end{aligned} \tag{12.7.2}$$

Puesto que se trata de una función cuadrática de los coeficientes del filtro, la minimización de $\mathscr{E}_M$ proporciona el conjunto de ecuaciones lineales

$$\sum_{k=0}^{M-1} h(k)\gamma_{xx}(l-k) = \gamma_{dx}(l), \qquad l = 0, 1, \ldots, M-1 \tag{12.7.3}$$

donde $\gamma_{xx}(k)$ es la autocorrelación de la secuencia de entrada $\{x(n)\}$ y $\gamma_{dx}(k) = E[d(n)x^*(n-k)]$ es la correlación cruzada entre la secuencia deseada $\{d(n)\}$ y la secuencia de entrada $\{x(n),\ 0 \leq n \leq M-1\}$. El conjunto de ecuaciones lineales que especifica el filtro óptimo se denomina *ecuación de Wiener–Hopf*. Estas ecuaciones también se conocen como ecuaciones normales, las cuales hemos visto anteriormente en el capítulo al estudiar la predicción lineal de una muestra.

En general, las ecuaciones de (12.7.3) pueden expresarse en forma matricial como

$$\Gamma_M \mathbf{h}_M = \gamma_d \tag{12.7.4}$$

donde Γ_M es una matriz $M \times M$ (Hermitiana) de Toeplitz con elementos $\Gamma_{lk} = \gamma_{xx}(l-k)$ y γ_d es el vector de correlación cruzada $M \times 1$ con elementos $\gamma_{dx}(l)$, $l = 0, 1, \ldots, M-1$. La solución para los coeficientes del filtro óptimo es

$$\mathbf{h}_{\text{opt}} = \Gamma_M^{-1} \gamma_d \tag{12.7.5}$$

y el error cuadrático medio mínimo (MMSE) resultante que se consigue con el filtro de Wiener es

$$\text{MMSE}_M = \min_{\mathbf{h}_M} \mathscr{E}_M = \sigma_d^2 - \sum_{k=0}^{M-1} h_{\text{opt}}(k)\gamma_{dx}^*(k) \tag{12.7.6}$$

o, lo que es equivalente,

$$\text{MMSE}_M = \sigma_d^2 - \gamma_d^{*t}\Gamma_M^{-1}\gamma_d \tag{12.7.7}$$

donde $\sigma_d^2 = E|d(n)|^2$.

Considere ahora algunos casos especiales de (12.7.3). Si estamos en el caso de filtrado, $d(n) = s(n)$. Además, si $s(n)$ y $w(n)$ son secuencias aleatorias incorreladas, como suele ocurrir habitualmente en los casos prácticos, entonces

$$\begin{aligned} \gamma_{xx}(k) &= \gamma_{ss}(k) + \gamma_{ww}(k) \\ \gamma_{dx}(k) &= \gamma_{ss}(k) \end{aligned} \tag{12.7.8}$$

y las ecuaciones normales de (12.7.3) se transforman en

$$\sum_{k=0}^{M-1} h(k)[\gamma_{ss}(l-k) + \gamma_{ww}(l-k)] = \gamma_{ss}(l), \qquad l = 0,1,\ldots,M-1 \tag{12.7.9}$$

Si estamos en el caso de predicción, entonces $d(n) = s(n+D)$ donde $D > 0$. Suponiendo que $s(n)$ y $w(n)$ son secuencias aleatorias incorreladas, tenemos

$$\gamma_{dx}(k) = \gamma_{ss}(l+D) \tag{12.7.10}$$

Por tanto, las ecuaciones para el filtro de predicción de Wiener son

$$\sum_{k=0}^{M-1} h(k)[\gamma_{ss}(l-k) + \gamma_{ww}(l-k)] = \gamma_{ss}(l+D), \qquad l = 0,1,\ldots,M-1 \tag{12.7.11}$$

En todos estos casos, la matriz de correlación que se tiene que invertir es Toeplitz. Luego puede emplearse el algoritmo de Levinson–Durbin (generalizado) para obtener los coeficientes del filtro óptimo.

EJEMPLO 12.7.1

Considere una señal $x(n) = s(n) + w(n)$, donde $s(n)$ es un proceso AR(1) que satisface la ecuación en diferencias

$$s(n) = 0.6s(n-1) + v(n)$$

donde $\{v(n)\}$ es una secuencia de ruido blanco con varianza $\sigma_v^2 = 0.64$ y $\{w(n)\}$ es una secuencia de ruido blanco con varianza $\sigma_w^2 = 1$. Diseñaremos un filtro de Wiener de longitud $M = 2$ para estimar $\{s(n)\}$.

Solución. Dado que $\{s(n)\}$ se obtiene excitando un filtro de un único polo con ruido blanco, la densidad espectral de potencia de $s(n)$ es

$$\begin{aligned} \Gamma_{ss}(f) &= \sigma_v^2|H(f)|^2 \\ &= \frac{0.64}{|1-0.6e^{-j2\pi f}|^2} \\ &= \frac{0.64}{1.36 - 1.2\cos 2\pi f} \end{aligned}$$

La secuencia de autocorrelación correspondiente $\{\gamma_{ss}(m)\}$ es

$$\gamma_{ss}(m) = (0.6)^{|m|}$$

Las ecuaciones para los coeficientes del filtro son

$$\begin{aligned} 2h(0) + 0.6h(1) &= 1 \\ 0.6h(0) + 2h(1) &= 0.6 \end{aligned}$$

La solución de estas ecuaciones proporciona el resultado

$$h(0) = 0.451, \qquad h(1) = 0.165$$

El error cuadrático medio mínimo correspondiente es

$$\begin{aligned} \text{MMSE}_2 &= 1 - h(0)\gamma_{ss}(0) - h(1)\gamma_{ss}(1) \\ &= 1 - 0.451 - (0.165)(0.6) \\ &= 0.45 \end{aligned}$$

Este error puede reducirse aún más aumentando la longitud del filtro de Wiener (*véase* el Problema 12.35).

12.7.2 Principio de ortogonalidad en la estimación lineal por mínimos cuadrados

Las ecuaciones normales para los coeficientes del filtro óptimo dadas por (12.7.3) pueden obtenerse directamente aplicando el principio de ortogonalidad en la estimación lineal por mínimos cuadrados. El error cuadrático medio $\mathscr{E}_M$ definido en (12.7.2) es un mínimo si los coeficientes del filtro $\{h(k)\}$ se seleccionan de manera que el error sea ortogonal en cada uno de los puntos de datos del estimado,

$$E[e(n)x^*(n-l)] = 0, \qquad l = 0, 1, \ldots, M-1 \tag{12.7.12}$$

donde

$$e(n) = d(n) - \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) \tag{12.7.13}$$

Inversamente, si los coeficientes del filtro satisfacen la expresión (12.7.12), el error cuadrático medio resultante es un mínimo.

Geométricamente, la salida del filtro, que es el estimado

$$\hat{d}(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) \tag{12.7.14}$$

es un vector en el subespacio ocupado por los datos $\{x(k), 0 \le k \le M-1\}$. El error $e(n)$ es un vector de $d(n)$ a $\hat{d}$(n) [es decir, $d(n) = e(n) + \hat{d}(n)$], como se muestra en la Figura 12.7.2. El principio de ortogonalidad establece que la longitud $\mathscr{E}_M = E|e(n)|^2$ es un mínimo cuando $e(n)$ es perpendicular al subespacio de datos [es decir, $e(n)$ es ortogonal a cada punto de datos $x(k)$, $0 \le k \le M-1$].

Observe que la solución obtenida a partir de las ecuaciones normales dadas en (12.7.3) es única si los datos $\{x(n)\}$ en el estimado $\hat{d}(n)$ son *linealmente independientes*. En este caso, la matriz de correlación Γ_M es no singular. Por otro lado, si los datos son linealmente dependientes, el rango de Γ_M es menor que M y, por tanto,

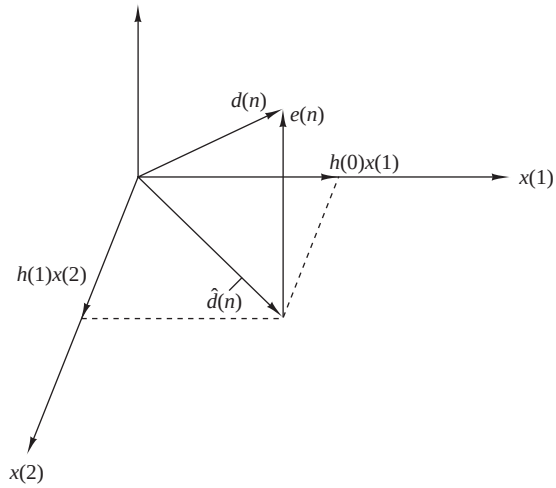


Figura 12.7.2. Interpretación geométrica del problema del error cuadrático medio lineal.

la solución no es única. En este caso, el estimado $\hat{d}(n)$ puede expresarse como una combinación lineal de un conjunto reducido de puntos de datos linealmente independientes igual al rango de Γ_M.

Dado que el error cuadrático medio se minimiza seleccionando los coeficientes del filtro para satisfacer el principio de ortogonalidad, el error cuadrático medio mínimo (MMSE) residual es simplemente

$$\text{MMSE}_M = E[e(n)d^*(n)] \tag{12.7.15}$$

lo que proporciona el resultado dado en (12.7.6).

12.7.3 Filtro IIR de Wiener

En la sección anterior hemos restringido el filtro para que fuera un sistema FIR y hemos obtenido un conjunto de M ecuaciones lineales para los coeficientes del filtro óptimo. En esta sección, consideramos que el filtro puede ser de duración infinita (IIR) y la secuencia de datos también es infinita. Por tanto, la salida del filtro es

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) \tag{12.7.16}$$

Los coeficientes del filtro se seleccionan para minimizar el error cuadrático medio entre la salida deseada $d(n)$ e $y(n)$, es decir,

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_\infty &= E|e(n)|^2 \\ &= E\left|d(n) - \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)\right|^2 \end{aligned} \tag{12.7.17}$$

La aplicación del principio de ortogonalidad lleva a la ecuación de Wiener–Hopf,

$$\sum_{k=0}^{\infty} h(k)\gamma_{xx}(l-k) = \gamma_{dx}(l), \qquad l \geq 0 \tag{12.7.18}$$

El error cuadrático medio mínimo (MMSE) residual se obtiene de manera sencilla mediante la aplicación de la condición dada por (12.7.15). Así, obtenemos

$$\text{MMSE}_\infty = \min_{\mathbf{h}} \mathscr{E}_\infty = \sigma_d^2 - \sum_{k=0}^{\infty} h_{\text{opt}}(k)\gamma_{dx}^*(k) \tag{12.7.19}$$

La ecuación de Wiener–Hopf dada por (12.7.18) no puede resolverse directamente con las técnicas de la transformada z, porque la ecuación se cumple sólo para $l \geq 0$. Resolvemos el filtro óptimo IIR basado en la representación de las innovaciones del proceso aleatorio estacionario $\{x(n)\}$.

Recuerde que un proceso aleatorio estacionario $\{x(n)\}$ con autocorrelación $\gamma_{xx}(k)$ y densidad espectral de potencia $\Gamma_{xx}(f)$ puede representarse mediante un proceso de innovación equivalente, $\{i(n)\}$, pasando la función $\{x(n)\}$ a través de un filtro blanqueador de ruido con una función de sistema $1/G(z)$, donde $G(z)$ es la parte de fase mínima obtenida a partir de la factorización espectral de $\Gamma_{xx}(z)$:

$$\Gamma_{xx}(z) = \sigma_i^2 G(z)G(z^{-1}) \tag{12.7.20}$$

Por tanto, $G(z)$ es analítica en la región $|z| > r_1$, donde $r_1 < 1$.

Ahora el filtro de Wiener óptimo puede interpretarse como la conexión en cascada del filtro blanqueador $1/G(z)$ con un segundo filtro, por ejemplo, $Q(z)$, cuya salida $y(n)$ es idéntica a la salida del filtro óptimo de Wiener. Por tanto,

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} q(k)i(n-k) \tag{12.7.21}$$

y $e(n) = d(n) - y(n)$, la aplicación del principio de ortogonalidad proporciona la nueva ecuación de Wiener–Hopf como

$$\sum_{k=0}^{\infty} q(k)\gamma_{ii}(l-k) = \gamma_{di}(l), \qquad l \geq 0 \tag{12.7.22}$$

Pero dado que $\{i(n)\}$ es blanca, se deduce que $\gamma_{ii}(l-k) = 0$ a menos que $l = k$. Luego obtenemos la solución

$$q(l) = \frac{\gamma_{di}(l)}{\gamma_{ii}(0)} = \frac{\gamma_{di}(l)}{\sigma_i^2}, \qquad l \geq 0 \tag{12.7.23}$$

La transformada z de la secuencia $\{q(l)\}$ es

$$\begin{aligned} Q(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} q(k)z^{-k} \\ &= \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{di}(k)z^{-k} \end{aligned} \tag{12.7.24}$$

Si designamos la transformada z de la secuencia de la correlación cruzada bilateral $\gamma_{di}(k)$ por $\Gamma_{di}(z)$

$$\Gamma_{di}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{di}(k)z^{-k} \tag{12.7.25}$$

y definimos $[\Gamma_{di}(z)]_+$ como

$$[\Gamma_{di}(z)]_+ = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{di}(k)z^{-k} \tag{12.7.26}$$

entonces

$$Q(z) = \frac{1}{\sigma_i^2}[\Gamma_{di}(z)]_+ \tag{12.7.27}$$

Para determinar $[\Gamma_{di}(z)]_+$, comenzamos con la salida del filtro blanqueador de ruido, que se puede expresar como

$$i(n) = \sum_{k=0}^{\infty} v(k)x(n-k) \tag{12.7.28}$$

donde $\{v(k), k \geq 0\}$ es la respuesta al impulso del filtro blanqueador de ruido

$$\frac{1}{G(z)} \equiv V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v(k) z^{-k} \tag{12.7.29}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \gamma_{di}(k) &= E[d(n)i^*(n-k)] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} v(m) E[d(n)x^*(n-m-k)] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} v(m)\gamma_{dx}(k+m) \end{aligned} \tag{12.7.30}$$

La transformada z de la correlación cruzada $\gamma_{di}(k)$ es

$$\begin{aligned} \Gamma_{di}(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} v(m)\gamma_{dx}(k+m) \right] z^{-k} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} v(m) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{dx}(k+m) z^{-k} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} v(m) z^{m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{dx}(k) z^{-k} \\ &= V(z^{-1})\Gamma_{dx}(z) = \frac{\Gamma_{dx}(z)}{G(z^{-1})} \end{aligned} \tag{12.7.31}$$

Por tanto,

$$Q(z) = \frac{1}{\sigma_i^2} \left[\frac{\Gamma_{dx}(z)}{G(z^{-1})} \right]_+ \tag{12.7.32}$$

Por último, el filtro IIR de Wiener óptimo tiene la función de sistema

$$\begin{aligned} H_{\text{opt}}(z) &= \frac{Q(z)}{G(z)} \\ &= \frac{1}{\sigma_i^2 G(z)} \left[\frac{\Gamma_{dx}(z)}{G(z^{-1})} \right]_+ \end{aligned} \tag{12.7.33}$$

En resumen, la solución del filtro IIR de Wiener óptimo requiere que llevemos a cabo la factorización espectral de $\Gamma_{xx}(z)$ para obtener $G(z)$, la componente de fase mínima, y entonces resolvemos para obtener la parte causal de $\Gamma_{dx}(z)/G(z^{-1})$. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento.

EJEMPLO 12.7.2

Determine el filtro IIR óptimo de Wiener para la señal dada en el Ejemplo 12.7.1.

Solución. Para esta señal tenemos

$$\Gamma_{xx}(z) = \Gamma_{ss}(z) + 1 = \frac{1.8(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z)}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)}$$

donde $\sigma_i^2 = 1.8$ y

$$G(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - 0.6z^{-1}}$$

La transformada z de la correlación cruzada $\gamma_{dx}(m)$ es

$$\Gamma_{dx}(z) = \Gamma_{ss}(z) = \frac{0.64}{(1 - 0.6z^{-1})(1 - 0.6z)}$$

Luego

$$\begin{aligned}\left[\frac{\Gamma_{dx}(z)}{G(z^{-1})}\right]_+ &= \left[\frac{0.64}{(1 - \frac{1}{3}z)(1 - 0.6z^{-1})}\right]_+ \\ &= \left[\frac{0.8}{1 - 0.6z^{-1}} + \frac{0.266z}{1 - \frac{1}{3}z}\right]_+ \\ &= \frac{0.8}{1 - 0.6z^{-1}}\end{aligned}$$

El filtro IIR óptimo tiene la función de sistema

$$\begin{aligned}H_{\text{opt}}(z) &= \frac{1}{1.8}\left(\frac{1 - 0.6z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}\right)\left(\frac{0.8}{1 - 0.6z^{-1}}\right) \\ &= \frac{\frac{4}{9}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}\end{aligned}$$

y una respuesta al impulso

$$h_{\text{opt}}(n) = \frac{4}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^n, \qquad n \geq 0$$

Podemos terminar esta sección expresando el error cuadrático medio mínimo dado por (12.7.19) en función de las características en el dominio de la frecuencia del filtro. En primer lugar, destacamos que $\sigma_d^2 \equiv E|d(n)|^2$ es simplemente el valor de la secuencia de autocorrelación $\{\gamma_{dd}(k)\}$ evaluada en $k = 0$. Dado que

$$\gamma_{dd}(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint \Gamma_{dd}(z)z^{k-1}dz \tag{12.7.34}$$

se deduce que

$$\sigma_d^2 = \gamma_{dd}(0) = \frac{1}{2\pi j}\oint \frac{\Gamma_{dd}(z)}{z}dz \tag{12.7.35}$$

donde la integral de contorno se evalúa a lo largo de un camino cerrado que encierra el origen de la región de convergencia de $\Gamma_{dd}(z)$.

El segundo término de (12.7.19) también se transforma fácilmente mediante la aplicación del teorema de Parseval. Dado que $h_{\text{opt}}(k) = 0$ para $k < 0$, tenemos

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{\text{opt}}(k)\gamma_{dx}^*(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint H_{\text{opt}}(z)\Gamma_{dx}(z^{-1})z^{-1}dz \tag{12.7.36}$$

donde C es un camino cerrado que encierra el origen que cae dentro de la región común de convergencia de $H_{\text{opt}}(z)$ y $\Gamma_{dx}(z^{-1})$.

Combinando (12.7.35) con (12.7.36), obtenemos la expresión deseada para el error cuadrático medio mínimo MMSE_∞ en la forma

$$\text{MMSE}_\infty = \frac{1}{2\pi j}\oint [\Gamma_{dd}(z) - H_{\text{opt}}(z)\Gamma_{dx}(z^{-1})]z^{-1}dz \tag{12.7.37}$$

EJEMPLO 12.7.3

Para el filtro óptimo de Wiener del Ejemplo 12.7.2, el error cuadrático medio mínimo es

$$\text{MMSE}_\infty = \frac{1}{2\pi j}\oint \left[\frac{0.3555}{(z-\frac{1}{3})(1-0.6z)}\right]dz$$

Existe un único polo dentro de la circunferencia unidad en $z = \frac{1}{3}$. Evaluando el residuo en el polo, obtenemos

$$\text{MMSE}_\infty = 0.444$$

Observe que este error cuadrático medio mínimo es sólo ligeramente más pequeño que el correspondiente para el filtro óptimo de Wiener de dos retardos del Ejemplo 12.7.1.

12.7.4 Filtro de Wiener no causal

En la sección anterior hemos restringido el filtro óptimo de Wiener para que sea causal [es decir, $h_{\text{opt}}(n) = 0$ para $n < 0$]. En esta sección vamos a eliminar esta condición y vamos a permitir que el filtro incluya las infinitas muestras pasadas y futuras de la secuencia $\{x(n)\}$ para formar la salida $y(n)$, es decir,

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \tag{12.7.38}$$

El filtro resultante no es realizable físicamente. Puede verse también un *filtro de suavizado* en el que los valores futuros infinitos de la señal se utilizan para suavizar el estimado $\hat{d}(n) = y(n)$ de la señal deseada $d(n)$.

La aplicación del principio de ortogonalidad proporciona la ecuación de Wiener–Hopf para el filtro no causal en la forma

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\gamma_{xx}(l-k) = \gamma_{dx}(l), \qquad -\infty < l < \infty \tag{12.7.39}$$

y el error cuadrático medio mínimo resultante MMSE_{nc} como

$$\text{MMSE}_{\text{nc}} = \sigma_d^2 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\gamma_{dx}^*(k) \tag{12.7.40}$$

Dado que (12.7.39) se cumple para $-\infty < l < \infty$, esta ecuación puede transformarse directamente para especificar el filtro óptimo de Wiener no causal como

$$H_{\text{nc}}(z) = \frac{\Gamma_{dx}(z)}{\Gamma_{xx}(z)} \tag{12.7.41}$$

El error cuadrático medio mínimo MMSE_{nc} también puede expresarse simplemente en el dominio z como

$$\text{MMSE}_{\text{nc}} = \frac{1}{2\pi j}\oint_C [\Gamma_{dd}(z) - H_{\text{nc}}(z)\Gamma_{dx}(z^{-1})]z^{-1}dz \tag{12.7.42}$$

En el siguiente ejemplo comparamos la forma del filtro óptimo no causal con el filtro óptimo causal obtenido en la sección anterior.

EJEMPLO 12.7.4

El filtro óptimo de Wiener no causal para las características de señal dadas en el Ejemplo 12.7.1 queda definido por (12.7.41), donde

$$\Gamma_{dx}(z) = \Gamma_{ss}(z) = \frac{0.64}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)}$$

y

$$\begin{aligned}\Gamma_{xx}(z) &= \Gamma_{ss}(z) + 1 \\ &= \frac{2(1-0.3z^{-1}-0.3z)}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)}\end{aligned}$$

Luego,

$$H_{\text{nc}}(z) = \frac{0.3555}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z)}$$

Evidentemente, este filtro es no causal.

El error cuadrático medio mínimo conseguido por este filtro se determina evaluando (12.7.42). El integrando es

$$\frac{1}{z}\Gamma_{ss}(z)[1-H_{\text{nc}}(z)] = \frac{0.3555}{(z-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{3}z)}$$

El único polo que se encuentra dentro de la circunferencia unidad es $z = \frac{1}{3}$. Luego el residuo es

$$\left.\frac{0.3555}{1-\frac{1}{3}z}\right|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{0.3555}{8/9} = 0.40$$

Por tanto, el error cuadrático medio mínimo alcanzable con el filtro óptimo de Wiener no causal es

$$\text{MMSE}_{\text{nc}} = 0.40$$

Observe que es menor que el error cuadrático medio mínimo del filtro causal, como era de esperar.

12.8 Resumen y referencias

El punto más importante de este capítulo es el diseño de sistemas lineales óptimos para operaciones de filtrado y predicción lineales. El criterio de optimización es la minimización del error cuadrático medio entre la salida deseada del filtro especificado y la salida real del mismo.

En el desarrollo de la predicción lineal, hemos demostrado que las ecuaciones para los errores de predicción directo e inverso especificaban un filtro en celosía cuyos parámetros, los coeficientes de reflexión $\{K_m\}$, se relacionaban con los coeficientes del filtro $\{a_m(k)\}$ del predictor FIR lineal de la forma directa y el filtro de error de predicción asociado. Los coeficientes del filtro óptimo $\{K_m\}$ y $\{a_m(k)\}$ se obtienen fácilmente a partir de la solución de las ecuaciones normales.

Hemos descrito dos algoritmos de cálculo eficientes para resolver las ecuaciones normales, el algoritmo de Levinson–Durbin y el algoritmo de Schur. Ambos algoritmos son adecuados para resolver un sistema Toeplitz de ecuaciones lineales y tienen una complejidad de cálculo de $O(p^2)$ unidades de tiempo cuando se ejecutan sobre

un único procesador. Sin embargo, cuando se emplea procesamiento paralelo, el algoritmo de Schur resuelve las ecuaciones normales en $O(p)$ unidades de tiempo, mientras que el algoritmo de Levinson–Durbin requiere $O(p \log p)$ unidades de tiempo.

Además del filtro en celosía de sólo ceros resultante de la predicción lineal, también hemos obtenido una estructura de filtro en celosía auto-regresivo (de sólo polos) y una estructura de filtro (de polos y ceros) en celosía-escalera auto-regresivo de media móvil (ARMA). Por último, hemos descrito el diseño de filtros lineales óptimos, conocidos como filtros de Wiener.

La teoría de estimación lineal tiene una larga y rica historia de desarrollo en las últimas cuatro décadas. Kailath (1974) presenta información histórica que cubre las tres primeras décadas. El trabajo pionero de Wiener (1949) sobre el filtrado óptimo lineal para señales estadísticamente estacionarias es especialmente importante. La generalización de la teoría de filtros de Wiener a sistemas dinámicos con entradas aleatorias fue desarrollado por Kalman (1960), y Kalman y Bucy (1961). Los filtros de Kalman se tratan en los libros de Meditch (1969), Brown (1983), y Chui y Chen (1987). El monográfico de Kailath (1981) se ocupa tanto de los filtros de Wiener como de Kalman.

Existen numerosas referencias sobre los filtros de predicción lineales y en celosía. Han publicado tutoriales sobre estos temas en diversas revistas Makhoul (1975, 1978) y Friedlander (1982a, b). Los libros de Haykin (1991), Markel y Gray 1976), y Tretter (1976) proporcionan estudios exhaustivos sobre estos temas. Las aplicaciones de la predicción lineal al análisis de espectros se aborda en los libros de Kay (1988) y Marple (1987), aplicaciones a la geofísica en el libro de Robinson y Treitel (1980), y al filtrado adaptativo en el libro de Haykin (1991).

El algoritmo de Levinson–Durbin para resolver las ecuaciones normales de forma recursiva fue proporcionado por Levinson (1947) y más tarde modificado por Durbin (1959). Las variaciones de este clásico algoritmo son los *algoritmos split-Levinson*, y han sido desarrollados por Delsarte y Genin (1986) y por Krishna (1988). Estos algoritmos aplican simetrías adicionales en la matriz de correlación de Toeplitz y ahorran aproximadamente en un factor de 2 el número de multiplicaciones.

El algoritmo de Schur fue descrito originalmente por Schur (1917) en un documento publicado en alemán. Una traducción al inglés de dicho documento apareció en el libro editado por Gohberg (1986). El algoritmo de Schur está íntimamente relacionado con los polinomios $\{A_m(z)\}$, que se pueden interpretar como polinomios ortogonales. Un tratamiento de los polinomios ortogonales puede verse en los libros de Szegö (1967), Grenander y Szegö (1958) y Geronimus (1958). La tésis de Vieira (1977) y los documentos de Kailath *et al.* (1978), Delsarte *et al.* (1978), y Youla y Kazanjian (1978) proporcionan resultados adicionales sobre los polinomios ortogonales. Kailath (1985, 1986) proporciona tutoriales sobre el algoritmo de Schur y sus relaciones con los polinomios ortogonales y el algoritmo de Levinson–Durbin. La estructura de procesamiento *pipeline* paralelo para calcular los coeficientes de reflexión basado en el algoritmo de Schur y el problema relacionado con la resolución de sistemas Toeplitz de ecuaciones lineales se describe en el documento de Kung y Hu (1983). Por último, mencionaremos que puede conseguirse cierta eficiencia en los cálculos del algoritmo de Schur, explotando aún más las propiedades de simetría de las matrices de Toeplitz, como se describe en Krishna (1988). Esto nos lleva al algoritmo *split*-Schur, que es análogo al algoritmo *split*-Levinson.

Problemas

12.1 El espectro de densidad de potencia de un proceso auto-regresivo $\{x(n)\}$ está dado por

$$\begin{aligned}\Gamma_{xx}(\omega) &= \frac{\sigma_w^2}{|A(\omega)|^2} \\ &= \frac{25}{|1 - e^{-j\omega} + \frac{1}{2}e^{-j2\omega}|^2}\end{aligned}$$

donde σ_w^2 es la varianza de la secuencia de entrada.

(a) Determine la ecuación en diferencias para generar el proceso auto-regresivo cuando la excitación es ruido blanco.

(b) Determine la función de sistema para el filtro blanqueador.

12.2 Un proceso ARMA tiene una autocorrelación $\{\gamma_{xx}(m)\}$ cuya transformada z está dada por

$$\Gamma_{xx}(z) = 9\frac{(z-\frac{1}{3})(z-3)}{(z-\frac{1}{2})(z-2)}, \quad \frac{1}{2} < |z| < 2$$

(a) Determine el filtro $H(z)$ para generar $\{x(n)\}$ a partir de una secuencia de entrada de ruido blanco. ¿Es $H(z)$ única? Explique su respuesta.

(b) Determine un filtro blanqueador estable y lineal para la secuencia $\{x(n)\}$.

12.3 Considere el proceso ARMA generado por la ecuación en diferencias

$$x(n) = 1.6x(n-1) - 0.63x(n-2) + w(n) + 0.9w(n-1)$$

(a) Determine la función de sistema del filtro blanqueador y sus polos y ceros.

(b) Determine el espectro de densidad de potencia de $\{x(n)\}$.

12.4 Determine los coeficientes de la celosía correspondientes al filtro FIR cuya función de sistema es

$$H(z) = A_3(z) = 1 + \frac{13}{24}z^{-1} + \frac{5}{8}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3}$$

12.5 Determine los coeficientes de reflexión $\{K_m\}$ del filtro en celosía FIR descrito por la función de sistema

$$H(z) = A_2(z) = 1 + 2z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}$$

12.6 **(a)** Determine los ceros y dibuje el patrón de ceros para el filtro FIR en celosía con coeficientes de reflexión

$$K_1 = \frac{1}{2}, \qquad K_2 = -\frac{1}{3}, \qquad K_3 = 1$$

(b) Repita el apartado (a) pero con $K_3 = -1$.

(c) Los ceros deben encontrarse sobre la circunferencia unidad. ¿Puede generalizarse este resultado? ¿cómo?

12.7 Determine la respuesta al impulso del filtro FIR que se describe mediante los coeficientes de la celosía $K_1 = 0.6$, $K_2 = 0.3$, $K_3 = 0.5$ y $K_4 = 0.9$.

12.8 En la Sección 12.3.4 hemos indicado que el filtro blanqueador de ruido $A_p(z)$ para un proceso auto-regresivo AR(p) causal es un filtro de error de predicción lineal directo de orden p. Demuestre que el filtro de error de predicción lineal inverso de orden p es el filtro blanqueador de ruido del correspondiente proceso AR(p) anticausal.

12.9 Utilice el principio de ortogonalidad para determinar las ecuaciones normales y el error cuadrático medio mínimo resultante para un predictor directo de orden p, que prediga m muestras $(m > 1)$ futuras (predictor directo de m muestras). Dibuje el filtro de error de predicción.

12.10 Repita el Problema 12.9 para un predictor inverso de m muestras.

12.11 Determine un algoritmo recursivo de Levinson–Durbin para obtener los coeficientes de un filtro de error de predicción inverso. Utilice el resultado para demostrar que los coeficientes de los predictores directo e inverso pueden expresarse recursivamente como

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_m &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{m-1} \\ 0 \end{bmatrix} + K_m \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{m-1} \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{b}_m &= \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{m-1} \\ 0 \end{bmatrix} + K_m^* \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{m-1} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

12.12 El algoritmo de Levinson–Durbin descrito en la Sección 12.4.1 resuelve las ecuaciones lineales

$$\Gamma_m \mathbf{a}_m = -\gamma_m$$

donde el lado derecho de esta ecuación tiene elementos de la secuencia de autocorrelación que también son elementos de la matriz Γ. Considere el problema más general de resolver las ecuaciones lineales

$$\Gamma_m \mathbf{b}_m = \mathbf{c}_m$$

donde $\mathbf{c}_m$ es un vector arbitrario (el vector $\mathbf{b}_m$ no está relacionado con los coeficientes del predictor inverso). Demuestre que la solución para $\Gamma_m \mathbf{b}_m = \mathbf{c}_m$ puede obtenerse a partir de un algoritmo *de Levinson–Durbin generalizado*, el cual se define recursivamente como

$$\begin{aligned} b_m(m) &= \frac{c(m) - \gamma_{m-1}^{bt} \mathbf{b}_{m-1}}{E_{m-1}^f} \\ b_m(k) &= b_{m-1}(k) - b_m(m) a_{m-1}^*(m-k), \qquad \begin{matrix} k = 1, 2, \ldots, m-1 \\ m = 1, 2, \ldots, p \end{matrix} \end{aligned}$$

donde $b_1(1) = c(1)/\gamma_{xx}(0) = c(1)/E_0^f$ y $a_m(k)$ están dados por (12.4.17). Es necesaria después una segunda recursión para resolver la ecuación $\Gamma_m \mathbf{b}_m = \mathbf{c}_m$.

12.13 Utilice el algoritmo generalizado de Levinson–Durbin para resolver las ecuaciones normales recursivamente para los predictores directo e inverso de m muestras.

12.14 Considere el proceso AR(3) generado por la ecuación

$$x(n) = \tfrac{14}{24} x(n-1) + \tfrac{9}{24} x(n-2) - \tfrac{1}{24} x(n-3) + w(n)$$

donde $w(n)$ es un proceso de ruido blanco estacionario de varianza σ_w^2.

(a) Determine los coeficientes del predictor lineal óptimo para $p = 3$.

(b) Determine la secuencia de autocorrelación $\gamma_{xx}(m)$, $0 \le m \le 5$.

(c) Determine los coeficientes de reflexión correspondientes al predictor lineal con $p = 3$.

12.15 La transformada z de la autocorrelación $\gamma_{xx}(m)$ de un proceso auto-regresivo de media móvil ARMA$(1,1)$ es

$$\Gamma_{xx}(z) = \sigma_w^2 H(z) H(z^{-1})$$

$$\Gamma_{xx}(z) = \frac{4\sigma_w^2}{9} \frac{5 - 2z - 2z^{-1}}{10 - 3z^{-1} - 3z}$$

(a) Determine la función de sistema de fase mínima $H(z)$.

(b) Determine la función de sistema $H(z)$ para un sistema estable de fase mixta.

12.16 Considere un filtro FIR con el vector de coeficientes

$$\begin{bmatrix} 1 & -2r\cos\theta & r^2 \end{bmatrix}$$

(a) Determine los coeficientes de reflexión para el correspondiente filtro FIR en celosía.

(b) Determine los valores de los coeficientes de reflexión en el límite cuando $r \to 1$.

12.17 Un proceso AR(3) está caracterizado por los coeficientes de predicción

$$a_3(1) = -1.25, \qquad a_3(2) = 1.25, \qquad a_3(3) = -1$$

(a) Determine los coeficientes de reflexión.

(b) Determine $\gamma_{xx}(m)$ para $0 \le m \le 3$.

(c) Determine el error de predicción cuadrático medio.

12.18 La secuencia de autocorrelación para un proceso aleatorio es

$$\gamma_{xx}(m) = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ -0.5, & m = \pm 1 \\ 0.625, & m = \pm 2 \\ -0.6875, & m = \pm 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine las funciones de sistema $A_m(z)$ para los filtros de predicción de error para $m = 1, 2, 3$, los coeficientes de reflexión $\{K_m\}$ y los correspondientes errores cuadráticos medios de predicción.

12.19 La autocorrelación para un proceso AR $x(n)$ es

$$\gamma_{xx}(m) = (\frac{1}{4})^{|m|}$$

(a) Determine la ecuación en diferencias para $x(n)$.

(b) ¿Es única su respuesta? Si no lo es, proporcione cualesquiera otras soluciones posibles.

12.20 Repita el Problema 12.19 para un proceso AR cuya autocorrelación es

$$\gamma_{xx}(m) = a^{|m|} \cos \frac{\pi m}{2}$$

donde $0 < a < 1$.

12.21 Demuestre que un filtro FIR cuya función de sistema es

$$A_p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{p} a_p(k) z^{-k}$$

y cuyos coeficientes de reflexión son $|K_k| < 1$ para $1 \le k \le p-1$ y $|K_p| > 1$ es un sistema de fase máxima [todas las raíces de $A_p(z)$ quedan fuera de la circunferencia unidad].

12.22 Demuestre que la transformación

$$\mathbf{V}_m = \begin{bmatrix} 1 & K_m \\ K_m^* & 1 \end{bmatrix}$$

en el algoritmo de Schur satisface la propiedad especial

$$\mathbf{V}_m \mathbf{J} \mathbf{V}_m^t = (1 - |K_m|^2)\mathbf{J}$$

donde

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Así $\mathbf{V}_m$ se denomina matriz de J rotaciones. Su función es girar o describir una hipérbole de la fila de $\mathbf{G}_m$ a lo largo de la dirección de la primera coordenada (Kailath, 1985).

12.23 Demuestre las propiedades adicionales (a) hasta (l) de los filtros de error de predicción dadas en la Sección 12.5.

12.24 Extienda las propiedades adicionales (a) hasta (l) de los filtros de error de predicción dadas en la Sección 12.5 a señales complejas.

12.25 Determine el coeficiente de reflexión K_3 en función de las autocorrelaciones $\{\gamma_{xx}(m)\}$ del algoritmo de Schur y compare sus resultados con la expresión para K_3 obtenida a partir del algoritmo de Levinson–Durbin.

12.26 Considere un predictor directo de una muestra y longitud infinita $(p = \infty)$ para un proceso aleatorio estacionario $\{x(n)\}$ con un espectro de densidad de potencia $\Gamma_{xx}(f)$. Demuestre que el error cuadrático medio del filtro de error de predicción puede expresarse como

$$E_\infty^f = 2\pi \exp\{\int_{-1/2}^{1/2} \ln \Gamma_{xx}(f)\, df\}$$

12.27 Determine la salida de un predictor directo de m muestras y longitud infinita $(p = \infty)$ y el error cuadrático medio resultante cuando la señal de entrada es un proceso auto-regresivo de primer orden de la forma

$$x(n) = ax(n-1) + w(n)$$

12.28 Un proceso AR(3) $\{x(n)\}$ está caracterizado por la secuencia de autocorrelación $\gamma_{xx}(0) = 1$, $\gamma_{xx}(1) = \frac{1}{2}$, $\gamma_{xx}(2) = \frac{1}{8}$ y $\gamma_{xx}(3) = \frac{1}{64}$.

(a) Utilice el algoritmo de Schur para determinar los tres coeficientes de reflexión K_1, K_2 y K_3.

(b) Dibuje el filtro en celosía para sintetizar $\{x(n)\}$ a partir de una excitación de ruido blanco.

12.29 El propósito de este problema es demostrar que los polinomios $\{A_m(z)\}$, que son las funciones de sistema de los filtros de error de predicción directa de orden m, $m = 0, 1, \ldots, p$, pueden considerarse como ortogonales sobre la circunferencia unidad. Con este fin, suponga que $\Gamma_{xx}(f)$ es la densidad espectral de potencia de un proceso aleatorio $\{x(n)\}$ de media cero y sean $\{A_m(z)\}$, $m = 0, 1, \ldots, p\}$, las funciones del sistema de los correspondientes filtros de error de predicción. Demuestre que los polimonios $\{A_m(z)\}$ satisfacen la propiedad de ortogonalidad

$$\int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(f) A_m(f) A_n^*(f) df = E_m^f \delta_{mn}, \qquad m, n = 0, 1, \ldots, p$$

12.30 Determine la función de sistema del filtro de sólo polos descrito por los coeficientes de la celosía $K_1 = 0.6$, $K_2 = 0.3$, $K_3 = 0.5$ y $K_4 = 0.9$.

12.31 Determine los parámetros y dibuje la estructura del filtro en celosía-escalera para el sistema cuya función de sistema es

$$H(z) = \frac{1 - 0.8z^{-1} + 0.15z^{-2}}{1 + 0.1z^{-1} - 0.72z^{-2}}$$

12.32 Considere una señal $x(n) = s(n) + w(n)$, donde $s(n)$ es un proceso AR(1) que satisface la ecuación en diferencias

$$s(n) = 0.8s(n-1) + v(n)$$

donde $\{v(n)\}$ es una secuencia de ruido blanco con varianza $\sigma_v^2 = 0.49$ y $\{w(n)\}$ es una secuencia de ruido blanco con varianza $\sigma_w^2 = 1$. Los procesos $\{v(n)\}$ y $\{w(n)\}$ son incorrelados.

(a) Determine las secuencias de autocorrelación $\{\gamma_{ss}(m)\}$ y $\{\gamma_{xx}(m)\}$.

(b) Diseñe un filtro de Wiener de longitud $M = 2$ para estimar $\{s(n)\}$.

(c) Determine el error cuadrático medio mínimo (MMSE) para $M = 2$.

12.33 Determine el filtro óptimo IIR de Wiener causal para la señal dada en el Problema 12.32 y el correspondiente error cuadrático medio mínimo MMSE_∞.

12.34 Determine la función de sistema para el filtro IIR de Wiener no causal para la señal dada en el Problema 12.32 y el correspondiente error cuadrático medio mínimo MMSE_{nc}.

12.35 Determine el filtro FIR de Wiener óptimo de longitud $M = 3$ para la señal del Ejemplo 12.7.1 y el correspondiente error cuadrático medio mínimo MMSE_3. Compare el error MMSE_3 con MMSE_2 y comente las diferencias.

12.36 Un proceso AR(2) se define mediante la ecuación en diferencias

$$x(n) = x(n-1) - 0.6x(n-2) + w(n)$$

donde $\{w(n)\}$ es un proceso de ruido blanco de varianza σ_w^2. Utilice las ecuaciones de Yule–Walker para obtener los valores de la autocorrelación $\gamma_{xx}(0)$, $\gamma_{xx}(1)$ y $\gamma_{xx}(2)$.

12.37 Un proceso aleatorio $\{x(n)\}$ se define como la suma de un proceso AR(p) de la forma

$$s(n) = -\sum_{k=1}^{p} a_p(k)s(n-k) + v(n)$$

y un proceso de ruido blanco $\{w(n)\}$ con varianza σ_w^2. El proceso aleatorio $\{v(n)\}$ también es ruido blanco con varianza σ_v^2. Las secuencias $\{v(n)\}$ y $\{w(n)\}$ son incorreladas.

Demuestre que el proceso observado $\{x(n) = s(n) + w(n)\}$ es un proceso de media móvil auto-regresivo (p, p) y determine los coeficientes del polinomio del numerador (componente de media móvil) en la correspondiente función de sistema.

13

Filtros adaptativos

En contraste con las técnicas de diseño de filtros descritas en el Capítulo 12, que estaban basadas en el conocimiento de los parámetros estadísticos de segundo orden de las señales, existen muchas aplicaciones de tratamiento digital de señales en las que dichos parámetros estadísticos no se pueden especificar a priori. Tales aplicaciones incluyen: la ecualización del canal, la cancelación de eco y el modelado de sistemas entre otras, como se describe en este capítulo. En estas aplicaciones se emplean filtros con coeficientes ajustables denominados *filtros adaptativos*. Estos filtros incorporan algoritmos que permiten adaptar los coeficientes del filtro a los parámetros estadísticos de la señal.

Los filtros adaptativos han recibido una atención considerable por parte de los investigadores durante los últimos 25 años. Como resultado, se han desarrollado muchos algoritmos de cálculo eficientes para el filtrado adaptativo. En este capítulo, describimos dos algoritmos básicos: el algoritmo de mínimos cuadrados (LMS,*least-mean-square*), que se basa en una optimización de gradiente para determinar los coeficientes y los algoritmos recursivos de mínimos cuadrados, que incluyen las realizaciones FIR en forma directa y en celosía. Antes de describir estos algoritmos, presentamos varias aplicaciones prácticas en las que el uso de los filtros adaptativos ha tenido éxito en la estimación de señales distorsionadas por ruido y otras interferencias.

13.1 Aplicaciones de los filtros adaptativos

Los filtros adaptativos se han utilizado ampliamente en sistemas de comunicaciones, sistemas de control y otros sistemas en los que las características estadísticas de las señales que deben ser filtradas eran desconocidas a priori o, en algunos casos, eran variantes en el tiempo (señales no estacionarias). En la literatura técnica se han descrito numerosas aplicaciones de filtros adaptativos. Algunas de las aplicaciones más destacables son: (1) sistemas de antena adaptativa, en las que los filtros adaptativos se emplean para dirigir el haz y proporcionar nulos en el patrón del haz y eliminar las interferencias indeseadas (Widrow, Mantey y Griffiths (1967)); (2) receptores digitales de comunicaciones, en los que los filtros adaptativos se emplean para ecualizar las interferencias intersímbolos y para identificar el canal (Lucky (1965), Proakis y Miller (1969), Gersho (1969), George, Bowen y Storey (1971), Proakis (1970; 1975), Magee y Proakis (1973), Picinbono (1978) y Nichols, Giordano, y Proakis (1977)); (3) técnicas de cancelación de ruido adaptativas, en las que los filtros adaptativos se utilizan para estimar y eliminar una componente de ruido de la señal deseada (Widrow *et al.* (1975), Hsu y Giordano (1978), y Ketchum y Proakis (1982)); (4) modelado de sistemas, donde los filtros adaptativos se usan como modelos para estimar las características de un sistema desconocido; éstos son sólo unos pocos ejemplos bien conocidos del uso de los filtros adaptativos.

Aunque tanto los filtros IIR como FIR se han considerado para el filtrado adaptativo, el filtro FIR es con mucho el más práctico y ampliamente utilizado. La razón de esta preferencia es bastante simple: el filtro FIR sólo tiene ceros ajustables; por tanto, no presenta los problemas de estabilidad que tienen asociados los filtros IIR, que tienen tanto polos como ceros ajustables. Sin embargo, no debemos concluir que los filtros FIR sean siempre estables. Por el contrario, la estabilidad del filtro depende críticamente del algoritmo empleado para ajustar sus coeficientes, como demostraremos en la Secciones 13.2 y 13.3.

De las distintas estructuras de filtro FIR que son posibles, la forma directa y la forma en celosía son las que se emplean en las aplicaciones de filtrado adaptativo. La realización en la forma directa del filtro FIR con coeficientes ajustables $h(n)$ se ilustra en la Figura 13.1.1. Por el contrario, los parámetros ajustables de la estructura en celosía del filtro FIR son los coeficientes de reflexión K_n.

Una consideración importante en el uso de un filtro adaptativo es el criterio de optimizar los parámetros ajustables del filtro. El criterio no sólo debe proporcionar una medida significativa del rendimiento del filtro, sino también debe dar como resultado un algoritmo que sea realizable en la práctica.

Por ejemplo, un índice de rendimiento deseable en un sistema digital de comunicaciones es la probabilidad media de error. En consecuencia, al implementar un ecualizador adaptativo, tenemos que considerar la selección de los coeficientes del ecualizador que minimicen la probabilidad media de error como la base de nuestro criterio de optimización. Lamentablemente, sin embargo, el índice de rendimiento (la probabilidad media de error) para este criterio es una función fuertemente no lineal de los coeficientes del filtro y de los parámetros estadísticos de la señal. Por tanto, la implementación de un filtro adaptativo que optimice tal índice de rendimiento es compleja y poco práctica.

En algunos casos, un índice de rendimiento que no es una función lineal de los parámetros del filtro posee muchos mínimos (o máximos) relativos, por lo que no se puede estar seguro de que el filtro adaptativo converja a la solución óptima o a una solución mínima (o máxima) relativa. Por esto, algunos índices de rendimiento deseables, como por ejemplo la probabilidad media de error en un sistema digital de comunicaciones, tienen que rechazarse por no llevar a una implementación posible en la práctica.

Dos criterios que proporcionan buenas medidas del rendimiento en las aplicaciones de filtrado adaptativo son el criterio de mínimos cuadrados y su contrapartida en una formulación estadística del problema, es decir, el error cuadrático medio (MSE, *mean-square-error*). El criterio de mínimos cuadrados (y el MSE) da lugar a un índice de rendimiento cuadrático como una función de los coeficientes del filtro y, por tanto, posee un único mínimo. Los algoritmos resultantes que permiten ajustar los coeficientes del filtro son relativamente fáciles de implementar, como veremos en las Secciones 13.2 y 13.3.

En la siguiente sección, describiremos varias aplicaciones de los filtros adaptativos que sirven como motivación para el desarrollo matemático de los algoritmos tratados en las Secciones 13.2 y 13.3. Es conveniente

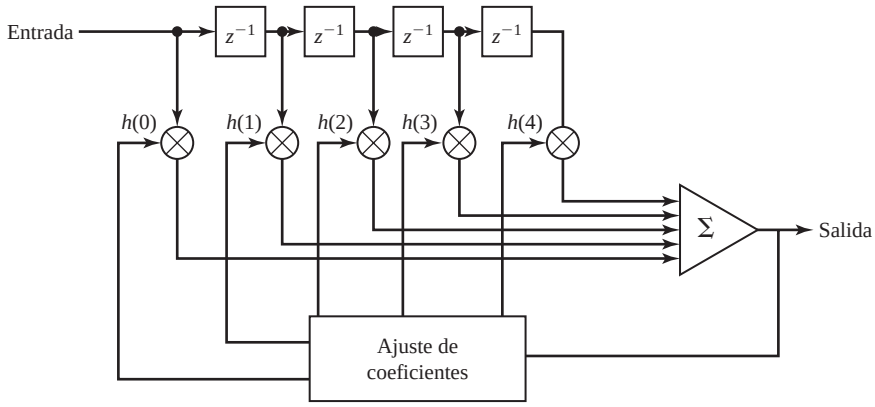


Figura 13.1.1. Filtro FIR adaptaivo en su forma directa.

emplear en estos ejemplos la estructura FIR en la forma directa. Aunque no vamos a desarrollar los algoritmos recursivos para ajustar automáticamente los coeficientes del filtro en esta sección, es instructivo formular la optimización de los coeficientes del filtro como un problema de optimización por mínimos cuadrados. Este desarrollo servirá para establecer un marco de trabajo común para los algoritmos que se verán en las dos secciones siguientes.

13.1.1 Identificación del sistema o modelado del sistema

En la formulación de este problema disponemos de un sistema desconocido, el cual deseamos identificar. El sistema se modela mediante un filtro FIR con M coeficientes ajustables. Tanto el sistema desconocido como el modelo se excitan mediante una secuencia de entrada $x(n)$. Si $y(n)$ designa la salida del sistema desconocido y $\hat{y}(n)$ designa la salida del modelo,

$$\hat{y}(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) \tag{13.1.1}$$

Podemos formar la secuencia de error

$$e(n) = y(n) - \hat{y}(n), \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{13.1.2}$$

y seleccionar los coeficientes $h(k)$ para minimizar

$$\mathscr{E}_M = \sum_{n=0}^{N} \left[y(n) - \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) \right]^2 \tag{13.1.3}$$

donde $N+1$ es el número de observaciones.

El criterio de mínimos cuadrados nos lleva al conjunto de ecuaciones lineales que permite determinar los coeficientes del filtro, es decir,

$$\sum_{k=0}^{M-1} h(k) r_{xx}(l-k) = r_{yx}(l), \qquad l = 0, 1, \ldots, M-1 \tag{13.1.4}$$

En la Ecuación (13.1.4), $r_{xx}(l)$ es la autocorrelación de la secuencia $x(n)$ y $r_{yx}(l)$ es la correlación cruzada de la salida del sistema con la secuencia de entrada.

Resolviendo (13.1.4), obtenemos los coeficientes del filtro para el modelo. Dado que los parámetros del filtro se obtienen directamente a partir de la medida de los datos en la entrada y la salida del sistema, sin tener conocimiento previo del sistema desconocido, decimos que el modelo de filtro FIR es un filtro adaptativo.

Si nuestro único objetivo fuera identificar el sistema utilizando el modelo FIR, la solución de (13.1.4) sería suficiente. Sin embargo, en las aplicaciones de sistemas de control, el sistema que se va a modelar puede variar lentamente en el tiempo, y nuestro propósito de tener un modelo es para, en última instancia, emplearlo en el diseño de un controlador que controle al sistema desconocido, además de medir el ruido normalmente presente en la salida de dicho sistema. Este ruido introduce incertidumbre en las medidas y corrompe los estimados de los coeficientes del filtro en el modelo. Este escenario se ilustra en la Figura 13.1.2. En este caso, el filtro adaptativo debe identificar y hacer un seguimiento de las características variantes en el tiempo del sistema desconocido en presencia del ruido medido en la salida del mismo. Los algoritmos que se describen en las Secciones 13.2 y 13.3 son aplicables a este problema de identificación de sistemas.

13.1.2 Ecualización de canal adaptativa

La Figura 13.1.3 muestra un diagrama de bloques de un sistema digital de comunicaciones en el que se emplea un ecualizador adaptativo para compensar la distorsión causada por el medio de transmisión (canal). La secuencia digital de símbolos de información $a(n)$ se aplica al filtro transmisor, cuya salida es

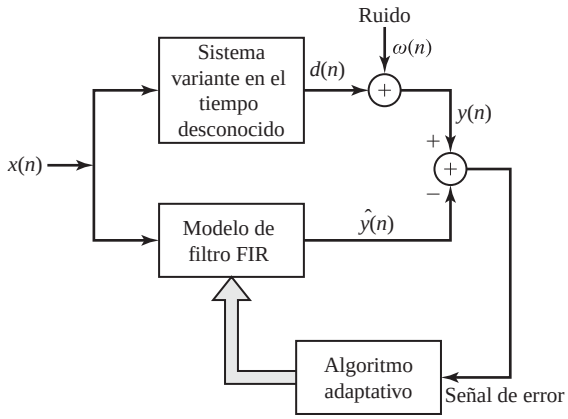


Figura 13.1.2. Aplicación del filtrado adaptativo a la identificación de un sistema.

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a(k)p(t - kT_s) \tag{13.1.5}$$

donde $p(t)$ es la respuesta al impulso del filtro en el transmisor y T_s es el intervalo de tiempo entre los símbolos de información; es decir, $1/T_s$ es la frecuencia de símbolos. En esta exposición, vamos a suponer que $a(n)$ es una secuencia multinivel que toma valores del conjunto $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots, \pm(K-1)$, donde K es el número de posibles valores de los símbolos.

Típicamente, el impulso $p(t)$ está diseñado para tener las características ilustradas en la Figura 13.1.4. Observe que $p(t)$ tiene una amplitud $p(0) = 1$ en $t = 0$ y $p(nT_s) = 0$ en $t = nT_s$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. En consecuencia, los pulsos sucesivos transmitidos secuencialmente cada T_s segundos no interfieren entre sí cuando se muestrea en los instantes de tiempo $t = nT_s$. Por tanto, $a(n) = s(nT_s)$.

El canal, que normalmente está modelado como un filtro lineal, distorsiona los pulsos y, por tanto, produce interferencias entre símbolos. Por ejemplo, en los canales telefónicos, los filtros se utilizan a través del sistema para separar señales en diferentes rangos de frecuencia. Estos filtros producen distorsión de fase y amplitud. La Figura 13.1.5 ilustra el efecto de la distorsión del canal sobre el impulso $p(t)$ a medida que aparece en la salida de un canal telefónico. Ahora observe que las muestras tomadas cada T_s segundos están distorsionadas por las

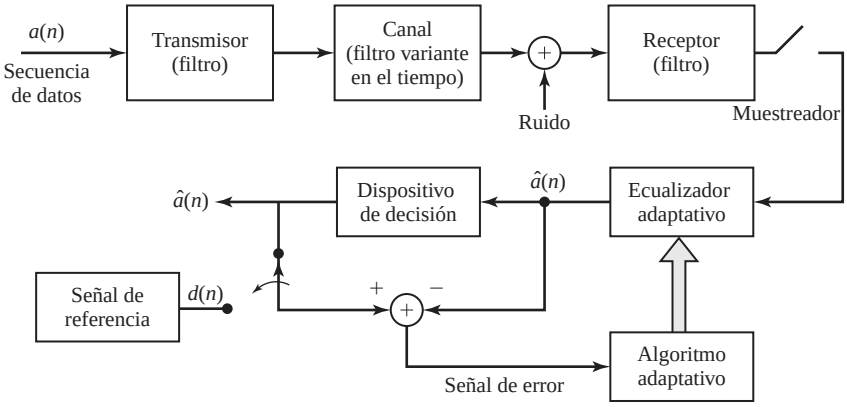


Figura 13.1.3. Aplicación de filtrado adaptativo a la ecualización de un canal.

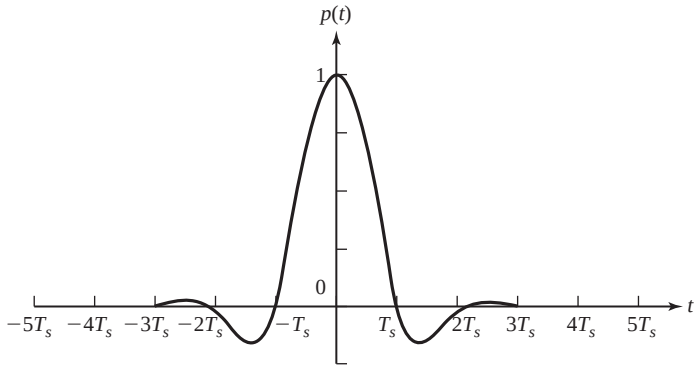


Figura 13.1.4. Pulsos para transmisión digital de símbolos a una frecuencia de $1/T_s$ símbolos por segundo.

interferencias de los distintos símbolos adyacentes. La señal distorsionada también se ve corrompida por ruido aditivo, que normalmente es ruido de banda ancha.

En el extremo receptor del sistema de comunicaciones, la señal se pasa primero a través de un filtro que está diseñado fundamentalmente para eliminar el ruido de fuera de la banda de frecuencias ocupada por la señal. Podemos suponer que este filtro es un filtro FIR de fase lineal que limita el ancho de banda del ruido, aunque produce una distorsión adicional despreciable sobre la señal distorsionada por el canal.

Las muestras de la señal recibida en la salida de este filtro reflejan la presencia de interferencias intersímbolos y ruido aditivo. Si ignoramos por el momento las posibles variaciones temporales en el canal, podemos expresar la salida muestreada en el receptor como

$$x(nT_s) = \sum_{k=0}^{\infty} a(k)q(nT_s - kT_s) + w(nT_s) = a(n)q(0) + \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq n}}^{\infty} a(k)q(nT_s - kT_s) + w(nT_s) \tag{13.1.6}$$

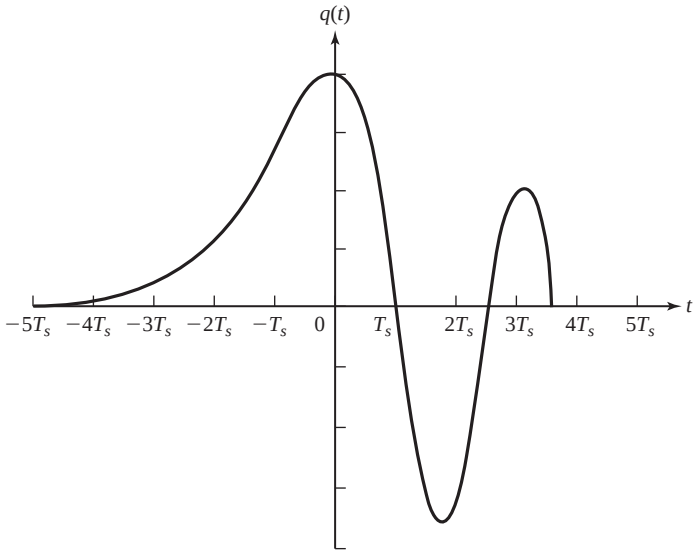


Figura 13.1.5. Efecto de la distorsión del canal sobre el impulso de la Figura 13.1.4.

donde $w(t)$ representa el ruido aditivo y $q(t)$ representa el impulso distorsionado en la salida del filtro receptor.

Para simplificar esta exposición, suponemos que la muestra $q(0)$ está normalizada a la unidad por medio de un sistema de control automático de ganancia (CAG) contenido en el receptor. Luego, la señal muestreada dada en (13.1.6) puede expresarse como

$$x(n) = a(n) + \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq n}}^{\infty} a(k)q(n-k) + w(n) \tag{13.1.7}$$

donde $x(n) \equiv x(nT_s), q(n) \equiv q(nT_s)$ y $w(n) \equiv w(nT_s)$. El término $a(n)$ de la Ecuación (13.1.7) es el símbolo deseado en el instante de muestreo n. El segundo término,

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k\neq n}}^{\infty} a(k)q(n-k)$$

constituye la interferencia intersímbolos debida a la distorsión del canal y $w(n)$ representa el ruido aditivo del sistema.

En general, los efectos de distorsión del canal incluidos a través de los valores muestreados $q(n)$ son desconocidos en el receptor. Además, el canal puede variar lentamente con el tiempo de modo que los efectos de las interferencias intersímbolos son variantes en el tiempo. El propósito del ecualizador adaptativo es el de compensar la señal en lo que se refiere a la distorsión del canal, de modo que la señal resultante pueda detectarse con fiabilidad. Supongamos que el ecualizador es un filtro FIR con M coeficientes ajustables $h(n)$. Su salida se puede expresar como

$$\hat{a}(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n+D-k) \tag{13.1.8}$$

donde D es un determinado retardo nominal que se produce al procesar la señal a través del filtro y $\hat{a}(n)$ representa un estimado del símbolo de información n-ésimo. Inicialmente, el ecualizador se prepara transmitiendo una secuencia de datos conocida $d(n)$. Así, la salida del ecualizador, $\hat{a}(n)$, se compara con $d(n)$ y se genera un error que se emplea para optimizar los coeficientes del filtro.

Si adoptamos de nuevo el criterio de error de mínimos cuadrados, seleccionamos los coeficientes $h(k)$ para minimizar la magnitud

$$\mathscr{E}_M = \sum_{n=0}^{N} [d(n) - \hat{a}(n)]^2 = \sum_{n=0}^{N} \left[d(n) - \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n+D-k) \right]^2 \tag{13.1.9}$$

El resultado de la optimización es un conjunto de ecuaciones lineales de la forma

$$\sum_{k=0}^{M-1} h(k)r_{xx}(l-k) = r_{dx}(l-D), \qquad l = 0,1,2,\ldots,M-1 \tag{13.1.10}$$

donde $r_{xx}(l)$ es la autocorrelación de la secuencia $x(n)$ y $r_{dx}(l)$ es la correlación cruzada entre la secuencia deseada $d(n)$ y la secuencia recibida $x(n)$.

Aunque la solución dada por (13.1.10) en la práctica se obtiene recursivamente (como se muestra en las dos secciones siguientes), en principio, observe que estas ecuaciones dan lugar a valores de los coeficientes para el ajuste inicial del ecualizador. Después de un corto período de aprendizaje, que normalmente dura menos de un segundo para la mayoría de los canales, el transmisor comienza a transmitir la secuencia de información $a(n)$. Para hacer un seguimiento de las posibles variaciones temporales del canal, los coeficientes del ecualizador

deben ajustarse continuamente de una manera adaptativa mientras se reciben los datos. Como se ilustra en la Figura 13.1.3, normalmente esto se consigue tratando las decisiones en la salida del dispositivo de decisión como correctas, y utilizando las decisiones en lugar de la referencia $d(n)$ para generar la señal de error. Este método funciona bien cuando los errores de decisión se producen de forma infrecuente (por ejemplo, menos de un error de decisión por cada cien símbolos). Los errores de decisión ocasionales sólo dan lugar a pequeños desajustes en los coeficientes del ecualizador. En las Secciones 13.2 y 13.3, describimos algoritmos adaptativos para ajustar recursivamnte los coeficientes del ecualizador.

13.1.3 Cancelación de eco en la transmisión de datos a través de canales telefónicos

En la transmisión de datos a través de canales telefónicos, se utilizan los modems (modulador/demodulador) para proporcionar una interfaz entre la secuencia de datos digital y el canal analógico. En la Figura 13.1.6 se muestra un diagrama de bloques de un sistema de comunicaciones en el que dos terminales, etiquetados como A y B, transmiten datos utilizando los modems A y B para definir la interfaz con el canal telefónico. Como se puede ver, una secuencia digital $a(n)$ se transmite del terminal A al terminal B mientras que otra secuencia $b(n)$ se transmite desde el terminal B al A. Esta transmisión simultánea en ambas direcciones se denomina *transmisión full-duplex*.

Como se ha descrito, las dos señales transmitidas pueden representarse como

$$s_A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a(k)p(t - kT_s) \tag{13.1.11}$$

$$s_B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b(k)p(t - kT_s) \tag{13.1.12}$$

donde $p(t)$ es un impulso como el mostrado en la Figura 13.1.4.

Cuando un abonado alquila una línea privada de una compañía telefónica con el objetivo de transmitir datos entre los terminales A y B, la línea telefónica es una línea de cuatro hilos, lo que es equivalente a tener dos canales (dos hilos) telefónicos dedicados, un canal (un par de hilos) para transmitir datos en una dirección y otro canal (el otro par de hilos) para recibir datos procedentes de la otra dirección. En este caso, los dos caminos de transmisión están aislados y, por tanto, no existe "cruce de líneas", es decir no existe interferencia mutua entre los dos caminos de señal. La distorsión del canal se compensa mediante un ecualizador adaptativo, como se ha explicado anteriormente, en el receptor de cada módem.

El problema principal que presenta el sistema mostrado en la Figura 13.1.6 es el coste de alquilar un canal telefónico de cuatro hilos. Si el volumen de tráfico es alto y el canal telefónico se emplea de forma continua

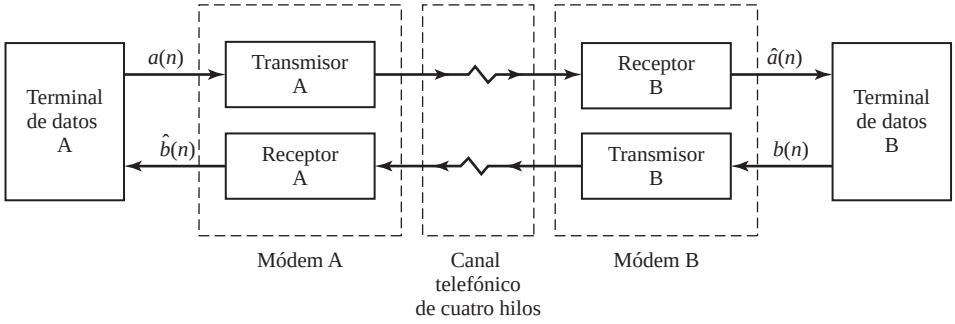


Figura 13.1.6. Transmisión de datos *full-duplex* sobre canales telefónicos.

o muy frecuentemente, como en el caso por ejemplo de sistemas dedicados a transacciones bancarias o de reservas de aerolíneas, el sistema descrito en la Figura 13.1.6 puede compensar su relación coste-prestaciones. En cualquier otro caso, no resultará práctico.

Una solución alternativa para el caso de bajo volumen o transmisión infrecuente de datos consiste en emplear una red telefónica de marcación conmutada. En este caso, el enlace local de comunicaciones entre el abonado y la central telefónica local es una línea de dos hilos, lo que se conoce como *bucle local*. En la central, la línea de dos hilos del abonado se conecta a los canales telefónicos de cuatro hilos principales que interconectan las diferentes centrales, llamadas *líneas troncales*, mediante un dispositivo denominado *híbrido*. Utilizando un acoplamiento mediante transformador, el híbrido se ajusta para proporcionar aislamiento entre los canales de transmisión y de recepción en el funcionamiento *full-duplex*. Sin embargo, a causa de la desadaptación de impedancias entre el híbrido y el canal telefónico, el nivel de aislamiento a menudo es insuficiente y, en consecuencia, parte de la señal del lado del transmisor se acopla y distorsiona la señal del lado del receptor, produciendo el "eco" que en ocasiones puede escucharse en las comunicaciones de voz a través de los canales telefónicos.

Para mitigar los ecos en las transmisiones de voz, las compañías telefónicas emplean un dispositivo conocido como *supresor de eco*. En transmisiones de datos, la solución consiste en emplear un *cancelador de eco* dentro de cada módem. Los canceladores de eco se implementan como filtros adaptativos con coeficientes ajustables automáticamente, al igual que en el caso de los ecualizadores transversales.

Utilizando híbridos para acoplar dos hilos a un canal de cuatro hilos y canceladores de eco en cada módem para estimar y eliminar los ecos, el sistema de comunicaciones de datos para la red de marcación conmutada toma la forma mostrada en la Figura 13.1.7. Se necesita un híbrido en cada módem para aislar al transmisor del receptor y acoplar el bucle local de dos hilos. El híbrido A se encuentra físicamente en la central del abonado A, mientras que el híbrido B se encuentra en la central a la que el abonado B está conectado. Las dos centrales están conectadas mediante una línea de cuatro hilos, un par para la transmisión de A a B y el otro par para la transmisión en la dirección contraria, de B a A. Un eco en el terminal A debido al híbrido A se denomina *eco del extremo próximo*, mientras que un eco en el terminal A debido al híbrido B se denomina *eco del extremo alejado*. Ambos tipos de eco normalmente están presentes en las transmisiones de datos y el cancelador de eco debe eliminarlos.

Suponga que despreciamos la distorsión del canal a efectos de la siguiente explicación, con el fin de ocuparnos exclusivamente de los ecos. La señal recibida en el módem A puede expresarse como

$$s_{\mathrm{RA}}(t) = A_1 s_{\mathrm{B}}(t) + A_2 s_{\mathrm{A}}(t-d_1) + A_3 s_{\mathrm{A}}(t-d_2) \tag{13.1.13}$$

donde $s_{\mathrm{B}}(t)$ es la señal deseada que va a ser demodulada en el módem A; $s_{\mathrm{A}}(t-d_1)$ es el eco del extremo próximo debido al híbrido A, $s_{\mathrm{A}}(t-d_2)$ es el eco del extremo alejado debido al híbrido B; $A_i, i = 1,2,3$, son las amplitudes correspondientes a las tres componentes de la señal, y d_1 y d_2 son los retardos asociados con las componentes de eco. Una perturbación adicional que distorsiona la señal recibida es el ruido aditivo, de modo que la señal recibida en el módem A es

$$r_{\mathrm{A}}(t) = s_{\mathrm{RA}}(t) + w(t) \tag{13.1.14}$$

donde $w(t)$ representa el proceso de ruido aditivo.

El cancelador de eco adaptativo intenta estimar adaptativamente las dos componentes de eco. Si sus coeficientes son $h(n)$, $n = 0,1,\ldots,M-1$, su salida es

$$\hat{s}_{\mathrm{A}}(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)a(n-k) \tag{13.1.15}$$

que es un estimado de las componentes de la señal de eco. Este estimado se resta de la señal recibida muestreada, y la señal de error resultante puede minimizarse por mínimos cuadrados para ajustar de forma óptima los coeficientes del cancelador de eco. Existen varias configuraciones posibles para colocar el cancelador de eco en el módem, y para formar la correspondiente señal de error. La Figura 13.1.8 ilustra una configuración, en la que la salida del cancelador se resta de la salida muestreada del filtro receptor con entrada $r_{\mathrm{A}}(t)$. La Figura 13.1.9

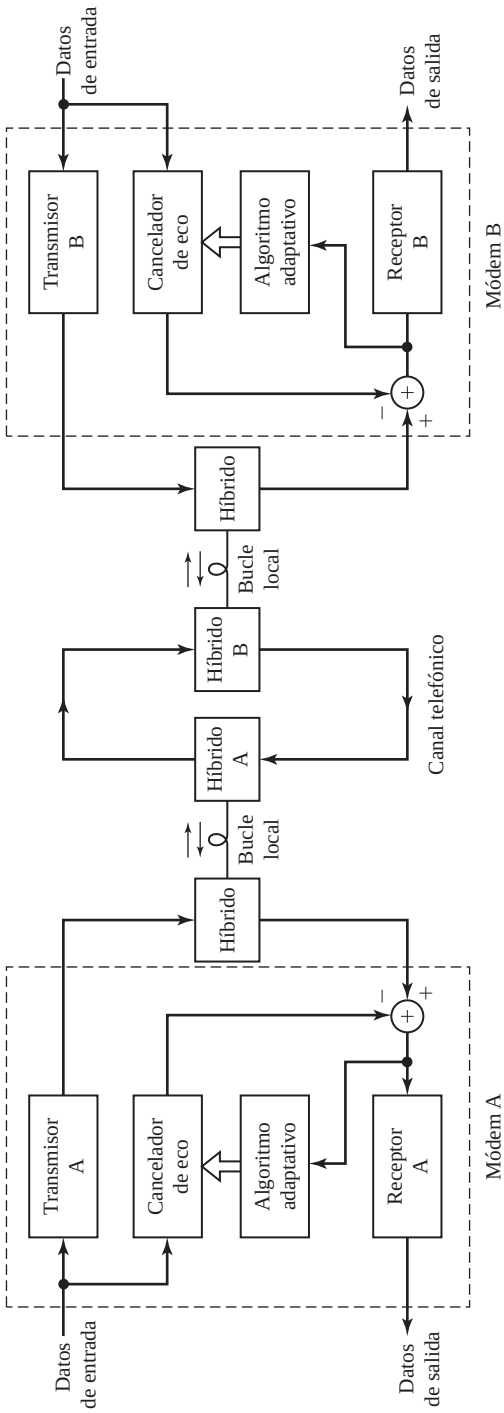


Figura 13.1.7. Diagrama de bloques de un sistema de comunicaciones digital que utiliza canceladores de eco en los modems.

ilustra una segunda configuración, en la que el cancelador de eco está generando muestras a la frecuencia de Nyquist en lugar de a la frecuencia de los símbolos; en este caso, la señal de error que se emplea para ajustar los

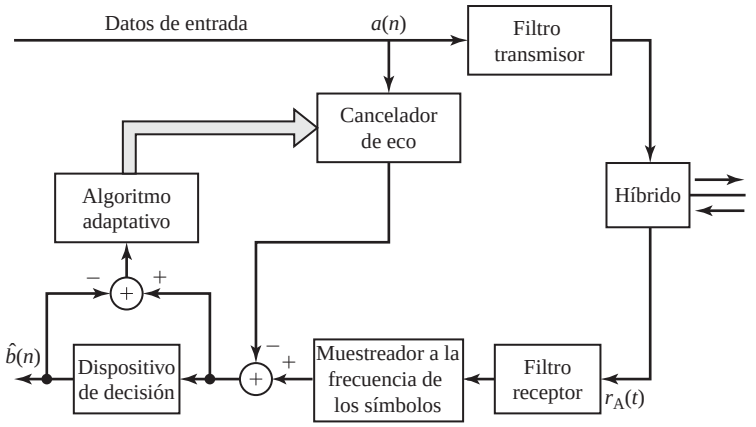


Figura 13.1.8. Cancelador de eco a la frecuencia de los símbolos.

coeficientes es simplemente la diferencia entre $r_A(n)$, la señal recibida muestreada, y la salida del cancelador. Por último, la Figura 13.1.10 ilustra el funcionamiento del cancelador en combinación con un ecualizador adaptativo.

La aplicación del criterio de mínimos cuadrados en cualquiera de las configuraciones mostradas en las Figuras 13.1.8–13.1.10 nos lleva a un conjunto de ecuaciones lineales para los coeficientes del cancelador de eco. Animamos al lector a deducir las ecuaciones correspondientes a las tres configuraciones.

13.1.4 Supresión de interferencias de banda estrecha en una señal de banda ancha

Ahora vamos a ocuparnos del problema que surge en la práctica, especialmente en la detección de señales y en las comunicaciones digitales. Suponga que tenemos una secuencia $v(n)$ formada por una señal de banda ancha deseada $w(n)$ distorsionada por una interferencia de banda estrecha aditiva $x(n)$. Las dos secuencias son incorreladas. Estas secuencias resultan del muestreo de una señal analógica $v(t)$ a la frecuencia de Nyquist (o mayor) de la señal de banda ancha $w(t)$. La Figura 13.1.11 ilustra las características espectrales de $w(n)$ y

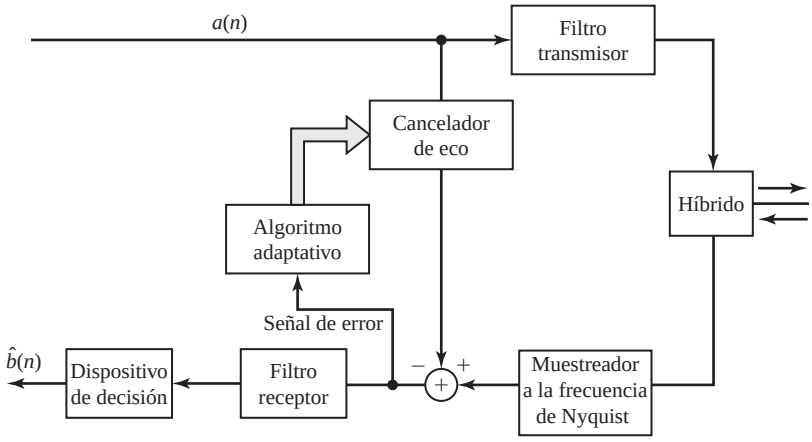


Figura 13.1.9. Cancelador de eco a la frecuencia de Nyquist.

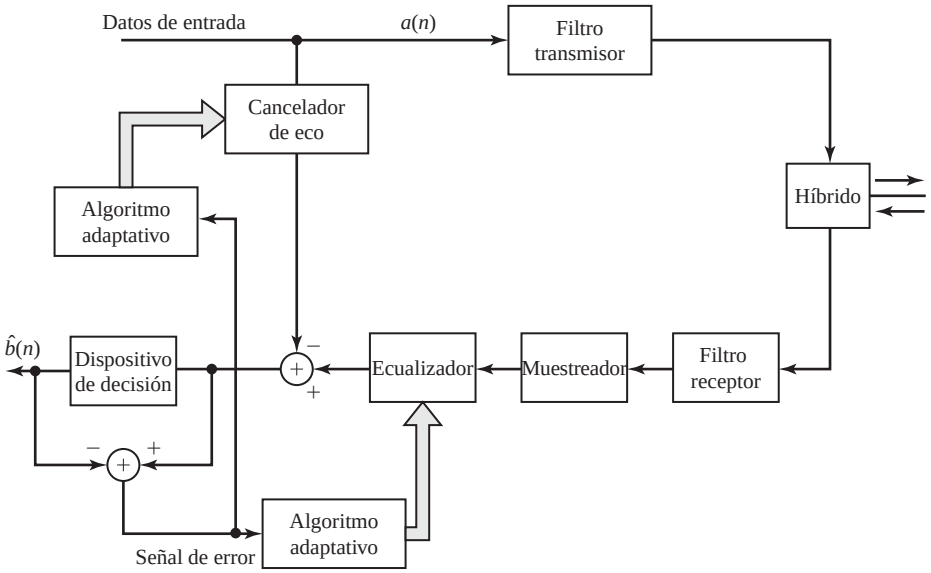


Figura 13.1.10. Módem con ecualizador adaptativo y cancelador de eco.

$x(n)$. Normalmente, la interferencia $|X(f)|$ es mucho más grande que $|W(f)|$ dentro de la banda de frecuencias estrecha que ocupa.

En problemas de comunicaciones digitales y de detección de señales que se ajustan al modelo anterior, la señal deseada $w(n)$ a menudo es una *señal de espectro amplio*, mientras que la interferencia de banda estrecha representa una señal de otro usuario de la banda de frecuencias, o una interferencia intencionada de un intruso que está intentando irrumpir en el sistema de comunicaciones o de detección de señales.

Nuestro objetivo desde el punto de vista del filtrado es emplear un filtro que suprima la interferencia de banda estrecha. En efecto, un filtro así tendrá una hendidura en la banda de frecuencias ocupada por $|X(f)|$ y, en la práctica, la banda ocupada por $|X(f)|$ es desconocida. Además, si la interferencia es no estacionaria, su ocupación de la banda de frecuencias puede variar con el tiempo. Por tanto, será deseable un filtro adaptativo.

Desde otro punto de vista, las características de banda estrecha de la interferencia nos permiten estimar $x(n)$ a partir de las muestras pasadas de la secuencia $v(n)$ y extraer el estimado de $v(n)$. Dado que el ancho de banda de $x(n)$ es estrecho comparado con el ancho de banda de la secuencia $w(n)$, las muestras $x(n)$ están extremadamente

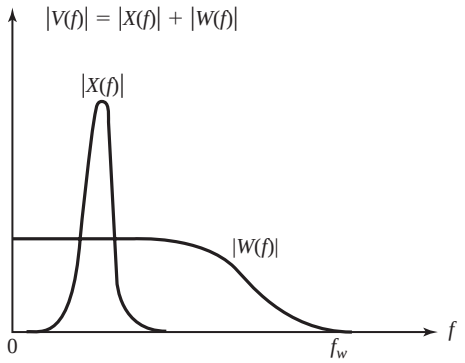


Figura 13.1.11. Interferencia de banda muy estrecha $X(f)$ en una señal de banda ancha $W(f)$.

correlacionadas debido a la alta frecuencia de muestreo. Por otro lado, las muestras $w(n)$ no están excesivamente correlacionadas, ya que las muestras se toman a la frecuencia de Nyquist de $w(n)$. Explotando la alta correlación entre $x(n)$ y las muestras pasadas de la secuencia $v(n)$, es posible obtener un estimado de $x(n)$, que pueda ser extraido de $v(n)$.

La configuración general se ilustra en la Figura 13.1.12. La señal $v(n)$ se retarda D muestras, donde D se selecciona lo suficientemente grande como para que las componentes de la señal de banda ancha $w(n)$ y $w(n-D)$ contenidas en $v(n)$ y $v(n-D)$, respectivamente, sean incorreladas. Normalmente, es adecuada una elección de $D = 1$ o 2. La señal retardada $v(n-D)$ se pasa a través de un filtro FIR, lo que se caracteriza mejor como un predictor lineal del valor $x(n)$ basado en M muestras $v(n-D-k), k = 0, 1, \ldots, M-1$. La salida del predictor lineal es

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)v(n-D-k) \tag{13.1.16}$$

Este valor predicho de $x(n)$ se sustrae de $v(n)$ para proporcionar un estimado de $w(n)$, como se ilustra en la Figura 13.1.12. Evidentemente, la calidad del estimado $\hat{x}(n)$ determina en qué medida se suprime la interferencia de banda estrecha. También es evidente que el retardo D debe mantenerse tan pequeño como sea posible con el fin de obtener un buen estimado de $x(n)$, pero debe ser lo suficientemente grande como para que $w(n)$ y $w(n-D)$ sean incorreladas.

Definimos la secuencia de error

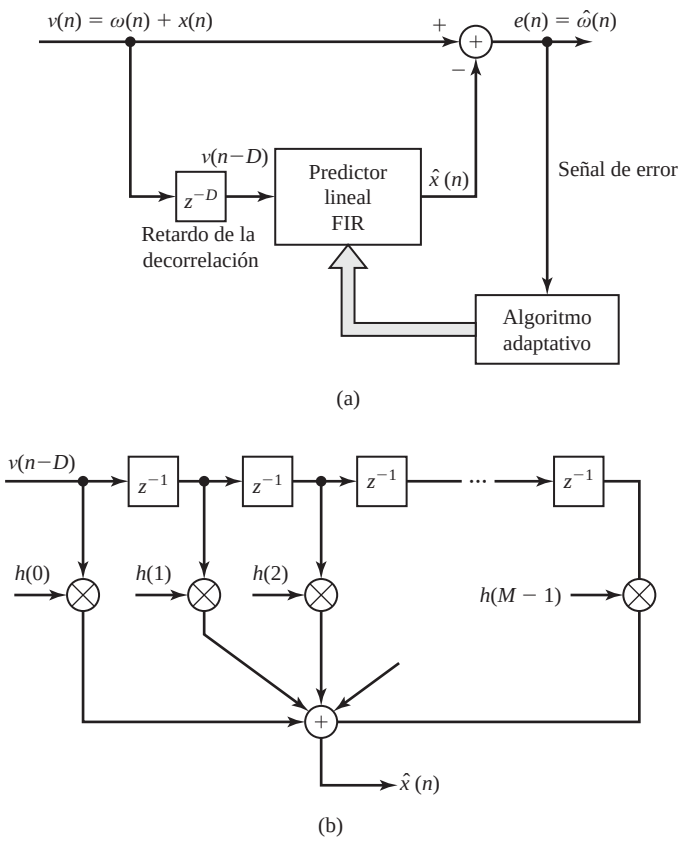


Figura 13.1.12. Filtro adaptativo para estimar y suprimir una interferencia de banda estrecha en una señal de banda ancha.

$$e(n) = v(n) - \hat{x}(n) = v(n) - \sum_{k=0}^{M-1} h(k)v(n-D-k) \tag{13.1.17}$$

Si aplicamos el criterio de mínimos cuadrados para seleccionar óptimamente los coeficientes de predicción, obtenemos el conjunto de ecuaciones lineales

$$\sum_{k=0}^{M-1} h(k)r_{vv}(l-k) = r_{vv}(l+D), \qquad l = 0,1,\ldots,M-1 \tag{13.1.18}$$

donde $r_{vv}(l)$ es la secuencia de autocorrelación de $v(n)$. Observe sin embargo que el lado derecho de la Ecuación (13.1.18) puede escribirse como

$$\begin{aligned} r_{vv}(l+D) &= \sum_{n=0}^{N} v(n)v(n-l-D) \\ &= \sum_{n=0}^{N} [w(n)+x(n)][w(n-l-D)+x(n-l-D)] \\ &= r_{ww}(l+D) + r_{xx}(l+D) + r_{wx}(l+D) + r_{xw}(l+D) \end{aligned} \tag{13.1.19}$$

Las correlaciones de (13.1.19) son secuencias de correlación de media temporal. El valor esperado de $r_{ww}(l+D)$ es

$$E[r_{ww}(l+D)] = 0, \qquad l = 0,1,\ldots,M-1 \tag{13.1.20}$$

porque $w(n)$ es de banda ancha y D es más grande que $w(n)$ y $w(n-D)$ son incorreladas. También, suponemos que

$$E[r_{xw}(l+D)] = E[r_{wx}(l+D)] = 0 \tag{13.1.21}$$

Por último,

$$E[r_{xx}(l+D)] = \gamma_{xx}(l+D) \tag{13.1.22}$$

Por tanto, el valor esperado de $r_{vv}(l+D)$ es simplemente la autocorrelación estadística de la señal de banda estrecha $x(n)$. Además, si la señal de banda ancha es débil respecto a la interferencia, la autocorrelación $r_{vv}(l)$ en el lado izquierdo de (13.1.18) es aproximadamente $r_{xx}(l)$. La principal influencia de $w(n)$ se produce en los elementos de la diagonal de $r_{vv}(l)$. Por tanto, los valores de los coeficientes del filtro determinados a partir de las ecuaciones lineales dadas en (13.1.18) son una función de las características estadísticas de la interferencia $x(n)$.

La estructura global del filtro de la Figura 13.1.12 define un filtro de error de predicción FIR adaptativo con coeficientes

$$h'(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ -h(k-D), & k = D, D+1, \ldots, D+M-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{13.1.23}$$

y una respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{M-1} h'(k+D)e^{-j\omega k} \tag{13.1.24}$$

Este filtro se comporta como un filtro de hendidura para la interferencia. Por ejemplo, la Figura 13.1.13 ilustra el módulo de la respuesta en frecuencia de un filtro adaptativo con $M = 15$ coeficientes, que sirve para suprimir una interferencia de banda estrecha que ocupa el 20 por ciento de la banda de frecuencias de una señal de espectro extendido. Los datos se han generado pseudoaleatoriamente añadiendo una interferencia que consta de 100 sinusoides de la misma amplitud y fase aleatoria a la señal de espectro extendido de pseudoruido. Los coeficientes del filtro se han obtenido resolviendo las ecuaciones de (13.1.18), con $D = 1$, donde la correlación

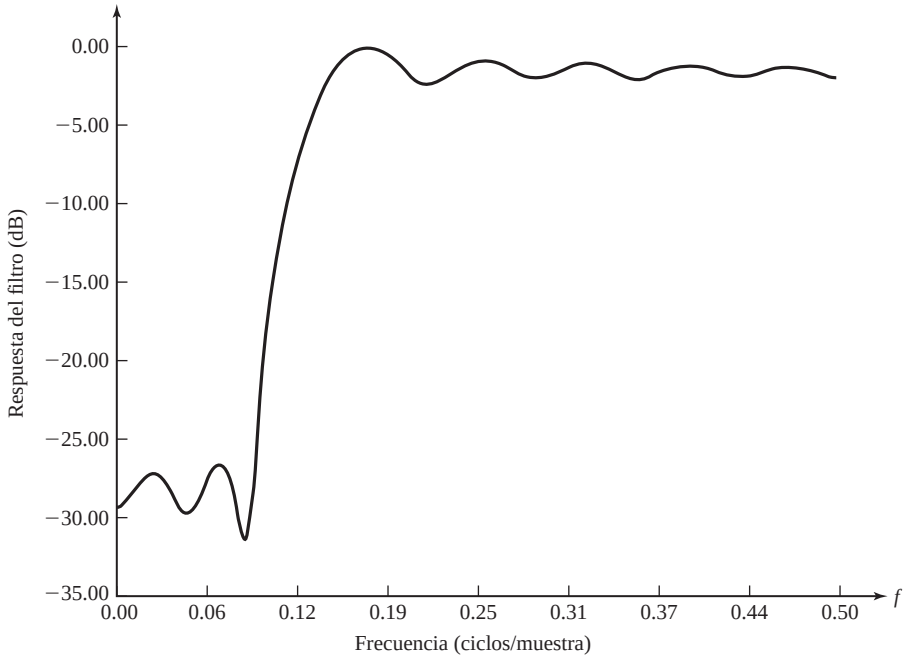


Figura 13.1.13. Característica de respuesta en frecuencia de un filtro de hendidura adaptativo.

$r_{vv}(l)$ se ha obtenido a partir de los datos. Observe que el filtro completo de supresión de interferencias tiene las características de un filtro de hendidura. La profundidad de la hendidura depende de la potencia de la interferencia respecto de la señal de banda ancha. Cuanto más intensa es la interferencia, más profunda es la hendidura.

Los algoritmos presentados en las Secciones 13.2 y 13.3 son apropiados para estimar los coeficientes del predictor continuamente, con el fin de hacer un seguimiento de la señal de interferencia de banda estrecha no estacionaria.

13.1.5 Mejorador de línea adaptativo

En el ejemplo anterior, el predictor lineal adaptativo se ha empleado para estimar la interferencia de banda estrecha con el fin de suprimir la interferencia de la secuencia de entrada $v(n)$. Un mejorador de línea adaptativo (ALE, *adaptive line enhancer*) tiene la misma configuración que el filtro supresor de interferencias de la Figura 13.1.12, pero su objetivo es diferente.

En el mejorador de línea adaptativo, $x(n)$ es la señal deseada y $w(n)$ representa una componente de ruido de banda ancha que enmascara a $x(n)$. La señal deseada $x(n)$ es o una línea espectral o una señal de banda relativamente estrecha. El predictor lineal mostrado en la Figura 13.1.12(b) opera exactamente de la misma forma que en la Figura 13.1.12(a), y proporciona un estimado de la señal de banda estrecha $x(n)$. Es evidente que el mejorador de línea adaptativo (es decir, el filtro de predicción FIR) es un filtro auto-ajustable que presenta un pico en su respuesta en frecuencia a la frecuencia de la sinusoide o, lo que es lo mismo, en la banda de frecuencias de la señal de banda estrecha $x(n)$. Con un ancho de banda estrecho, el ruido $w(n)$ de fuera de la banda se suprime y, por tanto, la línea espectral se mejora en amplitud respecto de la potencia de ruido en $w(n)$. Esto explica por qué el predictor FIR se denomina mejorador de línea adaptativo (ALE). Sus coeficientes se determinan resolviendo la expresión (13.1.18).

13.1.6 Cancelación de ruido adaptativa

La cancelación de eco, la supresión de la interferencia de banda estrecha en la señal de banda ancha, y el mejorador ALE están relacionados con otra forma del filtrado adaptativo denominado *cancelación de ruido adaptativo*. Un modelo del cancelador de ruido adaptativo se ilustra en la Figura 13.1.14.

La señal de entrada principal consta de una señal deseada $x(n)$ distorsionada por una secuencia de ruido aditivo $w_1(n)$ y una interferencia aditiva (ruido) $w_2(n)$. La interferencia aditiva (ruido) también es observable después de haber sido filtrada por un sistema lineal desconocido que proporciona $v_2(n)$ y además es distorsionada por una secuencia de ruido aditivo $w_3(n)$. Por tanto, disponemos de una señal secundaria, que puede expresarse como $v(n) = v_2(n) + w_3(n)$. Suponemos que las secuencias $w_1(n)$, $w_2(n)$ y $w_3(n)$ están mutuamente incorreladas y tienen media cero.

Como se muestra en la Figura 13.1.14, un filtro FIR adaptativo se utiliza para estimar la secuencia de interferencia $w_2(n)$ de la señal secundaria $v(n)$ y sustraer el estimado $w_2(n)$ de la señal principal. La secuencia de salida, que representa un estimado de la señal deseada $x(n)$, es la señal de error

$$\begin{aligned} e(n) &= y(n) - \hat{w}_2(n) \\ &= y(n) - \sum_{k=0}^{M-1} h(k)v(n-k) \end{aligned} \tag{13.1.25}$$

Esta secuencia de error se utiliza para ajustar adaptativamente los coeficientes del filtro FIR.

Si se emplea el criterio de mínimos cuadrados para determinar los coeficientes del filtro, el resultado de la optimización es el conjunto de ecuaciones lineales

$$\sum_{k=0}^{M-1} h(k)r_{vv}(l-k) = r_{yv}(l), \qquad l = 0, 1, \ldots, M-1 \tag{13.1.26}$$

donde $r_{vv}(l)$ es la autocorrelación (media temporal) de muestras de la secuencia $v(n)$ y $r_{yv}(l)$ es la correlación cruzada de muestras de las secuencias $y(n)$ y $v(n)$. Evidentemente, el problema de la cancelación de ruido es similar a las tres últimas aplicaciones de filtrado adaptativo descritas.

13.1.7 Codificación lineal predictiva de señales de voz

A lo largo de las últimas cuatro décadas se han desarrollado diversos métodos para la codificación digital de las señales de voz. En los sistemas telefónicos, por ejemplo, habitualmente los dos métodos que se emplean

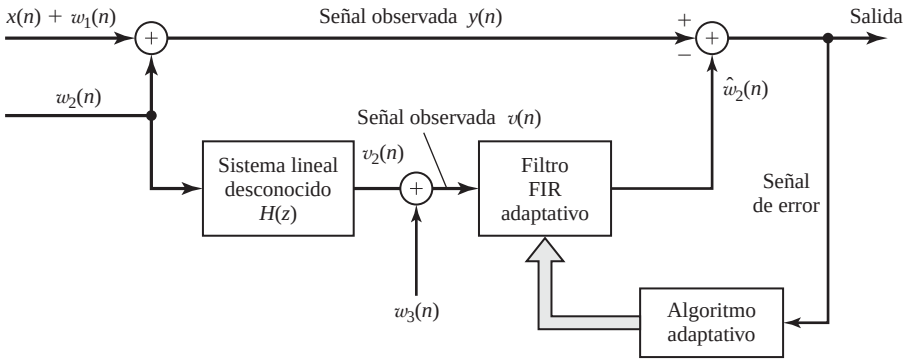


Figura 13.1.14. Ejemplo de un sistema de cancelación de ruido adaptativo.

para codificar la voz son la modulación PCM (*pulse code modulation, modulación por impulsos codificados*) y la modulación DPCM (*differential PCM, PCM diferencial*). Ambos son ejemplos de métodos de *codificación de formas de onda*. También se han desarrollado otros métodos de codificación de formas de onda, como por ejemplo la modulación delta (DM, *delta modulation*) y la modulación DPCM adaptativa.

Dado que la señal digital de voz se transmite desde el origen hasta un destino, uno de los principales objetivos de los codificadores de voz es el de minimizar el número de bits necesario para representar la señal de voz, a la vez que se mantiene la inteligibilidad de la voz. Este objetivo ha llevado al desarrollo de un tipo de métodos de codificación de señales de voz de baja velocidad de bit (10.000 bits por segundo e inferiores), que se basa en la construcción de un modelo de la fuente de la señal de voz y en la transmisión de los parámetros del modelo. El filtrado adaptativo tiene aplicación en estos sistemas de codificación de las señales de voz basados en modelos. A continuación se describe un método muy efectivo conocido como *codificación lineal predictiva* (LPC).

En la codificación lineal predictiva, el tracto bucal se modela como un filtro lineal de sólo polos cuya función de sistema es

$$H(z) = \frac{G}{1 - \sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}} \tag{13.1.27}$$

donde p es el número de polos, G es la ganancia del filtro y a_k son los parámetros que determinan los polos. Existen dos funciones de excitación mutuamente excluyentes, utilizadas para modelar los sonidos sonoros y sordos. En un período de tiempo corto, los sonidos sonoros tienen una frecuencia fundamental F_0, o un período $1/F_0$, que depende del orador. Luego, los sonidos sonoros son generados excitando el modelo de filtro de sólo polos mediante un tren de impulsos periódico con un período igual al del tono deseado. Los sonidos sordos se generan excitando el modelo de filtro de sólo polos con la salida de un generador de ruido aleatorio. Este modelo se muestra en la Figura 13.1.15.

Dado un segmento corto de tiempo de una señal de voz, el codificador de voz en el transmisor debe determinar la función de excitación apropiada, el período deseado de los sonidos sonoros, el parámetro de ganancia G y los coeficientes $\{a_k\}$. En la Figura 13.1.16 se ilustra un diagrama de bloques del sistema de codificación en origen. Los parámetros del modelo se determinan de forma adaptativa a partir de los datos. A continuación, las muestras de voz se sintetizan utilizando el modelo y se genera una señal de error (como se muestra en la Figura 13.1.16) tomando la diferencia entre la secuencia real y la sintetizada. La señal de error y los parámetros del modelo se codifican en una secuencia binaria y se transmiten al destino. En el receptor, la señal de voz se sintetiza a partir del modelo y de la señal de error.

Los parámetros del modelo de filtro de sólo polos se determinan fácilmente a partir de las muestras de voz por medio de la operación de predicción lineal. Más específicamente, considere el sistema mostrado en la Figura 13.1.17 y suponga que tenemos N muestras de la señal. La salida del filtro FIR es

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=1}^{p} a_k x(n-k) \tag{13.1.28}$$

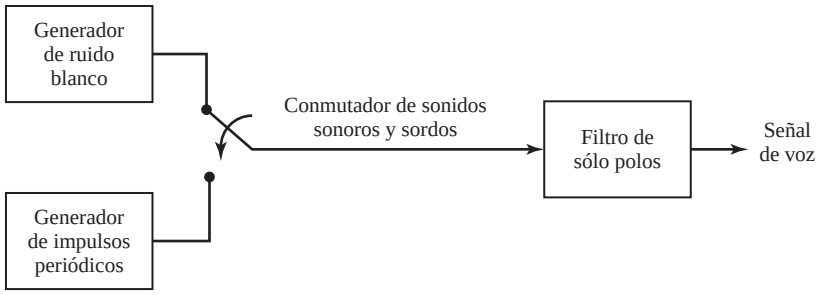


Figura 13.1.15. Diagrama de bloques para la generación de una señal de voz.

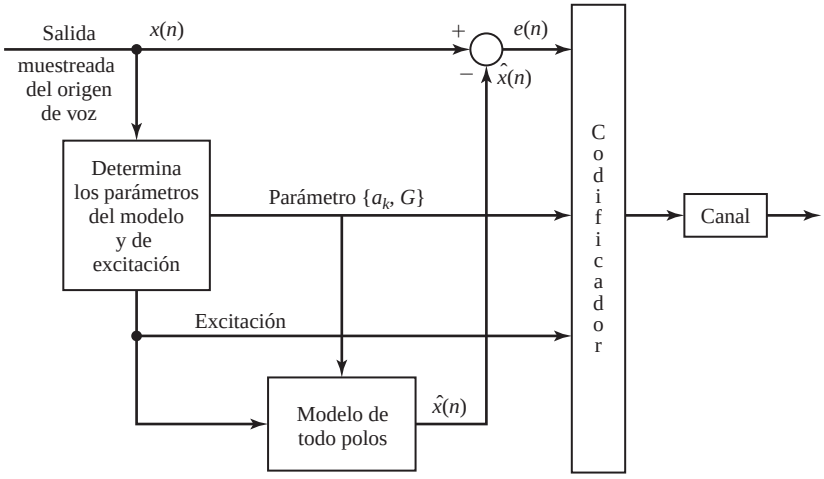


Figura 13.1.16. Codificador en origen para una señal de voz.

y el error correspondiente entre la muestra observada $x(n)$ y el estimado $\hat{x}(n)$ es

$$e(n) = x(n) - \sum_{k=1}^{p} a_k x(n-k) \tag{13.1.29}$$

Aplicando el criterio de mínimos cuadrados, podemos determinar los parámetros del modelo a_k. El resultado de esta optimización es un conjunto de ecuaciones lineales

$$\sum_{k=1}^{p} a_k r_{xx}(l-k) = r_{xx}(l), \qquad l = 1, 2, \ldots, p \tag{13.1.30}$$

donde $r_{xx}(l)$ es la autocorrelación (media temporal) de la secuencia $x(n)$. El parámetro de ganancia para el filtro puede obtenerse teniendo en cuenta que su ecuación de entrada–salida es

$$x(n) = \sum_{k=1}^{p} a_k x(n-k) + Gv(n) \tag{13.1.31}$$

donde $v(n)$ es la secuencia de entrada. Evidentemente,

$$\begin{aligned} Gv(n) &= x(n) - \sum_{k=1}^{p} a_k x(n-k) \\ &= e(n) \end{aligned}$$

Así,

$$G^2 \sum_{n=0}^{N-1} v^2(n) = \sum_{n=0}^{N-1} e^2(n) \tag{13.1.32}$$

Si, por diseño, la excitación de entrada se normaliza para tener energía unidad, entonces

$$\begin{aligned} G^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} e^2(n) \\ &= r_{xx}(0) - \sum_{k=1}^{p} a_k r_{xx}(k) \end{aligned} \tag{13.1.33}$$

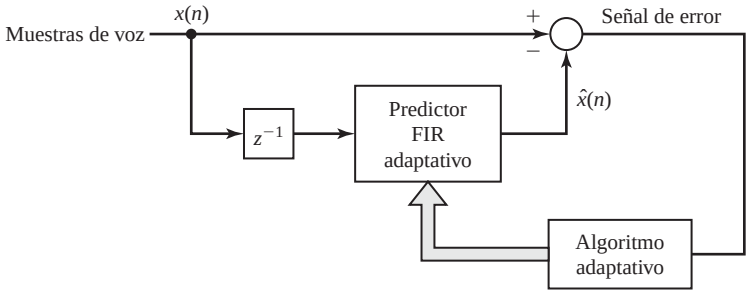


Figura 13.1.17. Estimación de los parámetros de los polos para la codificación lineal predictiva.

Por tanto, G^2 es igual a la energía residual resultante de la optimización de mínimos cuadrados.

En este desarrollo, hemos descrito el uso de la predicción lineal para determinar adaptativamente los parámetros de los polos y la ganancia de un modelo de filtro de sólo polos para la generación de la señal de voz. En la práctica, debido al carácter no estacionario de las señales de voz, este modelo se aplica a segmentos de tiempo cortos (de 10 a 20 milisegundos) de una señal de voz. Normalmente, se determina un nuevo conjunto de parámetros para cada segmento corto de tiempo. Sin embargo, a menudo tiene ventajas utilizar los parámetros del modelo medidos en los segmentos anteriores para suavizar las discontinuidades abruptas que normalmente existen en los estimados de los parámetros del modelo de un segmento a otro. Aunque nuestra exposición se ha hecho por completo en términos de la estructura del filtro FIR, mencionaremos que la síntesis de voz normalmente se realiza utilizando la estructura FIR en celosía y los coeficientes de reflexión K_i. Puesto que el rango dinámico de K_i es significativamente más pequeño que el de a_k, los coeficientes de reflexión requieren menos bits para representarlos. Por tanto, los K_i se transmiten a través del canal. En consecuencia, es normal sintetizar la voz en el punto de destino utilizando la estructura en celosía de sólo polos.

Al ocuparnos de la codificación de predicción lineal para la codificación de señales de voz, no hemos considerado algoritmos para la estimación o la excitación y el período deseado. Un estudio de los algoritmos apropiados para determinar estos parámetros del modelo queda fuera del ámbito del libro y, por tanto, se ha omitido. El lector interesado puede consultar los textos de Rabiner y Schafer (1978), y Deller, Hansen y Proakis (2000) para obtener una información detallada de los métodos de análisis y síntesis de las señales de voz.

13.1.8 Matrices adaptativas

En los ejemplos anteriores, hemos considerado el filtrado adaptativo sobre una sola secuencia de datos. Sin embargo, el filtrado adaptativo también ha sido ampliamente utilizado sobre múltiples secuencias de datos resultantes de matrices de antenas, hidrófonos y sismógrafos, donde los sensores (antenas, hidrófonos y sismógrafos) están dispuestos formando una determinada configuración espacial. Cada elemento de la matriz de sensores proporciona una secuencia. Combinando apropiadamente las señales procedentes de los diferentes sensores, es posible cambiar el patrón de directividad de la matriz. Por ejemplo, considere una matriz de antenas lineales formada por cinco elementos, como se muestra en la Figura 13.1.18(a). Si las señales se suman linealmente, obtenemos la secuencia

$$x(n) = \sum_{k=1}^{5} x_k(n) \tag{13.1.34}$$

que da lugar al patrón de directividad de la antena mostrado en la Figura 13.1.18(a). Suponga ahora que se recibe una interferencia procedente de una dirección que corresponde a uno de los lóbulos secundarios de la matriz. Ponderando adecuadamente las secuencias $x_k(n)$ antes de combinarlas, es posible alterar el patrón del lóbulo secundario, tal que la matriz contenga un nulo en la dirección de la interferencia, como se muestra en la Figura 13.1.18(b). Luego, obtenemos

$$x(n) = \sum_{k=1}^{5} h_k x_k(n) \tag{13.1.35}$$

donde los h_k son los pesos.

Podemos cambiar o dirigir la dirección del lóbulo de la antena principal introduciendo retardos en las salidas antes de combinarlas. Por tanto, a partir de los K sensores obtenemos una señal combinada de la forma

$$x(n) = \sum_{k=1}^{K} h_k x_k(n - n_k) \tag{13.1.36}$$

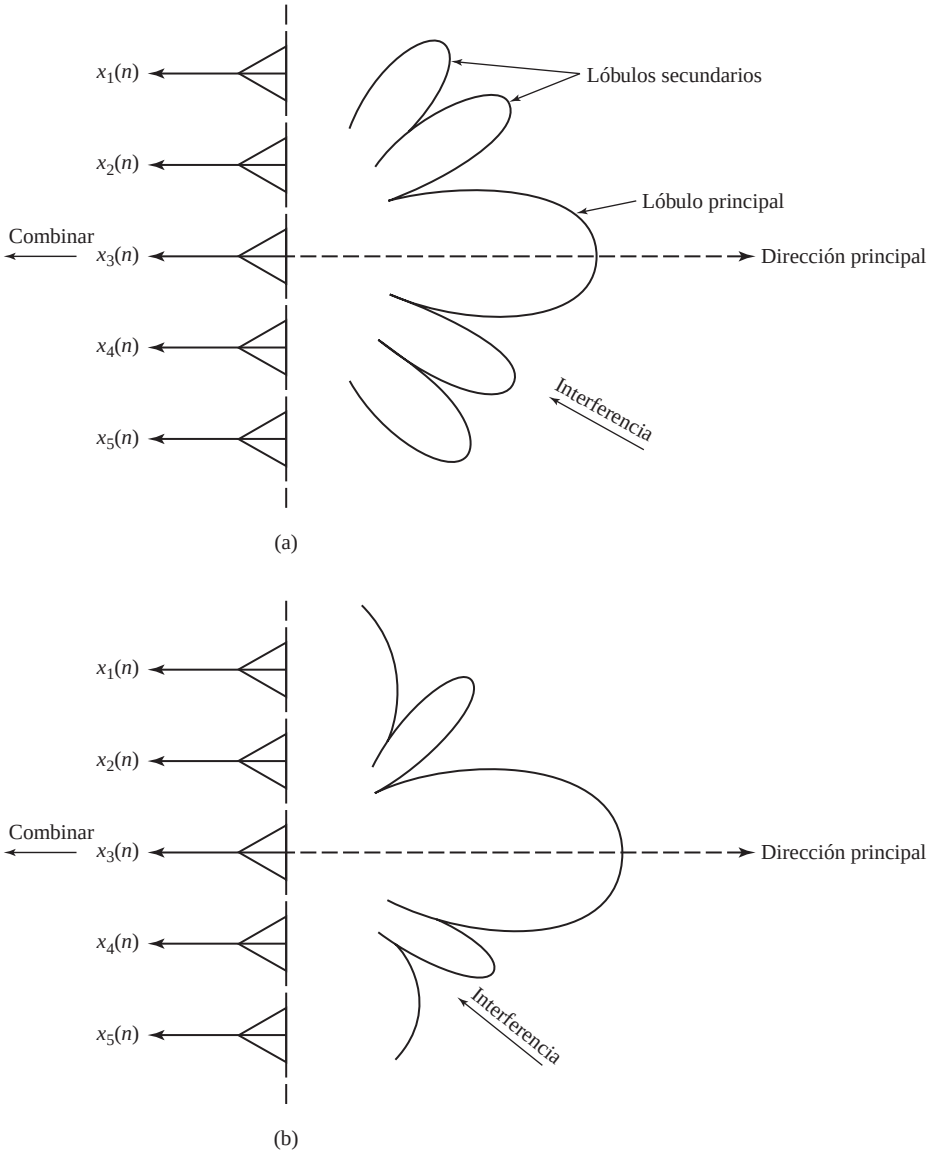


Figura 13.1.18. Matriz lineal de antenas: (a) con patrón de antena; (b) con un nulo en la dirección de la interferencia.

donde los h_k son los pesos y los n_k corresponden a un retardo de la muestra n_k de la señal $x(n)$. La elección de los pesos puede utilizarse para colocar nulos en las direcciones específicas.

Más generalmente, podemos filtrar simplemente cada secuencia antes de combinarla. En tal caso, la secuencia de salida tiene la forma general

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=1}^{K} y_k(n) \\ &= \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=0}^{M-1} h_k(l) x_k(n - n_k - l) \end{aligned} \tag{13.1.37}$$

donde $h_k(l)$ es la respuesta al impulso del filtro para procesar la salida del sensor k y los n_k son los retardos que dirigen el patrón del haz.

El algoritmo LMS descrito en la Sección 13.2.2 se utiliza frecuentemente en la selección adaptativa de los pesos h_k o las respuestas al impulso $h_k(l)$. Los algoritmos de mínimos cuadrados recursivos más potentes descritos en la Sección 13.3 también pueden aplicarse a los problemas con datos procedentes de varios sensores (multicanal).

13.2 Filtros FIR adaptativos en forma directa: el algoritmo LMS

A partir de los ejemplos de la sección anterior, podemos ver que existe un marco de trabajo común en todas las aplicaciones de filtrado adaptativo. El criterio de mínimos cuadrados que hemos adoptado nos lleva a un conjunto de ecuaciones lineales para los coeficientes del filtro, que se pueden expresar del siguiente modo

$$\sum_{k=0}^{M-1} h(k) r_{xx}(l-k) = r_{dx}(l+D), \qquad l = 0, 1, 2, \ldots, M-1 \tag{13.2.1}$$

donde $r_{xx}(l)$ es la autocorrelación de la secuencia $x(n)$ y $r_{dx}(l)$ es la correlación cruzada de las secuencias $d(n)$ y $x(n)$. El parámetro de retardo D es cero en algunos casos y distinto de cero en otros.

Observe que la autocorrelación $r_{xx}(l)$ y la correlación cruzada $r_{dx}(l)$ se obtienen a partir de los datos y, por tanto, representan estimados de la autocorrelación y la correlación cruzada (estadísticas) reales. Como resultado, los coeficientes $h(k)$ obtenidos a partir de (13.2.1) son estimados de los coeficientes reales. La calidad de los estimados depende de la longitud del registro de datos que esté disponible para estimar $r_{xx}(l)$ y $r_{dx}(l)$. Éste es un problema que hay que tener en cuenta en la implementación de un filtro adaptativo.

Un segundo problema que hay que considerar es que el proceso aleatorio subyacente $x(n)$ normalmente es no estacionario. Por ejemplo, en el proceso de ecualización del canal, la respuesta en frecuencia del canal puede variar con el tiempo. En consecuencia, la autocorrelación y la correlación cruzada estadísticas y, por tanto, sus estimados varían con el tiempo. Esto implica que los coeficientes del filtro adaptativo deben variar con el tiempo para incorporar las características estadísticas variantes en el tiempo de la señal del filtro. Esto también implica que la calidad de los estimados no puede establecerse arbitrariamente aumentando simplemente el número de muestras de la señal utilizadas en la estimación de la autocorrelación y la correlación cruzada.

Existen varias formas mediante las que los coeficientes del filtro adaptativo pueden variarse con el tiempo para seguir las características variantes en el tiempo de la señal. El método más popular consiste en adaptar el filtro recursivamente muestra a muestra, a medida que se recibe una nueva muestra de la señal. Un segundo método consiste en estimar $r_{xx}(l)$ y $r_{dx}(l)$ bloque a bloque, sin intentar mantener la continuidad en los valores de los coeficientes del filtro de un bloque de datos a otro. En un esquema de este tipo, el tamaño del bloque tiene que ser relativamente pequeño, abarcando un intervalo de tiempo que es corto comparado con el intervalo de tiempo sobre el que las características estadísticas de los datos cambian de forma significativa. Además de

este método de procesamiento de bloques, pueden obtenerse otros esquemas de procesamiento de bloques que incorporan cierta continuidad bloque a bloque en los coeficientes del filtro.

En nuestro estudio sobre los algoritmos para filtrado adaptativo, vamos a considerar sólo los algoritmos recursivos en el tiempo que actualizan los coeficientes del filtro muestra por muestra. En particular, vamos a considerar dos tipos de algoritmos, los algoritmos LMS, que se basan en una búsqueda de tipo gradiente para llevar a cabo un seguimiento de las características de la señal variante en el tiempo y los algoritmos recursivos por mínimos cuadrados, que son significativamente más complejos que el algoritmo LMS, pero proporcionan una convergencia más rápida a los cambios en los parámetros estadísticos de la señal.

13.2.1 Criterio del error cuadrático medio mínimo

El algoritmo LMS que se describe en la siguiente subsección se obtiene más fácilmente formulando la optimización de los coeficientes del filtro FIR como un problema de estimación basado en la minimización del error cuadrático medio. Supongamos que disponemos de la secuencia de datos (posiblemente complejos) $x(n)$, la cual consta de muestras procedentes de un proceso aleatorio estacionario con la secuencia de autocorrelación

$$\gamma_{xx}(m) = E[x(n)x^*(n-m)] \tag{13.2.2}$$

A partir de estas muestras, formamos un estimado de la secuencia deseada $d(n)$ pasando los datos observados $x(n)$ a través de un filtro FIR de coeficientes $h(n), 0 \le n \le M-1$. La salida del filtro puede expresarse como

$$\hat{d}(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) \tag{13.2.3}$$

donde $\hat{d}(n)$ representa un estimado de $d(n)$. El error de estimación se define como

$$\begin{aligned} e(n) &= d(n) - \hat{d}(n) \\ &= d(n) - \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) \end{aligned} \tag{13.2.4}$$

El error cuadrático medio como una función de los coeficientes del filtro es

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_M &= E[|e(n)|^2] \\ &= E\left[\left|d(n) - \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k)\right|^2\right] \\ &= E\left\{|d(n)|^2 - 2\mathrm{Re}\left[\sum_{k=0}^{M-1} h^*(l)d(n)x^*(n-l)\right] + \sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{M-1} h^*(l)h(k)x^*(n-l)x(n-k)\right\} \\ &= \sigma_d^2 - 2\mathrm{Re}\left[\sum_{l=0}^{M-1} h^*(l)\gamma_{dx}(l)\right] + \sum_{l=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{M-1} h^*(l)h(k)\gamma_{xx}(l-k) \end{aligned} \tag{13.2.5}$$

donde, por definición, $\sigma_d^2 = E[|d(n)|^2]$.

Observe que el error cuadrático medio es una función cuadrática de los coeficientes del filtro. En consecuencia, la minimización de $\mathscr{E}_M$ con respecto a los coeficientes nos lleva al conjunto de M ecuaciones lineales,

$$\sum_{k=0}^{M-1} h(k)\gamma_{xx}(l-k) = \gamma_{dx}(l), \qquad l = 0, 1, \ldots, M-1 \tag{13.2.6}$$

El filtro con los coeficientes obtenidos a partir de (13.2.6), que es la ecuación de Wiener–Hopf anteriormente obtenida en la Sección 12.7.1 se conoce como *filtro de Wiener*.

Si comparamos (13.2.6) con (13.2.1), es evidente que estas ecuaciones son similares en lo que respecta a la forma. En (13.2.1), utilizamos estimados de la autocorrelación y la correlación cruzada para determinar los coeficientes del filtro, mientras que en (13.2.6) utilizamos la autocorrelación y la correlación cruzada estadísticas. Por tanto, (13.2.6) proporciona los coeficientes del filtro óptimos (Wiener) en lo que respeta al error cuadrático medio, mientras que (13.2.1) proporciona estimados de los coeficientes óptimos.

Las ecuaciones dadas en (13.2.6) pueden expresarse en forma matricial como sigue

$$\Gamma_M \mathbf{h}_M = \gamma_d \tag{13.2.7}$$

donde $\mathbf{h}_M$ designa el vector de coeficientes, Γ_M es una matriz de Toeplitz $M \times M$ (hermitiana) con elementos $\Gamma_{lk} = \gamma_{xx}(l-k)$, y γ_d es un vector de correlación cruzada $M \times 1$ cuyos elementos son $\gamma_{dx}(l), l = 0, 1, \ldots, M-1$. El complejo conjugado de $\mathbf{h}_M$ se designa como $\mathbf{h}_M^*$ y la transpuesta como $\mathbf{h}_M^t$. La solución para los coeficientes óptimos del filtro es

$$\mathbf{h}_{\text{opt}} = \Gamma_M^{-1} \gamma_d \tag{13.2.8}$$

y el error cuadrático medio mínimo resultante que se obtiene con los coeficientes óptimos dado por (13.2.8) es

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_{M\,\text{mín}} &= \sigma_d^2 - \sum_{k=0}^{M-1} h_{\text{opt}}(k) \gamma_{dx}^*(k) \\ &= \sigma_d^2 - \gamma_d^H \Gamma_M^{-1} \gamma_d \end{aligned} \tag{13.2.9}$$

donde el exponente H designa la transpuesta conjugada.

Recuerde que todo el conjunto de ecuaciones lineales de (13.2.6) también puede obtenerse invocando el principio de ortogonalidad de la estimación cuadrático media (*véase* la Sección 12.7.2). De acuerdo con el principio de ortogonalidad, el error cuadrático medio se minimiza cuando el error $e(n)$ es ortogonal, en el sentido estadístico, para estimar $\hat{d}(n)$, es decir,

$$E[e(n)\hat{d}^*(n)] = 0 \tag{13.2.10}$$

Pero la condición dada en (13.2.10) implica que

$$E\left[\sum_{k=0}^{M-1} h(k) e(n) x^*(n-k)\right] = \sum_{k=0}^{M-1} h(k) E[e(n) x^*(n-k)] = 0$$

o, lo que es lo mismo,

$$E[e(n)x^*(n-l)] = 0, \qquad l = 0, 1, \ldots, M-1 \tag{13.2.11}$$

Si sustituimos $e(n)$ en (13.2.11) utilizando la expresión dada en (13.2.4), y calculamos la esperanza, obtenemos las ecuaciones dadas en (13.2.6).

Puesto que $\hat{d}(n)$ es ortogonal a $e(n)$, el error cuadrático medio residual (mínimo) es

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_{M\,\text{mín}} &= E[e(n)d^*(n)] \\ &= E[|d(n)|^2] - \sum_{k=0}^{M-1} h_{\text{opt}}(k) \gamma_{dx}^*(k) \end{aligned} \tag{13.2.12}$$

que es el resultado dado en (13.2.9).

Los coeficientes óptimos del filtro dados por (13.2.8) pueden obtenerse fácilmente utilizando el algoritmo de Levinson-Durbin. Sin embargo, consideremos el uso de un método de gradiente para obtener $\mathbf{h}_{\text{opt}}$, de forma iterativa. Este desarrollo nos lleva al algoritmo LMS para el proceso de filtrado adaptativo.

13.2.2 El algoritmo LMS

Pueden emplearse diversos métodos numéricos para resolver el conjunto de ecuaciones lineales dado por (13.2.6) o (13.2.7) para los coeficientes óptimos del filtro FIR. A continuación, consideremos los métodos recursivos que hemos visto para hallar el mínimo de una función de varias variables. En nuestro problema, el índice de rendimiento es el error cuadrático medio dado por (13.2.5), que es una función cuadrática de los coeficientes del filtro. Por tanto, esta función tiene un sólo mínimo, que determinaremos mediante una búsqueda iterativa.

Por el momento, suponemos que la matriz de autocorrelación Γ_M y el vector de correlación cruzada γ_d son conocidos. Por tanto, $\mathscr{E}_M$ es una función conocida de los coeficientes $h(n), 0 \leq n \leq M-1$. Los algoritmos para calcular recursivamente los coeficientes del filtro y, por tanto, para buscar el mínimo de $\mathscr{E}_M$, tienen la forma

$$\mathbf{h}_M(n+1) = \mathbf{h}_M(n) + \frac{1}{2}\Delta(n)\mathbf{S}(n), \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{13.2.13}$$

donde $\mathbf{h}_M(n)$ es el vector de coeficientes del filtro en la iteración n, $\Delta(n)$ es el tamaño del paso en la iteración n y $\mathbf{S}(n)$ es un vector de dirección para la iteracción n. El vector inicial $\mathbf{h}_M(0)$ se elige arbitrariamente. En este tratamiento, excluimos los métodos que requieren los cálculos de Γ_M^{-1}, como por ejemplo el método de Newton, y sólo consideramos los métodos de búsqueda basados en el uso de vectores gradiente.

El método más simple para hallar el mínimo de $\mathscr{E}_M$ recursivamente es el basado en una búsqueda de la pendiente descendente máxima (*véase* Murray (1972)). En este método, el vector de dirección $\mathbf{S}(n) = -\mathbf{g}(n)$, donde $\mathbf{g}(n)$ es el vector gradiente en la iteración n, se define como

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(n) &= \frac{d\mathscr{E}_M(n)}{d\mathbf{h}_M(n)} \\ &= 2[\Gamma_M \mathbf{h}_M(n) - \gamma_d], \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{13.2.14}$$

Así, calculamos el vector gradiente en cada iteracción y cambiamos los valores de $\mathbf{h}_M(n)$ en una dirección opuesta al gradiante. Por tanto, el algoritmo recursivo basado en el método de búsqueda de la pendiente descendente máxima es

$$\mathbf{h}_M(n+1) = \mathbf{h}_M(n) - \frac{1}{2}\Delta(n)\mathbf{g}(n) \tag{13.2.15}$$

o, lo que es equivalente,

$$\mathbf{h}_M(n+1) = [\mathbf{I} - \Delta(n)\Gamma_M]\mathbf{h}_M(n) + \Delta(n)\gamma_d \tag{13.2.16}$$

Podemos establecer, aunque no lo vamos a demostrar, que el algoritmo lleva a la convergencia de $\mathbf{h}_M(n)$ a $\mathbf{h}_{\text{opt}}$ en el límite cuando $n \to \infty$, siempre que la secuencia de pasos de tamaño $\Delta(n)$ sea absolutamente sumable, con $\Delta(n) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Se deduce que cuando $n \to \infty, \mathbf{g}(n) \to \mathbf{0}$.

Otros algoritmos que proporcionan una convergencia rápida son el algoritmo *de gradiente conjugado* y el algortimo de Fletcher–Powell. En el algoritmo de gradiente conjugado, los vectores de dirección están dados por

$$\mathbf{S}(n) = \beta(n-1)\mathbf{S}(n-1) - \mathbf{g}(n) \tag{13.2.17}$$

donde $\beta(n)$ es una función escalar de los vectores gradiente (*véase* Beckman (1960)). En el algoritmo de Fletcher–Powell, los vectores de dirección están dados por

$$\mathbf{S}(n) = -\mathbf{H}(n)\mathbf{g}(n) \tag{13.2.18}$$

donde $\mathbf{H}(n)$ es una matriz definida positiva $M \times M$, calculada iterativamente, que converge al inverso de Γ_M (*véase* Fletcher y Powell (1963)). Evidentemente, los tres algoritmos difieren en la forma en que se calculan los vectores de dirección.

Estos tres algoritmos son apropiados cuando Γ_M y γ_d son conocidos. Sin embargo, éste no es el caso en las aplicaciones de filtrado adaptativo, como ya hemos indicado anteriormente. Si no se conocen Γ_M y γ_d, podemos sustituir los estimados $\hat{\mathbf{S}}(n)$ de los vectores de dirección por los vectores reales $\mathbf{S}(n)$. Consideremos este método para el algoritmo de la pendiente descendente máxima.

En primer lugar, observe que el vector gradiente dado por (13.2.14) también puede expresarse en función de las condiciones de ortogonalidad dadas por (13.2.11). De hecho, las condiciones dadas en (13.2.11) son equivalentes a la expresión

$$E[e(n)\mathbf{X}_M^*(n)] = \gamma_d - \Gamma_M \mathbf{h}_M(n) \tag{13.2.19}$$

donde $\mathbf{X}_M(n)$ es el vector de elementos $x(n-l), l = 0, 1, \ldots, M-1$. Por tanto, el vector gradiente es simplemente

$$\mathbf{g}(n) = -2E[e(n)\mathbf{X}_M^*(n)] \tag{13.2.20}$$

Evidentemente, el vector gradiente $\mathbf{g}(n) = \mathbf{0}$ cuando el error es ortogonal a los datos en el estimado $\hat{d}(n)$.

Un estimado no polarizado del vector gradiente en la iteración n se obtiene simplemente a partir de (13.2.20) como

$$\hat{\mathbf{g}}(n) = -2e(n)\mathbf{X}_M^*(n) \tag{13.2.21}$$

donde $e(n) = d(n) - \hat{d}(n)$ y $\mathbf{X}_M(n)$ es el conjunto de M muestras de señal en el filtro en la iteración n. Por tanto, con $\hat{\mathbf{g}}(n)$ sustituido por $\mathbf{g}(n)$, tenemos el algoritmo

$$\mathbf{h}_M(n+1) = \mathbf{h}_M(n) + \Delta(n)e(n)\mathbf{X}_M^*(n) \tag{13.2.22}$$

Éste es un *algoritmo estocástico de gradiente descendente*. Como se puede ver en la Ecuación (13.2.22), presenta un tamaño de paso variable.

Es habitual en el proceso de filtrado adaptativo utilizar un algoritmo de tamaño de paso fijo por dos razones. La primera de ellas es que un algoritmo con tamaño de paso fijo se implementa fácilmente por hardware o software. La segunda es que un tamaño de paso fijo es apropiado para hacer un seguimiento de los parámetros estadísticos de la señal variante en el tiempo, mientras que si $\Delta(n) \to 0$ cuando $n \to \infty$, la adaptación a las variaciones de la señal no puede producirse. Por estas razones, (13.2.22) se modifica al algoritmo

$$\mathbf{h}_M(n+1) = \mathbf{h}_M(n) + \Delta e(n)\mathbf{X}_M^*(n) \tag{13.2.23}$$

donde Δ ahora es el tamaño de paso fijo. Este algoritmo fue propuesto por primera vez por Widrow y Hoff (1960) y actualmente es ampliamente conocido como el algoritmo de mínimos cuadrados (LMS, *least-mean-squares*). Evidentemente, se trata de un algoritmo estocástico de gradiente.

El algoritmo LMS es relativamente simple de implementar. Por tanto, se ha empleado en muchas aplicaciones de filtrado adaptativo. Sus propiedades y limitaciones también han sido investigadas. En la siguiente sección, proporcionamos un breve estudio de sus propiedades relativas a la convergencia, estabilidad y ruido resultantes de utilizar los vectores de gradiente. A continuación compararemos sus propiedades con los algoritmos recursivos más complejos de mínimos cuadrados.

13.2.3 Algoritmos estocásticos de gradiente

En la literatura técnica se han propuesto diversas variantes del algoritmo de mínimos cuadrados (LMS) básico y se han implementado en aplicaciones de filtrado adaptativo. Una de estas variantes se obtiene promediando los vectores gradiante en varias iteraciones al ajustar los coeficientes del filtro. Por ejemplo, el promedio de K vectores gradiente es

$$\bar{\hat{\mathbf{g}}}(nK) = -\frac{2}{K}\sum_{k=0}^{K-1} e(nK+k)\mathbf{X}_M^*(nK+k) \tag{13.2.24}$$

y la correspondiente ecuación recursiva para actualizar los coeficientes del filtro una vez cada K iteraciones es

$$\mathbf{h}_M((n+1)K) = \mathbf{h}_M(nK) - \frac{1}{2}\Delta\bar{\hat{\mathbf{g}}}(nK) \tag{13.2.25}$$

En efecto, la operación de promediado realizada en (13.2.24) reduce el ruido en el estimado del vector gradiente, como demostró Gardner (1984).

Un método alternativo consiste en filtrar los vectores gradiente mediante un filtro paso bajo y utilizar la salida del filtro como un estimado del vector gradiente. Por ejemplo, un filtro paso bajo simple para los gradientes proporciona como salida

$$\hat{\mathbf{S}}(n) = \beta\hat{\mathbf{S}}(n-1) - \hat{\mathbf{g}}(n), \qquad \mathbf{S}(0) = -\hat{\mathbf{g}}(0) \tag{13.2.26}$$

donde la elección de $0 \leq \beta < 1$ determina el ancho de banda del filtro paso bajo. Cuando el valor de β es próximo a la unidad, el ancho de banda del filtro es pequeño y el cálculo del promedio efectivo se realiza sobre muchos vectores gradiente. Por otro lado, cuando el valor de β es pequeño, el filtro paso bajo tiene un ancho de banda grande y, por tanto, proporciona un promedio pequeño de los vectores gradiente. Con los vectores gradiente filtrados dados por (13.2.26) en lugar de $\hat{\mathbf{g}}(n)$, obtenemos la versión filtrada del algoritmo LMS dada por

$$\mathbf{h}_M(n+1) = \mathbf{h}_M(n) + \frac{1}{2}\Delta\hat{\mathbf{S}}(n) \tag{13.2.27}$$

Un análisis del algoritmo LMS de gradiente filtrado está disponible en Proakis (1974).

Se obtienen otras tres variantes del algoritmo LMS básico dadas en (13.2.23) utilizando la información de signo contenida en la señal de error $e(n)$ y/o en los componentes del vector de señal $\mathbf{X}_M(n)$. Por tanto, las tres posibles variantes son

$$\mathbf{h}_M(n+1) = \mathbf{h}_M(n) + \Delta\mathrm{csgn}[e(n)]\mathbf{X}_M^*(n) \tag{13.2.28}$$

$$\mathbf{h}_M(n+1) = \mathbf{h}_M(n) + \Delta e(n)\mathrm{csgn}[\mathbf{X}_M^*(n)] \tag{13.2.29}$$

$$\mathbf{h}_M(n+1) = \mathbf{h}_M(n) + \Delta\mathrm{csgn}[e(n)]\mathrm{csgn}[\mathbf{X}_M^*(n)] \tag{13.2.30}$$

donde $\mathrm{csgn}[x]$ es la función signo compleja definida como

$$\mathrm{csgn}[x] = \begin{cases} 1+j, & \text{si } \mathrm{Re}(x) > 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(x) > 0 \\ 1-j, & \text{si } \mathrm{Re}(x) > 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(x) < 0 \\ -1+j, & \text{si } \mathrm{Re}(x) < 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(x) > 0 \\ -1-j, & \text{si } \mathrm{Re}(x) < 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(x) < 0 \end{cases}$$

y $\mathrm{csgn}[\mathbf{X}]$ designa la función signo compleja aplicada a cada elemento del vector $\mathbf{X}$. Estas tres variantes del algoritmo LMS suelen denominarse algoritmos LMS de complejidad reducida, ya que en la Ecuación (13.2.30) se evitan las multiplicaciones por completo, y en las Ecuaciones (13.2.28) y (13.2.29) pueden ser completamente evitadas seleccionando Δ para que sea una potencia de $1/2$. El precio que hay que pagar por esta reducción en la complejidad de los cálculos es una convergencia más lenta de los coeficientes del filtro a sus valores óptimos.

Otra versión de los algoritmos LMS, conocida como algoritmo *LMS normalizado* (NLMS), que se emplea frecuentemente en la práctica está dada por

$$\mathbf{h}_M(n+1) = \mathbf{h}_M(n) + \frac{\Delta}{||\mathbf{X}_M(n)||^2}e(n)\mathbf{X}_M^*(n) \tag{13.2.31}$$

Dividiendo el tamaño del paso por la norma del vector de datos $\mathbf{X}_M(n)$, el algoritmo LMS normalizado es equivalente a emplear el tamaño de paso variable de la forma

$$\Delta(n) = \frac{\Delta}{||\mathbf{X}_M(n)||^2} \tag{13.2.32}$$

Por tanto, el tamaño del paso en cada iteración es inversamente proporcional a la energía en el vector de datos recibido $\mathbf{X}_M(n)$. Este cambio de escala es ventajoso en las aplicaciones de filtrado adaptativo donde el rango dinámico de la entrada al filtro adaptativo es grande, como en el caso por ejemplo de la implementación de los ecualizadores adaptativos para atenuar lentamente los canales de comunicación. En tales aplicaciones, puede resultar ventajoso añadir una constante positiva pequeña al denominador de (13.2.32), para evitar las inestabilidades numéricas que pueden resultar cuando la norma de $\mathbf{X}_M(n)$ es pequeña. Así, otra versión del algoritmo LMS normalizado puede emplear un tamaño de paso variable de la forma

$$\Delta(n) = \frac{\Delta}{\delta + ||\mathbf{X}_M(n)||^2} \tag{13.2.33}$$

donde δ es un número pequeño positivo.

13.2.4 Propiedades del algoritmo LMS

En esta sección, vamos a considerar las propiedades básicas del algoritmo LMS dado por (13.2.23). En particular, vamos a centrarnos en las propiedades de convergencia, su estabilidad y el exceso de ruido generado como resultado de utilizar vectores gradiente ruidosos, en lugar de los vectores gradiente reales. El uso de estimados ruidosos de los vectores implica que los coeficientes del filtro fluctúan aleatoriamente y, por tanto, un análisis de la características del algoritmo debería llevarse a cabo en términos estadísticos.

La convergencia y estabilidad del algoritmo LMS puede investigarse determinando cómo el valor medio de $\mathbf{h}_M(n)$ converge a los coeficientes óptimos $\mathbf{h}_{\text{opt}}$. Si calculamos el valor esperado de (13.2.23), obtenemos

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{h}}_M(n+1) &= \bar{\mathbf{h}}_M(n) + \Delta E\left[e(n)\mathbf{X}_M^*(n)\right] \\ &= \bar{\mathbf{h}}_M(n) + \Delta[\gamma_d - \Gamma_M \bar{\mathbf{h}}_M(n)] \\ &= (\mathbf{I} - \Delta\Gamma_M)\bar{\mathbf{h}}_M(n) + \Delta\gamma_d\end{aligned} \tag{13.2.34}$$

donde $\bar{\mathbf{h}}_M(n) = \mathbf{E}[\mathbf{h}_M(n)]$ e $\mathbf{I}$ es la matriz identidad.

La relación recursiva dada en (13.2.34) puede representarse como un sistema de control de bucle cerrado, como se muestra en la Figura 13.2.1. La velocidad de convergencia y la estabilidad de este sistema de bucle cerrado están gobernadas por la elección que hagamos del parámetro de paso fijo Δ. Para determinar el comportamiento respecto de la convergencia, es conveniente desacoplar las M ecuaciones en diferencias simultáneas dadas en (13.2.34), realizando una transformación lineal del vector de coeficientes medio $\bar{\mathbf{h}}_M(n)$. La transformación apropiada se obtiene teniendo en cuenta que la matriz de autocorrelación Γ_M es hermitiana y, por tanto, puede representarse (*veáse* Gantmacher (1960)) como

$$\Gamma_M = \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^H \tag{13.2.35}$$

donde $\mathbf{U}$ es la matriz modal normalizada de Γ_M y Λ es una matriz diagonal con elementos en la diagonal $\lambda_k, 0 \le k \le M-1$, iguales a los auto-valores de Γ_M.

Si sustituimos (13.2.35) en (13.2.34), la expresión anterior puede expresarse como

$$\bar{\mathbf{h}}_M^0(n+1) = (\mathbf{I} - \Delta\Lambda)\bar{\mathbf{h}}_M^0(n) + \Delta\gamma_d^0 \tag{13.2.36}$$

donde los vectores transformados (ortogonalizados) son $\bar{\mathbf{h}}_M^0(n) = \mathbf{U}^H\bar{\mathbf{h}}_M(n)$ y $\gamma_d^0 = \mathbf{U}^H\gamma_d$. El conjunto de las M ecuaciones en diferencias de primer orden dado en (13.2.36) ahora están desacopladas. Su convergencia y su estabilidad quedan determinadas por la ecuación homogénea

$$\bar{\mathbf{h}}_M^0(n+1) = (\mathbf{I} - \Delta\Lambda)\bar{\mathbf{h}}_M^0(n) \tag{13.2.37}$$

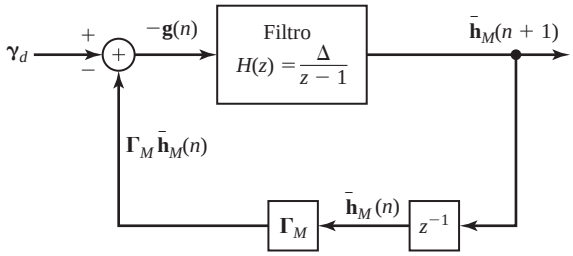


Figura 13.2.1. Representación del sistema de control en bucle cerrado de la Ecuación 13.2.34

Si centramos nuestra atención en la solución de la ecuación k dada en (13.2.37), observamos que

$$\bar{h}^0(k,n) = C(1-\Delta\lambda_k)^n u(n), \qquad k = 0,1,2,\ldots,M-1 \tag{13.2.38}$$

donde C es una constante arbitraria y $u(n)$ es la secuencia del impulso unitario, Evidentemente, $\bar{h}^0(k,n)$ converge a cero exponencialmente, siempre que

$$|1-\Delta\lambda_k| < 1$$

o, lo que es equivalene,

$$0 < \Delta < \frac{2}{\lambda_k}, \qquad k = 0,1,\ldots,M-1 \tag{13.2.39}$$

La condición dada por (13.2.39) para la convergencia de la ecuación en diferencias homogéna para el coeficiente k-ésimo del filtro normalizado (modo k del sistema en bucle cerrado) debe satisfacerse para todo $k = 0,1,\ldots,M-1$. Por tanto, el rango de valores de Δ que asegura la convergencia de la media del vector de coeficientes en el algoritmo LMS es

$$0 < \Delta < \frac{2}{\lambda_{\text{máx}}} \tag{13.2.40}$$

donde $\lambda_{\max}$ es el autovalor máximo de Γ_M.

Dado que Γ_M es una matriz de autocorrelación, sus autovalores son no negativos. Por tanto, un límite superior sobre $\lambda_{\max}$ es

$$\lambda_{\text{máx}} < \sum_{k=0}^{M-1} \lambda_k = \text{trace}\,\Gamma_M = M\gamma_{xx}(0) \tag{13.2.41}$$

donde $\gamma_{xx}(0)$ es la potencia de la señal de entrada, la cual se estima fácilmente a partir de la señal recibida. Por tanto, un límite superior del tamaño de la muestra Δ es $2/M\gamma_{xx}(0)$.

A partir de (13.2.38), puede observarse que la convergencia rápida del algoritmo LMS se produce cuando $|1-\Delta\lambda_k|$ es pequeño, es decir, cuando los polos del sistema en bucle cerrado de la Figura 13.2.1 están alejados de la circunferencia unidad. Sin embargo, no podemos conseguir esta deseable condición y satisfacer el límite superior dado por la Ecuación (13.2.39) si existe una diferencia grande entre los autovalores mínimo y máximo de Γ_M. En otras plabras, incluso si seleccionamos Δ para que sea igual a $1/\lambda_{\text{máx}}$, la velocidad de convergencia del algoritmo LMS quedará determinada por la disminución del modo correspondiente al autovalor mínimo $\lambda_{\min}$. En este modo, con $\Delta = 1/\lambda_{\max}$ sustituido en (13.2.38), tenemos

$$h_M^0(k,n) = C\left(1 - \frac{\lambda_{\text{mín}}}{\lambda_{\text{máx}}}\right)^n u(n) \tag{13.2.42}$$

En consecuencia, la relación $\lambda_{\min}/\lambda_{\max}$ determina en última instancia la velocidad de convergencia. Si el valor de $\lambda_{\min}/\lambda_{\max}$ es pequeño (mucho menor que la unidad), la velocidad de convergencia será lenta. Por el contrario, si $\lambda_{\min}/\lambda_{\max}$ es próximo a la unidad, la velocidad de convergencia del algoritmo será más rápida.

La otra característica importante del algoritmo LMS es el ruido que resulta de emplear los estimados de los vectores gradiente. El ruido en estos estimados da lugar a fluctuaciones aleatorias en los coeficientes alrededor de sus valores óptimos y, por tanto, nos lleva a un incremento del error cuadrático medio mínimo (MMSE) en la salida del filtro adaptativo. Por tanto, el MSE total es $\mathscr{E}_{M\,\text{mín}} + \mathscr{E}_{\Delta}$, donde $\mathscr{E}_{\Delta}$ es el *error cuadrático medio en exceso*.

Para cualquier conjunto dado de coeficientes del filtro $\mathbf{h}_M(n)$, el MSE total en la salida del filtro adaptativo puede expresarse como

$$\mathscr{E}_t(n) = \mathscr{E}_{M\,\text{mín}} + (\mathbf{h}_M(n) - \mathbf{h}_{\text{opt}})^t \Gamma_M (\mathbf{h}_M(n) - \mathbf{h}_{\text{opt}})^* \tag{13.2.43}$$

donde $\mathbf{h}_{\text{opt}}$ representa los coeficientes óptimos del filtro definidos por (13.2.8). Una gráfica de $\mathscr{E}_t(n)$ como función de la iteración n es una *curva de aprendizaje*. Si sustituimos (13.2.35) para Γ_M y realizamos la transformación ortogonal lineal utilizada anteriormente, obtenemos

$$\mathscr{E}_t(n) = \mathscr{E}_{M\,\text{mín}} + \sum_{k=0}^{M-1} \lambda_k \left| h^0(k,n) - h^0_{\text{opt}}(k) \right|^2 \tag{13.2.44}$$

donde el término $h^0(k,n) - h^0_{\text{opt}}(k)$ representa el error en el coeficiente k-ésimo del filtro (en el sistema de coordenadas ortogonales). El error cuadrático medio en exceso se define como el valor esperado del segundo término de la Ecuación (13.2.44),

$$\mathscr{E}_{\Delta} = \sum_{k=0}^{M-1} \lambda_k E\left[\left| h^0(k,n) - h^0_{\text{opt}}(k) \right|^2 \right] \tag{13.2.45}$$

Para obtener una expresión para el MSE en exceso $\mathscr{E}_{\Delta}$, suponemos que los valores medios de los coeficientes del filtro $\mathbf{h}_M(n)$ han convergido a sus valores óptimos $\mathbf{h}_{\text{opt}}$. Luego, el término $\Delta e(n)\mathbf{X}^*_M(n)$ en el algoritmo LMS dado por (13.2.23) es un vector de ruido de media cero. Su covarianza es

$$\text{cov}[\Delta e(n)\mathbf{X}^*_M(n)] = \Delta^2 E\left[|e(n)|^2 \mathbf{X}_M(n)\mathbf{X}^H_M(n) \right] \tag{13.2.46}$$

En una primera aproximación, suponemos que $|e(n)|^2$ no está correlado con el vector de señal. Aunque esta suposición no es estrictamente cierta, simplifica la deducción y proporciona resultados útiles. El lector puede consultar los textos de Mazo (1979), Jones, Cavin y Reed (1982), y Gardner (1984) para conocer más detalles acerca de esta suposición. Luego,

$$\begin{aligned} \text{cov}[\Delta e(n)\mathbf{X}^*_M(n)] &= \Delta^2 E[|e(n)|^2] E\left[\mathbf{X}_M(n)\mathbf{X}^H_M(n) \right] \\ &= \Delta^2 \mathscr{E}_{M\,\text{mín}} \Gamma_M \end{aligned} \tag{13.2.47}$$

Para el vector de coeficientes ortonormalizados $\mathbf{h}^0_M(n)$ con ruido aditivo, tenemos la ecuación

$$\mathbf{h}^0_M(n+1) = (\mathbf{I} - \Delta\Lambda)\mathbf{h}^0_M(n) + \Delta\gamma^0_d + \mathbf{w}^0(n) \tag{13.2.48}$$

donde $\mathbf{w}^0(n)$ es el vector de ruido aditivo, que está relacionado con el vector de ruido $\Delta e(n)\ \mathbf{X}^*_M(n)$ a través de la transformación

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^0(n) &= \mathbf{U}^H[\Delta e(n)\mathbf{X}^*_M(n)] \\ &= \Delta e(n)\mathbf{U}^H\mathbf{X}^*_M(n) \end{aligned} \tag{13.2.49}$$

Es simple ver que la matriz de covarianza del vector de ruido es

$$\begin{aligned} \text{cov}[\mathbf{w}^0(n)] &= \Delta^2 \mathscr{E}_{M\,\text{mín}} \mathbf{U}^H \Gamma_M \mathbf{U} \\ &= \Delta^2 \mathscr{E}_{M\,\text{mín}} \Lambda \end{aligned} \tag{13.2.50}$$

Por tanto, los M componentes de $\mathbf{w}^0(n)$ están incorrelados y cada componente tiene la varianza $\sigma_k^2 = \Delta^2 \mathscr{E}_{M\,\text{mín}} \lambda_k, k = 0, 1, \ldots, M-1$.

Puesto que las componentes de ruido de $\mathbf{w}^0(n)$ están incorreladas, podemos considerar por separado las M ecuaciones en diferencias desacopladas de la Ecuación (13.2.48). Cada una de las ecuaciones en diferencias de primer orden representa un filtro con la respuesta al impulso $(1-\Delta\lambda_k)^n$. Cuando un filtro así se excita con una secuencia de ruido $w_k^0(n)$, la varianza del ruido en la salida del filtro es

$$E\left[\left|h^0(k,n) - h_{\text{opt}}^0(k)\right|^2\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (1-\Delta\lambda_k)^n (1-\Delta\lambda_k)^m E\left[w_k^0(n) w_k^{0*}(m)\right] \tag{13.2.51}$$

Con el fin de simplificar, suponemos que la secuencia de ruido es una secuencia de ruido blanco $w_k^0(n)$. Luego (13.2.51) se reduce a

$$E\left[\left|h^0(k,n) - h_{\text{opt}}^0(k)\right|^2\right] = \frac{\sigma_k^2}{1-(1-\Delta\lambda_k)^2} = \frac{\Delta^2 \mathscr{E}_{M\,\text{mín}} \lambda_k}{1-(1-\Delta\lambda_k)^2} \tag{13.2.52}$$

Si sustituimos el resultado de (13.2.52) en (13.2.45), obtenemos la expresión para el error cuadrático en exceso como

$$\mathscr{E}_\Delta = \Delta^2 \mathscr{E}_{M\,\text{mín}} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{\lambda_k^2}{1-(1-\Delta\lambda_k)^2} \tag{13.2.53}$$

Esta expresión puede simplificarse si suponemos que Δ se selecciona de manera que $\Delta\lambda_k \ll 1$ para todo k. Luego,

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_\Delta &\approx \Delta^2 \mathscr{E}_{M\,\text{mín}} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{\lambda_k^2}{2\Delta\lambda_k} \\ &\approx \frac{1}{2}\Delta \mathscr{E}_{M\,\text{mín}} \sum_{k=0}^{M-1} \lambda_k \\ &\approx \frac{\Delta M \mathscr{E}_{M\,\text{mín}} \gamma_{xx}(0)}{2} \end{aligned} \tag{13.2.54}$$

donde $\gamma_{xx}(0)$ es la potencia de la señal de entrada.

La expresión de $\mathscr{E}_\Delta$ indica que el MSE en exceso es proporcional al parámetro de paso fijo Δ. Por tanto, nuestra elección de Δ debe basarse en un compromiso entre la convergencia rápida y un error cuadrático medio en exceso pequeño. En la práctica, es deseable tener $\mathscr{E}_\Delta < \mathscr{E}_{M\,\text{mín}}$. Por tanto,

$$\frac{\mathscr{E}_\Delta}{\mathscr{E}_{M\,\text{mín}}} \approx \frac{\Delta M \gamma_{xx}(0)}{2} < 1$$

o, lo que es equivalente,

$$\Delta < \frac{2}{M\gamma_{xx}(0)} \tag{13.2.55}$$

Pero, éste es sólo el límite superior que hemos obtenido anteriormente para $\lambda_{\max}$. Cuando se trabaja en régimen permanente, Δ debe satisfacer el límite superior dado en (13.2.55); en caso contrario, el MSE en exceso causa una degradación significativa en el funcionamiento del filtro adaptativo.

El análisis anterior del MSE en exceso se ha basado en la suposición de que los valores medios de los coeficientes del filtro convergen a la solución óptima $\mathbf{h}_{\text{opt}}$. Bajo esta condición, el paso fijo Δ debe satisfacer el límite dado en (13.2.55). Por otro lado, hemos determinado que la convergencia del vector de coeficientes

medio requiere que $\Delta < 2/\lambda_{\max}$. Mientras que una elección del valor de Δ próximo al límite superior $2/\lambda_{\max}$ puede llevarnos a la convergencia inicial del algoritmo de gradiente determinístico (conocido), un valor grande de Δ normalmente dará lugar a la inestabilidad del algoritmo LMS de gradiente estocástico.

La convergencia inicial o comportamiento transitorio del algoritmo LMS ha sido investigado por varios investigadores. Sus resultados indican claramente que el tamaño de paso debe reducirse en proporción directa a la longitud del filtro adaptativo, como en (13.2.55). El límite superior dado en la Ecuación (13.2.55) es necesario para garantizar la convergencia inicial del algoritmo LMS de gradiente estocástico. En la práctica, normalmente se elige $\Delta < 1/M\gamma_{xx}(0)$. Sayed (2003), Gitlin y Weinstein (1979), y Ungerboeck (1972) proporcionan un análisis del comportamiento transitorio y de las propiedades de convergencia del algoritmo LMS.

En una implementación digital del algoritmo LMS, la elección del tamaño del paso puede llegar a ser incluso más crítica. En un intento de reducir el error cuadrático medio en exceso, es posible reducir el tamaño del paso hasta el punto en que el MSE de salida total realmente aumente. Esta condición se produce cuando las componentes del gradiente estimado $e(n)x^*(n-l), l = 0, 1, M-1$, después de la multiplicación por el tamaño del paso Δ, son más pequeñas que la mitad del bit menos significativo en la representación de punto fijo de los coeficientes del filtro. En tal caso, la adaptación cesa. En consecuencia, es importante que el tamaño del paso sea lo suficientemente grande como para llevar los coeficientes del filtro a las vecindades de $\mathbf{h}_{\text{opt}}$. Si se desea disminuir el tamaño del paso de forma significativa, es necesario aumentar la precisión de los coeficientes del filtro. Normalmente, pueden emplearse dieciseis bits de precisión para los coeficientes del filtro, con los doce bits más significativos utilizados para las operaciones aritméticas en el filtrado de los datos. Los cuatro bits menos significativos son necesarios para proporcionar la precisión necesaria para el proceso de adaptación. Por tanto, las componentes escaladas del gradiente estimado $\Delta e(n)x^*(n-l)$ normalmente sólo afectan a los bits menos significativos. En efecto, la precisión añadida también permite que el ruido sea promediado, dado que son necesarios varios cambios incrementales en los bits antes de que se produzca ningún cambio en los bits más significativos utilizados en las operaciones aritméticas para el filtrado de los datos. Para ver un análisis de los errores de redondeo en una implementación digital del algoritmo LMS, el lector puede consultar los textos de Gitlin y Weinstein (1979), Gitlin, Meadors y Weinstein (1982), y Caraiscos y Liu (1984).

Para terminar, indicaremos que el algoritmo LMS es apropiado para seguir los parámetros estadísticos de una señal que varía lentamente en el tiempo. En tal caso, el error cuadrático medio mínimo y el vector de coeficientes óptimos será variante en el tiempo. En otras palabras, $\mathscr{E}_{M\,\text{mín}}$ es una función del tiempo y la superficie del error M-dimensional se mueve con el índice de tiempo n. El algoritmo LMS intenta seguir el mínimo móvil $\mathscr{E}_{M\,\text{mín}}$ en el espacio M-dimensional, pero siempre está retrasado debido a su uso de los vectores gradiente (estimados). En consecuencia, el algoritmo LMS incurre en otra forma de error, denominado *error de retardo*, cuyo valor cuadrático medio disminuye cuando el tamaño de paso Δ aumenta. El error cuadrático medio total ahora se puede expresar como

$$\mathscr{E}_{\text{total}} = \mathscr{E}_{M\,\text{mín}} + \mathscr{E}_{\Delta} + \mathscr{E}_{l} \tag{13.2.56}$$

donde $\mathscr{E}_l$ designa el MSE debido al retardo.

En cualquier problema de filtrado adaptativo no estacionario, si dibujamos $\mathscr{E}_\Delta$ y $\mathscr{E}_l$ como una función de Δ, veremos que estos errores se comportan como se muestra en la Figura 13.2.2. Observe que $\mathscr{E}_\Delta$ aumenta cuando aumenta Δ, mientras que $\mathscr{E}_l$ disminuye cuando Δ aumenta. El error total presenta un mínimo, el cual determinará la elección óptima del tamaño del paso.

Cuando las variaciones temporales estadísticas de la señal se producen rápidamente, el error de retardo dominará en el funcionamiento del filtro adaptativo. En tal caso, $\mathscr{E}_l \gg \mathscr{E}_{M\,\text{mín}} + \mathscr{E}_\Delta$, incluso cuando se emplee el valor más grande posible de Δ.

EJEMPLO 13.2.1

En la Figura 13.2.3 se ilustran las curvas de aprendizaje para el algoritmo LMS, cuando se emplean para ecualizar adaptativamente un canal de comunicación. El ecualizador FIR fue implementado en la forma directa y tenía una longitud $M = 11$. La matriz de autocorrelación Γ_M tiene una dispersión del autovalor igual a $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 11$. Estas tres curvas de aprendizaje

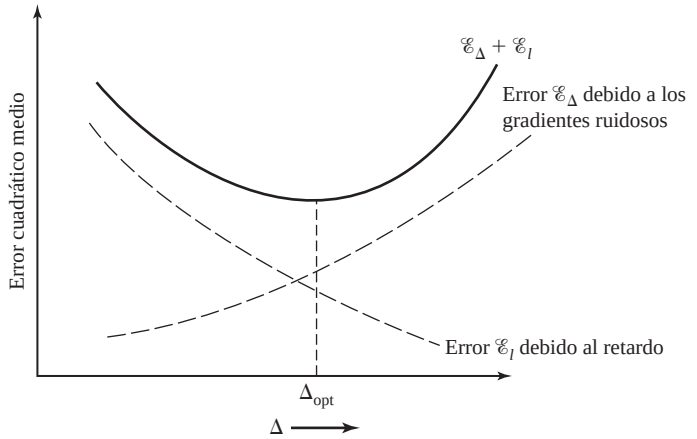


Figura 13.2.2. Error cuadrático medio $\mathscr{E}_\Delta$ y el error de retardo $\mathscr{E}_l$ como función del tamaño de paso Δ.

se han obtenido con los tamaños de paso $\Delta = 0.045, 0.09$ y 0.115, promediando el MSE (estimado) en 200 simulaciones. La potencia de la señal de entrada se ha normalizado a la unidad. Por tanto, el límite superior dado en (13.2.55) es igual a 0.18. Seleccionando $\Delta = 0.09$ (la mitad del límite superior), obtenemos una curva de aprendizaje que decae rápidamente, como se muestra en la Figura 13.2.3. Si dividimos Δ entre 2 para obtener 0.045, la velocidad de convergencia se reduce pero el MSE en exceso también se reduce, por lo que el algoritmo da mejores resultados en el entorno de una señal invariante en el tiempo. Por último, observe que una elección de $\Delta = 0.115$ produce grandes fluctuaciones indeseables en el MSE de salida del algoritmo. Observe que $\Delta = 0.115$ es significativamente menor que el límite superior dado por (13.2.55).

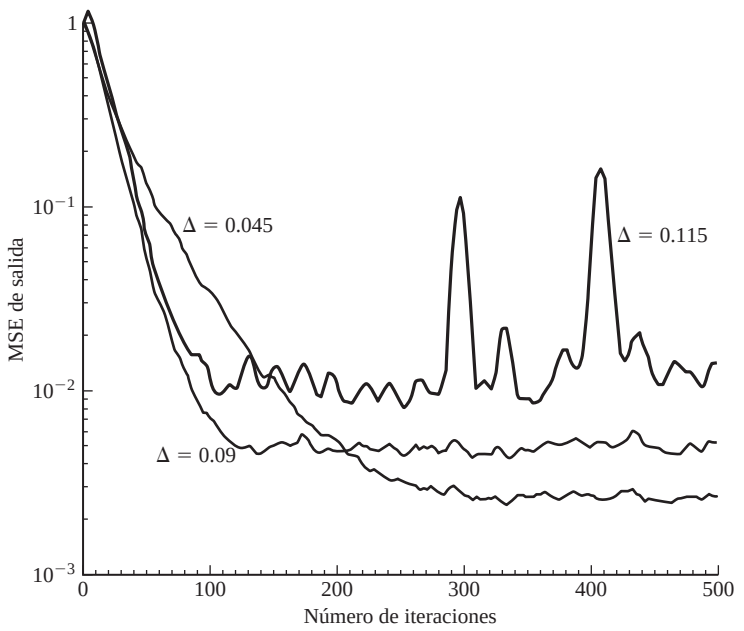


Figura 13.2.3. Curvas de aprendizaje para el algoritmo LMS aplicado a un ecualizador adaptativo de longitud $M = 11$ y un canal con una dispersión del autovalor igual a $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 11$.

13.3 Filtros adaptativos en la forma directa: algoritmos RLS

La principal ventaja del algoritmo LMS está en su simplicidad de cálculo. Sin embargo, el precio que hay que pagar por esta simplicidad es una lenta convergencia, especialmente cuando los autovalores de la matriz de autocorrelación Γ_M presentan una dispersión grande, es decir, cuando $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} \gg 1$. Desde otro punto de vista, el algoritmo LMS sólo tiene un parámetro ajustable para controlar la velocidad de convergencia, es decir, el tamaño del paso Δ. Puesto que Δ está limitado con propósitos de estabilidad para ser menor que el límite superior dado en (13.2.55), los modos correspondientes a los autovalores menores convergen muy lentamente.

Para obtener una convergencia más rápida, es necesario emplear algoritmos más complejos, que implican parámetros adicionales. En particular, si la matriz de correlación Γ_M tiene autovalores diferentes $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{M-1}$, deberemos emplear un algoritmo que contenga M parámetros, uno para cada uno de los autovalores. Para obtener algoritmos de filtrado adaptativo que converjan más rápidamente, adoptaremos el criterio de mínimos cuadrados en lugar del método estadístico basado en el criterio del error cuadrático medio. Por tanto, trataremos directamente la secuencia de datos $x(n)$ y obtendremos estimados de las correlaciones de los datos.

13.3.1 Algoritmo RLS

Con el fin de simplificar la notación, es conveniente expresar los algoritmos de mínimos cuadrados en forma matricial. Dado que los algoritmos serán recursivos en el tiempo, también es necesario introducir un índice de tiempo en el vector de coeficientes del filtro y en la secuencia de error. Así, definimos el vector de coeficientes del filtro en el instante n como

$$\mathbf{h}_M(n) = \begin{bmatrix} h(0,n) \\ h(1,n) \\ h(2,n) \\ \vdots \\ h(M-1,n) \end{bmatrix} \tag{13.3.1}$$

donde el subíndice M denota la longitud del filtro. De forma similar, el vector de la señal de entrada en el instante n se designa como

$$\mathbf{X}_M(n) = \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ x(n-2) \\ \vdots \\ x(n-M+1) \end{bmatrix} \tag{13.3.2}$$

Suponga que $x(n) = 0$ para $n < 0$. Esto normalmente se conoce como *ventana de preselección* de los datos de entrada.

Ahora el problema de los mínimos cuadrados recursivos puede formularse como sigue. Suponga que hemos observado los vectores $\mathbf{X}_M(l), l = 0, 1, \ldots, n$, y que deseamos determinar el vector de coeficientes del filtro $\mathbf{h}_M(n)$ que minimiza la suma ponderada de los módulos al cuadrado de los errores.

$$\mathscr{E}_M = \sum_{l=0}^{n} w^{n-l} |e_M(l,n)|^2 \tag{13.3.3}$$

donde el error se define como la diferencia entre la secuencia deseada $d(l)$ y la estimada $\hat{d}(l,n)$,

$$\begin{aligned} e_M(l,n) &= d(l) - \hat{d}(l,n) \\ &= d(l) - \mathbf{h}_M^t(n)\mathbf{X}_M(l) \end{aligned} \tag{13.3.4}$$

y w es un factor de ponderación en el intervalo $0 < w < 1$.

El propósito del factor w es ponderar los puntos de datos más recientes más fuertemente y así permitir a los coeficientes del filtro adaptarse a las características estadísticas variantes en el tiempo. Esto se consigue utilizando el factor de ponderación exponencial con los datos pasados. Alternativamente, podemos emplear una ventana deslizante de duración finita con ponderación uniforme sobre la longitud de la ventana. Hallamos el factor de ponderación exponencial más conveniente tanto matemática como prácticamente. Por comparación, una secuencia de ventana ponderada exponencialmente tiene una memoria efectiva de

$$\bar{N} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n w^n}{\sum_{n=0}^{\infty} w^n} = \frac{w}{1-w} \tag{13.3.5}$$

y, por tanto, será aproximadamente equivalente a una ventana deslizante de longitud $\bar{N}$.

La minimización de $\mathscr{E}_M$ con respecto al vector de coeficientes del filtro $\mathbf{h}_M(n)$ proporciona el conjunto de ecuaciones lineales

$$\mathbf{R}_M(n)\mathbf{h}_M(n) = \mathbf{D}_M(n) \tag{13.3.6}$$

donde $\mathbf{R}_M(n)$ es la matriz de correlación (estimada) de la señal definida como

$$\mathbf{R}_M(n) = \sum_{l=0}^{n} w^{n-l} \mathbf{X}_M^*(l)\mathbf{X}_M^t(l) \tag{13.3.7}$$

y $\mathbf{D}_M(n)$ es el vector de correlación cruzada (estimado)

$$\mathbf{D}_M(n) = \sum_{l=0}^{n} w^{n-l} \mathbf{X}_M^*(l) d(l) \tag{13.3.8}$$

La solución de (13.3.6) es

$$\mathbf{h}_M(n) = \mathbf{R}_M^{-1}(n)\mathbf{D}_M(n) \tag{13.3.9}$$

Evidentemente, la matriz $\mathbf{R}_M(n)$ es parecida a la matriz de autocorrelación estadística Γ_M, y el vector $\mathbf{D}_M(n)$ es parecido al vector de correlación cruzada γ_d definido anteriormente. Sin embargo, hay que destacar que $\mathbf{R}_M(n)$ no es una matriz Toeplitz, mientras que Γ_M sí lo es. También debemos mencionar que para valores pequeños de n, $\mathbf{R}_M(n)$ puede estar mal condicionada, por lo que su inverso no se puede calcular. En tal caso, es habitual añadir inicialmente la matriz $\delta\mathbf{I}_M$ a $\mathbf{R}_M(n)$, donde $\mathbf{I}_M$ es una matriz identidad y δ es una constante positiva pequeña. Con una ponderación exponencial hacia atrás, el efecto de añadir $\delta\mathbf{I}_M$ se disipa con el tiempo.

Suponga ahora que tenemos la solución de (13.3.9) en el instante $n-1$, es decir, conocemos $\mathbf{h}_M(n-1)$, y deseamos calcular $\mathbf{h}_M(n)$. Esto no resulta eficiente y, por tanto, tampoco es práctico para resolver el conjunto de M ecuaciones lineales para cada nueva componente de señal. En su lugar, podemos calcular la matriz y los vectores de forma recursiva. En primer lugar, $\mathbf{R}_M(n)$ puede calcularse recursivamente como

$$\mathbf{R}_M(n) = w\mathbf{R}_M(n-1) + \mathbf{X}_M^*(n)\mathbf{X}_M^t(n) \tag{13.3.10}$$

La Ecuación (13.3.10) se conoce como *ecuación de actualización en el tiempo* para $\mathbf{R}_M(n)$.

Puesto que se necesita el inverso de $\mathbf{R}_M(n)$, utilizamos el lema de inversión de matrices siguiente (*véase* Householder (1964)),

$$\mathbf{R}_M^{-1}(n) = \frac{1}{w}\left[\mathbf{R}_M^{-1}(n-1) - \frac{\mathbf{R}_M^{-1}(n-1)\mathbf{X}_M^*(n)\mathbf{X}_M^t(n)\mathbf{R}_M^{-1}(n-1)}{w + \mathbf{X}_M^t(n)\mathbf{R}_M^{-1}(n-1)\mathbf{X}_M^*(n)}\right] \tag{13.3.11}$$

Por tanto, $\mathbf{R}_M^{-1}(n)$ puede calcularse de forma recursiva.

Por conveniencia, definimos $\mathbf{P}_M(n) = \mathbf{R}_M^{-1}(n)$. También resulta adecuado definir un vector M-dimensional $\mathbf{K}_M(n)$, el cual en ocasiones se denomina *vector de ganancia de Kalman*, como

$$\mathbf{K}_M(n) = \frac{1}{w + \mu_M(n)} \mathbf{P}_M(n-1)\mathbf{X}_M^*(n) \tag{13.3.12}$$

donde $\mu_M(n)$ es un escalar definido como

$$\mu_M(n) = \mathbf{X}_M^t(n)\mathbf{P}_M(n-1)\mathbf{X}_M^*(n) \tag{13.3.13}$$

Con estas condiciones, (13.3.11) se transforma en

$$\mathbf{P}_M(n) = \frac{1}{w}\left[\mathbf{P}_M(n-1) - \mathbf{K}_M(n)\mathbf{X}_M^t(n)\mathbf{P}_M(n-1)\right] \tag{13.3.14}$$

Postmultiplicamos (13.3.14) por $\mathbf{X}_M^*(n)$. Así,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_M(n)\mathbf{X}_M^*(n) &= \frac{1}{w}\left[\mathbf{P}_M(n-1)\mathbf{X}_M^*(n) - \mathbf{K}_M(n)\mathbf{X}_M^t(n)\mathbf{P}_M(n-1)\mathbf{X}_M^*(n)\right] \\ &= \frac{1}{w}\{[w + \mu_M(n)]\mathbf{K}_M(n) - \mathbf{K}_M(n)\mu_M(n)\} = \mathbf{K}_M(n)\end{aligned} \tag{13.3.15}$$

Por tanto, el vector de ganancia de Kalman también puede definirse como $\mathbf{P}_M(n)\mathbf{X}_M^*(n)$.

Ahora podemos utilizar el lema de inversión de matrices para obtener una ecuación que permita calcular los coeficientes del filtro de forma recursiva. Puesto que,

$$\mathbf{h}_M(n) = \mathbf{P}_M(n)\mathbf{D}_M(n) \tag{13.3.16}$$

y

$$\mathbf{D}_M(n) = w\mathbf{D}_M(n-1) + d(n)\mathbf{X}_M^*(n) \tag{13.3.17}$$

tenemos, sustituyendo (13.3.14) y (13.3.17) en (13.3.9),

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_M(n) &= \frac{1}{w}\left[\mathbf{P}_M(n-1) - \mathbf{K}_M(n)\mathbf{X}_M^t(n)\mathbf{P}_M(n-1)\right] \\ &\quad \times [w\mathbf{D}_M(n-1) + d(n)\mathbf{X}_M^*(n)] \\ &= \mathbf{P}_M(n-1)\mathbf{D}_M(n-1) + \frac{1}{w}d(n)\mathbf{P}_M(n-1)\mathbf{X}_M^*(n) \\ &\quad -\mathbf{K}_M(n)\mathbf{X}_M^t(n)\mathbf{P}_M(n-1)\mathbf{D}_M(n-1) \\ &\quad -\frac{1}{w}d(n)\mathbf{K}_M(n)\mathbf{X}_M^t(n)\mathbf{P}_M(n-1)\mathbf{X}_M^*(n) \\ &= \mathbf{h}_M(n-1) + \mathbf{K}_M(n)\left[d(n) - \mathbf{X}_M^t(n)\mathbf{h}_M(n-1)\right]\end{aligned} \tag{13.3.18}$$

Observe que $\mathbf{X}_M^t(n)\mathbf{h}_M(n-1)$ es la salida del filtro adaptativo en el instante n basada en el uso de los coeficientes del filtro en el instante $n-1$. Puesto que

$$\mathbf{X}_M^t(n)\mathbf{h}_M(n-1) = \hat{d}(n, n-1) \equiv \hat{d}(n) \tag{13.3.19}$$

y

$$e_M(n, n-1) = d(n) - \hat{d}(n, n-1) \equiv e_M(n) \tag{13.3.20}$$

se deduce que la ecuación de actualización en el tiempo para $\mathbf{h}_M(n)$ puede expresarse como

$$\mathbf{h}_M(n) = \mathbf{h}_M(n-1) + \mathbf{K}_M(n)e_M(n) \tag{13.3.21}$$

o, lo que es equivalente,

$$\mathbf{h}_M(n) = \mathbf{h}_M(n-1) + \mathbf{P}_M(n)\mathbf{X}_M^*(n)e_M(n) \tag{13.3.22}$$

En resumen, suponga que disponemos de los coeficientes óptimos del filtro $\mathbf{h}_M(n-1)$, la matriz $\mathbf{P}_M(n-1)$ y el vector $\mathbf{X}_M(n-1)$. Cuando se obtiene la nueva componente de señal $x(n)$, formamos el vector $\mathbf{X}_M(n)$ eliminando el término $x(n-M)$ de $\mathbf{X}_M(n-1)$ y añadiendo el término $x(n)$ como primer elemento. A continuación, el cálculo recursivo para los coeficientes del filtro es el siguiente:

1. Calcular la salida del filtro:

$$\hat{d}(n) = \mathbf{X}_M^t(n)\mathbf{h}_M(n-1) \tag{13.3.23}$$

2. Calcular el error:

$$e_M(n) = d(n) - \hat{d}(n) \tag{13.3.24}$$

3. Calcular el vector de ganancia de Kalman:

$$\mathbf{K}_M(n) = \frac{\mathbf{P}_M(n-1)\mathbf{X}_M^*(n)}{w + \mathbf{X}_M^t(n)\mathbf{P}_M(n-1)\mathbf{X}_M^*(n)} \tag{13.3.25}$$

4. Actualizar la inversa de la matriz de correlación

$$\mathbf{P}_M(n) = \frac{1}{w}\left[\mathbf{P}_M(n-1) - \mathbf{K}_M(n)\mathbf{X}_M^t(n)\mathbf{P}_M(n-1)\right] \tag{13.3.26}$$

5. Actualizar el vector de coeficientes del filtro

$$\mathbf{h}_M(n) = \mathbf{h}_M(n-1) + \mathbf{K}_M(n)e_M(n) \tag{13.3.27}$$

El algoritmo recursivo especificado por las ecuaciones (13.3.23) hasta (13.3.27) se denomina *algoritmo* RLS (*recursive least-squares*) *recursivo de mínimos cuadrados en la forma directa*. Éste se inicializa configurando $\mathbf{h}_M(-1) = \mathbf{0}$ y $\mathbf{P}_M(-1) = 1/\delta\mathbf{I}_M$, donde δ es un número positivo pequeño.

El MSE residual resultante de la optimización anterior es

$$\mathscr{E}_{M\,\text{mín}} = \sum_{l=0}^{n} w^{n-l}|d(l)|^2 - \mathbf{h}_M^t(n)\mathbf{D}_M^*(n) \tag{13.3.28}$$

A partir de (13.3.27), puede observar que los coeficientes del filtro varían con el tiempo en una cantidad igual al error $e_M(n)$ multiplicado por el vector de ganancia de Kalman $\mathbf{K}_M(n)$. Puesto que $\mathbf{K}_M(n)$ es un vector M-dimensional, cada coeficiente del filtro se controla mediante uno de los elementos de $\mathbf{K}_M(n)$. En consecuencia, se consigue una convergencia rápida. En contraste, la ecuación de actualización en el tiempo para los coeficientes del filtro ajustados por el uso del algoritmo LMS es

$$\mathbf{h}_M(n) = \mathbf{h}_M(n-1) + \Delta\mathbf{X}^*(n)e_M(n) \tag{13.3.29}$$

que sólo dispone del parámetro Δ para controlar la velocidad de ajuste de los coeficientes.

13.3.2 Algoritmos de factorización LDU y de raíz cuadrada

El algoritmo recursivo de mínimos cuadrados es muy sensible al ruido de redondeo de una implementación del algoritmo cuando se emplea aritmética de precisión finita. El problema principal con los errores de redondeo se produce al actualizar $\mathbf{P}_M(n)$. Para remediar este problema, podemos realizar una descomposición de la matriz de correlación $\mathbf{R}_M(n)$ o de su inversa $\mathbf{P}_M(n)$.

Más concretamente, consideremos una descomposición LDU (*lower-triangular / diagonal / upper-triangular*, triangular inferior / diagonal / triangular superior) de $\mathbf{P}_M(n)$. Así, podemos escribir

$$\mathbf{P}_M(n) = \mathbf{L}_M(n)\bar{\mathbf{D}}_M(n)\mathbf{L}_M^H(n) \tag{13.3.30}$$

donde $\mathbf{L}_M(n)$ es una matriz triangular inferior con los elementos l_{ik}, $\bar{\mathbf{D}}_M(n)$ es una matriz diagonal con elementos δ_k y $\mathbf{L}_M^H(n)$ es una matriz triangular superior. Los elementos de la diagonal de $\mathbf{L}_M(n)$ se hacen iguales a la unidad (es decir, $l_{ii} = 1$). Ahora, en lugar de calcular $\mathbf{P}_M(n)$ de forma recursiva, podemos determinar una fórmula para actualizar los factores $\mathbf{L}_M(n)$ y $\bar{\mathbf{D}}_M(n)$ directamente, evitando así los cálculos de $\mathbf{P}_M(n)$.

La fórmula de actualización deseada se obtiene sustituyendo la forma factorizada de $\mathbf{P}_M(n)$ en (13.3.26). Así, tenemos

$$\mathbf{L}_M(n)\bar{\mathbf{D}}_M(n)\mathbf{L}_M^H(n) = \frac{1}{w}\mathbf{L}_M(n-1)\left[\bar{\mathbf{D}}_M(n-1) - \frac{1}{w+\mu_M(n)}\mathbf{V}_M(n-1)\mathbf{V}_M^H(n-1)\right]\mathbf{L}_M^H(n-1) \tag{13.3.31}$$

donde, por definición,

$$\mathbf{V}_M(n-1) = \bar{\mathbf{D}}_M(n-1)\mathbf{L}_M^H(n-1)\mathbf{X}_M^*(n) \tag{13.3.32}$$

El término entre corchetes de (13.3.31) es una matriz hermitiana y se puede expresar como la siguiente descomposición LDU

$$\hat{\mathbf{L}}_M(n-1)\hat{\mathbf{D}}_M(n-1)\hat{\mathbf{L}}_M^H(n-1) = \bar{\mathbf{D}}_M(n-1) - \frac{1}{w+\mu_M(n)}\mathbf{V}_M(n-1)\mathbf{V}_M^H(n-1) \tag{13.3.33}$$

Si sustituimos (13.3.33) en (13.3.31), obtenemos

$$\mathbf{L}_M(n)\bar{\mathbf{D}}_M(n)\hat{\mathbf{L}}_M^H(n) = \frac{1}{w}\left[\mathbf{L}_M(n-1)\hat{\mathbf{L}}_M(n-1)\hat{\mathbf{D}}_M(n-1)\hat{\mathbf{L}}_M^H(n-1)\mathbf{L}_M^H(n-1)\right] \tag{13.3.34}$$

En consecuencia, las relaciones de actualización deseadas son

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_M(n) &= \mathbf{L}_M(n-1)\hat{\mathbf{L}}_M(n-1)\\ \bar{\mathbf{D}}_M(n) &= \frac{1}{w}\hat{\mathbf{D}}_M(n-1)\end{aligned} \tag{13.3.35}$$

Para determinar los $\hat{\mathbf{L}}_M(n-1)$ y $\hat{\mathbf{D}}_M(n-1)$, tenemos que descomponer en factores la matriz del lado derecho de la Ecuación (13.3.33). Esta factorización puede expresarse mediante el conjunto de ecuaciones lineales

$$\sum_{k=1}^{j} l_{ik}d_k l_{jk}^* = p_{ij}, \qquad 1 \le j \le i-1, \qquad i \ge 2 \tag{13.3.36}$$

donde $\{d_k\}$ son los elementos de $\hat{\mathbf{D}}_M(n-1)$, $\{l_{ik}\}$ son los elementos de $\hat{\mathbf{L}}_M(n-1)$ y $\{p_{ij}\}$ son los elementos de la matriz de la parte derecha de la Ecuación (13.3.33). Luego, $\{l_{ik}\}$ y $\{d_k\}$ se determinan como sigue:

$$\begin{aligned} d_1 &= p_{11}\\ l_{ij}d_j &= p_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}d_k l_{jk}^*, \qquad 1 \le j \le i-1, \quad 2 \le i \le M\\ d_i &= p_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |l_{ik}|^2 d_k, \qquad 2 \le i \le M \end{aligned} \tag{13.3.37}$$

for $j = 1, \ldots, 2, \ldots, M$ do
  $f_j = x_j^*(n)$
end loop j
for $j = 1, 2, \ldots, M-1$ do
  for $i = j+1, j+2, \ldots, M$ do
    $f_j = f_j + l_{ij}(n-1) f_i$
end loop j
for $j = 1, 2, \ldots, M$ do
  $d_j(n) = d_j(n-1)/w$
  $v_j = d_j(n) f_j$
end loop j
$\alpha_M = 1 + v_M f_M^*$
$d_M(n) = d_M(n)/\alpha_M$
$k_M = v_M$
for $j = M-1, M-2, \ldots, 1$ do
  $k_j = v_j$
  $\alpha_j = \alpha_{j+1} + v_j f_j^*$
  $\lambda_j = f_j/\alpha_{j+1}$
  $d_j(n) = d_j(n)\alpha_{j+1}/\alpha_1$
  for $i = M, M-1, \ldots, j+1$ do
    $l_{ij}(n) = l_{ij}(n-1) + k_i^* \lambda_j$
    $k_i = k_i + v_j l_{ij}^*(n-1)$ down to $j = 2$)
  end loop i
end loop j
$\mathbf{K}_M(n) = [k_1, k_2, \ldots, k_M]^t$
$e_M(n) = d(n) - d(n)$
$\mathbf{h}_M(n) = \mathbf{h}_M(n-1) + [e_M(n)/\alpha_1]\mathbf{K}_M(n)$

Tabla 13.1. Forma LDU del algoritmo RLS de raíz cuadrada.

El algoritmo resultante, obtenido a partir de las ecuaciones de actualización en el tiempo dadas en (13.3.35), depende directamente del vector de datos $\mathbf{X}_M(n)$ y no del "cuadrado" del vector de datos. Por tanto, se evita la operación de elevar al cuadrado el vector de datos y, en consecuencia, el efecto de los errores de redondeo se ve reducido significativamente.

Los algorimos RLS obtenidos a partir de una descomposición LDU de $\mathbf{R}_M(n)$ o de $\mathbf{P}_M(n)$ se conocen como *algoritmos RLS de raíz cuadrada*. Bierman (1977), Carlson y Culmone (1979), y Hsu (1982) se ocupan de estos tipos de algoritmos. Un algoritmo RLS de raíz cuadrada basado en la descomposición LDU de $\mathbf{P}_M(n)$, como se acaba de describir, se proporciona en la Tabla 13.1. Su complejidad de cálculo es proporcional a M^2.

13.3.3 Algoritmos RLS rápidos

El algoritmo RLS en la forma directa y los algoritmos de raíz cuadrada presentan una complejidad de cálculo proporcional a M^2, como se ha indicado. Por otro lado, los algoritmos RLS en celosía que se estudian en la Sección 13.4, presentan una complejidad de cálculo proporcional a M. Básicamente, los algoritmos en celosía evitan las multiplicaciones de matrices implicadas en el cálculo del vector de ganancia de Kalman $\mathbf{K}_M(n)$.

Utilizando las fórmulas de predicción directa e inversa obtenidas en la Sección 13.4 para el algoritmo RLS en celosía, es posible obtener ecuaciones de actualización en el tiempo para el vector de ganancia de Kalman que eviten por completo las multiplicaciones de matrices. Los algoritmos resultantes tienen una complejidad

que es proporcional a M (multiplicaciones y divisiones) y, por tanto, se denominan *algoritmos RLS rápidos* para los filtros FIR en forma directa.

Existen varias versiones de los algoritmos rápidos, que difieren en cuestiones menores. En las Tablas 13.2 y 13.3 se proporcionan dos versiones para señales complejas. Las variables utilizadas en los algoritmos rápidos enumeradas en estas tablas se definen en la Sección 13.4. La complejidad de cálculo para la versión A es de $10M-4$ multiplicaciones y divisiones (complejas), mientras que la versión B tiene una complejidad de $9M+1$ multiplicaciones y divisiones. Es posible conseguir una reducción adicional en la complejidad de cálculo a $7M$. Por ejemplo, Carayannis, Manolakis y Kalouptsidis (1983) describen un algoritmo RLS rápido, denominado algoritmo FAEST (*fast a posteriori error sequential technique*, técnica rápida secuencial del error a posteriori), con una complejidad de cáluclo de $7M$; este algoritmo se proporciona en la Sección 13.4. Se han propuesto otras versiones de estos algoritmos con una complejidad de $7M$, pero muchos de estos algoritmos son extremadamente sensibles al ruido de redondeo y presentan problemas de inestabilidad (Falconer y Ljung (1978), Carayannis, Manolakis y Kalouptsidis (1983; 1986) y Cioffi y Kailath (1984)). Slock y Kailath (1988; 1991) han demostrado cómo estabilizar estos algoritmos rápidos ($7M$) con un incremento relativamente pequeño del número de cálculos; en la Sección 13.4 se exponen dos algoritmos RLS rápidos estabilizados.

$$
\begin{aligned}
f_{M-1}(n) &= x(n) + \mathbf{a}_{M-1}^t(n-1)\mathbf{X}_{M-1}(n-1) \\
g_{M-1}(n) &= x(n-M+1) + \mathbf{b}_{M-1}^t(n-1)\mathbf{X}_{M-1}(n) \\
\mathbf{a}_{M-1}(n) &= \mathbf{a}_{M-1}(n-1) - \mathbf{K}_{M-1}(n-1)\, f_{M-1}(n) \\
f_{M-1}(n,n) &= x(n) + \mathbf{a}_{M-1}^t(n)\mathbf{X}_{M-1}(n-1) \\
E_{M-1}^f(n) &= wE_{M-1}^f(n-1) + f_{M-1}(n)\, f_{M-1}^*(n,n) \\
\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{M-1}(n) \\ c_{\mathrm{MM}}(n) \end{bmatrix} &\equiv \mathbf{K}_M(n) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{K}_{M-1}(n-1) \end{bmatrix} + \frac{f_{M-1}^*(n,n)}{E_{M-1}^f(n)} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_{M-1}(n) \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_{M-1}(n) &= \frac{\mathbf{C}_{M-1}(n) - c_{\mathrm{MM}}(n)\mathbf{b}_{M-1}(n-1)}{1 - c_{\mathrm{MM}}(n) g_{M-1}(n)} \\
\mathbf{b}_{M-1}(n) &= \mathbf{b}_{M-1}(n-1) - \mathbf{K}_{M-1}(n) g_{M-1}(n) \\
\hat{d}(n) &= \mathbf{h}_M^t(n-1)\mathbf{X}_M(n) \\
e_M(n) &= d(n) - \hat{d}(n) \\
\mathbf{h}_M(n) &= \mathbf{h}_M(n-1) + \mathbf{K}_M(n) e_M(n)
\end{aligned}
$$

Inicialización

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}_{M-1}(-1) &= \mathbf{b}_{M-1}(-1) = 0 \\
\mathbf{K}_{M-1}(-1) &= 0 \\
\mathbf{h}_{M-1}(-1) &= 0 \\
E_{M-1}^f(-1) &= \varepsilon, \quad \varepsilon > 0
\end{aligned}
$$

Tabla 13.2. Algoritmo RLS rápido: versión A.

$$
\begin{aligned}
f_{M-1}(n) &= x(n) + \mathbf{a}_{M-1}^t(n-1)\mathbf{X}_{M-1}(n-1) \\
g_{M-1}(n) &= x(n-M+1) + \mathbf{b}_{M-1}^t(n-1)\mathbf{X}_{M-1}(n) \\
\mathbf{a}_{M-1}(n) &= \mathbf{a}_{M-1}(n-1) - \mathbf{K}_{M-1}(n-1)\, f_{M-1}(n) \\
f_{M-1}(n,n) &= \alpha_{M-1}(n-1)\, f_{M-1}(n) \\
E_{M-1}^f(n) &= wE_{M-1}^f(n-1) + \alpha_{M-1}(n-1)|\, f_{M-1}(n)|^2 \\
\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{M-1}(n) \\ c_{\mathrm{MM}}(n) \end{bmatrix} &\equiv \mathbf{K}_M(n) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{K}_{M-1}(n-1) \end{bmatrix} + \frac{f_{M-1}^*(n,n)}{E_{M-1}^f(n)} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_{M-1}(n) \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_{M-1}(n) &= \frac{\mathbf{C}_{M-1}(n) - c_{\mathrm{MM}}(n)\mathbf{b}_{M-1}(n-1)}{1 - c_{\mathrm{MM}}(n) g_{M-1}(n)} \\
\mathbf{b}_{M-1}(n) &= \mathbf{b}_{M-1}(n-1) - \mathbf{K}_{M-1}(n) g_{M-1}(n) \\
\alpha_{M-1}(n) &= \alpha_{M-1}(n-1) \left[\frac{1 - \frac{f_{M-1}(n) f_{M-1}^*(n,n)}{E_{M-1}^f(n)}}{1 - c_{\mathrm{MM}}(n) g_{M-1}(n)} \right] \\
\hat{d}(n) &= \mathbf{h}_M^t(n-1)\mathbf{X}_M(n) \\
e_M(n) &= d(n) - \hat{d}(n) \\
\mathbf{h}_M(n) &= \mathbf{h}_M(n-1) + \mathbf{K}_M(n) e_M(n)
\end{aligned}
$$

Inicialización

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}_{M-1}(-1) &= \mathbf{b}_{M-1}(-1) = 0 \\
\mathbf{K}_{M-1}(-1) &= 0, \quad \mathbf{h}_{M-1}(-1) = 0 \\
E_{M-1}^f(-1) &= \varepsilon > 0
\end{aligned}
$$

Tabla 13.3. Algoritmo RLS rápido: versión B.

13.3.4 Propiedades de los algoritmos RLS para la forma directa

Una ventaja importante del algoritmo RLS en la forma directa sobre el algoritmo LMS es su rápida velocidad de convergencia. Este comportamiento característico se ilustra en la Figura 13.3.1, la cual muestra la velocidad de convergencia de los algoritmos LMS y RLS en la forma directa para un ecualizador de canal FIR adaptativo de longitud $M = 11$. La matriz de autocorrelación estadística Γ_M para la señal recibida tiene una relación de autovalor igual a $\lambda_{\text{máx}}/\lambda_{\text{mín}} = 11$. Todos los coeficientes del ecualizador se ponen incialmente a cero. El tamaño de paso para el algoritmo LMS se ha seleccionado como igual a $\Delta = 0.02$, lo que representa un buen compromiso entre la velocidad de convergencia y el error cuadrático medio en exceso.

La superioridad del algoritmo RLS en alcanzar más rápidamente la convergencia es evidente. El algoritmo converge en menos de 70 iteraciones (70 muestras de señal) mientras que el algoritmo LMS no converje hasta las 600 iteraciones. Esta rápida velocidad de convergencia del algoritmo RLS es extremadamete importante en aplicaciones en las que los parámetros estadísticos de la señal varían con el tiempo rápidamente. Por ejemplo, las variaciones temporales de las características de un canal de radio de alta frecuencia ionosférico da lugar a un desvanecimiento de la señal hasta el punto en el que la amplitud de la señal es comparable o incluso más pequeña que el ruido aditivo. Durante un desvanecimiento de la señal, tanto el algoritmo LMS como el RLS no pueden seguir las características del canal. Cuando la señal sale del desvanecimiento, las características del

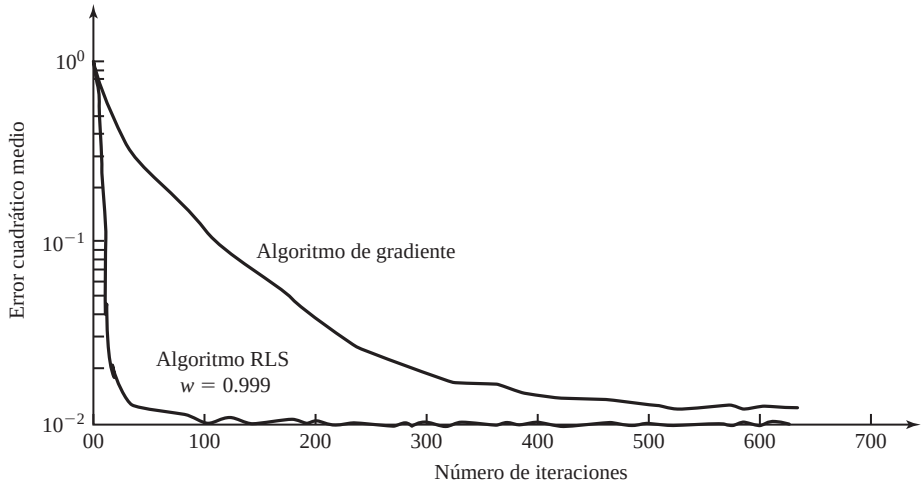


Figura 13.3.1. Curvas de aprendizaje para los algoritmos RLS y LMS para el ecualizador adaptativo de longitud $M = 11$. La dispersión de autovalor del canal es $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 11$. El tamaño de paso para el algoritmo LMS es $\Delta = 0.02$. (De *Digital Communication* por John G. Proakis, © 1983, McGraw-Hill Book Company. Reimpreso con permiso del editor).

canal generalmente son diferentes a las que tenía antes del desvanecimiento. En un caso así, el algoritmo LMS es más lento en adaptarse a las nuevas características del canal. Por el contrario, el algoritmo RLS se adapta lo suficientemente rápido como para seguir dichas rápidas variaciones (Hsu (1982)).

A pesar de su superior velocidad de convergencia, los algoritmos RLS para el filtrado adaptativo FIR descritos en la sección anterior presentan dos importantes desventajas. Una es su complejidad de cálculo. Los algoritmos de raíz cuadrada tienen una complejidad proporcional a M^2. Los algoritmos RLS rápidos tienen una complejidad de cálculo proporcional a M, pero el factor de proporcionalidad es de cuatro a cinco veces el del algoritmo LMS.

La segunda desventaja de los algoritmos es su sensibilidad a los errores de redondeo que acumulan como resultado de los cálculos recursivos. En algunos casos, los errores de redondeo hacen que estos algoritmos sean inestables.

Las propiedades numéricas de los algoritmos RLS han sido estudiadas por diversos investigadores, entre los que se incluyen Ling y Proakis (1984a), Ljung y Ljung (1985), y Cioffi (1987b). Con fines ilustrativos, la Tabla 13.4 incluye los resultados de la simulación sobre el error cuadrático (promedio temporal) en estado permanente para el algoritmo RLS de raíz cuadrada, el algoritmo RLS rápido de la Tabla 13.2 y el algoritmo LMS, para diferentes longitudes de palabra. La simulación ha sido realizada con un ecualizador adaptativo lineal con $M = 11$ coeficientes. El canal tiene una relación de autovalor de $\lambda_{\text{máx}}/\lambda_{\text{mín}} = 11$. El factor de ponderación exponencial utilizado en los algoritmos RLS era $w = 0.975$ y el tamaño de paso para los algoritmos LMS era $\Delta = 0.025$. El ruido aditivo tiene una varianza de 0.001. El error cuadrático medio de salida con precisión infinita es 2.1×10^{-3}.

Es importante mencionar que el algoritmo RLS en la forma directa se hace inestable y, por tanto, no funciona apropiadamente con aritmética de punto fijo de 16 bits. Para este algoritmo, determinamos experimentalmente que son necesarios aproximadamente de 20 a 24 bits de precisión para que el algoritmo funcione bien. Por otro lado, el algoritmo de raíz cuadrada funciona hasta con unos 9 bits, pero la degradación en su funcionaminto es significativa por debajo de 11 bits. El algoritmo RLS rápido funciona bien hasta con 11 bits para duraciones cortas del orden de 500 iteraciones. Para un número mucho mayor de iteraciones, el algoritmo se vuelve inestable debido a la acumulación de errores de redondeo. En tal caso, se han propuesto varios métodos para reiniciar el

Número de bits (incluyendo el signo)	Algoritmo RLS de raíz cuadrada	RLS rápido	LMS
16	2.17	2.17	2.30
13	2.33	2.21	2.30
11	6.14	3.34	19.0
10	17.6	[a]	77.2
9	75.3	[a]	311.0
8	[a]	[a]	1170.0

[a] El algoritmo no converge a los coeficientes óptimos.

Tabla 13.4. Precisión numérica de los algoritmos de filtrado adaptativo FIR (error por mínimos cuadrados $\times 10^{-3}$).

algoritmo con el fin de prevenir el desbordamiento de los coeficientes. El lector interesado puede consultar los textos de Eleftheriou y Falconer (1987), Cioffi y Kailath (1984), y Hsu (1982). Alternativamente, el algoritmo puede modificarse como proponen Slock y Kailath (1988; 1991) y estabilizarlo.

Observe a partir de los resultados de la Tabla 13.4 que el algoritmo LMS es bastante robusto en lo que respecta al ruido de redondeo. Se produce un deterioro como era de esperar disminuyendo la precisión de los coeficientes del filtro, pero no se produce un fallo catastrófico (inestabilidad) con 8 o 9 bits de precisión. Sin embargo, la degradación en el funcionamiento por debajo de 12 bits es significativa.

13.4 Filtros adaptativos en celosía-escalera

En los Capítulos 9 y 12, hemos demostrado que un filtro FIR también puede realizarse utilizando una estructura en celosía en la que los parámetros en celosía, los *coeficiente de reflexión*, están relacionados con los coeficientes del filtro de la estructura FIR en la forma directa. También hemos presentado el método que permite convertir los coeficientes del filtro FIR en los coeficiente de reflexión (y viceversa).

En esta sección vamos a deducir algoritmos de filtrado adaptativo en los que la estructura del filtro es una celosía o una celosía-escalera. Estos algoritmos de filtrado adaptativo en celosía-escalera, basados en el método de mínimos cuadrados, presentan diversas propiedades deseables, incluyendo la eficiencia y robustez en los cálculos de los errores de redondeo. A partir del desarrollo de los algoritmos RLS en celosía-escalera, obtendremos los algoritmos RLS rápidos que se han descrito en la Sección 13.3.3.

13.4.1 Algoritmos recursivos de mínimos cuadrados en celosía-escalera

En el Capítulo 12, hemos demostrado la relación entre la estructura del filtro en celosía y un predictor lineal, y hemos obtenido las ecuaciones que relacionan los coeficientes del predictor con los coeficientes de reflexión de la celosía (y viceversa). También hemos establecido la relación entre las recursiones de Levinson-Durbin para los coeficientes del predictor lineal y los coeficientes de reflexión del filtro en celosía. A partir de estos desarrollos, obtendremos el filtro en celosía formulando el problema de la estimación por mínimos cuadrados en términos de la predicción lineal.

Los algoritmos por mínimos cuadrados recursivos para las estructuras FIR en la forma directa descritos en la Sección 13.3.1 sólo son recursivos en el tiempo. La longitud del filtro es fija. Una variación (incremento o decremento) de la longitud del filtro da lugar a un nuevo conjunto de coeficientes del filtro que es completamente diferente al conjunto anterior.

En contraste, el filtro en celosía es recursivo. En consecuencia, el número de secciones que contenga puede incrementarse o decrementarse sin afectar a los coeficientes de reflexión de las restantes secciones; ésta y otras ventajas (que se describen en ésta y en las siguientes secciones) hacen al filtro en celosía muy atractivo para aplicaciones de filtrado adaptativo.

Suponga que observamos la señal $x(n-l), l = 1,2,\ldots,m$, y considere la predicción lineal de $x(n)$. Sea $f_m(l,n)$ el error de predicción directo para un predictor de orden m, definido como

$$f_m(l,n) = x(l) + \mathbf{a}_m^t(n)\mathbf{X}_m(l-1) \tag{13.4.1}$$

donde el vector $-\mathbf{a}_m(n)$ está formado por los coeficientes de predicción directos, es decir,

$$\mathbf{a}_m^t(n) = [a_m(1,n)\ a_m(2,n)\ \cdots\ a_m(m,n)] \tag{13.4.2}$$

y el vector de datos $\mathbf{X}_m(l-1)$ es

$$\mathbf{X}_m^t(l-1) = [x(l-1)\ x(l-2)\ \cdots\ x(l-m)] \tag{13.4.3}$$

Los coeficientes del predictor $\mathbf{a}_m(n)$ se seleccionan para minimizar el error cuadrático ponderado (media temporal)

$$\mathscr{E}_m^f(n) = \sum_{l=0}^{n} w^{n-l}|f_m(l,n)|^2 \tag{13.4.4}$$

La minimización de $\mathscr{E}_m^f(n)$ con respecto a $\mathbf{a}_m(n)$ nos lleva al conjunto de ecuaciones lineales

$$\mathbf{R}_m(n-1)\mathbf{a}_m(n) = -\mathbf{Q}_m(n) \tag{13.4.5}$$

donde $\mathbf{R}_m(n)$ se define en (13.3.7) y $\mathbf{Q}_m(n)$ se define como

$$\mathbf{Q}_m(n) = \sum_{l=0}^{n} w^{n-l}x(l)\mathbf{X}_m^*(l-1) \tag{13.4.6}$$

La solución de (13.4.5) es

$$\mathbf{a}_m(n) = -\mathbf{R}_m^{-1}(n-1)\mathbf{Q}_m(n) \tag{13.4.7}$$

El valor mínimo de $\mathscr{E}_m^f(n)$, obtenido con el predictor lineal especificado por (13.4.7), se designa como $E_m^f(n)$ y está dado por

$$\begin{aligned} E_m^f(n) &= \textstyle\sum_{l=0}^{n} w^{n-l}x^*(l)\,[x(l) + \mathbf{a}_m^t(n)\mathbf{X}_m(l-1)] \\ &= q(n) + \mathbf{a}_m^t(n)\mathbf{Q}_m^*(n) \end{aligned} \tag{13.4.8}$$

donde $q(n)$ se define como

$$q(n) = \sum_{l=0}^{n} w^{n-l}|x(l)|^2 \tag{13.4.9}$$

Las ecuaciones lineales de (13.4.5) y la ecuación para $E_m^f(n)$ de (13.4.8) pueden combinarse en una única ecuación matricial de la forma

$$\begin{bmatrix} q(n) & \mathbf{Q}_m^H(n) \\ \mathbf{Q}_m(n) & \mathbf{R}_m(n-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_m(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_m^f(n) \\ \mathbf{O}_m \end{bmatrix} \tag{13.4.10}$$

donde $\mathbf{O}_m$ es el vector nulo de m dimensiones. Es interesante destacar que

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{m+1}(n) &= \sum_{l=0}^{n} w^{n-l}\mathbf{X}_{m+1}^{*}(l)\mathbf{X}_{m+1}^{t}(l)\\ &= \sum_{l=0}^{n} w^{n-l}\begin{bmatrix} x^{*}(l)\\ \mathbf{X}_{m}^{*}(l-1)\end{bmatrix}\left[x(l)\mathbf{X}_{m}^{t}(l-1)\right]\\ &= \begin{bmatrix} q(n) & \mathbf{Q}_{m}^{H}(n)\\ \mathbf{Q}_{m}(n) & \mathbf{R}_{m}(n-1)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{13.4.11}$$

que es la matriz de (13.4.10).

En un desarrollo completamente paralelo a (13.4.1) hasta (13.4.11), minimizamos el error cuadrático ponderado inverso (media temporal) para un predictor inverso de orden m definido como

$$\mathscr{E}_{m}^{b}(n) = \sum_{l=0}^{n} w^{n-l}|g_m(l,n)|^2 \tag{13.4.12}$$

donde el error inverso se define como

$$g_m(l,n) = x(l-m) + \mathbf{b}_{m}^{t}(n)\mathbf{X}_m(l) \tag{13.4.13}$$

y $\mathbf{b}_{m}^{t}(n) = [b_m(1,n)\ b_m(2,n)\ldots b_m(m,n)]$ es el vector de coeficientes para el predictor inverso. La minimización de $\mathscr{E}_{m}^{b}(n)$ nos lleva a la ecuación

$$\mathbf{R}_m(n)\mathbf{b}_m(n) = -\mathbf{V}_m(n) \tag{13.4.14}$$

y, por tanto, a la solución

$$\mathbf{b}_m(n) = -\mathbf{R}_{m}^{-1}(n)\mathbf{V}_m(n) \tag{13.4.15}$$

donde

$$\mathbf{V}_m(n) = \sum_{l=0}^{n} w^{n-l}x(l-m)\mathbf{X}_{m}^{*}(l) \tag{13.4.16}$$

El valor mínimo de $\mathscr{E}_{m}^{b}(n)$, designado por $E_{m}^{b}(n)$, es

$$\begin{aligned}E_{m}^{b}(n) &= \sum_{l=0}^{n} w^{n-l}\left[x(l-m) + \mathbf{b}_{m}^{t}(n)\mathbf{X}_m(l)\right]x^{*}(l-m)\\ &= v(n) + \mathbf{b}_{m}^{t}(n)\mathbf{V}_{m}^{*}(n)\end{aligned} \tag{13.4.17}$$

donde la magnitud escalar $v(n)$ se define como

$$v(n) = \sum_{l=0}^{n} w^{n-l}|x(l-m)|^2 \tag{13.4.18}$$

Si combinamos (13.4.14) y (13.4.17) en una sola ecuación, obtenemos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_m(n) & \mathbf{V}_m(n)\\ \mathbf{V}_{m}^{H}(n) & v(n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{b}_m(n)\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{O}_m\\ E_{m}^{b}(n)\end{bmatrix} \tag{13.4.19}$$

Observe también que la matriz de autocorrelación (estimada) $\mathbf{R}_{m+1}(n)$ puede expresarse como

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{m+1}(n) &= \textstyle\sum_{l=0}^{n} w^{n-l} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_m^*(l) \\ x^*(l-m) \end{bmatrix} [\mathbf{X}_m^t(l)x(l-m)] \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_m(n) & \mathbf{V}_m(n) \\ \mathbf{V}_m^H(n) & v(n) \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{13.4.20}$$

Por tanto, hemos obtenido las ecuaciones para los predictores de mínimos cuadrados directo e inverso de orden m.

A continuación, obtenemos las ecuaciones de actualización de orden para estos predictores, lo que nos lleva a la estructura del filtro en celosía. Al derivar las ecuaciones de actualización de orden para $\mathbf{a}_m(n)$ y $\mathbf{b}_m(n)$, utilizaremos las dos identidades de inversión matricial para una matriz de la forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \tag{13.4.21}$$

donde $\mathbf{A}, \mathbf{A}_{11}$ y $\mathbf{A}_{22}$ son matrices cuadradas. La inversa de $\mathbf{A}$ puede expresarse de dos formas diferentes, a saber

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\tilde{\mathbf{A}}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\tilde{\mathbf{A}}_{22}^{-1} \\ -\tilde{\mathbf{A}}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \tilde{\mathbf{A}}_{22}^{-1} \end{bmatrix} \tag{13.4.22}$$

y

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11}^{-1} & -\tilde{\mathbf{A}}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} \\ -\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\tilde{\mathbf{A}}_{11}^{-1} & \mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\tilde{\mathbf{A}}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} + \mathbf{A}_{22}^{-1} \end{bmatrix} \tag{13.4.23}$$

donde $\tilde{\mathbf{A}}_{11}$ y $\tilde{\mathbf{A}}_{12}$ se definen como

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}_{11} &= \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{22} &= \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\end{aligned} \tag{13.4.24}$$

Recursiones de actualización de orden. Utilicemos ahora la fórmula dada en (13.4.22) para obtener la inversa de $\mathbf{R}_{m+1}(n)$ utilizando la forma dada en (13.4.20). En primer lugar, tenemos

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}_{22} &= v(n) - \mathbf{V}_m^H(n)\mathbf{R}_m^{-1}(n)\mathbf{V}_m(n) \\ &= v(n) + \mathbf{b}_m^t(n)\mathbf{V}_m^*(n) = E_m^b(n)\end{aligned} \tag{13.4.25}$$

y

$$\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} = \mathbf{R}_m^{-1}(n)\mathbf{V}_m(n) = -\mathbf{b}_m(n) \tag{13.4.26}$$

Por tanto,

$$\mathbf{R}_{m+1}^{-1}(n) \equiv \mathbf{P}_{m+1}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_m(n) + \dfrac{\mathbf{b}_m(n)\mathbf{b}_m^H(n)}{E_m^b(n)} & \dfrac{\mathbf{b}_m(n)}{E_m^b(n)} \\ \dfrac{\mathbf{b}_m^H(n)}{E_m^b(n)} & \dfrac{1}{E_m^b(n)} \end{bmatrix}$$

o, lo que es equivalente,

$$\mathbf{P}_{m+1}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_m(n) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{E_m^b(n)} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_m(n) \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_m^H(n) & 1 \end{bmatrix} \tag{13.4.27}$$

Sustituyendo $n-1$ por n en (13.4.27) y postmultiplicando el resultado por $-\mathbf{Q}_{m+1}(n)$, obtenemos la actualización de orden para $\mathbf{a}_m(n)$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{m+1}(n) &= -\mathbf{P}_{m+1}(n-1)\mathbf{Q}_{m+1}(n) \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_m(n-1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{Q}_m^{(n)} \\ \cdots \end{bmatrix} \\
&\quad -\frac{1}{E_m^b(n-1)} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_m(n-1) \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_m^H(n-1) & 1 \end{bmatrix} \mathbf{Q}_{m+1}(n) \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_m(n) \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{k_{m+1}(n)}{E_m^b(n-1)} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_m(n-1) \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{13.4.28}$$

donde la magnitud escalar $k_{m+1}(n)$ se define como

$$k_{m+1}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_m^H(n-1) & 1 \end{bmatrix} \mathbf{Q}_{m+1}(n) \tag{13.4.29}$$

Observe que la Ecuación (13.4.28) es una recursión de tipo Levinson para los coeficientes del predictor.

Para obtener la correspondiente actualización de orden para $\mathbf{b}_m(n)$, utilizamos la fórmula de inversión de matrices dada en (13.4.23) para la inversa de $\mathbf{R}_{m+1}(n)$, junto con la forma dada en (13.4.11). En este caso, tenemos

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{A}}_{11} &= q(n) - \mathbf{Q}_m^H(n)\mathbf{R}_m^{-1}(n-1)\mathbf{Q}_m(n) \\
&= q(n) + \mathbf{a}_m^t(n)\mathbf{Q}_m^*(n) = E_m^f(n)
\end{aligned} \tag{13.4.30}$$

y

$$\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21} = \mathbf{R}_m^{-1}(n-1)\mathbf{Q}_m(n) = -\mathbf{a}_m(n) \tag{13.4.31}$$

Por tanto,

$$\mathbf{P}_{m+1}(n) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{E_m^f(n)} & \dfrac{\mathbf{a}_m^H(n)}{E_m^f(n)} \\ \dfrac{\mathbf{a}_m(n)}{E_m^f(n)} & \mathbf{P}_m(n-1) + \dfrac{\mathbf{a}_m(n)\mathbf{a}_m^H(n)}{E_m^f(n)} \end{bmatrix}$$

o, lo que es equivalente,

$$\mathbf{P}_{m+1}(n) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_m(n-1) \end{bmatrix} + \frac{1}{E_m^f(n)} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_m(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{a}_m^H(n) \end{bmatrix} \tag{13.4.32}$$

Si ahora postmultiplicamos (13.4.32) por $-\mathbf{V}_{m+1}(n)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_{m+1}(n) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_m(n-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots \\ -\mathbf{V}_m(n-1) \end{bmatrix} \\
&\quad -\frac{1}{E_m^f(n)} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_m(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{a}_m^H(n) \end{bmatrix} \mathbf{V}_{m+1}(n) \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b}_m(n-1) \end{bmatrix} - \frac{k_{m+1}^*(n)}{E_m^f(n)} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_m(n) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{13.4.33}$$

donde

$$\begin{bmatrix}1 & \mathbf{a}_m^H(n)\end{bmatrix}\mathbf{V}_{m+1}(n) = \begin{bmatrix}\mathbf{b}_m^t(n-1) & 1\end{bmatrix}\mathbf{Q}_{m+1}^*(n) = k_{m+1}^*(n) \tag{13.4.34}$$

La demostración de (13.4.34) y su relación con (13.4.29) se deja como ejercicio para el lector. Así, (13.4.28) y (13.4.33) especifican las ecuaciones de actualización de orden para $\mathbf{a}_m(n)$ y $\mathbf{b}_m(n)$, respectivamente.

Ahora pueden obtenerse las ecuaciones de actualización de orden para $E_m^f(n)$ y $E_m^b(n)$. A partir de la definición de $E_m^f(n)$ dada por (13.4.8), tenemos

$$E_{m+1}^f(n) = q(n) + \mathbf{a}_{m+1}^t(n)\mathbf{Q}_{m+1}^*(n) \tag{13.4.35}$$

Sustituyendo el valor de $\mathbf{a}_{m+1}(n)$ dada por (13.4.28) en (13.4.35), obtenemos

$$\begin{aligned} E_{m+1}^f(n) &= q(n) + [\mathbf{a}_m'(n) \quad 0]\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_m^*(n)\\ \cdots\end{bmatrix} - \frac{k_{m+1}(n)}{E_m^b(n-1)}[\mathbf{b}_m'(n-1) \quad 1]\mathbf{Q}_{m+1}^*(n) \\ &= E_m^f(n) - \frac{|k_{m+1}(n)|^2}{E_m^b(n-1)} \end{aligned} \tag{13.4.36}$$

Del mismo modo, utilizando (13.4.17) y (13.4.33), obtenemos la actualización de orden para $E_{m+1}^b(n)$, en la forma

$$E_{m+1}^b(n) = E_m^b(n-1) - \frac{|k_{m+1}(n)|^2}{E_m^f(n)} \tag{13.4.37}$$

El filtro en celosía se especifica mediante dos ecuaciones acopladas que implican los errores directo e inverso $f_m(n,n-1)$ y $g_m(n,n-1)$, respectivamente. A partir de la definición del error directo dado en (13.4.1), tenemos

$$f_{m+1}(n,n-1) = x(n) + \mathbf{a}_{m+1}^t(n-1)\mathbf{X}_{m+1}(n-1) \tag{13.4.38}$$

Sustituyendo $\mathbf{a}_{m+1}^t(n-1)$ dado en (13.4.28) en (13.4.38) tenemos

$$\begin{aligned} f_{m+1}(n,n-1) &= x(n) + \begin{bmatrix}\mathbf{a}_m^t(n-1) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{X}_m(n-1)\\ \cdots\end{bmatrix} \\ &\quad - \frac{k_{m+1}(n-1)}{E_m^b(n-2)}\begin{bmatrix}\mathbf{b}_m^t(n-2) & 1\end{bmatrix}\mathbf{X}_{m+1}(n-1) \\ &= f_m(n,n-1) - \frac{k_{m+1}(n-1)}{E_m^b(n-2)} \times \left[x(n-m-1) + \mathbf{b}_m^t(n-2)\mathbf{X}_m(n-1)\right] \\ &= f_m(n,n-1) - \frac{k_{m+1}(n-1)}{E_m^b(n-2)} g_m(n-1,n-2) \end{aligned} \tag{13.4.39}$$

Para simplificar la notación, definimos

$$\begin{aligned} f_m(n) &= f_m(n,n-1) \\ g_m(n) &= g_m(n,n-1) \end{aligned} \tag{13.4.40}$$

Luego (13.4.39) puede expresarse como

$$f_{m+1}(n) = f_m(n) - \frac{k_{m+1}(n-1)}{E_m^b(n-2)} g_m(n-1) \tag{13.4.41}$$

Del mismo modo, partiendo de la definición del error inverso dado por (13.4.13), tenemos

$$g_{m+1}(n,n-1) = x(n-m-1) + \mathbf{b}_{m+1}^t(n-1)\mathbf{X}_{m+1}(n) \tag{13.4.42}$$

Sustituyendo la expresión de $\mathbf{b}_{m+1}(n-1)$ dada en (13.4.33) y simplificando el resultado, obtenemos

$$g_{m+1}(n,n-1) = g_m(n-1,n-2) - \frac{k_{m+1}^*(n-1)}{E_m^f(n-1)} f_m(n,n-1) \tag{13.4.43}$$

o, lo que es equivalente,

$$g_{m+1}(n) = g_m(n-1) - \frac{k_{m+1}^*(n-1)}{E_m^f(n-1)} f_m(n) \tag{13.4.44}$$

Las dos ecuaciones recursivas dadas en (13.4.41) y (13.4.44) especifican el filtro en celosía ilustrado en la Figura 13.4.1 donde, por comodidad de notación, hemos definido los coeficientes de reflexión para la celosía como

$$\begin{aligned} \mathscr{K}_m^f(n) &= \frac{-k_m(n)}{E_{m-1}^b(n-1)} \\ \mathscr{K}_m^b(n) &= \frac{-k_m^*(n)}{E_{m-1}^f(n)} \end{aligned} \tag{13.4.45}$$

Las condiciones iniciales para las actualizaciones de orden son

$$\begin{aligned} f_0(n) &= g_0(n) = x(n) \\ E_0^f(n) &= E_0^b(n) = \sum_{l=0}^{n} w^{n-l}|x(l)|^2 = wE_0^f(n-1) + |x(n)|^2 \end{aligned} \tag{13.4.46}$$

Observe que (13.4.46) también es una ecuación de actualización temporal para $E_0^f(n)$ y $E_0^b(n)$.

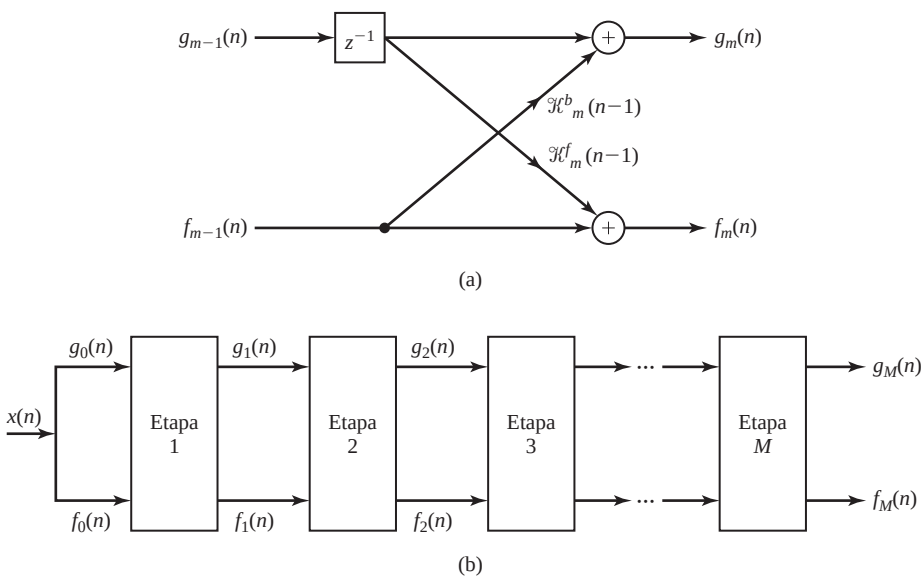


Figura 13.4.1. Filtro en celosía para el algoritmo de mínimos cuadrados.

Recursiones de actualización temporal. Nuestro objetivo es determinar una ecuación de actualización temporal para $k_m(n)$, la cual es necesaria si el filtro en celosía va a ser adaptativo. Esta deducción requerirá las ecuaciones de actualización temporal para los coeficientes de predicción. Partimos de la forma

$$k_{m+1}(n) = -\mathbf{V}_{m+1}^H(n) \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_m(n) \end{bmatrix} \tag{13.4.47}$$

La ecuación de actualización temporal para $\mathbf{V}_{m+1}(n)$ es

$$\mathbf{V}_{m+1}(n) = w\mathbf{V}_{m+1}(n-1) + x(n-m-1)\mathbf{X}_{m+1}^*(n) \tag{13.4.48}$$

Las ecuaciones de actualización temporal para los coeficientes de predicción se determinan como sigue. A partir de (13.4.6), (13.4.7) y (13.3.14), tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_m(n) &= -\mathbf{P}_m(n-1)\mathbf{Q}_m(n) \\ &= -\frac{1}{w}\left[\mathbf{P}_m(n-2) - \mathbf{K}_m(n-1)\mathbf{X}_m^t(n-1)\mathbf{P}_m(n-2)\right] \\ &\quad \times \left[wQ_m(n-1) + x(n)X_m^*(n-1)\right] \\ &= \mathbf{a}_m(n-1) - \mathbf{K}_m(n-1)\left[x(n) + \mathbf{a}_m^t(n-1)\mathbf{X}_m(n-1)\right] \end{aligned} \tag{13.4.49}$$

donde $\mathbf{K}_m(n-1)$ es el vector de ganancia de Kalman en la iteración $n-1$. Pero, a partir de (13.4.38), tenemos

$$x(n) + \mathbf{a}_m^t(n-1)\mathbf{X}_m(n-1) = f_m(n, n-1) \equiv f_m(n)$$

Por tanto, la ecuación de actualización temporal para $\mathbf{a}_m(n)$ es

$$\mathbf{a}_m(n) = \mathbf{a}_m(n-1) - \mathbf{K}_m(n-1)\, f_m(n) \tag{13.4.50}$$

En un desarrollo paralelo, utilizando (13.4.15), (13.4.16) y (13.3.14), obtenemos las ecuaciones de actualización temporal para los coeficientes del predictor inverso, en la forma

$$\mathbf{b}_m(n) = \mathbf{b}_m(n-1) - \mathbf{K}_m(n)g_m(n) \tag{13.4.51}$$

Ahora a partir de (13.4.48) y (13.4.50), la ecuación de actualización temporal para $k_{m+1}(n)$ es

$$\begin{aligned} k_{m+1}(n) &= -\left[w\mathbf{V}_{m+1}^H(n-1) + x^*(n-m-1)\mathbf{X}_{m+1}^t(n)\right] \\ &\quad \times \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_m(n-1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{K}_m(n-1)\, f_m(n) \end{bmatrix}\right) \\ &= wk_{m+1}(n-1) - w\mathbf{V}_{m+1}^H(n-1)\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{K}_m(n-1) \end{bmatrix} f_m(n) \\ &\quad + x^*(n-m-1)\mathbf{X}_{m+1}^t(n)\begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_m(n-1) \end{bmatrix} \\ &\quad - x^*(n-m-1)\mathbf{X}_{m+1}^t(n)\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{K}_m(n-1) \end{bmatrix} f_m(n) \end{aligned} \tag{13.4.52}$$

Pero

$$\mathbf{X}_{m+1}^t(n)\begin{bmatrix}1\\ \mathbf{a}_m(n-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x(n) & \mathbf{X}_m^t(n-1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \mathbf{a}_m(n-1)\end{bmatrix}=f_m(n) \tag{13.4.53}$$

y

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{m+1}^H(n-1)\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{K}_m(n-1)\end{bmatrix}&=\mathbf{V}_m^H(n-2)\mathbf{K}_m(n-1)\\ &=\frac{\mathbf{V}_m^H(n-2)\mathbf{P}_m(n-2)\mathbf{X}_m^*(n-1)}{w+\mu_m(n-1)}\\ &=\frac{-\mathbf{b}_m^H(n-2)\mathbf{X}_m^*(n-1)}{w+\mu_m(n-1)}\\ &=-\frac{g_m^*(n-1)-x^*(n-m-1)}{w+\mu_m(n-1)}\end{aligned} \tag{13.4.54}$$

donde $\mu_m(n)$ se ha definido previamente en (13.3.13). Por último,

$$\mathbf{X}_{m+1}^t(n)\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{K}_m(n-1)\end{bmatrix}=\frac{\mathbf{X}_m^t(n-1)\mathbf{P}_m(n-2)\mathbf{X}_m^*(n-1)}{w+\mu_m(n-1)}=\frac{\mu_m(n-1)}{w+\mu_m(n-1)} \tag{13.4.55}$$

Sustituyendo los resultados de (13.4.53), (13.4.54) y (13.4.55) en (13.4.52) obtenemos la ecuación de actualización temporal deseada en la forma

$$k_{m+1}(n)=wk_{m+1}(n-1)+\frac{w}{w+\mu_m(n-1)}f_m(n)g_m^*(n-1) \tag{13.4.56}$$

Es conveniente definir una nueva variable

$$\alpha_m(n)=\frac{w}{w+\mu_m(n)} \tag{13.4.57}$$

Evidentemente, $\alpha_m(n)$ es un valor real y se encuentra en el rango $0<\alpha_m(n)<1$. Así, la ecuación de actualización en el tiempo (13.4.56) se convierte en

$$k_{m+1}(n)=wk_{m+1}(n-1)+\alpha_m(n-1)f_m(n)g_m^*(n-1) \tag{13.4.58}$$

Actualización del orden para $\alpha_m(n)$. Aunque $\alpha_m(n)$ puede calcularse directamente para cada valor de m y de n, es más eficiente utilizar una ecuación de actualización de orden, la cual se determina del modo siguiente. En primer lugar, a partir de la definición de $\mathbf{K}_m(n)$ dada por (13.3.12), puede verse fácilmente que

$$\alpha_m(n)=1-\mathbf{X}_m^t(n)\mathbf{K}_m(n) \tag{13.4.59}$$

Para obtener una ecuación de actualización de orden para $\alpha_m(n)$, necesitamos una ecuación de actualización de orden para el vector de ganancia de Kalman $\mathbf{K}_m(n)$. Pero $\mathbf{K}_{m+1}(n)$ puede expresarse como

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{m+1}(n)&=\mathbf{P}_{m+1}(n)\mathbf{X}_{m+1}^*(n)\\ &=\left(\begin{bmatrix}\mathbf{P}_m(n) & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{E_m^b(n)}\begin{bmatrix}\mathbf{b}_m(n)\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{b}_m^H(n) & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\mathbf{X}_m^*(n)\\ x^*(n-m)\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_m(n)\\ 0\end{bmatrix}+\frac{g_m^*(n,n)}{E_m^b(n)}\begin{bmatrix}\mathbf{b}_m(n)\\ 1\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{13.4.60}$$

El término $g_m(n,n)$ también se puede expresar como

$$\begin{aligned} g_m(n,n) &= x(n-m) + \mathbf{b}_m^t(n)\mathbf{X}_m(n) \\ &= x(n-m) + \left[\mathbf{b}_m^t(n-1) - \mathbf{K}_m^t(n)g_m(n)\right]\mathbf{X}_m(n) \\ &= x(n-m) + \mathbf{b}_m^t(n-1)\mathbf{X}_m(n) - g_m(n)\mathbf{K}_m^t(n)\mathbf{X}_m(n) \\ &= g_m(n)\left[1 - \mathbf{K}_m^t(n)\mathbf{X}_m(n)\right] \\ &= \alpha_m(n)g_m(n) \end{aligned} \tag{13.4.61}$$

Por tanto, la ecuación de actualización del orden para $\mathbf{K}_m(n)$ dada en (13.4.60) también se puede escribir como

$$\mathbf{K}_{m+1}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m(n) \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\alpha_m(n)g_m^*(n)}{E_m^b(n)} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_m(n) \\ 1 \end{bmatrix} \tag{13.4.62}$$

Utilizando (13.4.62) y la relación dada en (13.4.59), obtenemos la ecuación de actualización del orden para $\alpha_m(n)$ como sigue:

$$\begin{aligned} \alpha_{m+1}(n) &= 1 - \mathbf{X}_{m+1}^t(n)\mathbf{K}_{m+1}(n) = 1 - \left[\mathbf{X}_m^t(n)x(n-m)\right] \\ &\quad \times \left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_m(n) \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\alpha_m(n)g_m^*(n)}{E_m^b(n)} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_m(n) \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \alpha_m(n) - \frac{\alpha_m(n)g_m^*(n)}{E_m^b(n)} \left[\mathbf{X}_m^t(n)\ x(n-m)\right] \begin{bmatrix} \mathbf{b}_m(n) \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \alpha_m(n) - \frac{\alpha_m(n)g_m^*(n)}{E_m^b(n)} g_m(n,n) \\ &= \alpha_m(n) - \frac{\alpha_m^2(n)|g_m(n)|^2}{E_m^b(n)} \end{aligned} \tag{13.4.63}$$

Por tanto, hemos obtenido las ecuaciones de actualización de orden y de actualización temporal para la celosía básica del algoritmo por mínimos cuadrados mostrada en la Figura 13.4.1. Las ecuaciones básicas son (13.4.41) y (13.4.44) para los errores directo e inverso, normalmente denominados errores *residuales*, (13.4.36) y (13.4.37) para los correspondientes errores de mínimos cuadrados, la ecuación de actualización temporal (13.4.58) para $k_m(n)$ y la ecuación de actualización de orden (13.4.63) para el parámetro $\alpha_m(n)$. Inicialmente, tenemos

$$\begin{aligned} &E_m^f(-1) = E_m^b(-1) = E_m^b(-2) = \varepsilon > 0 \\ &f_m(-1) = g_m(-1) = k_m(-1) = 0 \\ &\alpha_m(-1) = 1, \quad \alpha_{-1}(n) = \alpha_{-1}(n-1) = 1 \end{aligned} \tag{13.4.64}$$

Estimación de procesos conjuntos. El último paso en este proceso es la obtención de los estimados por mínimos cuadrados de la señal deseada $d(n)$ a partir de la celosía. Suponga que el filtro adaptativo tiene $m+1$ coeficientes, los cuales se determinan para minimizar el error cuadrático ponderado medio

$$\mathscr{E}_{m+1} = \sum_{l=0}^{n} w^{n-l}|e_{m+1}(l,n)|^2 \tag{13.4.65}$$

donde

$$e_{m+1}(l,n) = d(l) - \mathbf{h}_{m+1}^t(n)\mathbf{X}_{m+1}(l) \tag{13.4.66}$$

El estimado lineal

$$\hat{d}(l,n) = \mathbf{h}_{m+1}^t(n)\mathbf{X}_{m+1}(l) \tag{13.4.67}$$

que obtendremos a partir de la celosía utilizando los residuales $g_m(n)$, es el *estimado del proceso conjunto*.

A partir de los resultados obtenidos en la Sección 13.3.1, ya hemos establecido que los coeficientes del filtro adaptativo que minimizan (13.4.65) están dados por la ecuación

$$\mathbf{h}_{m+1}(n) = \mathbf{P}_{m+1}(n)\mathbf{D}_{m+1}(n) \tag{13.4.68}$$

También hemos establecido que $\mathbf{h}_m(n)$ satisface la ecuación de actualización temporal dada en (13.3.27).

Ahora vamos a obtener una ecuación de actualización de orden para $\mathbf{h}_m(n)$. A partir de (13.4.68) y (13.4.27), tenemos

$$\mathbf{h}_{m+1}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_m(n) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_m(n) \\ \cdots \end{bmatrix} + \frac{1}{E_m^b(n)} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_m(n) \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_m^H(n) & 1 \end{bmatrix} \mathbf{D}_{m+1}(n) \tag{13.4.69}$$

Definimos una magnitud escalar compleja $\delta_m(n)$ como

$$\delta_m(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_m^H(n) & 1 \end{bmatrix} \mathbf{D}_{m+1}(n) \tag{13.4.70}$$

Así, (13.4.69) puede expresarse como

$$\mathbf{h}_{m+1}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_m(n) \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\delta_m(n)}{E_m^b(n)} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_m(n) \\ 1 \end{bmatrix} \tag{13.4.71}$$

El escalar $\delta_m(n)$ satisface una ecuación de actualización de orden que se obtiene a partir de las ecuaciones de actualización temporal para $\mathbf{b}_m(n)$ y $\mathbf{D}_m(n)$, definidas por (13.4.51) y (13.3.17), respectivamente. Luego,

$$\begin{aligned} \delta_m(n) &= \begin{bmatrix} \mathbf{b}_m^H(n-1) - \mathbf{K}_m^H(n)g_m^*(n) & 1 \end{bmatrix} \left[w\mathbf{D}_{m+1}(n-1) + d(n)\mathbf{X}_{m+1}^*(n) \right] \\ &= w\delta_m(n-1) + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_m^H(n-1) & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X}_{m+1}^*(n)d(n) \\ &\quad - wg_m^*(n) \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m^H(n) & 0 \end{bmatrix} \mathbf{D}_{m+1}(n-1) - g_m^*(n)d(n) \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m^H(n) & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}_{m+1}^*(n) \end{aligned} \tag{13.4.72}$$

Pero

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_m^H(n-1) & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X}_{m+1}^*(n) = x^*(n-m) + \mathbf{b}_m^H(n-1)\mathbf{X}_m^*(n) = g_m^*(n) \tag{13.4.73}$$

También,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m^H(n) & 0 \end{bmatrix} \mathbf{D}_{m+1}(n-1) &= \frac{1}{w+\mu_m(n)} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_m^t(n)\mathbf{P}_m(n-1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_m(n-1) \\ \cdots \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{w+\mu_m(n)} \mathbf{X}_m^t(n)\mathbf{h}_m(n-1) \end{aligned} \tag{13.4.74}$$

El último término de (13.4.72) puede expresarse como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m^H(n) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_m^*(n) \\ \cdots \end{bmatrix} &= \frac{1}{w+\mu_m(n)} \mathbf{X}_m^t(n)\mathbf{P}_m(n-1)\mathbf{X}_m^*(n) \\ &= \frac{\mu_m(n)}{w+\mu_m(n)} \end{aligned} \tag{13.4.75}$$

Sustituyendo los resultados de (13.4.73–13.4.75) en (13.4.72), obtenemos la ecuación de actualización temporal deseada para $\delta_m(n)$ como

$$\delta_m(n) = w\delta_m(n-1) + \alpha_m(n)g_m^*(n)e_m(n) \tag{13.4.76}$$

Las ecuaciones de actualización de orden para $\alpha_m(n)$ y $g_m(n)$ ya se han obtenido. Con $e_0(n) = d(n)$, la ecuación de actualización de orden para $e_m(n)$ se obtiene de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} e_m(n) = e_m(n,n-1) &= d(n) - \mathbf{h}_m^t(n-1)\mathbf{X}_m(n) \\ &= d(n) - \begin{bmatrix}\mathbf{h}_{m-1}^t(n-1) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{X}_{m-1}(n) \\ \cdots\end{bmatrix} \\ &\quad - \frac{\delta_{m-1}(n-1)}{E_{m-1}^b(n-1)}\begin{bmatrix}\mathbf{b}_{m-1}^t(n-1) & 1\end{bmatrix}\mathbf{X}_m(n) \\ &= e_{m-1}(n) - \frac{\delta_{m-1}(n-1)g_{m-1}(n)}{E_{m-1}^b(n-1)} \end{aligned} \tag{13.4.77}$$

Por último, el estimado de salida $d(n)$ de la celosía por mínimos cuadrados es

$$\hat{d}(n) = \mathbf{h}_{m+1}^t(n-1)\mathbf{X}_{m+1}(n) \tag{13.4.78}$$

Pero $\mathbf{h}_{m+1}^t(n-1)$ no se calcula explícitamente. Mediante la sustitución repetitiva de la ecuación de actualización de orden para $\mathbf{h}_{m+1}(n)$ dada por (13.4.71) en (13.4.78), obtenemos la expresión deseada para $\hat{d}(n)$ en la forma

$$\hat{d}(n) = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{\delta_k(n-1)}{E_k^b(n-1)} g_k(n) \tag{13.4.79}$$

En otras palabras, el estimado de salida $\hat{d}(n)$ es una suma ponderada lineal de los residuales inversos $g_k(n)$.

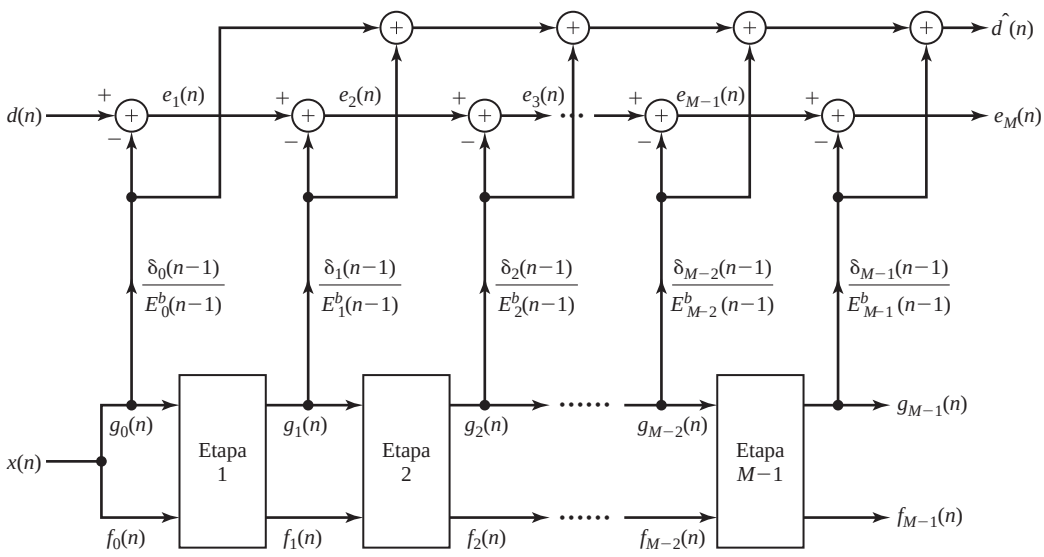


Figura 13.4.2. Filtro adaptativo RLS en celosía-escalera.

En la Figura 13.4.2 se ilustra el estimador LS adaptativo en celosía/de proceso conjunto. Esta estructura en celosía-escalera es equivalente matemáticamente al filtro FIR RLS en la forma directa. Las ecuaciones recursivas se resumen en la Tabla 13.5. Se trata de la *forma a priori* del *algoritmo RLS en celosía-escalera* que debemos diferenciar de otra forma del algoritmo, conocida como *forma a posteriori*, en la que se emplea el vector de coeficientes $\mathbf{h}_M(n)$ en lugar de $\mathbf{h}_M(n-1)$ para calcular el estimado $d(n)$. En muchos problemas de filtrado adaptativo, como por ejemplo la ecualización del canal y la cancelación de eco, no puede utilizarse la forma a posteriori, porque $\mathbf{h}_M(n)$ no puede calcularse antes de calcular $d(n)$.

A continuación describimos una serie de modificaciones que pueden realizarse en el algoritmo "convencional" RLS en celosía-escalera dado en la Tabla 13.5.

Algoritmos RLS en celosía modificados. Las ecuaciones recursivas del algoritmo RLS en celosía dadas en la Tabla 13.5 no constituyen el único medio. Pueden realizarse modificaciones en algunas ecuaciones sin afectar al carácter óptimo del algoritmo. Sin embargo, algunas modificaciones dan lugar a algoritmos que son numéricamente más robustos cuando se utiliza aritmética de punto fijo en la implementación de los algoritmos.

Predictor en celosía: se comienza con $n = 1$ y se calculan las actualizaciones de orden para $m = 0, 1, \ldots, M-2$

$$
\begin{aligned}
k_{m+1}(n-1) &= wk_{m+1}(n-2) + \alpha_m(n-2)\, f_m(n-1) g_m^*(n-2) \\
\mathscr{K}_{m+1}^f(n-1) &= -\frac{k_{m+1}(n-1)}{E_m^b(n-2)} \\
\mathscr{K}_{m+1}^b(n-1) &= -\frac{k_{m+1}^*(n-1)}{E_m^f(n-1)} \\
f_{m+1}(n) &= f_m(n) + \mathscr{K}_{m+1}^f(n-1) g_m(n-1) \\
g_{m+1}(n) &= g_m(n-1) + \mathscr{K}_{m+1}^b(n-1)\, f_m(n) \\
E_{m+1}^f(n-1) &= E_m^f(n-1) - \frac{|k_{m+1}(n-1)|^2}{E_m^b(n-2)} \\
E_{m+1}^b(n-1) &= E_m^b(n-2) - \frac{|k_{m+1}(n-1)|^2}{E_m^f(n-1)} \\
\alpha_{m+1}(n-1) &= \alpha_m(n-1) - \frac{\alpha_m^2(n-1)|g_m(n-1)|^2}{E_m^b(n-1)}
\end{aligned}
$$

Filtro en escalera: se comienza con $n = 1$ y se calculan las actualizaciones de orden para $m = 0, 1, \ldots, M-1$

$$
\begin{aligned}
\delta_m(n-1) &= w\delta_m(n-2) + \alpha_m(n-1) g_m^*(n-1) e_m(n-1) \\
\xi_m(n-1) &= -\frac{\delta_m(n-1)}{E_m^b(n-1)} \\
e_{m+1}(n) &= e_m(n) + \xi_m(n-1) g_m(n)
\end{aligned}
$$

Inicialización

$$
\begin{aligned}
\alpha_0(n-1) &= 1, \quad e_0(n) = d(n), \quad f_0(n) = g_0(n) = x(n) \\
E_0^f(n) &= E_0^b(n) = wE_0^f(n-1) + |x(n)|^2 \\
\alpha_m(-1) &= 1, \quad k_m(-1) = 0 \\
E_m^b(-1) &= E_m^f(0) = \varepsilon > 0; \quad \delta_m(-1) = 0
\end{aligned}
$$

Tabla 13.5. Forma a priori del algoritmo RLS en celosía-escalera.

A continuación proporcionamos una serie de relaciones básicas que pueden establecerse fácilmente a partir de los desarrollos anteriores.

En primer lugar, disponemos de una relación entre los residuales del error a priori y a posteriori.

Los errores a priori:

$$\begin{aligned} f_m(n,n-1) &\equiv f_m(n) = x(n) + \mathbf{a}_m^t(n-1)\mathbf{X}_m(n-1) \\ g_m(n,n-1) &\equiv g_m(n) = x(n-m) + \mathbf{b}_m^t(n-1)\mathbf{X}_m(n) \end{aligned} \tag{13.4.80}$$

Los errores a posteriori:

$$\begin{aligned} f_m(n,n) &= x(n) + \mathbf{a}_m^t(n)\mathbf{X}_m(n-1) \\ g_m(n,n) &= x(n-m) + \mathbf{b}_m^t(n)\mathbf{X}_m(n) \end{aligned} \tag{13.4.81}$$

Las relaciones básicas entre (13.4.80) y (13.4.81) son

$$\begin{aligned} f_m(n,n) &= \alpha_m(n-1)\, f_m(n) \\ g_m(n,n) &= \alpha_m(n) g_m(n) \end{aligned} \tag{13.4.82}$$

Estas relaciones se deducen fácilmente utilizando (13.4.50) y (13.4.51) en (13.4.81).

En segundo lugar, podemos obtener las ecuaciones de actualización temporal para los errores de mínimos cuadrados directo e inverso. Por ejemplo, a partir de (13.4.8) y (13.4.50), obtenemos

$$\begin{aligned} E_m^f(n) &= q(n) + \mathbf{a}_m^t(n)\mathbf{Q}_m^*(n) \\ &= q(n) + \left[\mathbf{a}_m^t(n-1) - \mathbf{K}_m^t(n-1)\, f_m(n)\right]\left[w\mathbf{Q}_m^*(n-1) + x^*(n)\mathbf{X}_m(n-1)\right] \\ &= wE_m^f(n-1) + \alpha_m(n-1)|\, f_m(n)|^2 \end{aligned} \tag{13.4.83}$$

De forma similar, a partir de (13.4.17) y (13.4.51), obtenemos

$$E_m^b(n) = wE_m^b(n-1) + \alpha_m(n)|g_m(n)|^2 \tag{13.4.84}$$

Normalmente, se emplean (13.4.83) y (13.4.84) en lugar de las ecuaciones sexta y séptima de la Tabla 13.5.

En tercer lugar, obtenemos la ecuación de actualización del orden para el vector de ganancia de Kalman, que no se emplea explícitamente en el algoritmo en celosía, pero que se usa en los algoritmos del filtro FIR rápidos. Para llevar a cabo esta derivación, también empleamos las ecuaciones de actualización temporal para los coeficientes de predicción directos e inversos dados por (13.4.50) y (13.4.51). Así, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_m(n) &= \mathbf{P}_m(n)\mathbf{X}_m^*(n) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_{m-1}(n-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^*(n) \\ \mathbf{X}_{m-1}^*(n-1) \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{E_{m-1}^f(n)} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_{m-1}(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{a}_{m-1}^H(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^*(n) \\ \mathbf{X}_{m-1}^*(n-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{K}_{m-1}(n-1) \end{bmatrix} + \frac{f_{m-1}^*(n,n)}{E_{m-1}^f(n)} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_{m-1}(n) \end{bmatrix} \\ &\equiv \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{m-1}(n) \\ c_{mm}(n) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{13.4.85}$$

donde, por definición, $\mathbf{C}_{m-1}(n)$ consta de los $(m-1)$ primeros elementos de $\mathbf{K}_m(n)$ y $c_{\mathrm{mm}}(n)$ es el último elemento. A partir de (13.4.60), también obtenemos la ecuación de actualización de orden para $\mathbf{K}_m(n)$ como

$$\mathbf{K}_m(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{m-1}(n) \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{g^*_{m-1}(n,n)}{E^b_{m-1}(n)} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{m-1}(n) \\ 1 \end{bmatrix} \tag{13.4.86}$$

Igualando (13.4.85) y (13.4.86), obtenemos el resultado

$$c_{\mathrm{mm}}(n) = \frac{g^*_{m-1}(n,n)}{E^b_{m-1}(n)} \tag{13.4.87}$$

y, por tanto,

$$\mathbf{K}_{m-1}(n) + c_{\mathrm{mm}}(n)\mathbf{b}_{m-1}(n) = \mathbf{C}_{m-1}(n) \tag{13.4.88}$$

Sustituyendo la expresión de $\mathbf{b}_{m-1}(n)$ dada en (13.4.51) en la Ecuación (13.4.88), obtenemos la ecuación de actualización de orden para el vector de ganancia de Kalman de (13.4.85) como

$$\mathbf{K}_{m-1}(n) = \frac{\mathbf{C}_{m-1}(n) - c_{\mathrm{mm}}(n)\mathbf{b}_{m-1}(n-1)}{1 - c_{\mathrm{mm}}(n)g_{m-1}(n)} \tag{13.4.89}$$

Existe también una ecuación de actualización temporal para el escalar $\alpha_m(n)$. A partir de (13.4.63), tenemos

$$\begin{aligned} \alpha_m(n) &= \alpha_{m-1}(n) - \frac{\alpha^2_{m-1}(n)|g_{m-1}(n)|^2}{E^b_{m-1}(n)} \\ &= \alpha_{m-1}(n)[1 - c_{\mathrm{mm}}(n)g_{m-1}(n)] \end{aligned} \tag{13.4.90}$$

Podemos obtener una segunda relación utilizando (13.4.85) para eliminar $\mathbf{K}_{m-1}(n)$ en la expresión para $\alpha_m(n)$. Luego,

$$\begin{aligned} \alpha_m(n) &= 1 - \mathbf{X}^t_m(n)\mathbf{K}_m(n) \\ &= \alpha_{m-1}(n-1)\left[1 - \frac{f^*_{m-1}(n,n)f_{m-1}(n)}{E^f_{m-1}(n)}\right] \end{aligned} \tag{13.4.91}$$

Igualando (13.4.90) y (13.4.91), obtenemos la ecuación de actualización temporal para $\alpha_m(n)$ como

$$\alpha_{m-1}(n) = \alpha_{m-1}(n-1)\left[\frac{1 - \frac{f^*_{m-1}(n,n)f_{m-1}(n)}{E^f_{m-1}(n)}}{1 - c_{\mathrm{mm}}(n)g_{m-1}(n)}\right] \tag{13.4.92}$$

Por último, tenemos que distinguir entre dos métodos distintos para actualizar los coeficientes de reflexión del filtro en celosía y la parte correspondiente a la escalera: el *método convencional (indirecto)* y el *método directo*. En el método convencional (indirecto),

$$\mathscr{K}^f_{m+1}(n) = -\frac{k_{m+1}(n)}{E^b_m(n-1)} \tag{13.4.93}$$

$$\mathscr{K}^b_{m+1}(n) = -\frac{k^*_{m+1}(n)}{E^f_m(n)} \tag{13.4.94}$$

$$\xi_m(n) = -\frac{\delta_m(n)}{E^b_m(n)} \tag{13.4.95}$$

donde $k_{m+1}(n)$ se ha actualizado a partir de (13.4.58), $\delta_m(n)$ se ha actualizado de acuerdo con (13.4.76), y $E_m^f(n)$ y $E_m^b(n)$ se han actualizado de acuerdo con (13.4.83) y (13.4.84). Sustituyendo la expresión de $k_{m+1}(n)$ dada en (13.4.58) en la Ecuación (13.4.93), y utilizando (13.4.84) y la octava ecuación de la Tabla 13.5, obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathscr{K}_{m+1}^f(n) &= -\frac{k_{m+1}(n-1)}{E_m^b(n-2)}\left(\frac{wE_m^b(n-2)}{E_m^b(n-1)}\right) - \frac{\alpha_m(n-1)f_m(n)g_m^*(n-1)}{E_m^b(n-1)} \\
&= \mathscr{K}_{m+1}^f(n-1)\left(1-\frac{\alpha_m(n-1)|g_m(n-1)|^2}{E_m^b(n-1)}\right) \\
&\quad - \frac{\alpha_m(n-1)f_m(n)g_m^*(n-1)}{E_m^b(n-1)} \\
&= \mathscr{K}_{m+1}^f(n-1) - \frac{\alpha_m(n-1)f_{m+1}(n)g_m^*(n-1)}{E_m^b(n-1)}
\end{aligned} \tag{13.4.96}$$

que es una fórmula para actualizar directamente los coeficientes de reflexión de la celosía. De forma similar, sustituyendo (13.4.58) en (13.4.94), y utilizando (13.4.83) y la octava ecuación de la Tabla 13.5, obtenemos

$$\mathscr{K}_{m+1}^b(n) = \mathscr{K}_{m+1}^b(n-1) - \frac{\alpha_m(n-1)f_m^*(n)g_{m+1}(n)}{E_m^f(n)} \tag{13.4.97}$$

Por último, la ganancia de la escalera también se puede actualizar directamente usando la relación

$$\xi_m(n) = \xi_m(n-1) - \frac{\alpha_m(n)g_m^*(n)e_{m+1}(n)}{E_m^b(n)} \tag{13.4.98}$$

El algoritmo RLS en celosía-escalera que utiliza las relaciones de actualización directas dadas en (13.4.96–13.4.98) y (13.4.83–13.4.84) se enumeran en la Tabla 13.6.

Una característica importante del algoritmo de la Tabla 13.6 es que los errores residuales directo e inverso se realimentan para actualizar en el tiempo los coeficientes de reflexión de la etapa en celosía, y $e_{m+1}(n)$ se realimenta para actualizar la ganancia de la escalera $\xi_m(n)$. Por esta razón, este algoritmo RLS en celosía-escalera se conoce como *forma con realimentación del error*. Puede obtenerse una forma similar para el algoritmo RLS en celosía-escalera a posteriori. Para obtener más información sobre la forma con realimentación del error de los algoritmos RLS en celosía-escalera, el lector interesado puede consultar los textos de Ling, Manolakis y Proakis (1986).

Algoritmos RLS rápidos. Las dos versiones de los algoritmos RLS rápidos dadas en la Sección 13.3.3 se deducen directamente de las relaciones que hemos obtenido en esta sección. En concreto, fijamos el tamaño de la celosía y los predictores directo e inverso asociados en $M-1$ etapas. A continuación, obtenemos las siete primeras ecuaciones recursivas en las dos versiones del algoritmo. El resto del problema consiste en determinar la ecuación de actualización temporal para el vector de ganancia de Kalman, el cual se ha determinado en las Ecuaciones (13.4.85–13.4.89). En la versión B del algoritmo, dada en la Tabla 13.3, hemos empleado el escalar $\alpha_m(n)$ para reducir los cálculos de $10M$ a $9M$. La versión A del algoritmo, dada en la Tabla 13.2, evita el uso de este parámetro. Puesto que estos algoritmos proporcionan una actualización directa del vector de ganancia de Kalman, reciben el nombre de *algoritmos rápidos de Kalman* (como referencia puede consultar Falconer y Ljung (1978) y Proakis (1989)).

Para reducir aún más la complejidad de cálculo a $7M$ se puede actualizar directamente el siguiente *vector de ganancia de Kalman alternativo* (*véase* Carayannis, Manolakis y Kalouptsidis (1983)) definido como

$$\tilde{\mathbf{K}}_M(n) = \frac{1}{w}\mathbf{P}_M(n-1)\mathbf{X}_M^*(n) \tag{13.4.99}$$

Predictor en celosía: se comienza en $n = 1$ y se calculan las actualizaciones de orden para $m = 0, 1, \ldots, M-2$

$$\begin{aligned}
\mathscr{K}^f_{m+1}(n-1) &= \mathscr{K}^f_{m+1}(n-2) - \frac{\alpha_m(n-2)\, f_{m+1}(n-1) g^*_m(n-2)}{E^b_m(n-2)} \\
\mathscr{K}^b_{m+1}(n-1) &= \mathscr{K}^b_{m+1}(n-2) - \frac{\alpha_m(n-2)\, f^*_m(n-1) g_{m+1}(n-1)}{E^f_m(n-1)} \\
f_{m+1}(n) &= f_m(n) + \mathscr{K}^f_{m+1}(n-1) g_m(n-1) \\
g_{m+1}(n) &= g_m(n-1) + \mathscr{K}^b_{m+1}(n-1)\, f_m(n) \\
E^f_{m+1}(n-1) &= wE^f_{m+1}(n-2) + \alpha_{m+1}(n-2)|\, f_{m+1}(n-1)|^2 \\
\alpha_{m+1}(n-1) &= \alpha_m(n-1) - \frac{\alpha^2_m(n-1)|g_m(n-1)|^2}{E^b_m(n-1)} \\
E^b_{m+1}(n-1) &= wE^b_{m+1}(n-2) + \alpha_{m+1}(n-1)|g_{m+1}(n-1)|^2
\end{aligned}$$

Filtro en escalera: se comienza en $n = 1$ y se calculan las actualizaciones de orden para $m = 0, 1, \ldots, M-1$

$$\begin{aligned}
\xi_m(n-1) &= \xi_m(n-2) - \frac{\alpha_m(n-1) g^*_m(n-1) e_{m+1}(n-1)}{E^b_m(n-1)} \\
e_{m+1}(n) &= e_m(n) + \xi_m(n-1) g_m(n) \\
&\textit{Inicialización} \\
\alpha_0(n-1) &= 1, \quad e_0(n) = d(n), \quad f_0(n) = g_0(n) = x(n) \\
E^f_0(n) &= E^b_0(n) = wE^f_0(n-1) + |x(n)|^2 \\
\alpha_m(-1) &= 1, \quad \mathscr{K}^f_m(-1) = \mathscr{K}^b_m(-1) = 0 \\
E^b_m(-1) &= E^f_m(0) = \varepsilon > 0
\end{aligned}$$

Tabla 13.6. Forma de actualizaión directa (realimentación del error) del algoritmo RLS a priori en celosía-escalera.

Han sido propuestos varios algoritmos rápidos utilizando este vector de ganancia, con complejidades en el rango de $7M$ a $10M$. La Tabla 13.7 proporciona el algoritmo FAEST (*Fast A Posteriori Error Sequential Technique)* con una complejidad de cálculo de $7M$ (para ver una demostración, consulte Carayannis, Manolakis y Kalouptsidis (1983; 1986) y el Problema 13.7).

En general, los algoritmos RLS rápidos con una complejidad de $7M$ y algunas variaciones son muy sensibles al ruido de redondeo y presentan problemas de inestabilidad (Falconer y Ljung (1978), Carayannis, Manolakis y Kalouptsidis (1983; 1986), y Cioffi y Kailath (1984)). El problema de la inestabilidad en los algoritmos con una complejidad de $7M$ ha sido abordado por Slock y Kailath (1988; 1991), y se han propuesto modificaciones que estabilizan estos algoritmos. Los algoritmos estabilizados resultantes presentan una complejidad de cálculo en el rango de $8M$ a $9M$. Por tanto, su complejidad de cálculo se ve aumentada en una cantidad relativamente pequeña comparada con los algoritmos inestables de complejidad $7M$.

Para comprender los algoritmos RLS rápidos estabilizados, comenzamos comparando el algoritmo RLS rápido dado en la Tabla 13.3 y el algoritmo FAEST de la Tabla 13.7. Como se ha indicado, existen dos diferencias importantes entre estos dos algoritmos. En primer lugar, el algoritmo FAEST utiliza un vector de ganancia (Kalman) alternativo en lugar del vector de ganancia de Kalman. En segundo lugar, el algoritmo RLS rápido calcula el error de predicción inverso a priori $g_{M-1}(n)$ a través del filtro FIR utilizando el vector de coeficientes de predicción inversa $\mathbf{b}_{m-1}(n-1)$, mientras que el algoritmo FAEST calcula la misma magnitud a través de

$$
\begin{aligned}
f_{M-1}(n) &= x(n) + \mathbf{a}^t_{M-1}(n-1)\mathbf{X}_{M-1}(n-1) \\
\bar{f}_{M-1}(n,n) &= \frac{f_{M-1}(n)}{\bar{\alpha}_{M-1}(n-1)} \\
\mathbf{a}_{M-1}(n) &= \mathbf{a}_{M-1}(n-1) - \bar{\mathbf{K}}_{M-1}(n-1)\,\bar{f}_{M-1}(n,n) \\
E^f_{M-1}(n) &= wE^f_{M-1}(n-1) + f_{M-1}(n)\,f^*_{M-1}(n,n) \\
\bar{\mathbf{K}}_M(n) \equiv \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_{M-1}(n) \\ \bar{c}_{\mathrm{MM}}(n) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{K}}_{M-1}(n-1 \end{bmatrix} + \frac{f^*_{M-1}(n)}{wE^f_{M-1}(n-1)} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_{M-1}(n-1 \end{bmatrix} \\
g_{M-1}(n) &= -wE^b_{M-1}(n-1)\bar{c}^*_{\mathrm{MM}}(n) \\
\bar{\mathbf{K}}_{M-1}(n) &= \bar{\mathbf{C}}_{M-1}(n) - \mathbf{b}_{M-1}(n-1)\bar{c}_{\mathrm{MM}}(n) \\
\bar{\alpha}_M(n) &= \bar{\alpha}_{M-1}(n-1) + \frac{|f_{M-1}(n)|^2}{wE^f_{M-1}(n-1)} \\
\bar{\alpha}_{M-1}(n) &= \bar{\alpha}_M(n) + g_{M-1}(n)\bar{c}_{\mathrm{MM}}(n) \\
\bar{g}_{M-1}(n,n) &= \frac{g_{M-1}(n)}{\bar{\alpha}_{M-1}(n)} \\
E^b_{M-1}(n) &= wE^b_{M-1}(n-1) + g_{M-1}(n)\bar{g}^*_{M-1}(n,n) \\
\mathbf{b}_{M-1}(n) &= \mathbf{b}_{M-1}(n-1) + \bar{\mathbf{K}}_{M-1}(n)\bar{g}_{M-1}(n,n) \\
e_M(n) &= d(n) - \mathbf{h}^t_M(n-1)\mathbf{X}_M(n) \\
\bar{e}_M(n,n) &= \frac{e_M(n)}{\bar{\alpha}_M(n)} \\
\mathbf{h}_M(n) &= \mathbf{h}_M(n-1) + \bar{\mathbf{K}}_M(n)\bar{e}_M(n,n)
\end{aligned}
$$

Inicialización: poner todos los vectores a cero

$$
\begin{aligned}
E^f_{M-1}(-1) &= E^b_{M-1}(-1) = \varepsilon > 0 \\
\bar{\alpha}_{M-1}(-1) &= 1
\end{aligned}
$$

Tabla 13.7. Algoritmo FAEST.

una operación escalar, teniendo en cuenta que el último elemento del vector de ganancia alternativo, $\tilde{c}_{\mathrm{MM}}(n)$, es igual a $-wE^b_{M-1}g_{M-1}(n)$. Puesto que estos dos algoritmos son algebraicamente equivalentes, los errores de la predicción inversa calculados de diferentes formas deberían ser idénticos si se emplea en los cálculos precisión infinita. En la práctica, cuando se utiliza aritmética de precisión finita, los errores de predicción inversa calculados utilizando diferentes fórmulas son sólo aproximadamente iguales. De aquí en adelante, los designaremos por $g^{(f)}_{M-1}$ y $g^{(s)}_{M-1}(n)$, respectivamente. Los subíndices (f) y (s) indican que se calculan utilizando filtrado o la operación escalar, respectivamente.

Hay otras magnitudes en los algoritmos que se pueden calcular de forma diferente. En particular, el parámetro $\alpha_{M-1}(n)$ se puede calcular a partir de las magnitudes vectoriales $\tilde{\mathbf{K}}_{M-1}(n)$ y $\mathbf{X}_{M-1}(n)$ como

$$\alpha_{M-1}(n) = 1 + \tilde{\mathbf{K}}^t_{M-1}(n)\mathbf{X}_{M-1}(n) \tag{13.4.100}$$

o a partir de magnitudes escalares. Designamos estos valores como $\tilde{\alpha}_{M-1}^{(f)}(n)$ y $\tilde{\alpha}_{M-1}^{(s)}(n)$, respectivamente. Para terminar, el último elemento de $\tilde{\mathbf{K}}_M(n)$, designado como $\tilde{c}_{\mathrm{MM}}^{(f)}(n)$, puede calcularse a partir de la relación

$$\tilde{c}_{\mathrm{MM}}^{(f)}(n) = \frac{-g_{M-1}^{(f)}(n)}{wE_{M-1}^{b}(n-1)} \tag{13.4.101}$$

Las dos magnitudes de cada una de las tres parejas $[g_{M-1}^{(f)}(n), g_{M-1}^{(s)}(n)]$, $[\alpha_{M-1}^{(f)}(n), \alpha_{M-1}^{(s)}(n)]$, y $[\tilde{c}_{\mathrm{MM}}^{(f)}(n), \tilde{c}_{\mathrm{MM}}^{(s)}(n)]$ son algebraicamente equivalentes. Por tanto, bien las dos magnitudes o su combinación lineal (de la forma $k\beta^{(s)} + (1-k)\beta^{(f)}$, donde β representa cualquiera de los tres parámetros) son algebraicamente equivalentes a las magnitudes originales, y pueden utilizarse en el algoritmo. Slock y Kailath (1988; 1991) determinaron que emplear la magnitud apropiada o su combinación lineal en el algoritmo RLS rápido, era suficiente para corregir la realimentación positiva inherente en los algoritmos RLS rápidos. La implementación de esta noción básica lleva al algoritmo RLS rápido estabilizado dado en la Tabla 13.8.

Observe en la Tabla 13.8 que el algoritmo RLS rápido estabilizado emplea constantes $k_i, i = 1, 2, \ldots, 5$, para formar cinco combinaciones lineales de las tres parejas de magnitudes anteriormente descritas. Los mejores valores de k_i son los hallados por Slock y Kailath mediante búsquedas por computadora, y son $k_1 = 1.5, k_2 = 2.5, k_3 = 1, k_4 = 0, k_5 = 1$. Si $k_i = 0$ o 1, sólo empleamos una de las magnitudes de la combinación lineal. Por tanto, no es necesario calcular algunos de los parámetros de las tres parejas. También determinaron que la estabilidad del algoritmo sólo se ve ligeramente afectada si no se emplea $\alpha_{M-1}^{(f)}(n)$. Estas simplificaciones dan lugar al algoritmo proporcionado en la Tabla 13.9, que presenta una complejidad de cálculo de $8M$ y es numéricamente estable.

El funcionamiento de los algoritmos RLS rápidos estabilizados depende fuertemente de una inicialización apropiada. Por otro lado, un algoritmo que utilice $g_{M-1}^{(f)}(n)$ en sus cálculos no se verá afectado críticamente por una inicialización apropiada (aunque, eventualmente, divergirá). En consecuencia, inicialmente podemos utilizar $g_{M-1}^{(f)}(n)$ en lugar de $g_{M-1}^{(s)}(n)$ (o su combinación lineal) para los primeros cientos de iteraciones y luego cambiar a la forma del algoritmo RLS rápido estabilizado. De este modo, obtenemos un algoritmo RLS rápido estabilizado que tampoco es sensible a las condiciones iniciales.

13.4.2 Otros algoritmos en celosía

Podemos obtener otro tipo de algoritmo RLS en celosía normalizando los errores en la predicción directa e inversa a través de la división de los errores entre $\sqrt{E_m^f(n)}$ y $\sqrt{E_m^b(n)}$, respectivamente, y multiplicando por $\sqrt{\alpha_m(n-1)}$ y $\sqrt{\alpha_m(n)}$, respectivamente. El algoritmo en celosía resultante se denomina algoritmo RLS de celosía de raíz cuadrada o de ángulo y potencia. Este algoritmos tiene una forma más compacta que las otras formas de los algoritmos RLS en celosía. Sin embargo, el algoritmo requiere muchas operaciones de raíz cuadrada, por lo que puede resultar complejo respecto de los cálculos. Este problema puede resolverse utilizando procesadores CORDIC, que calculan una raíz cuadrada en N ciclos de reloj, donde N es el número de bits de la longitud de palabra de la computadora. Puede verse una descripción del algoritmo RLS en celosía de raíz cuadrada/normalizada y del algoritmo CORDIC en el libro de Proakis *et al.* (2002).

También puede simplificarse la complejidad de cálculo de los algoritmos RLS descritos en la sección anterior a costa del compromiso establecido para la velocidad de convergencia. Un algoritmo así se conoce como *algoritmo de gradiente-celosía*. En este algoritmo, cada etapa del filtro en celosía se caracteriza por las relaciones de entrada–salida

$$\begin{aligned} f_m(n) &= f_{m-1}(n) - k_m(n) g_{m-1}(n-1) \\ g_m(n) &= g_{m-1}(n-1) - k_m^*(n) f_{m-1}(n) \end{aligned} \tag{13.4.102}$$

$$
\begin{aligned}
f_{M-1}(n) &= x(n) + \mathbf{a}_{M-1}^t(n-1)\mathbf{X}_{M-1}(n-1) \\
f_{M-1}(n,n) &= \frac{f_{M-1}(n)}{\bar{\alpha}_{M-1}(n-1)} \\
\mathbf{a}_{M-1}(n) &= \mathbf{a}_{M-1}(n-1) - \bar{\mathbf{K}}_{M-1}(n-1)\, f_{M-1}(n,n) \\
\bar{c}_{M1}(n) &= \frac{f_{M-1}^*(n)}{wE_{M-1}^f(n-1)} \\
\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_{M-1}(n) \\ \bar{c}_{\mathrm{MM}}^{(s)}(n) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{K}}_{M-1}(n-1) \end{bmatrix} + \bar{c}_{M1}(n) \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_{M-1}(n-1) \end{bmatrix} \\
g_{M-1}^{(f)}(n) &= x(n-M+1) + \mathbf{b}_{M-1}^t(n-1)\mathbf{X}_{M-1}(n) \\
\bar{c}_{\mathrm{MM}}^{(f)}(n) &= -\frac{g_{M-1}^{(f)*}(n)}{wE_{M-1}^b(n-1)} \\
\bar{c}_{\mathrm{MM}}(n) &= k_4 \bar{c}_{\mathrm{MM}}^{(f)}(n) + (1-k_4)\bar{c}_{\mathrm{MM}}^{(s)}(n) \\
\bar{\mathbf{K}}_M(n) &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_{M-1}(n) \\ \bar{c}_{\mathrm{MM}}(n) \end{bmatrix} \\
g_{M-1}^{(s)}(n) &= -wE_{M-1}^b(n-1)\bar{c}_{\mathrm{MM}}^{(s)*}(n) \\
g_{M-1}^{(i)}(n) &= k_i g_{M-1}^{(f)}(n) + (1-k_i) g_{M-1}^{(s)}(n), \quad i = 1,2,5 \\
\bar{\mathbf{K}}_{M-1}(n) &= \bar{\mathbf{C}}_{M-1}(n) - \mathbf{b}_{M-1}(n-1)\bar{c}_{\mathrm{MM}}(n) \\
\bar{\alpha}_M(n) &= \bar{\alpha}_{M-1}(n-1) + \bar{c}_{M1}(n)\, f_{M-1}(n) \\
\bar{\alpha}_{M-1}^{(s)}(n) &= \bar{\alpha}_M(n) + g_{M-1}^{(s)}(n)\bar{c}_{\mathrm{MM}}^{(s)}(n) \\
\bar{\alpha}_{M-1}^{(f)}(n) &= 1 + \bar{\mathbf{K}}_{M-1}^t(n)\mathbf{X}_{M-1}(n) \\
\bar{\alpha}_{M-1}(n) &= k_3 \bar{\alpha}_{M-1}^{(f)}(n) + (1-k_3)\bar{\alpha}_{M-1}^{(s)}(n) \\
E_{M-1}^f(n) &= wE_{M-1}^f(n-1) + f_{M-1}(n)\, f_{M-1}^*(n,n) \\
\left[\text{o}, \quad \frac{1}{E_{M-1}^f(n)} \right. &= \left. \frac{1}{w}\frac{1}{E_{M-1}^f(n-1)} - \frac{|\bar{c}_{M1}(n)|^2}{\bar{\alpha}_{M-1}^{(s)}(n)} \right] \\
g_{M-1}^{(i)}(n,n) &= \frac{g_{M-1}^{(i)}(n)}{\bar{\alpha}_{M-1}(n)}, \quad i = 1,2 \\
\mathbf{b}_{M-1}(n) &= \mathbf{b}_{M-1}(n-1) + \bar{\mathbf{K}}_{M-1}(n) g_{M-1}^{(1)}(n,n) \\
E_{M-1}^b(n) &= wE_{M-1}^b(n-1) + g_{M-1}^{(2)}(n) g_{M-1}^{(2)*}(n,n) \\
e_M(n) &= d(n) - \mathbf{h}_M^t(n-1)\mathbf{X}_M(n) \\
e_M(n,n) &= \frac{e_M(n)}{\bar{\alpha}_M(n)} \\
\mathbf{h}_M(n) &= \mathbf{h}_M(n-1) + \bar{\mathbf{K}}_M(n) e_M(n,n)
\end{aligned}
$$

Tabla 13.8. Algoritmo RLS rápido estabilizado.

donde $k_m(n)$ es el coeficiente de reflexión de la etapa m de la celosía y $f_m(n)$ y $g_m(n)$ son los residuales directos e inversos.

Esta forma del filtro en celosía es idéntica a la del algoritmo de Levinson-Durbin, excepto en que ahora $k_m(n)$ puede variar con el tiempo de modo que el filtro en celosía se adapte a las variaciones temporales de los parámetros estadísticos de la señal. Los coeficientes de reflexión $\{k_m(n)\}$ pueden optimizarse empleando el método de mínimos cuadrados, lo que da lugar a la solución

$$k_m(n) = \frac{2\sum_{l=0}^{n} w^{n-l} f_{m-1}(l) g_{m-1}^*(l-1)}{\sum_{l=0}^{n} w^{n-l}[|f_{m-1}(l)|^2 + |g_{m-1}(l-1)|^2]}, \quad m = 1,2,\ldots M-1 \tag{13.4.103}$$

Estos coeficientes también se pueden actualizar recursivamente en el tiempo. Los coeficientes en escalera se calculan recursivamente en el tiempo empleando un algoritmo de tipo LMS que se obtiene aplicando el criterio del error cuadrático medio. Puede ver una descripción de este algoritmo en los documentos de Griffiths (1978) y en el libro de Proakis *et al.* (2002).

$$\begin{aligned}
f_{M-1}(n) &= x(n) + \mathbf{a}_{M-1}^t(n-1)\mathbf{X}_{M-1}(n-1) \\
f_{M-1}(n,n) &= \frac{f_{M-1}(n)}{\bar{\alpha}_{M-1}(n-1)} \\
\mathbf{a}_{M-1}(n) &= \mathbf{a}_{M-1}(n-1) - \bar{\mathbf{K}}_{M-1}(n-1) f_{M-1}(n,n) \\
\bar{c}_{M1}(n) &= \frac{f_{M-1}^*(n)}{wE_{M-1}^f(n-1)} \\
\bar{\mathbf{K}}_M(n) \equiv \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_{M-1}(n) \\ \bar{c}_{\mathrm{MM}}(n) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{K}}_{M-1}(n-1) \end{bmatrix} + \frac{f_{M-1}^*(n)}{wE_{M-1}^f(n-1)} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_{M-1}(n-1) \end{bmatrix} \\
g_{M-1}^{(f)}(n) &= x(n-M+1) + \mathbf{b}_{M-1}^t(n-1)\mathbf{X}_{M-1}(n) \\
g_{M-1}^{(s)}(n) &= -wE_{M-1}^b(n-1)\bar{c}_{\mathrm{MM}}^*(n) \\
g_{M-1}^{(i)}(n) &= k_i g_{M-1}^{(f)}(n) + (1-k_i) g_{M-1}^{(s)}(n), \quad i = 1,2 \\
\bar{\mathbf{K}}_{M-1}(n) &= \bar{\mathbf{C}}_{M-1}(n) - \mathbf{b}_{M-1}(n-1)\bar{c}_{\mathrm{MM}}(n) \\
\bar{\alpha}_M(n) &= \bar{\alpha}_{M-1}(n-1) + \bar{c}_{M1}(n) f_{M-1}(n) \\
\bar{\alpha}_{M-1}(n) &= \bar{\alpha}_M(n) + g_{M-1}^{(f)}(n)\bar{c}_{\mathrm{MM}}(n) \\
E_{M-1}^f(n) &= wE_{M-1}^f(n-1) + f_{M-1}(n) f_{M-1}^*(n,n) \\
g_{M-1}^{(i)}(n,n) &= \frac{g_{M-1}^{(i)}(n)}{\bar{\alpha}_{M-1}(n)}, \quad i = 1,2 \\
\mathbf{b}_{M-1}(n) &= \mathbf{b}_{M-1}(n-1) + \bar{\mathbf{K}}_{M-1}(n) g_{M-1}^{(1)}(n,n) \\
E_{M-1}^b(n) &= wE_{M-1}^b(n-1) + g_{M-1}^{(2)}(n) g_{M-1}^{(2)*}(n,n) \\
e_M(n) &= d(n) - \mathbf{h}_M^t(n-1)\mathbf{X}_M(n) \\
e_M(n,n) &= \frac{e_M(n)}{\bar{\alpha}_M(n)} \\
\mathbf{h}_M(n) &= \mathbf{h}_M(n-1) + \bar{\mathbf{K}}_M(n) e_M(n,n)
\end{aligned}$$

Tabla 13.9. Algoritmo RLS rápido estabilizado y simplificado.

13.4.3 Propiedades de los algoritmos en celosía-escalera

Los algoritmos en celosía que hemos visto en las dos subsecciones anteriores presentan una serie de propiedades interesantes. En esta subsección, vamos a considerar dichas propiedades y vamos a compararlas con las correspondientes propiedades del algoritmo LMS y de los algoritmos RLS de filtrado FIR en la forma directa.

Velocidad de convergencia. Los algoritmos RLS para filtros en celosía-escalera tienen básicamente la misma velocidad de convergencia que las estructuras de filtros FIR RLS en la forma directa. Este comportamiento característico no es sorprendente, ya que ambas estructuras de filtros son óptimas en el sentido de que aplican mínimos cuadrados. Aunque el algoritmo de gradiente en celosía mantiene algunas de las características óptimas del algoritmo RLS en celosía, no es óptimo en lo que se refiere a mínimos cuadrados, y, por tanto, su velocidad de convergencia es menor.

Con propósitos de comparación, las Figuras 13.4.3 y 13.4.4 ilustran las curvas de aprendizaje de un ecualizador adaptativo de longitud $M = 11$, implementado como un filtro en celosía-escalera de gradiente, y un filtro FIR en la forma directa utilizando el algoritmo LMS, para una matriz de autocorrelación del canal que tiene relaciones de autovalor $\lambda_{\text{máx}}/\lambda_{\text{mín}} = 11$ y $\lambda_{\text{máx}}/\lambda_{\text{mín}} = 21$, respectivamente. A partir de estas curvas de aprendizaje, observe que el algoritmo de gradiente en celosía emplea aproximadamente el doble de iteraciones para coverger que el algoritmo óptimo RLS en celosía. Además, el algoritmo de gradiente en celosía proporciona una convergencia significativamente más rápida que el algoritmo LMS. Para ambas estructuras en celosía, la relación de convergencia no depende de la dispersión del autovalor de la matriz de correlación.

Requisitos de cálculo. Los algoritmos RLS en celosía descritos en la subsección anterior presentan una complejidad de cálculo que es proporcional a M. En contraste, la complejidad computacional de los algoritmos RLS de raíz cuadrada es proporcional a M^2. Por otro lado, los algoritmos rápidos en la forma directa, que derivan del algoritmo en celosía, tienen una complejidad proporcional a M, y son menos eficientes que los algoritmos en celosía-escalera.

En la Figura 13.4.5 se ilustra la complejidad de cálculo (número de multiplicaciones y divisiones complejas) de los distintos algoritmos de filtrado adaptativo que hemos descrito. Evidentemente, el algoritmo LMS es el que requiere menos cálculos. Los algoritmos RLS rápidos de las Tablas 13.3 y 13.9 son los más eficientes de los

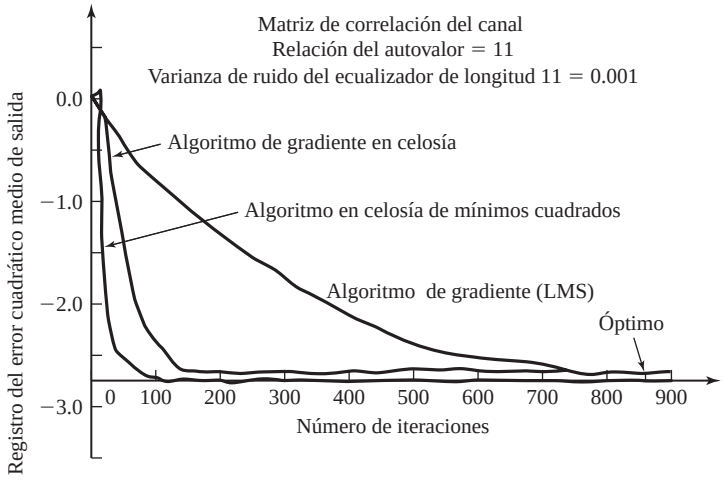


Figura 13.4.3. Curvas de aprendizaje para los algoritmos RLS en celosía, de gradiente en celosía y LMS para un ecualizador adaptativo de longitud $M = 11$. (De *Digital Communications* por John G. Proakis. ©1989, McGraw-Hill Book Company. Reimpreso con permiso del editor).

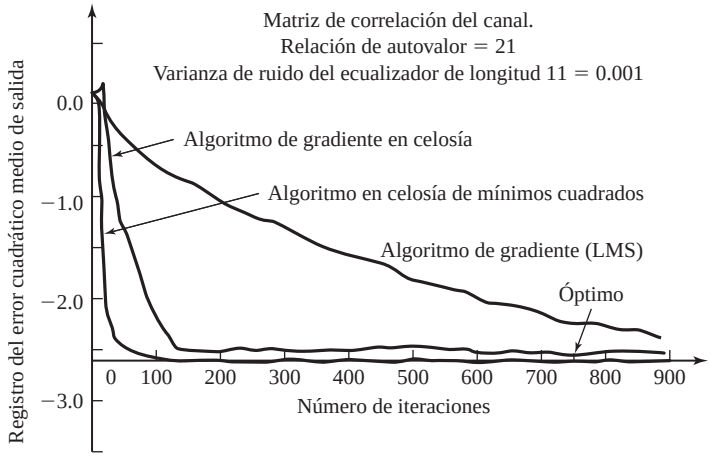


Figura 13.4.4. Curvas de aprendizaje para los algoritmos RLS en celosía, de gradiente en celosía y LMS para un ecualizador adaptativo de longitud $M = 11$. (De *Digital Communications* por John G. Proakis. ©1989, McGraw-Hill Book Company. Reimpreso con permiso del editor).

algoritmos mencionados, seguidos muy cerca por el algoritmo de gradiente en celosía y luego por los algoritmos RLS en celosía y, por último, por los algoritmos de raíz cuadrada. Observe que para valores pequeños de M, existe una diferencia muy pequeña en lo que se refiere a la complejidad entre los algoritmos que más rapidamente convergen.

Propiedades numéricas. Además de proporcionar convergencia rápida, los algoritmos RLS de gradiente en celosía son numéricamente robustos. En primer lugar, estos algoritmos en celosía son *numéricamente estables*, lo que significa que el error de estimación de salida del procedimiento de cálculo está limitado cuando se aplica una señal de error limitada a la entrada. En segundo lugar, la precisión numérica de la solución óptima también es relativamente buena cuando se compara con los algoritmos LMS y RLS para filtros FIR en la forma directa.

Con propósitos de comparación ilustramos en la Tabla 13.10 el error cuadrático medio en estado permanente o error cuadrático medio mínimo (estimado) obtenido mediante una simulación por computadora para los dos algoritmos RLS en celosía y los algoritmos de filtros FIR en la forma directa descritos en la Sección 13.2. El resultado sorprendente de la Tabla 13.10 es el superior rendimiento obtenido con el algoritmo RLS en celosía-escalera, en el que los coeficientes de reflexión y la ganancia de la escalera se actualizan directamente de acuerdo con las Ecuaciones (13.4.96–13.4.98); ésta es la forma con realimentación del error del algoritmo RLS en celosía. Es evidente que la actualización directa de estos coeficientes es significativamente más robusta para errores de redondeo que los restantes algoritmos adaptativos, incluyendo el algoritmo LMS. También es evidente que el proceso en dos pasos utilizado en el algoritmo RLS en celosía convencional para estimar los coeficientes de reflexión no es tan preciso. Además, los errores de estimación que se generan en los coeficientes de cada etapa se propagan de una etapa a otra, produciendo errores adicionales.

El efecto de cambiar el factor de ponderación w se ilustra en los resultados numéricos proporcionados en la Tabla 13.11. En esta tabla, proporcionamos el error cuadrático medio mínimo (estimado) obtenido con las formas convencional y con error de realimentación del algoritmo RLS en celosía. Observe que el error cuadrático medio de salida disminuye cuando se produce un incremento del factor de ponderación si la precisión es alta (13 bits y 16 bits). Esto refleja la mejora obtenida en el rendimiento al aumentar el intervalo de observación. Cuando el número de bits de precisión disminuye, puede observarse que el factor de ponderación también debería disminuir para mantener el buen funcionamiento. En efecto, con precisiones bajas, el efecto de considerar un intervalo de tiempo más largo da lugar a un ruido de redondeo mayor. Por supuesto, estos resultados se han obtenido

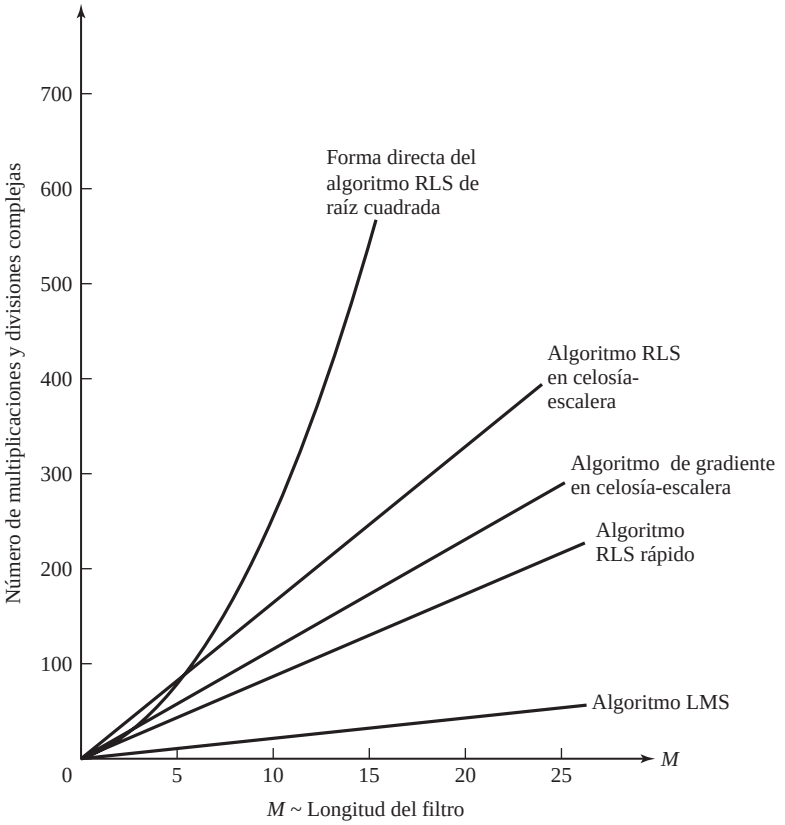


Figura 13.4.5. Complejidad de cálculo de los algoritmos para filtros adaptativos.

	Algoritmo				
Número de bits (incluyendo el signo)	RLS de raíz cuadrada	RLS rápido	RLS en celosía convencional	RLS en celosía con realimentación del error	LMS
16	2.17	2.17	2.16	2.16	2.30
13	2.33	2.21	3.09	2.22	2.30
11	6.14	3.34	25.2	3.09	19.0
9	75.3	[a]	365	31.6	311

[a]El algoritmo no converge.

Tabla 13.10. Precisión numérica en función del error cuadrático medio de salida para un canal con $\lambda_{\text{máx}}/\lambda_{\text{mín}} = 11$ y $w = 0.975$, MSE $\times\ 10^{-3}$

para parámetros estadísticos invariantes en el tiempo de la señal. Si los parámetros estadísticos de la señal son variantes en el tiempo, la velocidad de las variaciones temporales también influirá en la elección de w.

El algoritmo de gradiente en celosía, los coeficientes de reflexión y las ganancias en escalera también se actualizan directamente. En consecuencia, la precisión numérica de este algoritmo es comparable a la obtenida con la actualización de la forma directa del algoritmo RLS en celosía.

	Algoritmo					
	$w = 0.99$		$w = 0.975$		$w = 0.95$	
Número de bits con signo	Convenc.	Realiment. del error	Convenc.	Realiment. del error	Convenc.	Realiment. del error
16	2.14	2.08	2.18	2.16	2.66	2.62
13	7.08	2.11	3.09	2.22	3.65	2.66
11	39.8	3.88	25.2	3.09	15.7	2.78
9	750	44.1	365	31.6	120	15.2

Tabla 13.11. Precisión numérica en función del error cuadrático medio de salida de un algoritmo en celosía LS a priori con valores diferentes del factor de ponderación w, MSE, $\times\ 10^{-3}$

Los resultados analíticos y de la simulación sobre la estabilidad y la precisión numéricas en la implementación de punto fijo de estos algoritmos puede encontrarse en Ling y Proakis (1984), Ling, Manolakis y Proakis (1985; 1986), Ljung y Ljung (1985), y Gardner (1984).

Consideraciones de implementación. Como hemos visto, la estructura del filtro en celosía es altamente modular y permite canalizar los datos. Gracias al alto grado de modularidad, los algoritmos RLS en celosía y de gradiente son particularmente adecuados para la implementación en VLSI. Como resultado de esta ventaja en la implementación y las propiedades deseables de estabilidad, la excelente precisión numérica y la rápida convergencia, podemos anticipar que en un futuro próximo el uso de los filtros adaptativos implementados como estructuras en celosía-escalera crecerá considerablemente.

13.5 Resumen y referenciass

Hemos presentado los algoritmos adaptativos para las estrucuras de filtros en celosía y FIR en la forma directa. Los algoritmos para los filtros FIR en la forma directa están formados por simples algoritmos LMS debidos a Widrow y Hoff (1960) y los algoritmos LS recursivos en el tiempo y en la forma directa, incluyendo la forma RLS convencional dada por las ecuaciones (13.3.23–13.3.27), las formas RLS de raíz cuadrada descritas por Bierman (1977), Carlson y Culmone (1979), y Hsu (1982), y los algoritmos RLS rápidos de Kalman, habiendo siendo descrita una forma de los mismos por Falconer y Ljung (1978), y otras formas posteriores por Carayannis, Manolakis y Kalouptsidis (1983), Proakis (1989), y Cioffi y Kailath (1984).

De estos algoritmos, el algoritmo LMS es el más sencillo. Se emplea en muchas aplicaciones donde su lenta convergencia es apropiada. Los algoritmos RLS en la forma directa y de raíz cuadrada se han empleado en aquellas aplicaciones en las que se necesitaba una convergencia rápida. Los algoritmos presentan ciertas propiedades numéricas apropiadas. La familia de algoritmos RLS rápidos estabilizados resulta muy atractiva desde el punto de vista de la eficiencia de los cálculos. Hsu (1982), Cioffi y Kailath (1984), Lin (1984), Eleftheriou y Falconer (1987), y Slock y Kailath (1988; 1991) han propuesto métodos para evitar la inestabilidad debida a los errores de redondeo.

El algoritmo de filtro adaptativo en celosía-escalera visto en este capítulo es el algoritmo RLS en celosía-escalera óptimo (tanto en la forma convencional como con realimentación del error). Sólo se ha obtenido la forma a priori del algoritmo en celosía-escalera, que es la forma más frecuentemente utilizada en las aplicaciones. Además, existe una forma a posteriori de los algoritmos RLS en celosía-escalera (en forma convencional y con realimentación del error), que se describen en Ling, Manolakis y Proakis (1986). La forma con realimentación del error del algoritmo RLS en celosía-escalera presenta excelentes propiedades numéricas, y es especialmente adecuada para la implementación en aritmética de punto fijo y en VLSI.

En los algoritmos RLS en la forma directa y en celosía hemos empleado ponderación exponencial para reducir la memoria efectiva del proceso de adaptación. Como alternativa a la ponderación exponencial, podemos utilizar una ponderación uniforme de longitud finita hacia atrás. Este método lleva a la clase de estructuras RLS en la forma directa y en celosía de memoria finita descritas por Cioffi y Kalaith (1985) y Manolakis, Ling y Proakis (1987).

Además de los distintos algoritmos que se han presentado en este capítulo, existen muchas investigaciones relativas a la implementación eficiente de los mismos utilizando matrices sistólicas y arquitecturas paralelas. El lector interesado puede consultar los textos de Kung (1982), y Kung, Whitehouse y Kailath (1985).

Problemas

13.1 Utilice el criterio de mínimos cuadrados para determinar las ecuaciones de los parámetros del modelo de filtro FIR de la Figura 13.1.2, cuando la salida del sistema desconocido está distorsionada por un ruido aditivo $w(n)$.

13.2 Determine las ecuaciones para los coeficientes de un cancelador de eco adaptativo basado en el criterio de mínimos cuadrados. Utilice la configuración de la Figura 13.1.8 y suponga que sólo existe eco en el extremo próximo.

13.3 Si las secuencias $w_1(n)$, $w_2(n)$ y $w_3(n)$ del sistema de cancelación de ruido adaptativo mostrado en la Figura 13.1.14 están mutuamente incorreladas, determine el valor esperado de las secuencias de correlación estimadas $r_{vv}(k)$ y $r_{yv}(k)$ contenidas en (13.1.26).

13.4 Demuestre el resultado obtenido en (13.4.34).

13.5 Deduzca la ecuación para la actualización directa de la ganancia de escalera dada por (13.4.98).

13.6 Deduzca la ecuación para los coeficientes de reflexión de un algoritmo de gradiente en celosía dado por (13.4.103).

13.7 Deduzca el algoritmo FAEST dado en la Tabla 13.7 utilizando el vector de ganancia de Kalman alternativo

$$\tilde{\mathbf{K}}_M(n) = \frac{1}{w}\mathbf{P}_M(n-1)\mathbf{X}_M^*(n)$$

en lugar del vector de ganancia de Kalman $\mathbf{K}_M(n)$.

13.8 El algoritmo LMS propuesto por Gitlin, Meadors y Weinstein (1982) se puede expresar como

$$\mathbf{h}_M(n+1) = w\mathbf{h}_M(n) + \Delta e(n)\mathbf{X}_M^*(n)$$

donde $0 < w < 1, \Delta$ es el tamaño de paso y $\mathbf{X}_M(n)$ es el vector de datos en el instante n. Determine la condición para la convergencia del valor medio de $\mathbf{h}_M(n)$.

13.9 El algoritmo LMS del Problema 13.8 se puede obtener minimizando la función de coste

$$\mathscr{E}(n) = |e(n)|^2 + c||\mathbf{h}_M(n)||^2$$

donde c es una constante y $e(n)$ es el error entre la salida del filtro deseado y la salida real del filtro. Demuestre que la minimización de $\mathscr{E}(n)$ con respecto al vector de coeficientes del filtro $\mathbf{h}_M(n)$ nos lleva al siguiente algoritmo LMS

$$\mathbf{h}_M(n+1) = (1-\Delta c)\mathbf{h}_M(n) + \Delta e(n)\mathbf{X}_M^*(n)$$

13.10 Para el algoritmo LMS normalizado dado por (13.2.31), determine el rango de valores del tamaño de paso Δ que garantice la estabilidad del algoritmo en cuanto al error cuadrático medio.

13.11 Utilizando el vector de ganancia de Kalman alternativo dado en el Problema 13.8, modifique los algoritmos rápidos de mínimos cuadrados a priori dados en las Tablas 13.2 y 13.3, y luego reduzca el número de cálculos.

13.12 Considere el proceso aleatorio

$$x(n) = gv(n) + w(n), \qquad n = 0, 1, \ldots, M-1$$

donde $v(n)$ es una secuencia conocida, g es una variable aleatoria con $E[g] = 0$ y $E[g^2] = G$. El proceso $w(n)$ es una secuencia de ruido blanco con

$$\gamma_{ww}(m) = \sigma_w^2 \delta(m)$$

Determine los coeficientes del estimador lineal para g, es decir,

$$\hat{g} = \sum_{n=0}^{M-1} h(n)x(n)$$

que minimiza el error cuadrático medio

$$\mathscr{E} = e[(g - \hat{g})^2]$$

13.13 Recuerde que un filtro FIR puede realizarse basándose en el muestreo en frecuencia con la función de sistema

$$H(z) = \frac{1 - z^{-M}}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{H_k}{1 - e^{j2\pi k/M} z^{-1}} = H_1(z) H_2(z)$$

donde $H_1(z)$ es el filtro peine y $H_2(z)$ es el banco paralelo de resonadores.

(a) Suponga que se implementa esta estructura como un filtro adaptativo utilizando el algoritmo LMS para ajustar los parámetros del filtro (DFT) H_k. Proporcione la ecuación de actualización temporal para estos parámetros. Dibuje la estructura del filtro adaptativo.

(b) Suponga que se emplea esta estructura como un ecualizador de canal adaptativo, en el que la señal deseada es

$$d(n) = \sum_{k=0}^{M-1} A_k \cos \omega_k n, \qquad \omega_k = \frac{2\pi k}{M}$$

Con esta forma para la señal deseada, ¿qué ventajas tiene el algoritmo adaptativo LMS para los coeficientes DFT H_k sobre la estructura de la forma directa con coeficientes $h(n)$? (*Consejo*: consulte Proakis (1970)).

13.14 Considere el índice de rendimiento

$$J = h^2 - 40h + 28$$

Suponga que buscamos el mínimo de J utilizando un algoritmo de pendiente máxima descendente

$$h(n+1) = h(n) - \frac{1}{2} \Delta g(n)$$

donde $g(n)$ es el gradiente.

(a) Determine el rango de valores de Δ que proporciona un sistema sobreamortiguado para el proceso de ajuste.

(b) Dibuje la expresión para J como una función de n para un valor de Δ perteneciente a este rango.

13.15 Considere el filtro adaptativo para cancelación de ruido mostrado en la Figura 13.1.14. Suponga que los procesos de ruido aditivo son blancos y mutuamente incorrelados, con varianzas iguales a σ_w^2. Suponga que el sistema lineal tiene una función de sistema conocida

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

Determine los pesos óptimos de un cancelador de ruido de tres etapas que minimice el error cuadrático medio.

13.16 Determine los coeficientes a_1 y a_2 del predictor lineal mostrado en la Figura P.13.16, sabiendo que la autocorrelación $\gamma_{xx}(n)$ de la señal de entrada es

$$\gamma_{xx}(m) = a^{|m|}, \qquad 0 < a < 1$$

13.17 Determine el filtro en celosía y sus coeficientes de reflexión óptimos para el predictor lineal del Problema 13.16.

13.18 Considere el filtro FIR adaptativo mostrado en la Figura P.13.18. El sistema $C(z)$ se caracteriza por la función de sistema

$$C(z) = \frac{1}{1 + 0.9z^{-1}}$$

Determine los coeficientes óptimos del filtro FIR adaptativo $B(z) = b_0 + b_1 z^{-1}$ que minimizan el error cuadrático medio (MSE). El ruido aditivo es blanco con varianza $\sigma_w^2 = 0.1$.

13.19 En el algoritmo de gradiente en celosís, los errores de predicción directo e inverso están dados por (13.4.102).

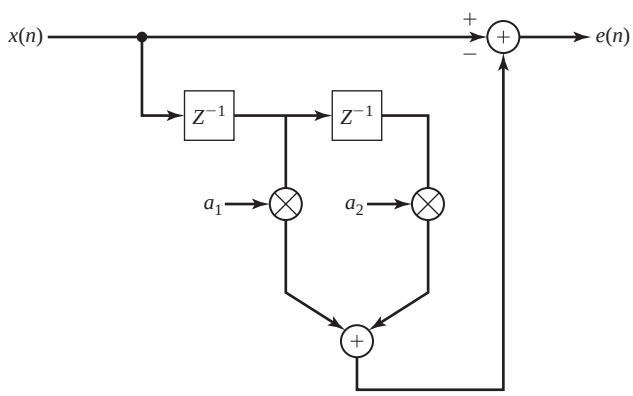


Figura P.13.16.

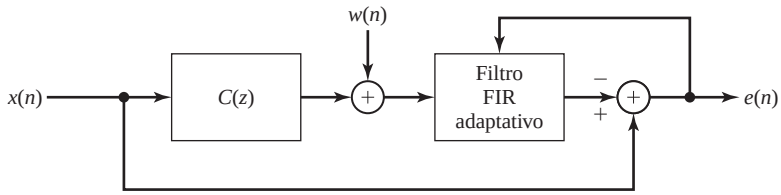


Figura P.13.18.

(a) Demuestre que la minimización del error de mínimos cuadrados

$$\mathscr{E}_m^{\mathrm{LS}} = \sum_{l=0}^{n} w^{n-l}[|fm(n)|^2 + |gm(n)|^2]$$

con respecto a los coeficientes de reflexión $\{k_m(n)\}$ da lugar a la ecuación dada por (13.4.103).

(b) Para determinar una ecuación para el cálculo recursivo de los coeficientes de reflexión dada por (13.4.103) se define

$$\begin{aligned} u_m(n) &= wu_m(n-1) + 2f_{m-1}(n)g_{m-1}^*(n-1) \\ \upsilon_m(n) &= wv_m(n-1) + |f_{m-1}(n)|^2 + |g_{m-1}(n-1)|^2 \end{aligned}$$

de modo que $k_m(n) = u_m(n)/\upsilon_m(n)$. A continuación, demuestre que $k_m(n)$ se puede calcular recursivamente mediante la relación

$$k_m(n) = k_m(n-1) + \frac{f_m(n)g_{m-1}^*(n-1) + g_m^*(n)f_{m-1}(n)}{w\upsilon_m(n-1)}$$

13.20 Considere el predictor adaptativo mostrado en la Figura P.13.16.

(a) Determine el índice de rendimiento cuadrático y los parámetros óptimos para la señal

$$x(n) = \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} + w(n)$$

donde $w(n)$ es ruido blanco de varianza $\sigma_w^2 = 0.1$.

(b) Genere una secuencia de 1000 muestras de $x(n)$ y utilice el algoritmo LMS para obtener de manera adaptativa los coeficientes del predictor. Compare los resultados experimentales con los valores teóricos del apartado (a). Utilice un tamaño de paso de $\Delta \leq \frac{1}{10}\Delta_{\text{máx}}$.

(c) Repita el experimento del apartado (b) para $N = 10$ pruebas con diferentes secuencias de ruido y calcule los valores medios de los coeficientes del predictor. Comente cómo son estos resultados comparados con los valores teóricos del apartado (a).

13.21 Un proceso auto-regresivo se describe mediante la ecuación en diferencias

$$x(n) = 1.26x(n-1) - 0.81x(n-2) + w(n)$$

(a) Genere una secuencia de $N = 1000$ muestras de $x(n)$, donde $w(n)$ es una secuencia de ruido blanco con varianza $\sigma_w^2 = 0.1$. Utilice el algoritmo LMS para determinar los parámetros de un predictor lineal de segundo orden $(p = 2)$. Comience con $a_1(0) = a_2(0) = 0$. Represente los coeficientes $a_1(n)$ y $a_2(n)$ como una función del núnmero de iteración.

(b) Repita el apartado (a) para 10 pruebas, utilizando diferentes secuencias de ruido y superponga los 10 diagramas de $a_1(n)$ y $a_2(n)$.

(c) Dibuje la curva de aprendizaje para el error cuadrático medio (sobre las 10 pruebas) para los datos del apartado (b).

13.22 Un proceso aleatorio $x(n)$ se especifica como

$$\begin{aligned} x(n) &= s(n) + w(n) \\ &= \operatorname{sen}(\omega_0 n + \phi) + w(n), \qquad \omega_0 = \pi/4, \quad \phi = 0 \end{aligned}$$

donde $w(n)$ es una secuencia de ruido blanco aditivo con varianza $\sigma_w^2 = 0.1$.

(a) Genere $N = 1000$ muestras de $x(n)$ y simule un mejorador lineal adaptativo de longitud $L = 4$. Utilice el algoritmo LMS para adaptar el mejorador ALE.

(b) Dibuje la salida del mejorador.

(c) Calcule la autocorrelación $\gamma_{xx}(m)$ de la secuencia $x(n)$.

(d) Determine los valores teóricos de los coeficientes del mejorador y compárelos con los valores experimentales.

(e) Calcule y dibuje la respuesta en frecuencia del predictor lineal (ALE).

(f) Calcule y dibuje la respuesta en frecuencia del filtro de error de predicción.

(g) Calcule y dibuje los valores experimentales de la autocorrelación $r_{ee}(m)$ de la secuencia de error de salida para $0 \leq m < 10$.

(h) Repita el experimento para 10 pruebas, utilizando diferentes secuencias de ruido y superponga las respuestas en frecuencia en una misma gráfica.

(i) Comente los resultados de los apartados (a) hasta (h).

14

Estimación del espectro de potencia

En este capítulo vamos a abordar la estimación de las características espectrales de señales caracterizadas como procesos aleatorios. Muchos de los fenómenos que ocurren en la naturaleza se caracterizan mejor estadísticamente en términos de promedios. Por ejemplo, los fenómenos meteorológicos tales como las fluctuaciones en la temperatura y la presión del aire se caracterizan mejor estadísticamente como procesos aleatorios. Las tensiones de ruido térmico generadas en las resistencias y dispositivos electrónicos son ejemplos adicionales de señales físicas que están modeladas como procesos aleatorios.

Debido a las fluctuaciones aleatorias en tales señales, debemos adoptar un punto de vista estadístico, que trate con las características promedio de señales aleatorias. En particular, la función de autocorrelación de un proceso aleatorio es la media estadística apropiada que se utilizará para caracterizar las señales aleatorias en el dominio del tiempo, y la transformada de Fourier de la función de autocorrelación, que da el espectro de la densidad de potencia, y proporciona la transformación del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia.

Los métodos de estimación del espectro de potencia tienen una historia relativamente larga. Para adquirir una perspectiva histórica, el lector puede consultar los documentos de Robinson (1982) y el libro de Marple (1987). Nosotros vamos a cubrir los métodos de estimación del espectro de potencia clásicos basados en el periodograma, desarrollado originalmente por Schuster (1898) y por Yule (1927), que dieron origen a los modernos métodos paramétricos o basados en modelo. Estos métodos fueron desarrollados posteriormente y aplicados por Walker (1931), Bartlett (1948), Parzen (1957), Blackman y Tukey (1958), Burg (1967), y otros. Describimos también el método de Capon (1969) y los métodos basados en el autoanálisis de la matriz de correlación de datos.

14.1 Estimación de los espectros procedentes de observaciones de duración finita de señales

El problema básico que vamos a considerar en este capítulo es la estimación del espectro de densidad de potencia de una señal procedente de la observación de la señal en un intervalo de tiempo finito. Como veremos, la longitud del registro finito de la secuencia de datos es una limitación importante en la calidad del estimado de espectro de potencia. Cuando se trabaja con señales que son estadísticamente estacionarias, cuando más largo es el registro de datos, mejor es el estimado que podremos extraer de los datos. Por el contrario, si los parámetros estadísticos

de la señal no son estacionarios, no podemos seleccionar un registro de datos arbitrariamente largo para estimar el espectro. En tal caso, la longitud del registro de datos que seleccionemos se determina por la rapidez de las variaciones temporales en los parámetros estadísticos de la señal. Por último, nuestro objetivo es seleccionar un registro de datos tan corto como sea posible que nos permita resolver las características espectrales de las diferentes componentes de señal en el registro de datos que contiene espectros muy poco espaciados.

Uno de los problemas con los que solemos encontrarnos en los métodos de estimación de los espectros de potencia basados en un registro de datos de longitud finita es la distorsión del espectro que estamos intentando estimar. Este problema se produce tanto en el cálculo del espectro de una señal determinística como en la estimación del espectro de potencia de una señal aleatoria. Puesto que es más fácil observar el efecto de la longitud finita del registro de datos sobre una señal determinística, vamos a abordar este caso en primer lugar. A continuación, consideraremos sólo las señales aleatorias y la estimación de sus espectros de potencia.

14.1.1 Cálculo del espectro de densidad de energía

Considere el cálculo del espectro de una señal determinística a partir de una secuencia finita de datos. La secuencia $x(n)$ normalmente es el resultado de muestrear una señal continua en el tiempo $x_a(t)$ a una determinada frecuencia de muestreo uniforme F_s. Nuestro objetivo es obtener un estimado del espectro real de una secuencia de duración finita $x(n)$.

Recuerde que si $x(t)$ es una señal de energía finita, es decir,

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x_a(t)|^2 dt < \infty$$

entonces su transformada de Fourier existe y está dada por

$$X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi Ft} dt$$

A partir del teorema de Parseval, tenemos

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x_a(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X_a(F)|^2 dF \tag{14.1.1}$$

La magnitud $|X_a(F)|^2$ representa la distribución de la energía de la señal como una función de la frecuencia y se conoce como espectro de densidad de potencia de la señal, es decir,

$$S_{xx}(F) = |X_a(F)|^2 \tag{14.1.2}$$

como se ha descrito en el Capítulo 4. Por tanto, la energía total de la señal es simplemente la integral de $S_{xx}(F)$ para todo F [es decir, el área total bajo $S_{xx}(F)$].

También es interesante destacar que $S_{xx}(F)$ puede interpretarse como la transformada de Fourier de otra función, $R_{xx}(\tau)$, conocida como *función de autocorrelación* de la señal de energía finita $x_a(t)$, definida como

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a^*(t) x_a(t+\tau)\, dt \tag{14.1.3}$$

Así, fácilmente se deduce que

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi F\tau}\, d\tau = S_{xx}(F) = |X_a(F)|^2 \tag{14.1.4}$$

de modo que $R_{xx}(\tau)$ y $S_{xx}(F)$ forman una pareja de transformadas de Fourier.

Supongamos ahora que calculamos el espectro de densidad de potencia de la señal $x_a(t)$ a partir de sus muestras tomadas a la frecuencia de F_s muestras por segundo. Para garantizar que no existe *aliasing* espectral resultante del proceso de muestreo, se supone que la señal será prefiltrada, de modo que, para propósitos prácticos, su ancho de banda está limitado a B hercios. Entonces la frecuencia de muestreo F_s se selecciona de manera que $F_s > 2B$.

La versión muestreada de $x_a(t)$ es una secuencia $x(n)$, $-\infty < n < \infty$, que tiene la transformada de Fourier (espectro de tensión)

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

o, lo que es equivalente,

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi fn} \tag{14.1.5}$$

Recuerde que $X(f)$ puede expresarse en términos del espectro de tensión de la señal analógica $x_a(t)$ como

$$X\left(\frac{F}{X(F)}\right) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s) \tag{14.1.6}$$

donde $f = F/F_s$ es la variable de frecuencia normalizada.

En ausencia de *aliasing*, en el rango fundamental $|F| \leq F_s/2$, tenemos

$$X\left(\frac{F}{X(F)}\right) = F_s X_a(F), |F| \leq F_s/2 \tag{14.1.7}$$

Por tanto, el espectro de tensión de la señal muestreada es idéntico al espectro de tensión de la señal analógica. Como consecuencia, el espectro de densidad de potencia de la señal muestreada es

$$S_{xx}\left(\frac{F}{S_{xx}(F)}\right) = \left|X\left(\frac{F}{X(F)}\right)\right|^2 = F_s^2|X_a(F)|^2 \tag{14.1.8}$$

Podemos destacar que la autocorrelación de la señal muestreada, que se define como

$$r_{xx}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)x(n+k) \tag{14.1.9}$$

tiene la transformada de Fourier (teorema de Wiener–Khintchine)

$$S_{xx}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{xx}(k)e^{-j2\pi kf} \tag{14.1.10}$$

Por tanto, el espectro de densidad de potencia puede obtenerse mediante la transformada de Fourier de la autocorrelación de la secuencia $\{x(n)\}$.

Las relaciones anteriores nos llevan a diferenciar entre dos métodos distintos para calcular el espectro de densidad de potencia de una señal $x_a(t)$ a partir de sus muestras $x(n)$. Uno es el *método directo*, que implica el cálculo de la transformada de Fourier de $\{x(n)\}$, y así

$$\begin{aligned} S_{xx}(f) &= |X(f)|^2 \\ &= \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi fn}\right|^2 \end{aligned} \tag{14.1.11}$$

El segundo método es el *método indirecto* porque requiere dos pasos. En primer lugar, la autocorrelación $r_{xx}(k)$ se calcula a partir de $x(n)$ y luego se calcula la transformada de Fourier de la autocorrelación como en (14.1.10) para obtener el espectro de densidad de potencia.

Sin embargo, en la práctica, sólo la secuencia de duración finita $x(n)$, $0 \leq n \leq N-1$, está disponible para calcular el espectro de la señal. En efecto, limitar la duración de la secuencia $x(n)$ a N puntos es equivalente a multiplicar $x(n)$ por una ventana rectangular. Por tanto, tenemos

$$\tilde{x}(n) = x(n)w(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{14.1.12}$$

A partir de nuestra exposición sobre el diseño de filtros FIR basado en el uso de ventanas para limitar la duración de la respuesta al impulso, recordemos que la multiplicación de dos secuencia es equivalente a convolucionar sus espectros de tensión. En consecuencia, la relación correspondiente en el dominio de la frecuencia a (14.1.12) es

$$\begin{aligned} \tilde{X}(f) &= X(f) * W(f) \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} X(\alpha)W(f-\alpha)d\alpha \end{aligned} \tag{14.1.13}$$

Recuerde de nuestra exposición de la Sección 10.2.1 que la convolución de la función de ventana $W(f)$ con $X(f)$ suaviza el espectro $X(f)$, siempre que el espectro $W(f)$ sea relativamente estrecho comparado con $X(f)$. Pero esta condición implica que la ventana $w(n)$ sea lo suficientemente larga (es decir, N debe ser lo suficientemente grande) como para que $W(f)$ sea estrecho comparado con $X(f)$. Incluso si $W(f)$ es estrecho comparado con $X(f)$, la convolución de $X(f)$ con los lóbulos secundarios de $W(f)$ da lugar a la energía del lóbulo secundario $\tilde{X}(f)$, en las bandas de frecuencia donde el espectro real de la señal cumple que $X(f) = 0$. Esta energía del lóbulo secundario se conoce como *fuga*. El siguiente ejemplo ilustra el problema de las fugas.

EJEMPLO 14.1.1

Una señal con el espectro (de tensión)

$$X(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq 0.1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

se convoluciona con la ventana rectangular de longitud $N = 61$. Determine el espectro de $\tilde{X}(f)$ dado por (14.1.13).

Solución. La característica espectral $W(f)$ para la ventana rectangular de longitud $N = 61$ se ilustra en la Figura 10.2.2(a). Observe que la anchura del lóbulo principal de la función de ventana es $\Delta\omega = 4\pi/61$ o $\Delta f = 2/61$, que es estrecha comparada con $X(f)$.

La convolución de $X(f)$ con $W(f)$ se ilustra en la Figura 14.1.1. Observe que dicha energía se ha fugado a la banda de frecuencias $0.1 < |f| \leq 0.5$, donde $X(f) = 0$. Además esto se debe a la anchura del lóbulo principal en $W(f)$, lo que hace que $X(f)$ se disperse fuera del rango $|f| \leq 0.1$. Sin embargo, la energía del lóbulo secundario en $\tilde{X}(f)$ se debe a la presencia de los lóbulos secundarios de $W(f)$, que se convolucionan con $X(f)$. La dispersión de $X(f)$ para $|f| > 0.1$ y los lóbulos secundarios en el rango $0.1 \leq |f| \leq 0.5$ constituyen las fugas.

Como en el caso de diseño del filtro FIR, podemos reducir las fugas del lóbulo secundario seleccionando ventanas que tengan lóbulos secundarios pequeños. Esto implica que las ventanas tienen un corte suave en el dominio del tiempo en lugar del abrupto corte de la ventana rectangular. Aunque tales funciones de ventana reducen las fugas del lóbulo secundario, dan lugar a un aumento del suavizado o dispersión de la característica espectral $X(f)$. Por ejemplo, el uso de la ventana de Blackman de longitud $N = 61$ del Ejemplo 14.1.1 da lugar

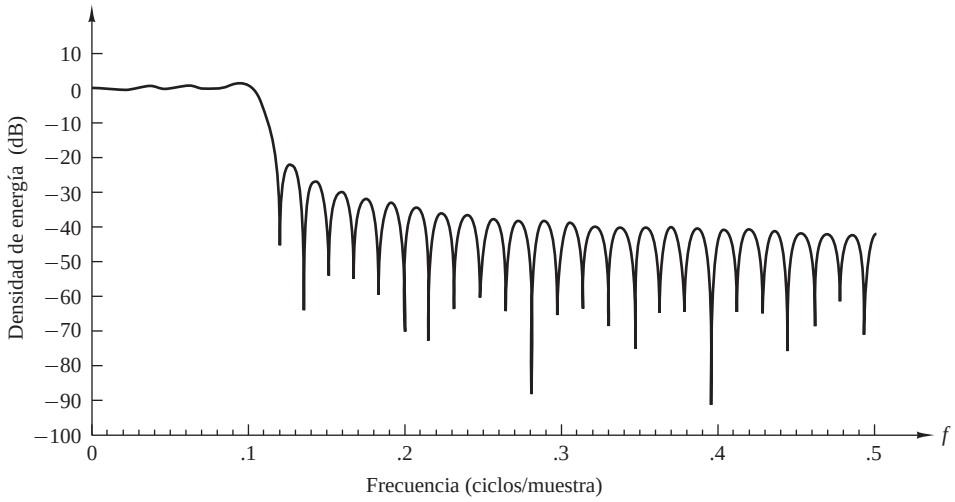


Figura 14.1.1. Espectro obtenido convolucionando una ventana rectangular de longitud $M = 61$ con el espectro paso bajo ideal del Ejemplo 14.1.1.

a la característica espectral $\tilde{X}(f)$ mostrada en la Figura 14.1.2. Las fugas del lóbulo secundario se han reducido notablemente, aunque la anchura espectral ha aumentado aproximadamente en un 50 %.

La dispersión del espectro que se está estimando mediante el uso de ventanas es especialmente un problema cuando deseamos resolver las señales con componentes de frecuencia muy poco espaciadas. Por ejemplo, la señal con la característica espectral $X(f) = X_1(f) + X_2(f)$, como la mostrada en la Figura 14.1.3, no se puede resolver como dos señales separadas a menos que la anchura de la función de ventana sea significativamente más estrecha que la separación de frecuencia Δf. Por tanto, observe que utilizar ventanas de suavizado en el dominio de tiempo reduce las fugas a expensas de una disminución de la resolución en frecuencia.

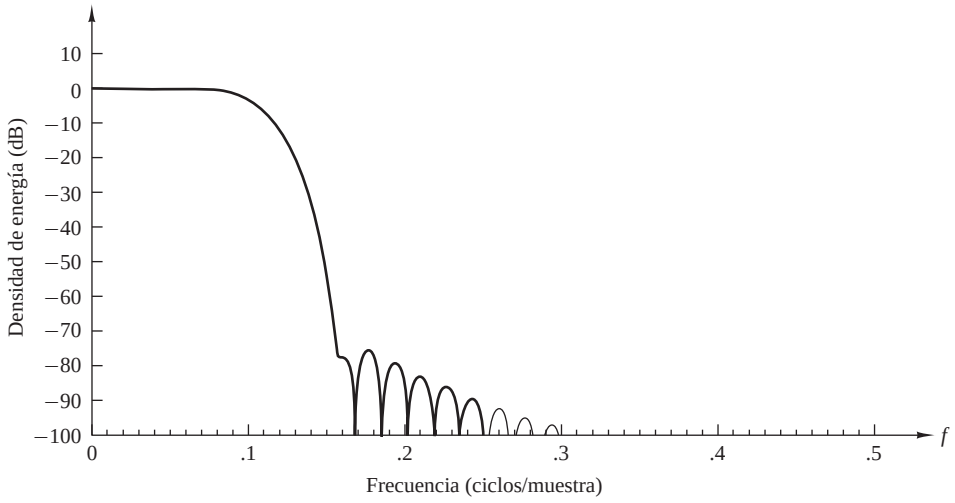


Figura 14.1.2. Espectro obtenido convolucionando una ventana de Blackman de longitud $M = 61$ con el espectro paso bajo ideal en el Ejemplo 14.1.1.

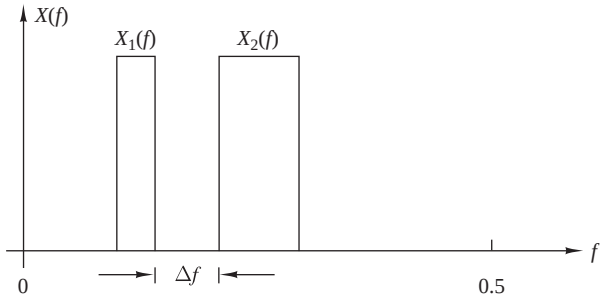


Figura 14.1.3. Dos espectros de señal de banda estrecha.

Está claro a partir de esta exposición que el espectro de densidad de energía de la secuencia de ventana $\{\tilde{x}(n)\}$ es una aproximación del espectro deseado de la secuencia $\{x(n)\}$. La densidad espectral obtenida a partir de $\{\tilde{x}(n)\}$ es

$$S_{\tilde{x}\tilde{x}}(f) = |\tilde{X}(f)|^2 = \left|\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j2\pi fn}\right|^2 \tag{14.1.14}$$

El espectro dado por (14.1.14) puede calcularse numéricamente en el conjunto de N puntos de frecuencia por medio de la DFT. Por tanto,

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j2\pi kn/N} \tag{14.1.15}$$

Así,

$$|\tilde{X}(k)|^2 = S_{\tilde{x}\tilde{x}}(f)|_{f=k/N} = S_{\tilde{x}\tilde{x}}\left(\frac{k}{N}\right) \tag{14.1.16}$$

y por tanto

$$S_{\tilde{x}\tilde{x}}\left(\frac{k}{N}\right) = \left|\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j2\pi kn/N}\right|^2 \tag{14.1.17}$$

que es una versión distorsionada del espectro real $S_{xx}(k/N)$.

14.1.2 Estimación de la autocorrelación y del espectro de potencia de señales aleatorias: el periodograma

Las señales de energía finita consideradas en la sección anterior tienen transformada de Fourier y se caracterizan en el dominio espectral por su espectro de densidad de potencia. Por el contrario, la importante clase de señales caracterizadas como procesos aleatorios estacionarios no tienen energía finita y por tanto no tienen transformada de Fourier. Tales señales tienen una potencia media finita y se caracterizan, por tanto, mediante el *espectro de densidad de potencia*. Si $x(t)$ es un proceso aleatorio estacionario, su función de autocorrelación es

$$\gamma_{xx}(\tau) = E[x^*(t)x(t+\tau)] \tag{14.1.18}$$

donde $E[\cdot]$ designa la media estadística. Luego, por medio del teorema de Wiener–Khintchine, el espectro de densidad de potencia del proceso aleatorio estacionario es la transformada de Fourier de la función de autocorrelación, es decir,

$$\Gamma_{xx}(F) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}(\tau)e^{-j2\pi F\tau}\, dt \tag{14.1.19}$$

En la práctica, trabajamos con una única realización del proceso aleatorio a partir de la cual estimamos el espectro de potencia del proceso. La función de autocorrelación real $\gamma_{xx}(\tau)$ no es conocida y, como consecuencia, no podemos calcular la transformada de Fourier en (14.1.19) para obtener $\Gamma_{xx}(F)$. Por el contrario, a partir de una única realización del proceso aleatorio podemos calcular la función de autocorrelación con respecto a la media temporal

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2T_0}\int_{-T_0}^{T_0} x^*(t)x(t+\tau)\,dt \tag{14.1.20}$$

donde $2T_0$ es el intervalo de observación. Si el proceso aleatorio estacionario es *ergódico* en los momentos de primer y segundo orden (media y función de autocorrelación), luego

$$\begin{aligned}\gamma_{xx}(\tau) &= \lim_{T_0\to\infty} R_{xx}(\tau)\\ &= \lim_{T_0\to\infty}\frac{1}{2T_0}\int_{-T_0}^{T_0} x^*(t)x(t+\tau)\,dt\end{aligned} \tag{14.1.21}$$

Esta relación justifica el uso de la autocorrelación temporal $R_{xx}(\tau)$ como un estimado de la función de autocorrelación estadística $\gamma_{xx}(\tau)$. Además, la transformada de Fourier de $R_{xx}(\tau)$ proporciona un estimado $P_{xx}(F)$ del espectro de la densidad de potencia, es decir,

$$\begin{aligned}P_{xx}(F) &= \int_{-T_0}^{T_0} R_{xx}(\tau)e^{-j2\pi F\tau}\,d\tau\\ &= \frac{1}{2T_0}\int_{-T_0}^{T_0}\left[\int_{-T_0}^{T_0} x^*(t)x(t+\tau)dt\right]e^{-j2\pi F\tau}d\tau\\ &= \frac{1}{2T_0}\left|\int_{-T_0}^{T_0} x(t)e^{-j2\pi Ft}dt\right|^2\end{aligned} \tag{14.1.22}$$

El espectro de densidad de potencia real es el valor esperado de $P_{xx}(F)$ en el límite cuando $T_0 \to \infty$,

$$\begin{aligned}\Gamma_{xx}(F) &= \lim_{T_0\to\infty} E[P_{xx}(F)]\\ &= \lim_{T_0\to\infty} E\left[\frac{1}{2T_0}\left|\int_{-T_0}^{T_0} x(t)e^{-j2\pi Ft}dt\right|^2\right]\end{aligned} \tag{14.1.23}$$

A partir de (14.1.20) y (14.1.22) de nuevo debemos trabajar con dos posibles métodos para calcular $P_{xx}(F)$, el método directo dado por (14.1.22) o el método indirecto, en el que obtenemos $R_{xx}(\tau)$ primero y luego calculamos la transformada de Fourier.

Consideremos la estimación del espectro de densidad de potencia a partir de las muestras de una única realización del proceso aleatorio. En particular, suponemos que $x_a(t)$ se muestrea a una frecuencia $F_s > 2B$, donde B es la frecuencia más alta contenida en el espectro de densidad de potencia del proceso aleatorio. Por tanto, obtenemos una secuencia de duración finita $x(n)$, $0 \le n \le N-1$, muestreando $x_a(t)$. A partir de estas muestras calculamos la secuencia de autocorrelación temporal

$$r'_{xx}(m) = \frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1} x^*(n)x(n+m), \qquad m = 0,1,\ldots,N-1 \tag{14.1.24}$$

y para valores negativos de m tenemos $r'_{xx}(m) = [r'_{xx}(-m)]^*$. A continuación, calculamos la transformada de Fourier

$$P'_{xx}(f) = \sum_{m=-N+1}^{N-1} r'_{xx}(m)e^{-j2\pi fm} \tag{14.1.25}$$

El factor de normalización $N-m$ en (14.1.24) da lugar a un estimado de valor medio

$$E[r'_{xx}(m)] = \frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1} E[x^*(n)x(n+m)] = \gamma_{xx}(m) \tag{14.1.26}$$

donde $\gamma_{xx}(m)$ es la secuencia de autocorrelación real (estadística) de $x(n)$. Por tanto, $r'_{xx}(m)$ es un estimado no desviado de la función de $\gamma_{xx}(m)$. La varianza del estimado $r'_{xx}(m)$ es aproximadamente

$$\text{var}[r'_{xx}(m)] \approx \frac{N}{[N-m]^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[|\gamma_{xx}(n)|^2 + \gamma^*_{xx}(n-m)\gamma_{xx}(n+m)\right] \tag{14.1.27}$$

que es un resultado proporcionado por Jenkins y Watts (1968). Evidentemente,

$$\lim_{N\to\infty} \text{var}[r'_{xx}(m)] = 0 \tag{14.1.28}$$

siempre que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\gamma_{xx}(n)|^2 < \infty$$

Dado que $E[r'_{xx}(m)] = \gamma_{xx}(m)$ y la varianza del estimado converge a cero cuando $N \to \infty$, se dice que el estimado $r'_{xx}(m)$ es *coherente*.

Para valores grandes del parámetro de retardo m, el estimado $r'_{xx}(m)$ dado por (14.1.24) tiene una varianza grande, especialmente cuando m se aproxima a N. Esto se debe al hecho de que se han empleado muy pocos puntos de datos en el estimado para retardos grandes. Como alternativa a (14.1.24) podemos emplear el estimado

$$\begin{aligned} r_{xx}(m) &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-m-1} x^*(n)x(n+m), \qquad 0 \le m \le N-1 \\ r_{xx}(m) &= \frac{1}{N}\sum_{n=|m|}^{N-1} x^*(n)x(n+m), \qquad m = -1,-2,\ldots,1-N \end{aligned} \tag{14.1.29}$$

que presenta una desviación de $|m|\gamma_{xx}(m)/N$, ya que su valor medio es

$$\begin{aligned} E[r_{xx}(m)] &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-m-1} E[x^*(n)x(n+m)] \\ &= \frac{N-|m|}{N}\gamma_{xx}(m) = \left(1-\frac{|m|}{N}\right)\gamma_{xx}(m) \end{aligned} \tag{14.1.30}$$

Sin embargo, este estimado tiene una varianza menor, dada aproximadamente por

$$\text{var}[r_{xx}(m)] \approx \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\gamma_{xx}(n)|^2 + \gamma^*_{xx}(n-m)\gamma_{xx}(n+m)] \tag{14.1.31}$$

Observe que $r_{xx}(m)$ se *desvía asintóticamente*,es decir,

$$\lim_{N\to\infty} E[r_{xx}(m)] = \gamma_{xx}(m) \tag{14.1.32}$$

y su varianza converge a cero cuando $N \to \infty$. Por tanto, el estimado $r_{xx}(m)$ también es un *estimado coherente* de $\gamma_{xx}(m)$.

Utilizaremos el estimado $r_{xx}(m)$ dado por (14.1.29) en nuestro tratamiento de la estimación del espectro de potencia. El correspondiente estimado del espectro de densidad de potencia es

$$P_{xx}(f) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} r_{xx}(m)e^{-j2\pi fm} \tag{14.1.33}$$

Si sustituimos la expresión de $r_{xx}(m)$ dada en (14.1.29) en la Ecuación (14.1.33), el estimado $P_{xx}(f)$ también se puede expresar como

$$P_{xx}(f) = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi fn}\right|^2 = \frac{1}{N}|X(f)|^2 \tag{14.1.34}$$

donde $X(f)$ es la transformada de Fourier de la secuencia de muestras $x(n)$. Esta forma bien conocida del estimado del espectro de densidad de potencia se denomina *periodograma*. Originalmente fue presentado por Schuster (1898) para detectar y medir las "periodicidades ocultas" en los datos.

A partir de (14.1.33), el valor medio del estimado del periodograma $P_{xx}(f)$ es

$$\begin{aligned} E[P_{xx}(f)] &= E\left[\sum_{m=-(N-1)}^{N-1} r_{xx}(m)e^{-j2\pi fm}\right] = \textstyle\sum_{m=-(N-1)}^{N-1} E[r_{xx}(m)]e^{-j2\pi fm} \\ E[P_{xx}(f)] &= \sum_{m=-(N-1)}^{N-1}\left(1-\frac{|m|}{N}\right)\gamma_{xx}(m)e^{-j2\pi fm} \end{aligned} \tag{14.1.35}$$

La interpretación que damos a (14.1.35) es que el valor medio del espectro estimado es la transformada de Fourier de la función de autocorrelación tratada mediante ventanas

$$\tilde{\gamma}_{xx}(m) = \left(1-\frac{|m|}{N}\right)\gamma_{xx}(m) \tag{14.1.36}$$

donde la función de ventana es la ventana de Bartlett (triangular). Por tanto, el valor medio del espectro estimado es

$$E[P_{xx}(f)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{\gamma}_{xx}(m)e^{-j2\pi fm} = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\alpha)W_B(f-\alpha)d\alpha \tag{14.1.37}$$

donde $W_B(f)$ es la característica espectral de la ventana de Bartlett. La relación (14.1.37) ilustra que el valor medio del espectro estimado es la convolución del espectro de densidad de potencia real $\Gamma_{xx}(f)$ con la transformada de Fourier $W_B(f)$ de la ventana de Bartlett. En consecuencia, la media del espectro estimado es una versión suavizada del espectro real y sufre los mismos problemas de fugas espectrales, que se deben al número finito de puntos de datos.

Observe que el espectro estimado está desviado asintóticamente, es decir,

$$\lim_{N\to\infty} E\left[\sum_{m=-(N-1)}^{N-1} r_{xx}(m)e^{-j2\pi fm}\right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}(m)e^{-j2\pi fm} = \Gamma_{xx}(f)$$

Sin embargo, en general, la varianza del estimado $P_{xx}(f)$ no disminuye a cero cuando $N \to \infty$. Por ejemplo, cuando la secuencia de datos es un proceso aleatorio gaussiano, puede demostrarse fácilmente que la varianza es (*véase* el Problema 14.4)

$$\operatorname{var}[P_{xx}(f)] = \Gamma_{xx}^2(f)\left[1+\left(\frac{\operatorname{sen} 2\pi fN}{N \operatorname{sen} 2\pi f}\right)^2\right] \tag{14.1.38}$$

la cual, en el límite cuando $N \to \infty$, se convierte en

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{var}[P_{xx}(f)] = \Gamma_{xx}^2(f) \tag{14.1.39}$$

Por tanto, concluimos que el *periodograma no es un estimado coherente del espectro de densidad de potencia real* (es decir, no converge al espectro de densidad de potencia real).

En resumen, la autocorrelación estimada $r_{xx}(m)$ es un estimado coherente de la función de autocorrelación real $\gamma_{xx}(m)$. Sin embargo, su transformada de Fourier $P_{xx}(f)$, el periodograma, no es un estimado coherente del espectro de densidad de potencia real. Ya hemos mencionado que $P_{xx}(f)$ es un estimado desviado asintóticamente de $\Gamma_{xx}(f)$, pero para una secuencia de duración finita, el valor medio de $P_{xx}(f)$ presenta una desviación, la cual es evidente a partir de (14.1.37) como una distorsión del espectro de la densidad de potencia real. Por tanto, el espectro estimado se ve afectado por los efectos de suavizado y las fugas incluidas en la ventana de Bartlett. En última instancia, el suavizado y las fugas limitan nuestra capacidad para resolver los espectros muy poco espaciados.

Los problemas de fugas y de resolución en frecuencia que acabamos de describir, así como el problema de que el periodograma no es un estimado coherente del espectro de potencia, son la causa de los métodos de estimación del espectro de potencia que se describen en las Secciones 14.2, 14.3 y 14.4. Los métodos descritos en la Sección 14.2 son métodos clásicos no paramétricos, que no plantean ninguna suposición acerca de la secuencia de datos. El énfasis de los métodos clásicos está puesto en la obtención de un estimado coherente del espectro de potencia a través de operaciones de promediado o suavizado realizadas directamente sobre el periodograma o la autocorrelación. Como veremos, el efecto de estas operaciones es reducir la resolución de frecuencia aún más, a la vez que se disminuye la varianza del estimado.

Los métodos de estimación del espectro descritos en la Sección 14.3 están basados en un determinado modelo que define cómo fueron generados los datos. En general, los métodos basados en modelo que se han desarrollado en las últimas décadas proporcionan una resolución significativamente más alta que los métodos clásicos.

En las Secciones 14.4 y 14.5 se describen métodos adicionales. En la Sección 14.4, se abordan métodos basados en bancos de filtros que permiten estimar el espectro de potencia. Los métodos descritos en la Sección 14.5 están basados en la descomposición autovalor/autovector de la matriz de correlación de datos.

14.1.3 Uso de la DFT en la estimación del espectro de potencia

Como se indica en las Ecuaciones (14.1.14) y (14.1.34), el espectro de densidad de potencia estimado $S_{xx}(f)$ y el periodograma $P_{xx}(f)$, respectivamente, pueden calcularse utilizando la DFT, la cual a su vez se calcula eficientemente mediante un algoritmo FFT. Si tenemos N puntos de datos, calculamos como un mínimo la DFT de N puntos. Por ejemplo, el cálculo proporciona muestras del periodograma

$$P_{xx}\left(\frac{k}{N}\right) = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nk/N}\right|^2, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{14.1.40}$$

en las frecuencias $f_k = k/N$.

Sin embargo, en la práctica, un muestreo disperso del espectro como éste no proporciona una buena representación del estimado del espectro continuo $P_{xx}(f)$. Esto puede solucionarse rápidamente evaluando $P_{xx}(f)$ en más frecuencias. Del mismo modo, podemos aumentar de forma efectiva la longitud de la secuencia rellenando con ceros y evaluando después $P_{xx}(f)$ en un conjunto más denso de frecuencias. Luego si aumentamos la longitud de la secuencia de datos a L puntos rellenando con ceros y evaluando la DFT de L puntos, tenemos

$$P_{xx}\left(\frac{k}{L}\right) = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nk/L}\right|^2, \qquad k = 0, 1, \ldots, L-1 \tag{14.1.41}$$

Debemos resaltar que rellenar con ceros y evaluar la DFT en $L > N$ puntos no mejora la resolución en frecuencia del estimado espectral. Simplemente nos proporciona un método para interpolar los valores del espectro medido en más frecuencias. La resolución en frecuencia en el estimado espectral $P_{xx}(f)$ se determina mediante la longitud N del registro de datos.

EJEMPLO 14.1.2

Obtenemos una secuencia de $N = 16$ muestras muestreando una señal analógica que consta de dos componentes en frecuencia. La secuencia discreta en el tiempo resultante es

$$x(n) = \operatorname{sen} 2\pi(0.135)n + \cos 2\pi(0.135 + \Delta f)n, \qquad n = 0, 1, \ldots, 15$$

donde Δf es la separación de frecuencia. Evalúe el espectro de potencia $P(f) = (1/N)|X(f)|^2$ en las frecuencias $f_k = k/L$, $k = 0, 1, \ldots, L-1$, para $L = 8$, 16, 32 y 128 para los valores $\Delta f = 0.06$ y $\Delta f = 0.01$.

Solución. Rellenando con ceros, aumentamos la secuencia de datos para obtener el estimado del espectro de potencia $P_{xx}(k/L)$. Los resultados para $\Delta f = 0.06$ se han dibujado en la Figura 14.1.4. Observe que el relleno de ceros no cambia la resolución, pero tiene el efecto de interpolar el espectro $P_{xx}(f)$. En este caso, la separación de frecuencia Δf es lo suficientemente grande como para que las dos componentes en frecuencia sean resolubles.

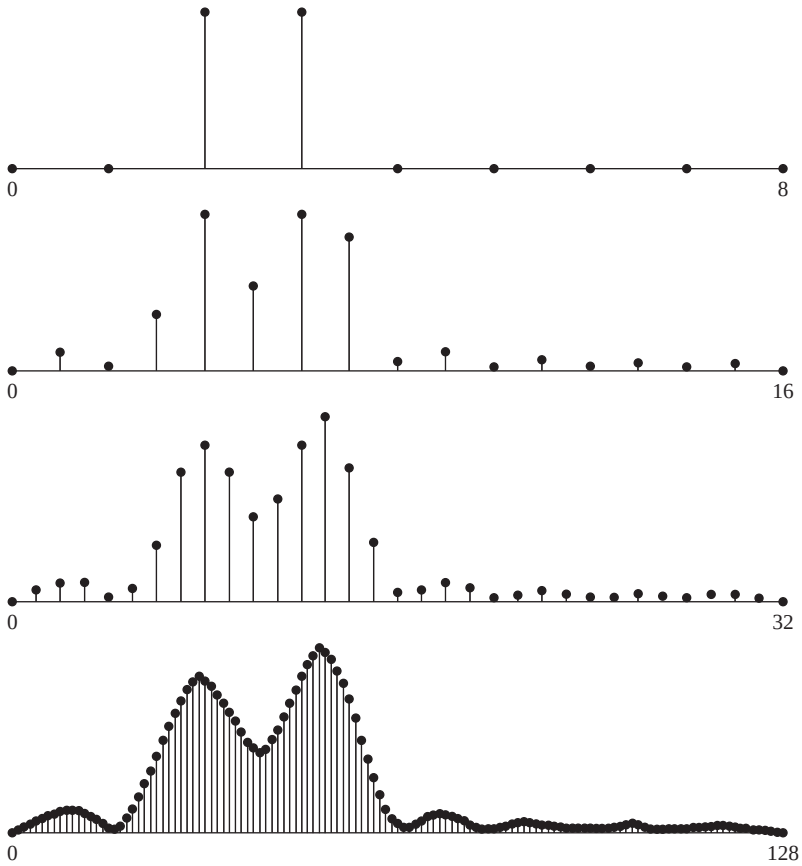


Figura 14.1.4. Espectros de dos sinusoides con separación de frecuencia $\Delta f = 0.06$.

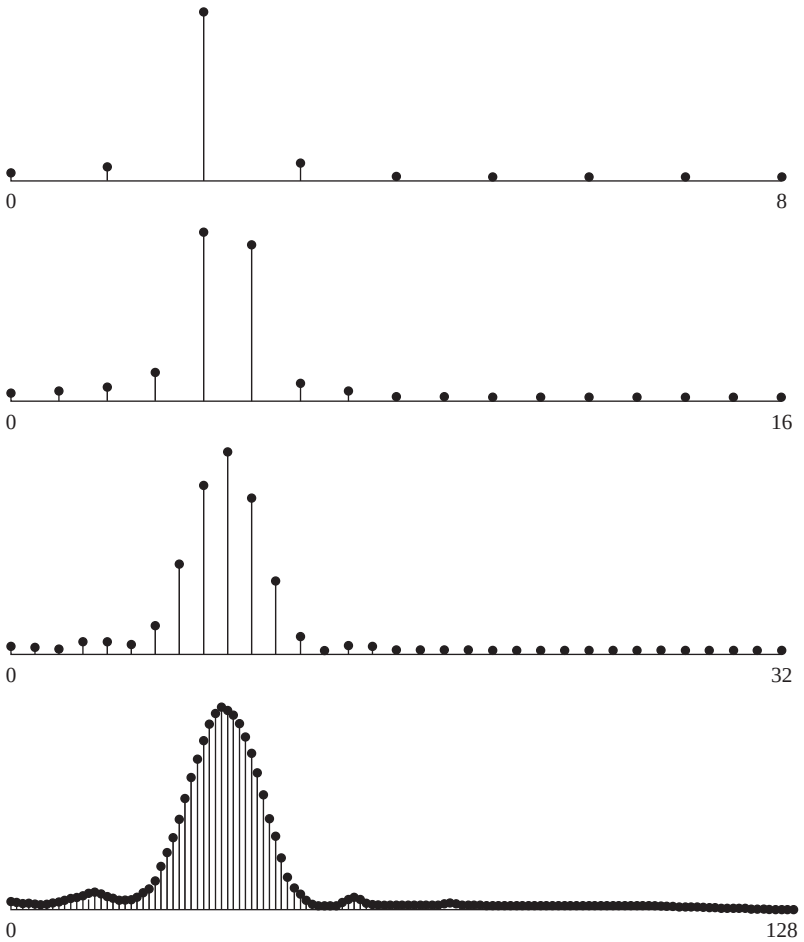


Figura 14.1.5. Espectros de dos sinusoides con separación de frecuencia $\Delta f = 0.01$.

Los estimados espectrales para $\Delta f = 0.01$ se muestran en la Figura 14.1.5. En este caso, las dos componentes espectrales no son resolubles. De nuevo, el efecto del relleno con ceros es proporcionar más interpolación, lo que nos permite disponer de una mejor imagen del espectro estimado, aunque esto no mejora la resolución en frecuencia.

Cuando sólo se necesitan unos pocos puntos del periodograma, el algoritmo de Goertzel descrito en el Capítulo 8 puede proporcionar un cálculo más eficiente. Puesto que el algoritmo de Goertzel ha sido interpretado como un método de filtrado lineal para calcular la DFT, es evidente que el estimado del periodograma puede obtenerse pasando la señal a través de un banco de filtros sintonizados en paralelo y elevando al cuadrado sus salidas (*véase* el Problema 14.5).

14.2 Métodos no paramétricos para la estimación del espectro de potencia

Los métodos de estimación del espectro de potencia descritos en esta sección son los métodos clásicos desarrollados por Bartlett (1948), Blackman y Tukey (1958), y Welch (1967). Estos métodos no hacen ninguna suposición acerca de cómo fueron generados los datos y, por tanto, se denominan métodos *no paramétricos*.

Dado que los estimados se basan por completo en un registro finito de datos, la resolución en frecuencia de estos métodos es, en el mejor de los casos, igual a la anchura espectral de la ventana rectangular de longitud N, que es aproximadamente $1/N$ en los puntos a -3-dB. Debemos ser más precisos al especificar la resolución en frecuencia de los métodos especificados. Todas las técnicas de estimación descritas en esta sección disminuyen la resolución en frecuencia con el fin de reducir la varianza en el estimado espectral.

En primer lugar, describimos los estimados y obtenemos la media y la varianza de cada uno. En la Sección 14.2.4 se proporciona una comparativa de los tres métodos. Aunque los estimados espectrales se expresan como una función de la variable continua en frecuencia f, en la práctica, los estimados se calculan en frecuencias discretas mediante el algoritmo FFT. Los requisitos de cálculo basados en algoritmos FFT se abordan en la Sección 14.2.5.

14.2.1 El método de Bartlett: promediado de periodogramas

El método de Bartlett para reducir la varianza en el periodograma es un proceso de tres pasos. En primer lugar, la secuencia de N puntos se subdivide en K segmentos no solapados, donde cada segmento tiene una longitud M. Esto da como resultado K segmentos de datos

$$x_i(n) = x(n+iM), \qquad \begin{array}{c} i = 0,1,\ldots,K-1 \\ n = 0,1,\ldots,M-1 \end{array} \tag{14.2.1}$$

Para cada segmento, calculamos el periodograma

$$P_{xx}^{(i)}(f) = \frac{1}{M}\left|\sum_{n=0}^{M-1} x_i(n)e^{-j2\pi fn}\right|^2, \qquad i = 0,1,\ldots,K-1 \tag{14.2.2}$$

Por último, promediamos los periodogramas para los K segmentos para obtener el estimado del espectro de potencia de Bartlett [Bartlett (1948)]

$$P_{xx}^{B}(f) = \frac{1}{K}\sum_{i=0}^{K-1} P_{xx}^{(i)}(f) \tag{14.2.3}$$

Las propiedades estadísticas de este estimado pueden obtenerse fácilmente. En primer lugar, el valor medio es

$$\begin{aligned} E[P_{xx}^{B}(f)] &= \frac{1}{K}\sum_{i=0}^{K-1} E[P_{xx}^{(i)}(f)] \\ &= E[P_{xx}^{(i)}(f)] \end{aligned} \tag{14.2.4}$$

A partir de (14.1.35) y (14.1.37) obtenemos el valor esperado para el periodograma como

$$\begin{aligned} E[P_{xx}^{(i)}(f)] &= \sum_{m=-(M-1)}^{M-1}\left(1-\frac{|m|}{M}\right)\gamma_{xx}(m)e^{-j2\pi fm} \\ &= \frac{1}{M}\int_{-1/2}^{1/2}\Gamma_{xx}(\alpha)\left(\frac{\operatorname{sen}\pi(f-\alpha)M}{\operatorname{sen}\pi(f-\alpha)}\right)^2 d\alpha \end{aligned} \tag{14.2.5}$$

donde

$$W_B(f) = \frac{1}{M}\left(\frac{\operatorname{sen}\pi fM}{\operatorname{sen}\pi f}\right)^2 \tag{14.2.6}$$

es la característica en frecuencia de la ventana de Bartlett

$$w_B(n) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|m|}{M}, & |m| \leq M-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{14.2.7}$$

A partir de (14.2.5) observe que el espectro real ahora se ha convolucionado con la característica en frecuencia $W_B(f)$ de la ventana de Bartlett. El efecto de reducir la longitud de los datos de N puntos a $M = N/K$ da lugar a una ventana cuya anchura espectral se ha incrementado en un factor de K. En consecuencia, la resolución en frecuencia se ha reducido en un factor K.

A cambio de esta reducción en la resolución, hemos reducido la varianza. La varianza del estimado de Bartlett es

$$\begin{aligned} \text{var}[P_{xx}^B(f)] &= \frac{1}{K^2}\sum_{i=0}^{K-1} \text{var}[P_{xx}^{(i)}(f)] \\ &= \frac{1}{K}\text{var}[P_{xx}^{(i)}(f)] \end{aligned} \tag{14.2.8}$$

Si utilizamos (14.1.38) en (14.2.8), obtenemos

$$\text{var}[P_{xx}^B(f)] = \frac{1}{K}\Gamma_{xx}^2(f)\left[1 + \left(\frac{\text{sen}\, 2\pi f M}{M\, \text{sen}\, 2\pi f}\right)^2\right] \tag{14.2.9}$$

Por tanto, la varianza del estimado del espectro de potencia de Bartlett se ha reducido por el factor K.

14.2.2 Método de Welch: promediado de periodogramas modificados

Welch (1967) realizó dos modificaciones básicas al método de Bartlett. En primer lugar, permitió que los segmentos de datos se solaparan. Por tanto, los segmentos de datos pueden representarse como

$$x_i(n) = x(n + iD), \qquad \begin{aligned} n &= 0, 1, \ldots, M-1 \\ i &= 0, 1, \ldots, L-1 \end{aligned} \tag{14.2.10}$$

donde iD es el punto de partida de la secuencia i. Observe que si $D = M$, los segmentos no se solapan y el número L de segmentos de datos es idéntico al número K en el método de Bartlett. Sin embargo, si $D = M/2$, existe un 50 % de solapamientos entre segmentos de datos sucesivos y se obtienen $L = 2K$ segmentos. Alternativamente, podemos formar K segmentos de datos de longitud $2M$ cada uno.

La segunda modificación hecha por Welch al método de Bartlett consiste en enventanar los segmentos de datos antes de calcular el periodograma. El resultado es un periodograma "modificado"

$$\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f) = \frac{1}{MU}\left|\sum_{n=0}^{M-1} x_i(n)w(n)e^{-j2\pi fn}\right|^2, \qquad i = 0, 1, \ldots, L-1 \tag{14.2.11}$$

donde U es un factor de normalización para la potencia de la función de ventana y se selecciona como

$$U = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} w^2(n) \tag{14.2.12}$$

El estimado del espectro de potencia de Welch es la media de estos periodogramas modificados, es decir,

$$P_{xx}^W(f) = \frac{1}{L}\sum_{i=0}^{L-1} \tilde{P}_{xx}^{(i)}(f) \tag{14.2.13}$$

El valor medio del estimado de Welch es

$$\begin{aligned} E[P_{xx}^{W}(f)] &= \frac{1}{L}\sum_{i=0}^{L-1} E[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)] \\ &= E[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)] \end{aligned} \tag{14.2.14}$$

Pero el valor esperado del periodograma modificado es

$$\begin{aligned} E[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)] &= \frac{1}{MU}\sum_{n=0}^{M-1}\sum_{m=0}^{M-1} w(n)w(m)E[x_i(n)x_i^*(m)]e^{-j2\pi f(n-m)} \\ &= \frac{1}{MU}\sum_{n=0}^{M-1}\sum_{m=0}^{M-1} w(n)w(m)\gamma_{xx}(n-m)e^{-j2\pi f(n-m)} \end{aligned} \tag{14.2.15}$$

Puesto que

$$\gamma_{xx}(n) = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\alpha)e^{j2\pi\alpha n}d\alpha \tag{14.2.16}$$

sustituyendo la expresión de $\gamma_{xx}(n)$ dada en (14.2.16) en (14.2.15), obtenemos

$$\begin{aligned} E[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)] &= \frac{1}{MU}\int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\alpha)\left[\sum_{n=0}^{M-1}\sum_{m=0}^{M-1} w(n)w(m)e^{-j2\pi(n-m)(f-\alpha)}\right]d\alpha \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\alpha)W(f-\alpha)d\alpha \end{aligned} \tag{14.2.17}$$

donde, por definición,

$$W(f) = \frac{1}{MU}\left|\sum_{n=0}^{M-1} w(n)e^{-j2\pi fn}\right|^2 \tag{14.2.18}$$

El factor de normalización U garantiza que

$$\int_{-1/2}^{1/2} W(f)df = 1 \tag{14.2.19}$$

La varianza del estimado de Welch es

$$\mathrm{var}[P_{xx}^{W}(f)] = \frac{1}{L^2}\sum_{i=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{L-1} E[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)\tilde{P}_{xx}^{(j)}(f)] - \{E[P_{xx}^{W}(f)]\}^2 \tag{14.2.20}$$

En el caso de que no se produzca ningún solapamiento entre segmentos de datos sucesivos $(L = K)$, Welch demostró que

$$\begin{aligned} \mathrm{var}[P_{xx}^{W}(f)] &= \frac{1}{L}\mathrm{var}[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)] \\ &\approx \frac{1}{L}\Gamma_{xx}^2(f) \end{aligned} \tag{14.2.21}$$

En el caso de un solapamiento del 50 % entre segmentos de datos sucesivos $(L = 2K)$, la varianza del estimado del espectro de potencia de Welch con la ventana de Bartlett (triangular), también obtenida en los estudios de Welch, es

$$\mathrm{var}[P_{xx}^{W}(f)] \approx \frac{9}{8L}\Gamma_{xx}^2(f) \tag{14.2.22}$$

Aunque hemos considerado sólo la ventana triangular en los cálculos de la varianza, pueden emplearse otras funciones de ventana. En general, éstas nos proporcionarán una varianza diferente. Además, es posible variar el solapamiento del segmento de datos más o menos del 50 % que se ha considerado en esta sección con el fin de mejorar las características relevantes del estimado.

14.2.3 Método de Blackman y Tukey: suavizado del periodograma

Blackman y Tukey (1958) propusieron y analizaron el método en el que la secuencia de autocorrelación de las muestras se hace pasar a través de una ventana en primer lugar y a continuación se le aplica la transformada de Fourier para proporcionar el estimado del espectro de potencia. El razonamiento para aplicar una función de ventana a la secuencia de autocorrelación estimada $r_{xx}(m)$ es que, para retardos largos, los estimados son menos fiables porque se emplea un número menor $(N-m)$ de puntos de datos en los mismos. Para valores de m próximos a N, la varianza de estos estimados es muy alta y, por tanto, estos estimados deben tener un peso menor en la formación del espectro de potencia estimado. Por tanto, el estimado de Blackman–Tukey es

$$P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f) = \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} r_{xx}(m)w(m)e^{-j2\pi fm} \tag{14.2.23}$$

donde la función de ventana $w(n)$ tiene una longitud de $2M-1$ y es cero para $|m| \geq M$. Con esta definición para $w(n)$, los límites del sumatorio de la Ecuación (14.2.23) pueden ampliarse a $(-\infty,\infty)$. Por tanto, la expresión equivalente en el dominio de la frecuencia para (14.2.23) es la convolución integral

$$P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f) = \int_{-1/2}^{1/2} P_{xx}(\alpha)W(f-\alpha)d\alpha \tag{14.2.24}$$

donde $P_{xx}(f)$ es el periodograma. Está claro a partir de (14.2.24) que el efecto de la ventana sobre la autocorrelación es suavizar el estimado del periodograma, de modo que disminuya la varianza del estimado a costa de reducir la resolución.

La secuencia de ventana $w(n)$ debe ser simétrica (par) alrededor de $m=0$, para garantizar que el estimado del espectro de potencia es real. Además, es deseable seleccionar el espectro de la ventana para que sea no negativo, es decir,

$$W(f) \geq 0, \qquad |f| \leq 1/2 \tag{14.2.25}$$

Esta condición asegura que $P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f) \geq 0$ para $|f| \leq 1/2$, que es una propiedad deseable para cualquier estimado del espectro de potencia. Sin embargo, debemos indicar que algunas de las funciones de ventana que hemos presentado no satisfacen esta condición. Por ejemplo, a pesar de sus bajos niveles en el lóbulo secundario, las ventanas de Hamming y Hann (o Hanning) no satisfacen la propiedad dada en (14.2.25) y, por tanto, pueden dar lugar a estimados del espectro negativos en algunas partes del rango de frecuencia.

El valor esperado del estimado del espectro de potencia según el método de Blackman–Tukey es

$$E[P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} E[P_{xx}(\alpha)]W(f-\alpha)d\alpha \tag{14.2.26}$$

donde a partir de (14.1.37), tenemos

$$E[P_{xx}(\alpha)] = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta)W_B(\alpha-\theta)d\theta \tag{14.2.27}$$

y $W_B(f)$ es la transformada de Fourier de la ventana de Bartlett. Sustituyendo (14.2.27) en (14.2.26) se obtiene la doble integral de convolución

$$E[P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f)] = \int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta)W_B(\alpha-\theta)W(f-\alpha)d\alpha d\theta \tag{14.2.28}$$

De manera similar, trabajando en el dominio del tiempo, el valor esperado del estimado del espectro de potencia de Blackman–Tukey es

$$\begin{aligned} E[P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f)] &= \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} E[r_{xx}(m)]w(m)e^{-j2\pi fm} \\ &= \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \gamma_{xx}(m)w_B(m)w(m)e^{-j2\pi fm} \end{aligned} \tag{14.2.29}$$

donde la ventana de Bartlett es

$$w_B(m) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|m|}{N}, & |m| < N \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{14.2.30}$$

Evidentemente, deberíamos seleccionar la longitud de la ventana para $w(n)$, tal que $M << N$, es decir, $w(n)$ debe ser más estrecho que $w_B(m)$ para proporcionar un suavizado adicional del periodograma. Bajo esta condición, (14.2.28) se transforma en

$$E[P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f)] \approx \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta)W(f-\theta)d\theta \tag{14.2.31}$$

ya que

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} W_B(\alpha-\theta)W(f-\alpha)d\alpha &= \int_{-1/2}^{1/2} W_B(\alpha)W(f-\theta-\alpha)d\alpha \\ &\approx W(f-\theta) \end{aligned} \tag{14.2.32}$$

La varianza del estimado del espectro de potencia de Blackman–Tukey es

$$\mathrm{var}[P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f)] = E\{[P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f)]^2\} - \{E[P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f)]\}^2 \tag{14.2.33}$$

donde la media puede aproximarse como en (14.2.31). El momento de segundo orden en la Ecuación (14.2.33) es

$$E\{[P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f)]^2\} = \int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2} E[P_{xx}(\alpha)P_{xx}(\theta)]W(f-\alpha)W(f-\theta)d\alpha d\theta \tag{14.2.34}$$

Suponiendo que el proceso aleatorio es gaussiano (*véase* el Problema 14.5), tenemos que

$$E[P_{xx}(\alpha)P_{xx}(\theta)] = \Gamma_{xx}(\alpha)\Gamma_{xx}(\theta)\left\{1 + \left[\frac{\operatorname{sen}\pi(\theta+\alpha)N}{N\operatorname{sen}\pi(\theta+\alpha)}\right]^2 + \left[\frac{\operatorname{sen}\pi(\theta-\alpha)N}{N\operatorname{sen}\pi(\theta-\alpha)}\right]^2\right\} \tag{14.2.35}$$

Sustituyendo (14.2.35) en (14.2.34) tenemos

$$\begin{aligned} E\{[P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f)]^2\} &= \left[\int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta)W(f-\theta)d\theta\right]^2 \\ &\quad + \int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\alpha)\Gamma_{xx}(\theta)W(f-\alpha)W(f-\theta) \\ &\quad \times \left\{\left[\frac{\operatorname{sen}\pi(\theta+\alpha)N}{N\operatorname{sen}\pi(\theta+\alpha)}\right]^2 + \left[\frac{\operatorname{sen}\pi(\theta-\alpha)N}{N\operatorname{sen}\pi(\theta-\alpha)}\right]^2\right\} d\alpha\, d\theta \end{aligned} \tag{14.2.36}$$

El primer término de (14.2.36) es simplemente la media al cuadrado de $P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f)$, la cual se va a sustraer de acuerdo con (14.2.33). Esto deja el segundo término de (14.2.36), que es la varianza. Para el caso en que $N \gg M$, las funciones $\operatorname{sen}\pi(\theta+\alpha)N/N\operatorname{sen}\pi(\theta+\alpha)$ y $\operatorname{sen}\pi(\theta-\alpha)N/N\operatorname{sen}\pi(\theta-\alpha)$ son relativamente estrechas comparadas con $W(f)$ en las vecindades de $\theta=-\alpha$ y $\theta=\alpha$, respectivamente. Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_{-1/2}^{1/2}\Gamma_{xx}(\theta)W(f-\theta)\left\{\left[\frac{\operatorname{sen}\pi(\theta+\alpha)N}{N\operatorname{sen}\pi(\theta+\alpha)}\right]^2+\left[\frac{\operatorname{sen}\pi(\theta-\alpha)N}{N\operatorname{sen}\pi(\theta-\alpha)}\right]^2\right\}d\theta \\ \approx \frac{\Gamma_{xx}(-\alpha)W(f+\alpha)+\Gamma_{xx}(\alpha)W(f-\alpha)}{N}\end{aligned} \tag{14.2.37}$$

Con esta aproximación, la varianza de $P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f)$ es

$$\begin{aligned}\operatorname{var}[P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f)] &\approx \frac{1}{N}\int_{-1/2}^{1/2}\Gamma_{xx}(\alpha)W(f-\alpha)[\Gamma_{xx}(-\alpha)W(f+\alpha)+\Gamma_{xx}(\alpha)W(f-\alpha)]d\alpha \\ &\approx \frac{1}{N}\int_{-1/2}^{1/2}\Gamma_{xx}^2(\alpha)W^2(f-\alpha)d\alpha\end{aligned} \tag{14.2.38}$$

donde en el último paso hemos hecho la aproximación

$$\int_{-1/2}^{1/2}\Gamma_{xx}(\alpha)\Gamma_{xx}(-\alpha)W(f-\alpha)W(f+\alpha)d\alpha \approx 0 \tag{14.2.39}$$

Realizamos una aproximación más en (14.2.38). Cuando $W(f)$ es estrecho comparado con el espectro de potencia real $\Gamma_{xx}(f)$, la Ecuación (14.2.38) se aproxima aún más como

$$\begin{aligned}\operatorname{var}[P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f)] &\approx \Gamma_{xx}^2(f)\left[\frac{1}{N}\int_{-1/2}^{1/2}W^2(\theta)d\theta\right] \\ &\approx \Gamma_{xx}^2(f)\left[\frac{1}{N}\sum_{m=-(M-1)}^{M-1}w^2(m)\right]\end{aligned} \tag{14.2.40}$$

14.2.4 Prestaciones de los estimadores no paramétricos del espectro de potencia

En esta sección comparamos la calidad de los estimados del espectro de potencia de Bartlett, Welch, y Blackman y Tukey. Como medida de la calidad, utilizamos la relación de su varianza respecto de la media al cuadrado del estimado del espectro de potencia, es decir,

$$Q_A = \frac{\{E[P_{xx}^A(f)]\}^2}{var[P_{xx}^A(f)]} \tag{14.2.41}$$

donde $A = B, W$, o BT son los tres estimados del espectro de potencia. El recíproco de esta magnitud, denominado *variabilidad*, también se puede emplear como medida de rendimiento.

Como referencia, el periodograma tiene la media y la varianza siguientes:

$$E[P_{xx}(f)] = \int_{-1/2}^{1/2}\Gamma_{xx}(\theta)W_B(f-\theta)d\theta \tag{14.2.42}$$

$$\operatorname{var}[P_{xx}(f)] = \Gamma_{xx}^2(f)\left[1+\left(\frac{\operatorname{sen}2\pi fN}{N\operatorname{sen}2\pi f}\right)^2\right] \tag{14.2.43}$$

donde

$$W_B(f) = \frac{1}{N}\left(\frac{\operatorname{sen}\pi f N}{\operatorname{sen}\pi f}\right)^2 \tag{14.2.44}$$

Para N grande (es decir, $N \to \infty$),

$$\begin{gathered} E[P_{xx}(f)] \to \Gamma_{xx}(f), \quad \int_{-1/2}^{1/2} W_B(\theta)d\theta = w_B(0)\Gamma_{xx}(f) = \Gamma_{xx}(f) \\ \operatorname{var}[P_{xx}(f)] \to \Gamma_{xx}^2(f) \end{gathered} \tag{14.2.45}$$

Por tanto, como se ha indicado previamente, el periodograma es un estimado asintóticamente insesgado del espectro de potencia, pero no es coherente porque su varianza no tiende a cero cuando N tiende a infinito.

Asintóticamente, el periodograma se caracteriza por el factor de calidad

$$Q_P = \frac{\Gamma_{xx}^2(f)}{\Gamma_{xx}^2(f)} = 1 \tag{14.2.46}$$

El hecho de que Q_P sea fijo e independiente de la longitud de los datos N es otra indicación de la mala calidad de este estimado.

Estimado del espectro de potencia de Bartlett. La media y la varianza del estimado del espectro de potencia de Bartlett

$$E[P_{xx}^B(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta)W_B(f-\theta)d\theta \tag{14.2.47}$$

$$\operatorname{var}[P_{xx}^B(f)] = \frac{1}{K}\Gamma_{xx}^2(f)\left[1 + \left(\frac{\operatorname{sen}2\pi f M}{M\operatorname{sen}2\pi f}\right)^2\right] \tag{14.2.48}$$

y

$$W_B(f) = \frac{1}{M}\left(\frac{\operatorname{sen}\pi f M}{\operatorname{sen}\pi f}\right)^2 \tag{14.2.49}$$

Cuando $N \to \infty$ y $M \to \infty$, y manteniéndose $K = N/M$ fijo, tenemos que

$$\begin{gathered} E[P_{xx}^B(f)] \to \Gamma_{xx}(f), \quad \int_{-1/2}^{1/2} W_B(f)df = \Gamma_{xx}(f)w_B(0) = \Gamma_{xx}(f) \\ \operatorname{var}[P_{xx}^B(f)] \to \frac{1}{K}\Gamma_{xx}^2(f) \end{gathered} \tag{14.2.50}$$

Observe que el estimado del espectro de potencia de Bartlett es asintóticamente insesgado y si se permite que K aumente al aumentar N, el estimado también es coherente. Por tanto, asintóticamente, este estimado se caracteriza por el factor de calidad

$$Q_B = K = \frac{N}{M} \tag{14.2.51}$$

La resolución en frecuencia del estimado de Bartlett, medido tomando la anchura a 3-dB del lóbulo principal de la ventana rectangular, es

$$\Delta f = \frac{0.9}{M} \tag{14.2.52}$$

Por tanto, $M = 0.9/\Delta f$ y el factor de calidad se transforma en

$$Q_B = \frac{N}{0.9/\Delta f} = 1.1 N \Delta f \tag{14.2.53}$$

Estimado del espectro de potencia de Welch. La media y la varianza del estimado del espectro de potencia de Welch son

$$E[P_{xx}^W(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta) W(f-\theta) d\theta \tag{14.2.54}$$

donde

$$W(f) = \frac{1}{MU} \left| \sum_{n=0}^{M-1} w(n) e^{-j2\pi f n} \right|^2 \tag{14.2.55}$$

y

$$\operatorname{var}[P_{xx}^W(f)] = \begin{cases} \dfrac{1}{L}\Gamma_{xx}^2(f), & \text{sin solapamiento} \\ \dfrac{9}{8L}\Gamma_{xx}^2(f), & \text{para un 50 \% de solapamiento y ventana triangular} \end{cases} \tag{14.2.56}$$

Cuando $N \to \infty$ y $M \to \infty$, la media converge a

$$E[P_{xx}^W(f)] \to \Gamma_{xx}(f) \tag{14.2.57}$$

y la varianza converge hacia cero, por lo que el estimado es coherente.

Bajo las dos condiciones dadas por (14.2.56), el factor de calidad es

$$Q_W = \begin{cases} L = \dfrac{N}{M}, & \text{sin solapamiento} \\ \dfrac{8L}{9} = \dfrac{16N}{9M}, & \text{para un 50 \% de solapamiento y ventana triangular} \end{cases} \tag{14.2.58}$$

Por otro lado, la anchura espectral de la ventana triangular en el punto a 3-dB es

$$\Delta f = \frac{1.28}{M} \tag{14.2.59}$$

En consecuencia, el factor de calidad expresado en términos de Δf y N es

$$Q_W = \begin{cases} 0.78 N \Delta f, & \text{sin solapamiento} \\ 1.39 N \Delta f, & \text{para un 50 \% de solapamiento y ventana triangular} \end{cases} \tag{14.2.60}$$

Estimado del espectro de potencia de Blackman–Tukey. La media y la varianza de este estimado se aproximan como sigue

$$\begin{aligned} E[P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f)] &\approx \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta) W(f-\theta) d\theta \\ \operatorname{var}[P_{xx}^{\mathrm{BT}}(f)] &\approx \Gamma_{xx}^2(f) \left[\frac{1}{N} \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} w^2(m) \right] \end{aligned} \tag{14.2.61}$$

Estimado	Factor de calidad
Bartlett	$1.11N\Delta f$
Welch (50 % de solapamiento)	$1.39N\Delta f$
Blackman–Tukey	$2.34N\Delta f$

Tabla 14.1. Calidad de los estimados del espectro de potencia.

donde $w(m)$ es la secuencia de ventana utilizada para afilar la secuencia de autocorrelación estimada. Para las ventanas rectangular y de Bartlett (triangular) tenemos

$$\frac{1}{N}\sum_{n=-(M-1)}^{M-1} w^2(n) = \begin{cases} 2M/N, & \text{ventana rectangular} \\ 2M/3N, & \text{ventana triangular} \end{cases} \tag{14.2.62}$$

Es evidente a partir de (14.2.61) que el valor medio del estimado es asintóticamente insesgado. Su factor de calidad para la ventana triangular es

$$Q_{\mathrm{BT}} = 1.5\frac{N}{M} \tag{14.2.63}$$

Como la longitud de la ventana es $2M-1$, la resolución en frecuencia mediada en los puntos a 3-dB es

$$\Delta f = \frac{1.28}{2M} = \frac{0.64}{M} \tag{14.2.64}$$

y, por tanto,

$$Q_{\mathrm{BT}} = \frac{1.5}{0.64}N\Delta f = 2.34N\Delta f \tag{14.2.65}$$

Estos resultados se resumen en la Tabla 14.1. Es evidente a partir de los resultados que hemos obtenido que los estimados del espectro de potencia de Welch y Blackman–Tukey son algo mejores que el estimado de Bartlett. Sin embargo, las diferencias en lo que se refiere a las prestaciones son relativamente poco significativas. Lo importante es que el factor de calidad aumenta cuando aumenta la longitud N de los datos. Este comportamiento característico no es compartido por el estimado del periodograma. Además, el factor de calidad depende del producto de la longitud de los datos N por la resolución en frecuencia $Delta f$. Para obtener un determinado nivel de calidad, puede disminuirse Δf (aumentar la resolución de frecuencia) aumentando la longitud N de los datos, y viceversa.

14.2.5 Requisitos de cálculo de los estimados no paramétricos del espectro de potencia

El otro aspecto importante de los estimados no paramétricos del espectro de potencia son los requisitos de cálculo. Para esta comparación, suponemos que los estimados se basan en una cantidad fija de datos N y una resolución especificada Δf. Se supone que se emplea el algoritmo FFT de raíz 2 para todos los cálculos. Sólo contabilizaremos el número de multiplicaciones complejas necesarias para calcular el estimado del espectro de potencia.

Estimado del espectro de potencia de Bartlett.

$$\text{Longitud FFT} = M = 0.9/\Delta f$$

$$\text{Número de transformadas FFT} = \frac{N}{M} = 1.11N\Delta f$$

$$\text{Número de operaciones} = \frac{N}{M}\left(\frac{M}{2}\log_2 M\right) = \frac{N}{2}\log_2 \tfrac{0.9}{\Delta f}$$

Estimado del espectro de potencia de Welch (50 % de solapamiento).

$$\text{Longitud FFT} = M = 1.28/\Delta f$$
$$\text{Numero de transformadas FFT} = \frac{2N}{M} = 1.56N\Delta f$$
$$\text{Número de operaciones} = \frac{2N}{M}\left(\frac{M}{2}\log_2 M\right) = N\log_2\frac{1.28}{\Delta f}$$

Además de las $2N/M$ transformadas FFT, son necesarias multiplicaciones adicionales para enventanar los datos. Cada registro de datos requiere M multiplicaciones. Por tanto, el número total de operaciones es

$$\text{Total de operaciones} = 2N + N\log_2\frac{1.28}{\Delta f} = N\log_2\frac{5.12}{\Delta f}$$

Estimado del espectro de potencia de Blackman–Tukey. En el método de Blackman–Tukey, la autocorrelación $r_{xx}(m)$ puede calcularse de forma eficiente a través del algoritmo FFT. Sin embargo, si la cantidad de puntos de datos es grande, puede no ser posible calcular una DFT N puntos. Por ejemplo, podemos tener $N = 10^5$ puntos de datos pero sólo la capacidad de realizar transformadas DFT de 1024 puntos. Dado que la secuencia de autocorrelación se enventana a $2M-1$ puntos, donde $M \ll N$, es posible calcular los $2M-1$ puntos deseados de $r_{xx}(m)$ segmentando los datos en $K = N/2M$ registros y luego calculando las DFT de $2M$ puntos y una IDFT de $2M$ puntos mediante el algoritmo FFT. Rader (1970) describe un método que permite llevar a cabo este cálculo (*véase* el Problema 14.7).

Si basamos la complejidad de cálculo del método de Blackman–Tukey en este método, obtenemos los siguientes requisitos de cálculo.

$$\text{Longitud FFT} = 2M = 1.28/\Delta f$$
$$\text{Número de transformadas FFT} = 2K+1 = 2\left(\frac{N}{2M}\right)+1 \approx \frac{N}{M}$$
$$\text{Número de operaciones} = \frac{N}{M}(M\log_2 2M) = N\log_2\frac{1.28}{\Delta f}$$

Podemos despreciar las M multiplicaciones adicionales necesarias para enventanar la secuencia de autocorrelación $r_{xx}(m)$, ya que se trata de una cantidad relativamente pequeña. Por último, hay un cálculo que es necesario realizar para obtener la transformada de Fourier de la secuencia de autocorrelación. Puede utilizarse el algoritmo FFT para llevar a cabo este cálculo rellenando con algunos ceros con el fin de interpolar el estimado espectral. Como resultado de estos cálculos adicionales, el número de cálculos se incrementa en una pequeña cantidad.

A partir de estos resultados concluimos que el método de Welch requiere algo más de potencia de cálculo que los otros dos métodos. El método de Bartlett es el que requiere aparentemente menos cálculos. Sin embargo, las diferencias en los requisitos de cálculo de estos tres métodos son poco significativas.

14.3 Métodos paramétricos para la estimación del espectro de potencia

Los métodos no paramétricos de estimación del espectro de potencia descritos en la sección anterior son relativamente simples, fáciles de comprender y de calcular utilizando el algoritmo FFT. Sin embargo, estos métodos requieren que se disponga de registros de datos grandes con el fin de obtener la resolución en frecuencia necesaria en muchas aplicaciones. Además, estos métodos sufren los efectos de las fugas espectrales, debidos al

uso de ventanas, que son inherentes a los registros de datos de longitud finita. A menudo, las fugas espectrales enmascaran a las señales débiles que están presentes en los datos.

Desde un punto de vista, la limitación básica de los métodos no paramétricos es la suposición de que el estimado de la autocorrelación $r_{xx}(m)$ es cero para $m \geq N$, como implica la Ecuación (14.1.33). Esta suposición limita severamente la resolución en frecuencia y la calidad del estimado del espectro de potencia que se obtiene. Desde otro punto de vista, la suposición inherente en el estimado del periodograma es que los datos son periódicos de período N. Ninguna de estas suposiciones es realista.

En esta sección describimos los métodos de estimación del espectro de potencia que no precisan tales suposiciones. De hecho, estos métodos *extrapolan* los valores de la autocorrelación para retardos $m \geq N$. La extrapolación es posible si disponemos de alguna información *a priori* sobre cómo se generan los datos. En tal caso, un modelo para la generación de la señal se puede construir con una serie de parámetros que pueden estimarse a partir de los datos observados. A partir del modelo y de los parámetros estimados, podemos calcular el espectro de densidad de potencia implicado por el modelo.

En efecto, el método de modelado elimina la necesidad de emplear funciones de ventana y de suponer que la secuencia de autocorrelación es cero para $|m| \geq N$. En consecuencia, los métodos *paramétricos* (basados en modelo) de la estimación del espectro de potencia evitan el problema de las fugas y proporcionan una mejor resolución en frecuencia que los métodos no paramétricos basados en el algoritmo FFT descritos en la sección anterior. Esto es especialmente cierto en aplicaciones en las que hay disponibles registros de datos cortos debidos a fenómenos transitorios o variantes en el tiempo.

Los métodos paramétricos considerados en esta sección están basados en el modelado de la secuencia de datos $x(n)$ como la salida de un sistena lineal caracterizado por una función del sistema racional de la forma

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{q} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}} \tag{14.3.1}$$

La ecuación en diferencias correspondiente es

$$x(n) = -\sum_{k=1}^{p} a_k x(n-k) + \sum_{k=0}^{q} b_k w(n-k) \tag{14.3.2}$$

donde $w(n)$ es la secuencia de entrada al sistema y los datos observados, $x(n)$, representan la secuencia de salida.

En la estimación del espectro de potencia, la secuencia de entrada no es observable. Sin embargo, si los datos observados se caracterizan como un proceso aleatorio estacionario, entonces la secuencia de salida también se supone que va a ser un proceso aleatorio estacionario. En tal caso, el espectro de densidad de potencia de los datos es

$$\Gamma_{xx}(f) = |H(f)|^2 \Gamma_{ww}(f)$$

donde $\Gamma_{ww}(f)$ es el espectro de densidad de potencia de la secuencia de entrada y $H(f)$ es la respuesta en frecuencia del modelo.

Dado que nuestro objetivo es estimar el espectro de densidad de potencia $\Gamma_{xx}(f)$, es conveniente suponer que la secuencia de entrada $w(n)$ es una secuencia de ruido blanco de media cero con la autocorrelación

$$\gamma_{ww}(m) = \sigma_w^2 \delta(m)$$

donde σ_w^2 es la varianza (es decir, $\sigma_w^2 = E[|w(n)|^2]$). Entonces el espectro de densidad de potencia de los datos observados es simplemente

$$\Gamma_{xx}(f) = \sigma_w^2 |H(f)|^2 = \sigma_w^2 \frac{|B(f)|^2}{|A(f)|^2} \tag{14.3.3}$$

En la Sección 12.2 hemos descrito la representación de un proceso aleatorio estacionario como el dado por (14.3.3).

En el método basado en modelo, el procedimiento de estimación del espectro consta de dos pasos. Dada la secuencia de datos $x(n)$, $0 \leq n \leq N-1$, estimamos los parámetros $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ del modelo. Entonces, a partir de estos estimados, calculamos el estimado del espectro de potencia de acuerdo con (14.3.3).

Recuerde que el proceso aleatorio $x(n)$ generado por el modelo de polos y ceros definido por (14.3.1) o (14.3.2) es un *proceso de auto-regresivo de media móvil* (ARMA) *autoregressive moving average* de orden (p,q) y normalmente se designa como ARMA (p,q). Si $q=0$ y $b_0=1$, el modelo de sistema resultante tiene una función de sistema $H(z)=1/A(z)$ y su salida $x(n)$ se dice que es un *proceso auto-regresivo* (AR, *autoregressive* de orden p, que se designa como AR(p). El tercer modelo posible se obtiene haciendo $A(z)=1$, de modo que $H(z)=B(z)$. Su salida $x(n)$ se denomina *proceso de media móvil* (MA, *moving average*) de orden q y se designa como MA(q).

De estos tres modelos lineales, el modelo AR es con mucho el más ampliamente utilizado. Las razones de ello son dos. En primer lugar, el modelo AR es adecuado para representar espectros con picos estrechos (resonancias). En segundo lugar, el modelo AR da lugar a ecuaciones lineales muy simples para los parámetros AR. Por otro lado, el modelo MA, por regla general, requiere muchos más coeficientes para representar un espectro estrecho. En consecuencia, raramente se utiliza por sí solo como modelo para la estimación del espectro. Combinando polos y ceros, el modelo ARMA proporciona una representación más eficiente, desde el punto de vista del número de parámetros del modelo, del espectro de un proceso aleatorio.

El teorema de descomposición debido a Wold (1938) afirma que cualquier proceso ARMA o MA puede representarse de forma unívoca mediante un modelo AR de orden posiblemente infinito, y cualquier proceso ARMA o AR puede ser representado por un modelo MA de orden posiblemente infinito. En vista de este teorema, el problema de la selección del modelo se reduce a elegir el modelo que requiera el menor número de parámetros que sea también fácil calcular. Normalmente, la elección en la práctica es el modelo AR. El modelo ARMA es el de uso menos extendido.

Antes de describir los métodos para estimar los parámetros en los modelos AR(p), MA(q) y ARMA(p,q), resulta útil establecer las relaciones básicas entre los parámetros del modelo y la secuencia de autocorrelación $\gamma_{xx}(m)$. Además, relacionamos los parámetros del modelo AR con los coeficientes de un predictor lineal para el proceso $x(n)$.

14.3.1 Relaciones entre la autocorrelación y los parámetros del modelo

En la Sección 12.2.2 hemos establecido las relaciones básicas entre la autocorrelación $\{\gamma_{xx}(m)\}$ y los parámetros del modelo $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$. Para el proceso ARMA(p,q), la relación dada por (12.2.18) es

$$\gamma_{xx}(m) = \begin{cases} -\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{xx}(m-k), & m > q \\ -\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{xx}(m-k) + \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-m} h(k) b_{k+m}, & 0 \leq m \leq q \\ \gamma_{xx}^*(-m), & m < 0 \end{cases} \tag{14.3.4}$$

Las relaciones dadas en (14.3.4) proporcionan una fórmula para determinar los parámetros del modelo $\{a_k\}$ restringiendo nuestra atención al caso en que $m > q$. Luego el conjunto de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xx}(q) & \gamma_{xx}(q-1) & \cdots & \gamma_{xx}(q-p+1) \\ \gamma_{xx}(q+1) & \gamma_{xx}(q) & \cdots & \gamma_{xx}(q+p+2) \\ \vdots & \vdots & & \\ \gamma_{xx}(q+p-1) & \gamma_{xx}(q+p-2) & \cdots & \gamma_{xx}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \gamma_{xx}(q+1) \\ \gamma_{xx}(q+2) \\ \vdots \\ \gamma_{xx}(q+p) \end{bmatrix} \tag{14.3.5}$$

puede emplearse para obtener los parámetros del modelo $\{a_k\}$ utilizando estimados de la secuencia de autocorrelación en lugar de $\gamma_{xx}(m)$ para $m \geq q$. Este problema se estudia en la Sección 14.3.8.

Otra interpretación de la relación dada en (14.3.5) es que los valores de la autocorrelación $\gamma_{xx}(m)$ para $m > q$ se determinan únicamente a partir de los parámetros de los polos $\{a_k\}$ y los valores de $\gamma_{xx}(m)$ para $0 \leq m \leq p$. En consecuencia, el modelo de sistema lineal extiende automáticamente los valores de la secuencia de autocorrelación $\gamma_{xx}(m)$ para $m > p$.

Si los parámetros del polo $\{a_k\}$ se obtienen a partir de (14.3.5), el resultado no nos ayuda a determinar los parámetros MA $\{b_k\}$, ya que la ecuación

$$\sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-m} h(k) b_{k+m} = \gamma_{xx}(m) + \sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{xx}(m-k), \qquad 0 \leq m \leq q$$

depende de la respuesta al impulso $h(n)$. Aunque la respuesta al impulso puede expresarse en función de los parámetros $\{b_k\}$ mediante la división de $B(z)$ por la conocida $A(z)$, este método da lugar a un conjunto de ecuaciones no lineales para los paramétros MA.

Si adoptamos un modelo AR(p) para los datos observados, la relación entre los parámetros AR y la secuencia de autocorrelación se obtiene haciendo $q = 0$ en (14.3.4). Así, obtenemos

$$\gamma_{xx}(m) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{xx}(m-k), & m > 0 \\ -\sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{xx}(m-k) + \sigma_w^2, & m = 0 \\ \gamma_{xx}^*(-m), & m < 0 \end{cases} \tag{14.3.6}$$

En este caso, los parámetros AR $\{a_k\}$ se obtienen a partir de la solución de las ecuaciones de Yule–Walker o normales

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}(-1) & \vdots & \gamma_{xx}(-p+1) \\ \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(0) & \vdots & \gamma_{xx}(-p+2) \\ \cdots & \cdots & & \vdots \\ \gamma_{xx}(p-1) & \gamma_{xx}(p-2) & \vdots & \gamma_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \gamma_{xx}(1) \\ \gamma_{xx}(2) \\ \vdots \\ \gamma_{xx}(p) \end{bmatrix} \tag{14.3.7}$$

y la varianza σ_w^2 puede obtenerse a partir de la ecuación

$$\sigma_w^2 = \gamma_{xx}(0) + \sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{xx}(-k) \tag{14.3.8}$$

Las ecuaciones dadas en (14.3.7) y (14.3.8) normalmente se combinan en una única ecuación matricial de la forma

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}(-1) & \cdots & \gamma_{xx}(-p) \\ \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(0) & \cdots & \gamma_{xx}(-p+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{xx}(p) & \gamma_{xx}(p-1) & \cdots & \gamma_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_w^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14.3.9}$$

Dado que la matriz de correlación de (14.3.7), o de (14.3.9), es Toeplitz, puede invertirse de forma eficiente utilizando el algoritmo de Levinson–Durbin.

Luego todos los parámetros del sistema del modelo AR(p) pueden determinarse fácilmente a partir del conocimiento de la secuencia de autocorrelación $\gamma_{xx}(m)$ para $0 \le m \le p$. Además, (14.3.6) puede utilizarse para ampliar la secuencia de autocorrelación para $m > p$, una vez que se determinan los $\{a_k\}$.

Por último, para completar, indicamos que en un modelo MA(q) para los datos observados, la secuencia de autocorrelación $\gamma_{xx}(m)$ está relacionada con los parámetros MA $\{b_k\}$ mediante la ecuación

$$\gamma_{xx}(m) = \begin{cases} \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q} b_k b_{k+m}, & 0 \le m \le q \\ 0, & m > q \\ \gamma_{xx}^*(-m), & m < 0 \end{cases} \tag{14.3.10}$$

la cual fue establecida en la Sección 12.2.

Una vez establecidas las bases, vamos a describir los métodos de estimación del espectro de potencia para los modelos AR(p), ARMA(p,q) y MA(q).

14.3.2 Método de Yule–Walker para los parámetros del modelo AR

En el método de Yule–Walker simplemente estimamos la autocorrelación a partir de los datos y utilizamos los estimados dados en (14.3.7) para obtener los parámetros del modelo AR. En este método, es deseable emplear la forma sesgada del estimado de la autocorrelación,

$$r_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x^*(n)x(n+m), \qquad m \ge 0 \tag{14.3.11}$$

para garantizar que la matriz de autocorrelación es semidefinida positiva. El resultado es un modelo AR estable. Aunque la estabilidad no es un problema crítico en la estimación del espectro de potencia, se supone que un modelo AR estable representa mejor los datos.

El algoritmo de Levinson–Durbin descrito en el Capítulo 12 con $r_{xx}(m)$ sustituido por $\gamma_{xx}(m)$ proporciona los parámetros AR. El estimado del espectro de potencia correspondiente es

$$P_{xx}^{\mathrm{YW}}(f) = \frac{\hat{\sigma}_{wp}^2}{|1 + \sum_{k=1}^{p} \hat{a}_p(k) e^{-j2\pi fk}|^2} \tag{14.3.12}$$

donde $\hat{a}_p(k)$ son los estimados de los parámetros AR obtenidos a partir de las recursiones de Levinson–Durbin y

$$\hat{\sigma}_{wp}^2 = \hat{E}_p^f = r_{xx}(0) \prod_{k=1}^{p} [1 - |\hat{a}_k(k)|^2] \tag{14.3.13}$$

es el valor cuadrático medio mínimo estimado del predictor de orden p. Un ejemplo que ilustra las capacidades de la resolución en frecuencia de este estimador se proporciona en la Sección 14.3.9.

En la estimación del espectro de potencia de señales sinusoidales mediante modelos AR, Lacoss (1971) demostró que los picos espectrales de un estimado del espectro AR son proporcionales al cuadrado de la potencia de la señal sinusoidal. Por otro lado, el área bajo el pico del espectro de densidad de potencia es linealmente proporcional a la potencia de la sinusoide. Este comportamiento característico se da en todos los métodos de estimación basados en el modelo AR.

14.3.3 Método de Burg para los parámetros del modelo AR

El método descrito por Burg (1968) para estimar los parámetros AR puede interpretarse como un método de orden recursivo de mínimos cuadrados en celosía, basado en la minimización de los errores directo e inverso de los predictores lineales, con la restricción de que los parámetros AR satisfacen la recursión de Levinson–Durbin.

Para derivar el estimador, suponemos que se conocen los datos $x(n)$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, y consideremos los estimados de la predicción lineal directa e inversa de orden m, definidos como

$$\begin{aligned} \hat{x}(n) &= -\sum_{k=1}^{m} a_m(k)x(n-k) \\ \hat{x}(n-m) &= -\sum_{k=1}^{m} a_m^*(k)x(n+k-m) \end{aligned} \tag{14.3.14}$$

y los correspondientes errores directo e inverso $f_m(n)$ y $g_m(n)$ definidos como $f_m(n) = x(n) - \hat{x}(n)$ y $g_m(n) = x(n-m) - \hat{x}(n-m)$ donde $a_m(k)$, $0 \le k \le m-1$, $m = 1, 2, \ldots, p$, son los coeficientes de predicción. El error de mínimos cuadrados es

$$\mathscr{E}_m = \sum_{n=m}^{N-1} [|f_m(n)|^2 + |g_m(n)|^2] \tag{14.3.15}$$

Este error se minimiza seleccionando los coeficientes de predicción, sujetos a la restricción de satisfacer la recursión de Levinson–Durbin dada por

$$a_m(k) = a_{m-1}(k) + K_m a_{m-1}^*(m-k), \qquad \begin{array}{c} 1 \le k \le m-1 \\ 1 \le m \le p \end{array} \tag{14.3.16}$$

donde $K_m = a_m(m)$ es el coeficiente de reflexión m de la realización del filtro en celosía del predictor. Cuando se sustituye la Ecuación (14.3.16) en las expresiones de $f_m(n)$ y $g_m(n)$, el resultado es la pareja de ecuaciones de orden recursivo para los errores de predicción directo e inverso dados por (12.3.4).

Si ahora sustituimos (12.3.4) en (14.3.16) y realizamos la minimización de $\mathscr{E}_m$ con respecto a los coeficientes de reflexión complejos K_m, obtenemos el resultado

$$\hat{K}_m = \frac{-\sum_{n=m}^{N-1} f_{m-1}(n)g_{m-1}^*(n-1)}{\frac{1}{2}\sum_{n=m}^{N-1} [|f_{m-1}(n)|^2 + |g_{m-1}(n-1)|^2]}, \qquad m = 1, 2, \ldots, p \tag{14.3.17}$$

El término del numerador de la Ecuación (14.3.17) es un estimado de la correlación cruzada entre los errores de predicción directo e inverso. Con los factores de normalización del denominador de (14.3.17), es evidente que $|K_m| < 1$, por lo que el modelo de sólo polos obtenido a partir de los datos es estable. El lector debe fijarse en la similitud de la Ecuación (14.3.17) con sus contrapartidas dadas en (12.3.28).

Observe que el denominador de (14.3.17) es simplemente el estimado de mínimos cuadrados de los errores directo e inverso, E_{m-1}^f y E_{m-1}^b, respectivamente. Luego (14.3.17) puede expresarse como

$$\hat{K}_m = \frac{-\sum_{n=m}^{N-1} f_{m-1}(n)g_{m-1}^*(n-1)}{\frac{1}{2}[\hat{E}_{m-1}^f + \hat{E}_{m-1}^b]}, \qquad m = 1, 2, \ldots, p \tag{14.3.18}$$

donde $\hat{E}_{m-1}^f + \hat{E}_{m-1}^b$ es un estimado del error cuadrático total E_m. Dejamos como ejercicio para el lector la verificación de que el término del denominador de (14.3.18) puede calcularse en orden recursivo de acuerdo con la relación

$$\hat{E}_m = (1 - |\hat{K}_m|^2)\hat{E}_{m-1} - |f_{m-1}(m-1)|^2 - |g_{m-1}(m-2)|^2 \tag{14.3.19}$$

donde $\hat{E}_m \equiv \hat{E}_m^f + \hat{E}_m^b$ es el error de mínimos cuadrados total. Este resultado se debe a Andersen (1978).

Resumiento, el algoritmo de Burg calcula los coeficientes de reflexión de la estructura en celosía equivalente como se especifica mediante las expresiones (14.3.18) y (14.3.19), y el algoritmo de Levinson–Durbin se usa para obtener los parámetros del modelo AR. A partir de los estimados de los parámetros AR, formamos el estimado del espectro de potencia

$$P_{xx}^{\mathrm{BU}}(f) = \frac{\hat{E}_p}{\left|1 + \sum_{k=1}^{p} \hat{a}_p(k) e^{-j2\pi fk}\right|^2} \tag{14.3.20}$$

Las principales ventajas del método de Burg para estimar los parámetros del modelo AR son: (1) da lugar a una resolución en alta frecuencia, (2) proporciona un modelo AR estable y (3) es eficiente en lo que respecta a los cálculos.

Sin embargo, se sabe que el método de Burg presenta varias desventajas. En primer lugar, presenta líneas espectrales divididas para relaciones señal-ruido altas [*véase* el documento de Fougere *et al.* (1976)]. Por división de las líneas, queremos decir que el espectro de $x(n)$ puede presentar un único pico abrupto, pero el método de Burg puede dar lugar a dos o más picos muy próximos. Para modelos de orden superior, el método también introduce picos espúreos. Además, para señales sinusoidales de ruido, el método de Burg presenta una sensibilidad a la fase inicial de una sinusoide, especialmente en registros de datos cortos. Esta sensibilidad se manifiesta como un desplazamiento de frecuencia desde la frecuencia real, dando lugar a una desviación de frecuencia dependiente de la fase. Para conocer más detalles sobre estas limitaciones, el lector puede consultar las publicaciones de Chen y Stegen (1974), Ulrych y Clayton (1976), Fougere *et al.* (1976), Kay y Marple (1979), Swingler (1979a, 1980), Herring (1980) y Thorvaldsen (1981).

Se han propuesto diversas modificaciones para superar algunas de las limitaciones más importantes del método de Burg: a saber, la división de las líneas, los picos espúreos y la desviación de la frecuencia. Básicamente, las modificaciones implican la introducción de una secuencia de ponderación (ventana) en los errores cuadráticos directo e inverso. Es decir, se realiza la optimización de mínimos cuadrados sobre los errores cuadráticos ponderados

$$\mathscr{E}_m^{\mathrm{WB}} = \sum_{n=m}^{N-1} w_m(n)[|f_m(n)|^2 + |g_m(n)|^2] \tag{14.3.21}$$

lo que, cuando se minimiza, da lugar a los estimados de los coeficientes de reflexión

$$\hat{K}_m = \frac{-\sum_{n=m}^{N-1} w_{m-1}(n) f_{m-1}(n) g_{m-1}^*(n-1)}{\frac{1}{2}\sum_{n=m}^{N-1} w_{m-1}(n)[|f_{m-1}(n)|^2 + |g_{m-1}(n-1)|^2]} \tag{14.3.22}$$

En particular, mencionamos el uso de una ventana de Hamming empleada por Swingler (1979b), una ventana cuadrática o parabólica utilizada por Kaveh y Lippert (1983), el método de ponderación de energía de Nikias y Scott (1982), y la ponderación de energía de datos adaptativos empleada por Helme y Nikias (1985).

Estos métodos basados en ventanas y en la ponderación de la energía han demostrado su efectividad reduciendo la ocurrencia de la división de líneas y picos espúreos, y también son efectivos en lo que respecta a la reducción de la desviación de frecuencia.

El método de Burg para estimar el espectro de potencia normalmente está asociado con la *estimación del espectro de máxima entropía*, un criterio utilizado por Burg (1967, 1975) como base para el modelado AR en la estimación del espectro por métodos paramétricos. El problema considerado por Burg fue cómo extrapolar mejor a partir de los valores dados de la secuencia de autocorrelación $\gamma_{xx}(m)$, $0 \le m \le p$; los valores para $m > p$, tales que la secuencia de autocorrelación es semidefinida positiva. Puesto que son posibles un número infinito

de extrapolaciones, Burg postuló que la extrapolación se hace sobre la base de maximizar la incertidumbre (entropía) o aleatoriedad, en el sentido que el espectro $\Gamma_{xx}(f)$ del proceso es el más plano de todos los espectros que presentan los valores de la autocorrelación $\gamma_{xx}(m)$, $0 \leq m \leq p$. En concreto, la entropía por muestra es proporcional a la integral [*véase* Burg (1975)]

$$\int_{-1/2}^{1/2} \ln \Gamma_{xx}(f) df \tag{14.3.23}$$

Burg determinó que el máximo de esta integral sujeto a las $(p+1)$ restricciones

$$\int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(f) e^{j2\pi fm} df = \gamma_{xx}(m), \qquad 0 \leq m \leq p \tag{14.3.24}$$

es el proceso AR(p) para el que la secuencia de autocorrelación $\gamma_{xx}(m)$, $0 \leq m \leq p$ está relacionado con los parámetros AR mediante la Ecuación (14.3.6). Esta solución proporciona una justificación adicional para el uso del modelo AR en la estimación del espectro de potencia.

Teniendo en cuenta el trabajo básico de Burg sobre la estimación espectral de entropía máxima, el procedimiento de la estimación del espectro de potencia de Burg se denomina a menudo *método de máxima entropía*. Sin embargo, debemos destacar que el espectro de entropía máxima es idéntico al espectro del modelo AR sólo cuando la autocorrelación exacta $\gamma_{xx}(m)$ es conocida. Cuando sólo esta disponible un estimado de $\gamma_{xx}(m)$ para $0 \leq m \leq p$, los estimados del modelo AR de Yule–Walker y Burg no son estimados espectrales de entropía máxima. La formulación general para el espectro de entropía máxima basada en los estimados de la secuencia de autocorrelación da lugar a un conjunto de ecuaciones no lineales. Las soluciones para el espectro de entropía máxima con errores de medida en la secuencia de correlación ha sido obtenidos por Newman (1981) y Schott y McClellan (1984).

14.3.4 Método de mínimos cuadrados no restringido para los parámetros del modelo AR

Como se ha descrito en la sección anterior, el método de Burg para determinar los parámetros del modelo AR es básicamente un algoritmo de mínimos cuadrados en celosía con la restricción adicional de que los coeficientes del predictor satisfacen la recursión de Levinson. Como resultado de esta restricción, un incremento del orden del modelo AR sólo requiere una única optimización del parámetro en cada etapa. En contraste con este método, podemos usar un algoritmo de mínimos cuadrados no restringidos para determinar los parámetros AR.

Para continuar, formamos los estimados de la predicción lineal directa e inversa y sus correspondientes errores directo e inverso como se indica en (14.3.14) y (14.3.15). A continuación minimizamos la suma de los cuadrados de ambos errores, es decir,

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_p &= \sum_{n=p}^{N-1} [|f_p(n)|^2 + |g_p(n)|^2] \\
&= \sum_{n=p}^{N-1} \left[\left| x(n) + \sum_{k=1}^{p} a_p(k) x(n-k) \right|^2 \right. \\
&\quad \left. + \left| x(n-p) + \sum_{k=1}^{p} a_p^*(k) x(n+k-p) \right|^2 \right]
\end{aligned} \tag{14.3.25}$$

que es el mismo índice de rendimiento que en el método de Burg. Sin embargo, no imponemos la recursión de Levinson–Durbin dada en (14.3.25) para los parámetros AR. La minimización no restringida de $\mathscr{E}_p$ con respecto a los coeficientes de predicción proporciona el conjunto de ecuaciones lineales

$$\sum_{k=1}^{p} a_p(k) r_{xx}(l,k) = -r_{xx}(l,0), \qquad l = 1,2,\ldots,p \tag{14.3.26}$$

donde, por definición, la autocorrelación $r_{xx}(l,k)$ es

$$r_{xx}(l,k) = \sum_{n=p}^{N-1} [x(n-k)x^*(n-l) + x(n-p+l)x^*(n-p+k)] \tag{14.3.27}$$

El error de mínimos cuadrados residual resultante es

$$\mathscr{E}_p^{\mathrm{LS}} = r_{xx}(0,0) + \sum_{k=1}^{p} \hat{a}_p(k) r_{xx}(0,k) \tag{14.3.28}$$

Por tanto, el estimado del espectro de potencia de mínimos cuadrados no restringido es

$$P_{xx}^{\mathrm{LS}}(f) = \frac{\mathscr{E}_p^{\mathrm{LS}}}{\left|1 + \sum_{k=1}^{p} \hat{a}_p(k) e^{-j2\pi fk}\right|^2} \tag{14.3.29}$$

La matriz de correlación dada en (14.3.27), con los elementos $r_{xx}(l,k)$, no es Toeplitz, de modo que el algoritmo de Levinson–Durbin no puede aplicarse. Sin embargo, la matriz de correlación tiene una estructura suficiente para hacer posible la deducción de algoritmos eficientes en lo que respecta a los cálculos con una complejidad de cálculo proporcional a p^2. Marple (1980) dedujo un algoritmo así, el cual tiene una estructura en celosía y emplea las recursiones de orden de tipo Levinson–Durbin y recursiones de tiempo adicionales.

Esta forma del método de mínimos cuadrados no restringido descrita también se conoce como método de mínimos cuadrados *de datos no enventanados*. Este método ha sido propuesto para la estimación de espectros en varias publicaciones, incluyendo las de Burg (1967), Nuttall (1976), y Ulrych y Clayton (1976). Sus características de rendimiento son superiores al método de Burg, en el sentido de que el método de mínimos cuadrados no restringido no presenta la misma sensibilidad a tales problemas como la división de líneas, la desviación de frecuencia y los picos espúreos. En vista de la eficiencia de cálculo del algoritmo de Marple, que es comparable a la eficiencia del algoritmo de Levinson–Durbin, el método de mínimos cuadrados resulta muy atractivo. Con este método no hay garantía de que los parámetros AR estimados proporcionen un modelo AR estable. Sin embargo, en la estimación de espectros, no se considera que esto sea un problema.

14.3.5 Métodos de estimación secuenciales para los parámetros del modelo AR

Los tres métodos de estimación del espectro de potencia descritos en las secciones anteriores para el modelo AR pueden clasificarse como métodos de procesamiento de bloques. Estos métodos obtienen estimados de los parámetros AR de un bloque de datos, como por ejemplo $x(n)$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$. Los parámetros AR, basados en el bloque de N puntos de datos, se utilizan entonces para obtener el estimado del espectro de potencia.

En situaciones donde los datos están disponibles de manera continua, podemos segmentar los datos en bloques de N puntos y realizar la estimación del espectro bloque a bloque. Esto se hace a menudo en la práctica, tanto para aplicaciones de tiempo real o de no tiempo real. Sin embargo, en tales aplicaciones, existe un método alternativo basado en la estimación secuencial (en el tiempo) de los parámetros del modelo AR una vez que cada nuevo punto de datos está disponible. Introduciendo una función de ponderación en las muestras de datos pasadas, es posible atenuar el efecto de las muestras de datos antiguas cuando se reciben nuevos datos.

Los métodos secuenciales en celosía basados en mínimos cuadrados recursivos se pueden emplear para estimar óptimamente los coeficientes de predicción y de reflexión en la realización en celosía de los predictores lineales directa e inversa. Las ecuaciones recursivas para los coeficientes de predicción están relacionados directamente con los parámetros del modelo AR. Además de la naturaleza de orden recursivo de estas ecuaciones, implicada por la estructura en celosía, podemos también obtener las ecuaciones recursivas temporales para los coeficientes de reflexión en la celosía y para los coeficientes de predicción directa e inversa.

Los algoritmos secuenciales recursivos de mínimos cuadrados son equivalentes a los métodos de procesamiento de bloques de mínimos cuadrados no restringidos descritos en la sección anterior. Por tanto, los estimados del espectro de potencia obtenidos mediante el método secuencial recursivo de mínimos cuadrados mantienen las propiedades deseables del algoritmo de procesamiento de bloques descritos en la Sección 14.3.4. Ya que los parámetros AR se estiman de forma continua en un algoritmo de estimación secuencial, los estimados del espectro de potencia pueden obtenerse tan a menudo como se desee, desde una vez por muestra hasta una vez cada N muestras. Ponderando adecuadamente las muestras de datos pasadas, los métodos de estimación secuencial son particularmente adecuados para estimar y hacer un seguimiento de los espectros de potencia variantes en el tiempo resultantes de las estadísticas de la señal no estacionaria.

La complejidad de cálculo de los métodos de estimación secuencial es generalmente proporcional a p, el orden del proceso AR. En consecuencia, los algoritmos de estimación secuencial son eficientes en lo que respecta al cálculo y, desde este punto de vista, puede ofrecer algunas ventajas sobre los métodos de procesamiento de bloques.

Existen numerosas referencias que tratan los métodos de estimación secuenciales. Las publicaciones de Griffiths (1975), Friedlander (1982a, b), y Kalouptsidis y Theodoridis (1987) son particularmente relevantes en lo que se refiere al problema de la estimación del espectro.

14.3.6 Selección del orden del modelo

Uno de los aspectos más importantes del uso del modelo AR es la selección del orden p. Por regla general, si seleccionamos un modelo con un orden muy bajo, obtenemos un espectro extremadamente suavizado. Por otro lado, si se selecciona p para que sea muy alto, corremos el riesgo de introducir picos espúreos de bajo nivel en el espectro. Hemos mencionado anteriormente que una indicación del rendimiento del modelo AR es el valor cuadrático medio del error residual, el cual, en general, es diferente para cada uno de los estimadores descritos anteriormente. La característica de este error residual es que disminuye cuando el orden del modelo AR aumenta. Podemos monitorizar la velocidad de decrecimiento y decidir terminar el proceso cuando dicha velocidad de decrecimiento se hace relativamente lenta. Sin embargo, es evidente que este método puede ser impreciso y poco definido, y otros métodos deberían ser investigados.

Diversos investigadores han trabajado sobre este problema y se han proporcionado muchos resultados experimentales en la literatura técnica [por ejemplo, en las publicaciones de Gersch y Sharpe (1973), Ulrych y Bishop (1975), Tong (1975, 1977), Jones (1976), Nuttall (1976), Berryman (1978), Kaveh y Bruzzone (1979), y Kashyap (1980)].

Dos de los criterios mejor conocidos para seleccionar el orden del modelo han sido propuestos por Akaike (1969, 1974). El primero de ellos, conocido como *criterio del error de predicción final, EPF*, el orden se selecciona para minimizar el índice de rendimiento

$$\mathrm{EPF}(p) = \hat{\sigma}_{wp}^2 \left(\frac{N+p+1}{N-p-1} \right) \tag{14.3.30}$$

donde $\hat{\sigma}_{wp}^2$ es la varianza estimada del error de predicción lineal. Este índice de rendimiento está basado en la minimización del error cuadrático medio de un predictor de un paso.

El segundo criterio propuesto por Akaike (1974), conocido como *criterio de información de Akaike* (AIC, *Akaike information criterion*) está basado en la selección del orden que minimiza

$$\mathrm{AIC}(p) = \ln \hat{\sigma}_{wp}^2 + 2p/N \tag{14.3.31}$$

Observe que el término $\hat{\sigma}_{wp}^2$ disminuye y, por tanto, $\ln \hat{\sigma}_{wp}^2$ también decrece cuando el orden del modelo AR se incrementa. Sin embargo, $2p/N$ aumenta cuando aumenta p. Por tanto, se obtiene un valor mínimo para cierto p.

Un criterio de información alternativo, propuesto por Rissanen (1983) está basado en seleccionar el orden que *minimiza la longitud de descripción* (MDL, *Minimum description length, longitud de descripción mínima*) donde la MDL se define como

$$\mathrm{MDL}(p) = N \ln \hat{\sigma}_{wp}^2 + p \ln N \tag{14.3.32}$$

un cuarto criterio fue propuesto por Parzen (1974). Se trata del criterio de transferencia auto-regresivo (CAT, *criterion autoregressive transfer*) y se define como

$$\mathrm{CAT}(p) = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\overline{\sigma}_{wk}^2} \right) - \frac{1}{\hat{\sigma}_{wp}^2} \tag{14.3.33}$$

donde

$$\overline{\sigma}_{wk}^2 = \frac{N}{N-k} \hat{\sigma}_{wk}^2 \tag{14.3.34}$$

El orden p se seleccion para minimizar $\mathrm{CAT}(p)$.

Aplicando este criterio, la media debería eliminarse de los datos. Puesto que $\hat{\sigma}_{wk}^2$ depende del tipo de estimado del espectro que obtengamos, el orden del modelo también es una función del criterio.

Los resultados experimentales proporcionados en las referencias anteriormente citadas indican que los criterios de selección del orden del modelo no proporcionan resultados definitivos. Por ejemplo, Ulrych y Bishop (1975), Jones (1976), y Berryman (1978) determinan que el criterio del $\mathrm{FPE}(p)$ tiende a sobrestimar el orden del modelo. Kashyap (1980) demostró que el criterio AIC es estadísticamente incoherente cuando $N \to \infty$. Por otro lado, el criterio de información MDL propuesto por Rissanen es estadísticamente coherente. Otros resultados experimentales indican que para longitudes de datos pequeñas, el orden del modelo AR debe seleccionarse para estar en el rango de $N/3$ a $N/2$ para obtener unos buenos resultados. Es evidente que en ausencia de cualquier información anterior independientemente del proceso físico que dé lugar a los datos, deben probarse diferentes órdenes de modelo y diferentes criterios y, por último, considerar los diferentes resultados.

14.3.7 Modelo MA para la estimación del espectro de potencia

Como se ha demostrado en al Sección 14.3.1, los parámetros de un modelo $\mathrm{MA}(q)$ están relacionados con la autocorrelación estadística $\gamma_{xx}(m)$ por la Ecuación (14.3.10). Sin embargo,

$$B(z)B(z^{-1}) = D(z) = \sum_{m=-q}^{q} d_m z^{-m} \tag{14.3.35}$$

donde los coeficientes $\{d_m\}$ están relacionados con los parámetros MA por la expresión

$$d_m = \sum_{k=0}^{q-|m|} b_k b_{k+m}, \qquad |m| \le q \tag{14.3.36}$$

Evidentemente, entonces

$$\gamma_{xx}(m) = \begin{cases} \sigma_w^2 d_m, & |m| \le q \\ 0, & |m| > q \end{cases} \tag{14.3.37}$$

y el espectro de potencia para el proceso MA(q) es

$$\Gamma_{xx}^{\mathrm{MA}}(f) = \sum_{m=-q}^{q} \gamma_{xx}(m) e^{-j2\pi fm} \tag{14.3.38}$$

Es evidente a partir de estas expresiones que no tenemos que obtener los parámetros MA $\{b_k\}$ para estimar el espectro de potencia. El estimado de la autocorrelación $\gamma_{xx}(m)$ para $|m| \leq q$ es suficiente. A partir de tales estimados calculamos el espectro de potencia MA estimado, dado como

$$P_{xx}^{\mathrm{MA}}(f) = \sum_{m=-q}^{q} r_{xx}(m) e^{-j2\pi fm} \tag{14.3.39}$$

que es idéntico al estimado del espectro de potencia clásico (no paramétrico) descrito en la Sección 14.1.

Existe un método alternativo para determinar $\{b_k\}$ basado en una aproximación AR de orden superior al proceso MA. Más específicamente, el proceso MA(q) va a ser modelado por un modelo AR(p), donde $p >> q$. Luego $B(z) = 1/A(z)$, o lo que es equivalente, $B(z)A(z) = 1$. Luego los parámetros $\{b_k\}$ y $\{a_k\}$ están relacionados por una suma de convolución, que puede expresarse como

$$\hat{a}_n + \sum_{k=1}^{q} b_k \hat{a}_{n-k} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \tag{14.3.40}$$

donde $\{\hat{a}_n\}$ son los parámetros obtenidos ajustando los datos a un modelo AR(p).

Aunque este conjunto de ecuaciones puede resolverse fácilmente para los $\{b_k\}$, se obtiene un mejor ajuste utilizando un criterio de error de mínimos cuadrados. Es decir, formamos el error cuadrático

$$\mathscr{E} = \sum_{n=0}^{p} \left[\hat{a}_n + \sum_{k=1}^{q} b_k \hat{a}_{n-k} \right]^2 - 1, \qquad \hat{a}_0 = 1, \quad \hat{a}_k = 0, \quad k < 0 \tag{14.3.41}$$

que se minimiza seleccionando los parámetros $\{b_k\}$ del proceso MA(q). El resultado de esta minimización es

$$\hat{\mathbf{b}} = -\mathbf{R}_{aa}^{-1} \mathbf{r}_{aa} \tag{14.3.42}$$

donde los elementos de $\mathbf{R}_{aa}$ y $\mathbf{r}_{aa}$ están dados por

$$\begin{aligned} R_{aa}(|i-j|) &= \sum_{n=0}^{p-|i-j|} \hat{a}_n \hat{a}_{n+|i-j|}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, q \\ r_{aa}(i) &= \sum_{n=0}^{p-i} \hat{a}_n \hat{a}_{n+i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, q \end{aligned} \tag{14.3.43}$$

Este método de mínimos cuadrados que permite determinar los parámetros del modelo MA(q) ha sido atribuido a Durbin (1959). Kay (1988) demostró que este método de estimación es la probabilidad aproximadamente máxima suponiendo que el proceso observado es gaussiano.

El orden q del modelo MA puede ser determinado empíricamente mediante diversos métodos. Por ejemplo, el AIC de los modelos MA tiene la misma forma que para los modelos AR,

$$\mathrm{AIC}(q) = \ln \sigma_{wq}^2 + \frac{2q}{N} \tag{14.3.44}$$

donde σ_{wq}^2 es un estimado de la varianza del ruido blanco. Otro método, propuesto por Chow (1972b), consiste en filtrar los datos con el filtro MA(q) inverso y probar la salida filtrada para detectar el blanqueo.

14.3.8 Modelo ARMA para la estimación del espectro de potencia

El algoritmo de Burg, sus variaciones y el método de mínimos cuadrados descritos en las secciones anteriores proporciona estimados fiables del espectro de alta resolución basados en el modelo AR. Un modelo ARMA nos proporciona una oportunidad de mejorar el estimado del espectro AR, quizá, empleando unos pocos parámetros del modelo.

El modelo ARMA es particularmente apropiado cuando la señal ha sido distorsionada por ruido. Por ejemplo, suponga que los datos $x(n)$ son generados por un sistema AR, donde la salida del sistema está distorsionada por ruido blanco aditivo. La transformada z de la autocorrelación de la señal resultante puede expresarse como

$$\begin{aligned}\Gamma_{xx}(z) &= \frac{\sigma_w^2}{A(z)A(z^{-1})} + \sigma_n^2 \\ &= \frac{\sigma_w^2 + \sigma_n^2 A(z)A(z^{-1})}{A(z)A(z^{-1})}\end{aligned} \tag{14.3.45}$$

donde σ_n^2 es la varianza del ruido aditivo. Por tanto, el proceso $x(n)$ es ARMA(p,p), donde p es el orden del proceso de autocorrelación. Esta relación proporciona cierta motivación para investigar los modelos ARMA para la estimación del espectro de potencia.

Como hemos demostrado en la Sección 14.3.1, los parámetros del modelo ARMA están relacionados con la autocorrelación por la ecuación dada en (14.3.4). Para retardos $|m| > q$, la ecuación sólo emplea los parámetros AR $\{a_k\}$. Utilizando los estimados en lugar de $\gamma_{xx}(m)$, podemos resolver las p ecuaciones de (14.3.5) para obtener $\hat{a}_k$. Sin embargo, para modelos de orden superior, este método proporciona estimados pobres de los parámetros AR a causa de los pobres estimados de la autocorrelación para retardos largos. En consecuencia, este método no es recomendable.

Un método más fiable consiste en construir un conjunto sobredeterminado de ecuaciones lienales para $m > q$, y utilizar el método de mínimos cuadrados sobre el conjunto de ecuaciones sobredeterminadas, como propuso Cadzow (1979). Supongamos ahora que la secuencia de autocorrelación se puede estimar de forma precisa hasta un retardo M, donde $M > p+q$. Entonces podemos escribir el siguiente conjunto de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} r_{xx}(q) & r_{xx}(q-1) & \cdots & r_{xx}(q-p+1) \\ r_{xx}(q+1) & r_{xx}(q) & \cdots & r_{xx}(q-p+2) \\ \vdots & \vdots & & \\ r_{xx}(M-1) & r_{xx}(M-2) & & r_{xx}(M-p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_{xx}(q+1) \\ r_{xx}(q+2) \\ \vdots \\ r_{xx}(M) \end{bmatrix} \tag{14.3.46}$$

o lo que es equivalente,

$$\mathbf{R}_{xx}\mathbf{a} = -\mathbf{r}_{xx} \tag{14.3.47}$$

Dado que $\mathbf{R}_{xx}$ tiene dimensión $(M-q)\times p$ y $M-q > p$, podemos utilizar el criterio de mínimos cuadrados para obtener el vector de parámetros $\mathbf{a}$. El resultado de esta minimización es

$$\hat{\mathbf{a}} = -(\mathbf{R}_{xx}^t \mathbf{R}_{xx})^{-1} \mathbf{R}_{xx}^t \mathbf{r}_{xx} \tag{14.3.48}$$

Este procedimiento es el *método de mínimos cuadrados de Yule–Walker modificado*. También puede aplicarse un factor de ponderación a la secuencia de autocorrelación para desestimar los estimados menos fiables en el caso de retardos largos.

Una vez que los parámetros de la parte AR del modelo se han estimado como se ha indicado anteriormente, tenemos el sistema

$$\hat{A}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{p} \hat{a}_k z^{-k} \tag{14.3.49}$$

La secuencia $x(n)$ puede ahora filtrarse mediante un filtro FIR $\hat{A}(z)$ para proporcionar la secuencia

$$v(n) = x(n) + \sum_{k=1}^{p} \hat{a}_k x(n-k), \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{14.3.50}$$

La cascada del modelo ARMA(p,q) con $\hat{A}(z)$ es aproximadamente el proceso MA(q) generado por el modelo $B(z)$. Por tanto, podemos aplicar el estimado MA dado en la sección anterior para obtener el espectro MA. Más específicamente, la secuencia filtrada $v(n)$ para $p \leq n \leq N-1$ se emplea para formar las secuencias de correlación estimadas $r_{vv}(m)$, a partir de las que obtenemos el espectro MA

$$P_{vv}^{\mathrm{MA}}(f) = \sum_{m=-q}^{q} r_{vv}(m) e^{-j2\pi fm} \tag{14.3.51}$$

En primer lugar, observe que los parámetros $\{b_k\}$ no son necesarios para determinar el espectro de potencia. En segundo lugar, observe que $r_{vv}(m)$ es un estimado de la autocorrelación para el modelo MA dado por (14.3.10). Al formar el estimado $r_{vv}(m)$, puede ponderarse (por ejemplo, con la ventana de Bartlett) para desestimar los estimados de correlación para retardos largos. Además, los datos pueden filtrarse mediante un filtro inverso, creando así otra secuencia, por ejemplo $v^b(n)$, de modo que tanto $v(n)$ como $v^b(n)$ pueden emplearse para formar los estimados de la autocorrelación $r_{vv}(m)$, como propuso Kay (1980). Por último, el espectro de potencia estimado ARMA es

$$\hat{P}_{xx}^{\mathrm{ARMA}}(f) = \frac{P_{vv}^{\mathrm{MA}}(f)}{\left| 1 + \sum_{k=1}^{p} \hat{a}_k e^{-j2\pi fk} \right|^2} \tag{14.3.52}$$

El problema de selección del orden para el modelo ARMA(p,q) ha sido investigado por Chow (1972a, b) y Bruzzone y Kaveh (1980). Para este propósito, puede utilizarse el mínimo del índice AIC

$$\mathrm{AIC}(p,q) = \ln \hat{\sigma}_{wpq}^2 + \frac{2(p+q)}{N} \tag{14.3.53}$$

donde $\hat{\sigma}_{wpq}^2$ es un estimado de la varianza del error de entrada. Una prueba adicional sobre la adecuación de un determinado modelo ARMA(p,q) consiste en filtrar los datos a través del modelo y probar su nivel de blanqueado de los datos de salida. Esto requiere que los parámetros del modelo MA se calculen a partir de la autocorrelación estimada, utilizando la factorización espectral para determinar $B(z)$ a partir de $D(z) = B(z)B(z^{-1})$.

Para obtener información adicional sobre la estimación del espectro de potencia ARMA, el lector puede consultar las publicaciones de Graupe *et al.* (1975), Cadzow (1981, 1982), Kay (1980) y Friedlander (1982b).

14.3.9 Resultados experimentales

En esta sección vamos a presentar algunos resultados experimentales sobre el funcionamiento de los estimados del espectro de potencia AR y ARMA obtenidos mediante el uso de datos generados artificialmente. Nuestro objetivo es comparar los métodos de estimación espectral en base a su resolución en frecuencia, sesgado y su robustez en presencia de ruido aditivo.

Los datos constan de una o dos sinusoides y de ruido aditivo gaussiano. Las dos sinusoides están espaciadas una distancia Δf. Evidentemente, el proceso subyacente es ARMA$(4,4)$. Los resultados que se muestran emplean un modelo AR(p) para estos datos. Para relaciones señal-ruido altas (SNR), suponemos que el modelo AR(4) es adecuado. Sin embargo, para relaciones SNR bajas, es necesario un modelo AR de orden superior para

aproximar el proceso ARMA$(4,4)$. Los resultados que se proporcionan a continuación son coherentes con esta afirmación. La relación SNR se define como $10\log_{10}A^2/2\sigma^2$, donde σ^2 es la varianza del ruido aditivo y A es la amplitud de la sinusoide.

En la Figura 14.3.1 se muestran los resultados para $N = 20$ puntos de datos basados en un modelo AR(4) con una relación SNR $= 20$ dB y $\Delta f = 0.13$. Observe que el método de Yule–Walker proporciona un estimado espectral extremadamente suave (disperso) con picos pequeños. Si se disminuye Δf a $\Delta f = 0.07$, el método de Yule–Walker ya no resuelve los picos como se muestra en la Figura 14.3.2. En el método de Burg también puede verse un cierto sesgado. Por supuesto, aumentando el número de puntos de datos, el método de Yule–Walker puede resolver los picos. Sin embargo, los métodos de Burg y de mínimos cuadrados son claramente superiores para registros de datos cortos.

El efecto del ruido aditivo sobre el estimado se ilustra en la Figura 14.3.3 para el método de mínimos cuadrados. El efecto del orden del filtro sobre los métodos de Burg y de mínimos cuadrados se ilustra en las Figuras 14.3.4 y 14.3.5, respectivamente. Ambos métodos presentan picos espúreos cuando el orden se aumenta a $p = 12$.

El efecto de la fase inicial se ilustra en las Figuras 14.3.6 y 14.3.7 para los métodos de Burg y de mínimos cuadrados. Es evidente que el método de mínimos cuadrados presenta menos sensibilidad a la fase inicial que el algoritmo de Burg.

En la Figura 14.3.8 se muestra un ejemplo de división de las líneas espectrales para el método de Burg con $p = 12$. Esto no courre para el modelo AR(8). El método de mínimos cuadrados no presenta división de líneas bajo las mismas condiciones. Por otro lado, la división de líneas en el método de Burg desaparece cuando se aumenta el número de puntos de datos N.

Las Figuras 14.3.9 y 14.3.10 ilustran las propiedades de resolución de los métodos de Burg y de mínimos cuadrados para $\Delta f = 0.07$ y $N = 20$ puntos para una relación SNR (3 dB) baja. Puesto que el proceso de ruido aditivo es de tipo ARMA, se necesita un modelo AR de orden superior para proporcionar una buena aproximación a la relación SNR baja. Por tanto, la resolución en frecuencia mejora cuando el orden aumenta.

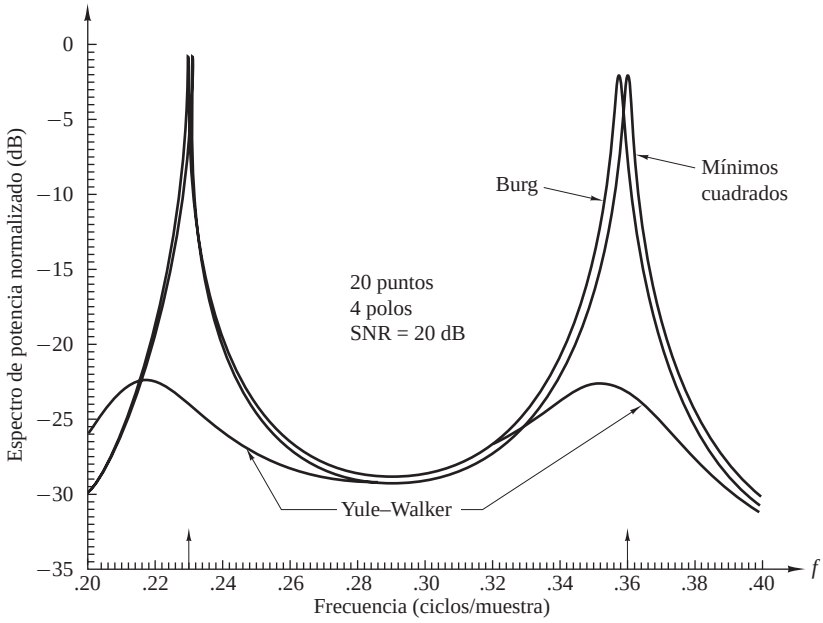


Figura 14.3.1. Comparación de los métodos de estimación del espectro AR.

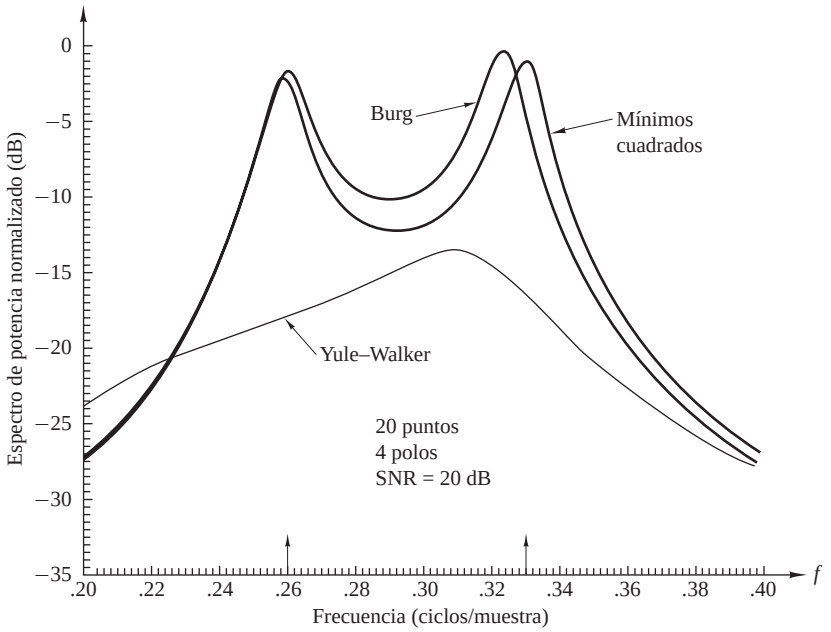


Figura 14.3.2. Comparación de los métodos de estimación de espectros AR.

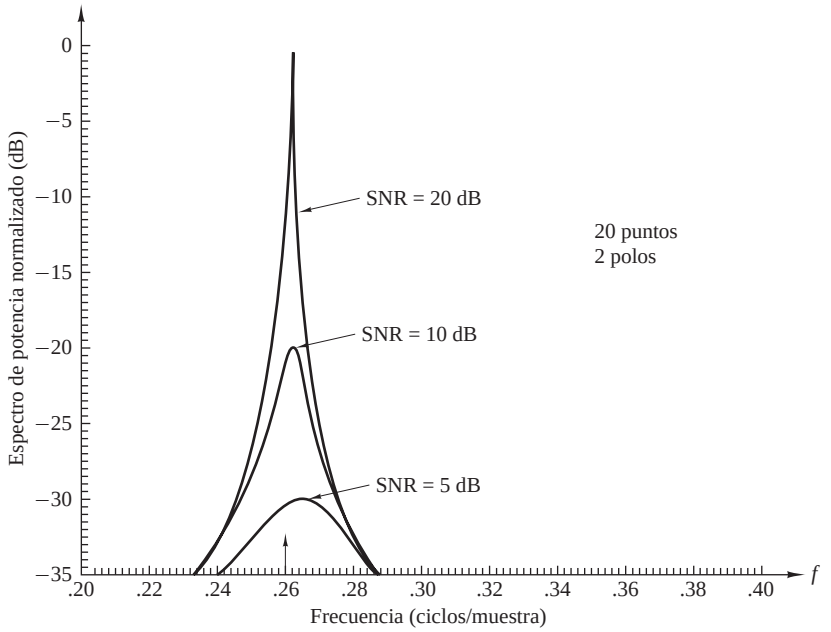


Figura 14.3.3. Efecto del ruido aditivo en el método de mínimos cuadrados.

En la Figura 14.3.11 se muestra el error de predicción final (EPF) para el método de Burg para una relación SNR= 3 dB. Para esta SNR el valor óptimo es $p = 12$ según el criterio del error de predicción final.

Los métodos de Burg y de mínimos cuadrados también han sido probados con datos procedentes de un proceso de banda estrecha, obtenidos excitando un filtro de banda estrecha de cuatro polos (dos parejas de

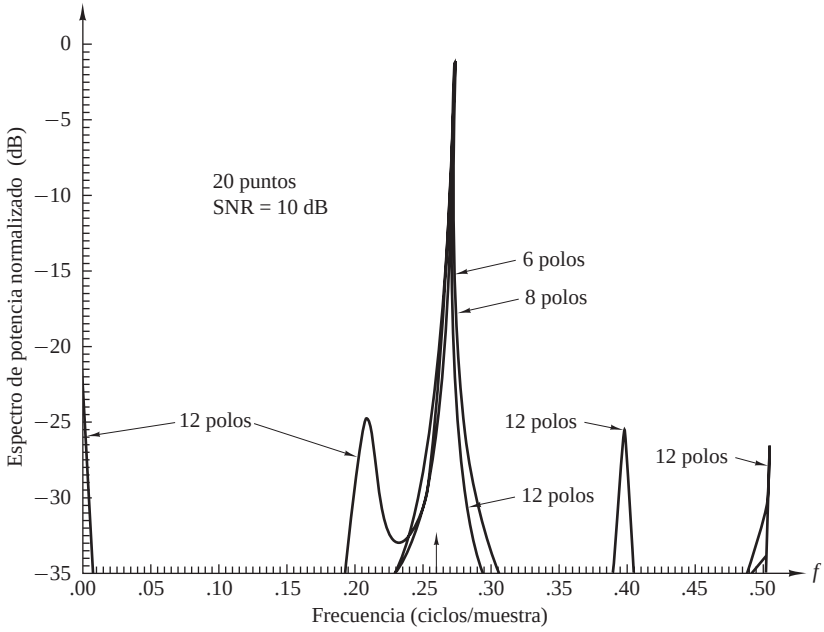


Figura 14.3.4. Efecto del orden del filtro en el método de Burg.

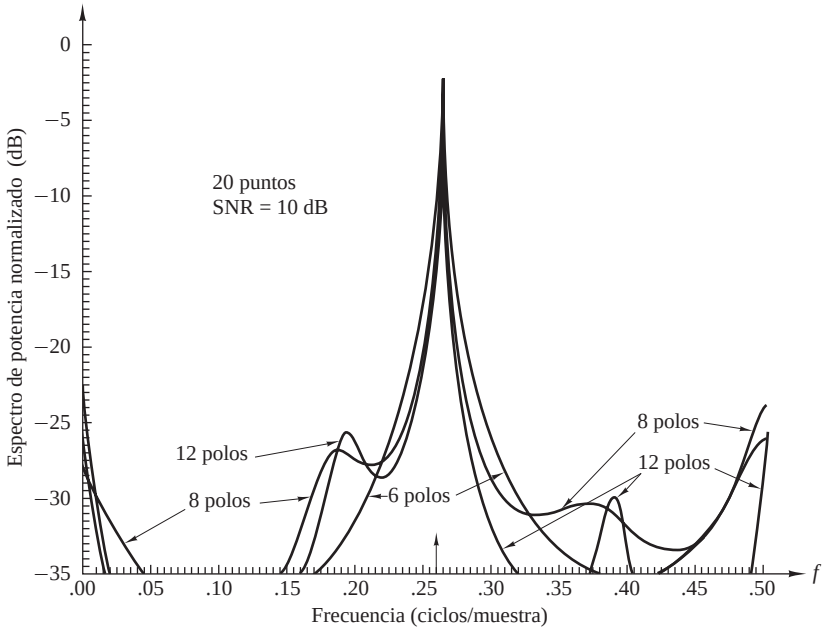


Figura 14.3.5. Efecto del orden del filtro en el método de mínimos cuadrados.

polos complejos conjugados) y seleccionando una parte de la secuencia de salida para el registro de datos. La Figura 14.3.12 ilustra la superposición de 20 registros de datos de 20 puntos cada uno. Observe que aparece una variabilidad relativamente pequeña. En contraste, el método de Burg presentaba una variabilidad mucho

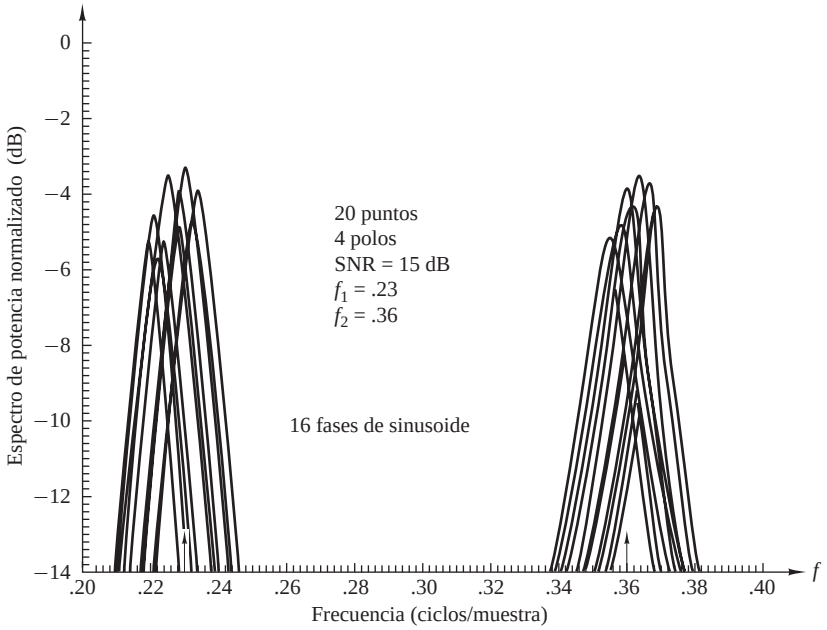


Figura 14.3.6. Efecto de la fase inicial en el método de Burg.

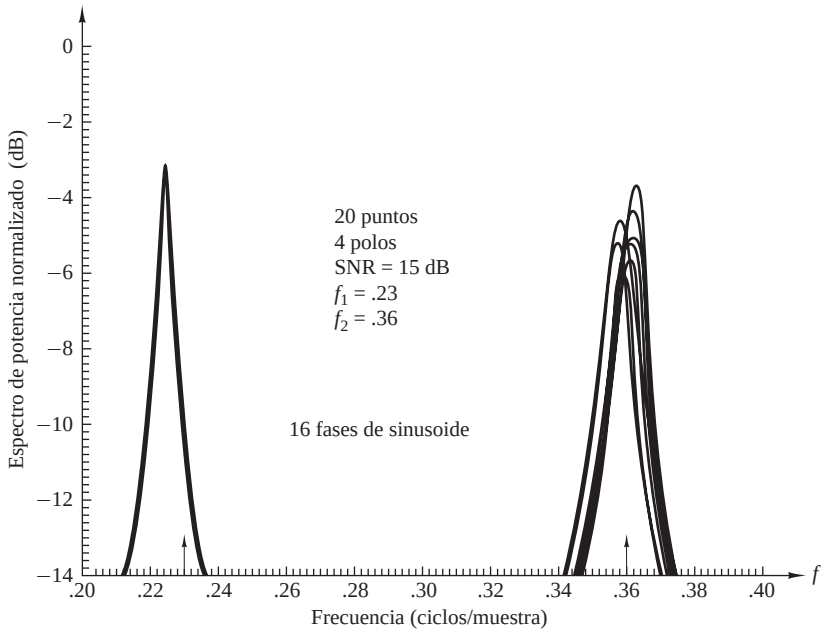


Figura 14.3.7. Efecto de la fase inicial en el método de mínimos cuadrados.

mayor, aproximadamente en un factor de 2, comparada con el método de mínimos de cuadrados. Los resultados mostrados en las Figuras 14.3.1 hasta 14.3.12 están tomadas de Poole (1981).

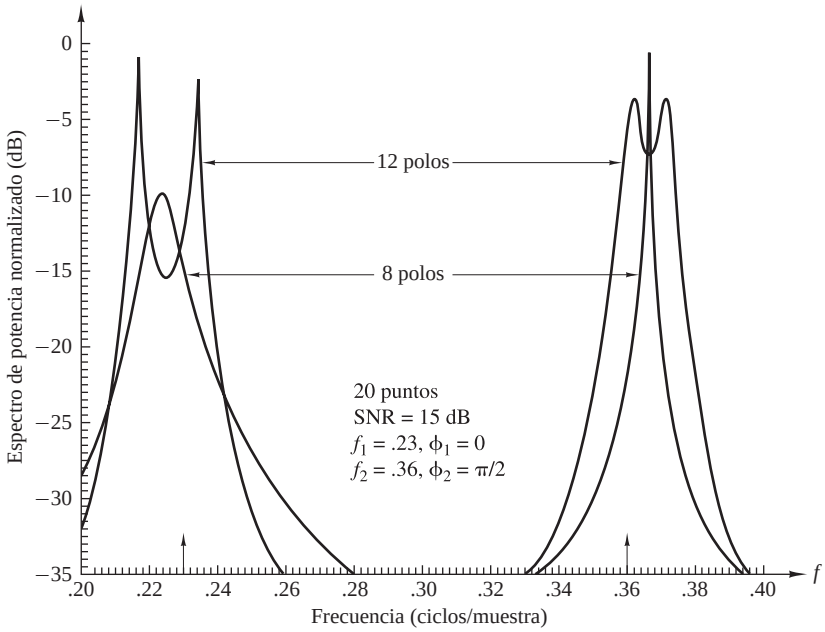


Figura 14.3.8. División de líneas en el método de Burg.

Por último, en la Figura 14.3.13 se muestran los estimados espectrales ARMA$(10, 10)$ obtenidos por Kay (1980) para dos sinusoides de ruido utilizando el método ARMA de mínimos cuadrados descrito en la Sección 14.3.8, como ilustración de la calidad de la estimación del espectro de potencia obtenido con el modelo ARMA.

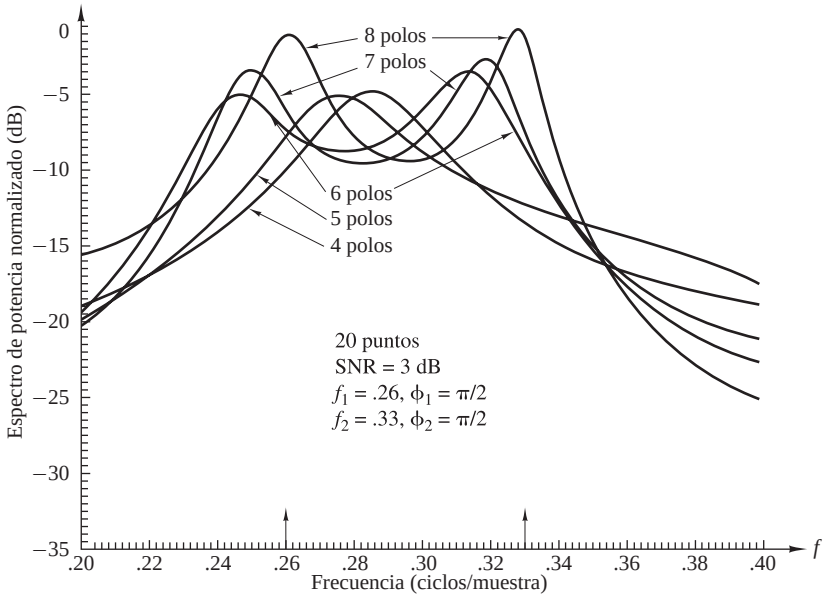


Figura 14.3.9. Resolución en frecuencia del método de Burg con $N = 20$ puntos.

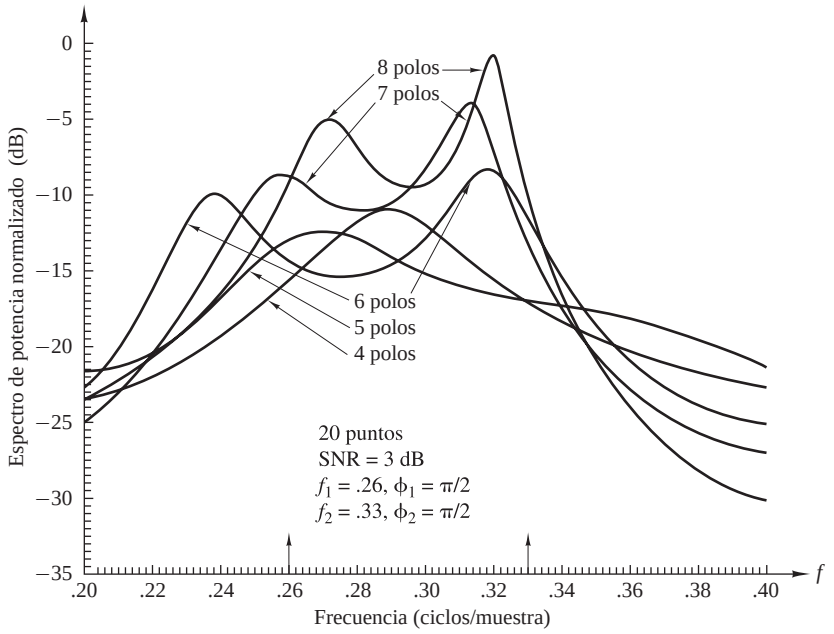


Figura 14.3.10. Resolución en frecuencia del método de mínimos cuadrados con $N = 20$ puntos.

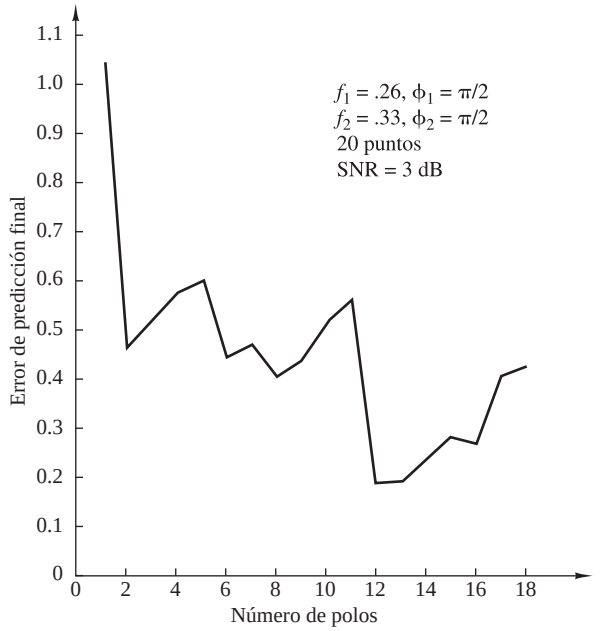


Figura 14.3.11. Error de predicción final para el estimado de Burg.

14.4 Métodos basados en bancos de filtros

En esta sección consideramos la estimación del espectro de potencia de una señal $\{x(n)\}$ filtrando $\{x(n)\}$ mediante un banco paralelo de filtros FIR sintonizados a las frecuencias deseadas y rectificando las salidas del

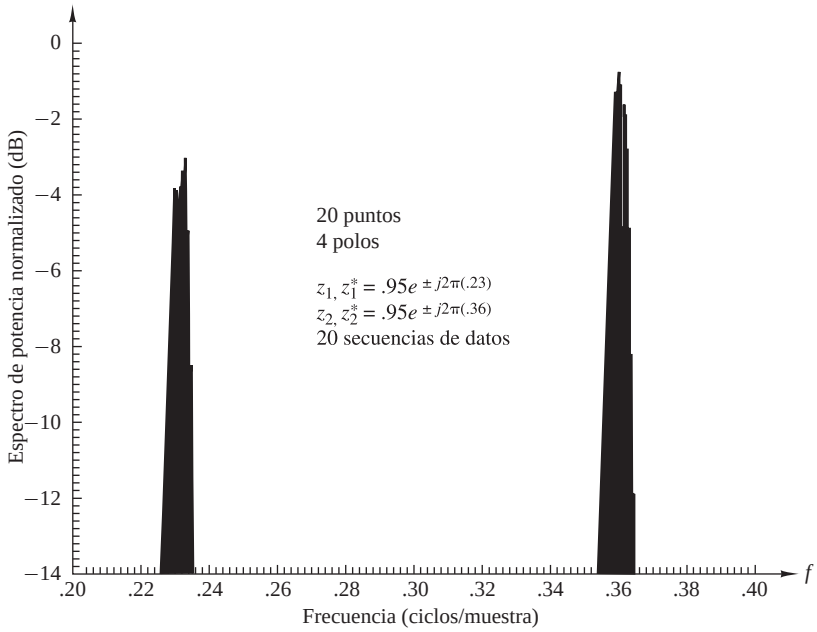


Figura 14.3.12. Efecto del punto de inicio de la secuencia sobre el método de mínimos cuadrados.

filtro. Por tanto, un estimado del espectro de potencia a una determinada frecuencia se obtiene como se ilustra en el sistema mostrado en la Figura 14.4.1.

Comenzamos demostrando que el periodograma convencional puede calcularse utilizando un banco de filtros, donde los filtros FIR funcionan básicamente como ventanas rectangulares sobre la señal $\{x(n)\}$. A continuación describimos un método para diseñar los filtros que explotan las características de los datos. Este método lleva a un método de estimación espectral de alta resolución que se adapta a los datos.

14.4.1 Realización mediante banco de filtros del periodograma

El estimado del espectro de potencia a una determinada frecuencia $f_k = k/N$ que se obtiene a partir del periodograma es

$$\begin{aligned} P_{xx}(f_k) &= \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi f_k n}\right|^2 \\ &= \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{j2\pi f_k (N-n)}\right|^2 \end{aligned} \tag{14.4.1}$$

donde $\{x(n), 0 \le n \le N-1\}$ es la señal. Siguiendo un método similar al desarrollo del algoritmo de Goertzel (Sección 8.3.1), definimos un filtro lineal con la respuesta al impulso.

$$h_k(n) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j2\pi f_k n}, & n \ge 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \tag{14.4.2}$$

A continuación, después de sustituir $h_k(n)$ en la Ecuación (14.4.1), obtenemos el estimado espectral de potencia en f_k como

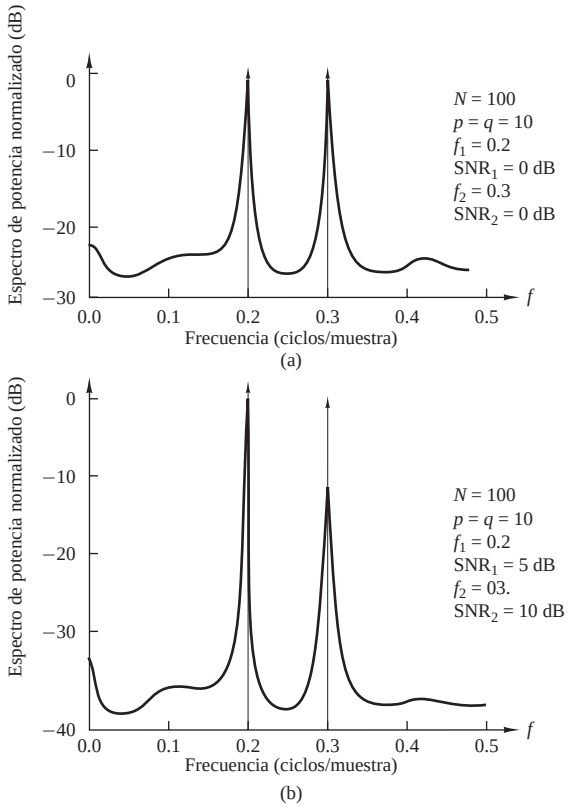


Figura 14.3.13. Estimados del espectro de potencia ARMA (10, 10) tomados de las publicaciones de Kay (1980). Reimpreso con permiso del IEEE.

$$P_{xx}(f) = \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) h_k(N-n) \right|^2 = \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) h_k(l-n) \right|^2_{l=N} \tag{14.4.3}$$

Luego, el estimado espectral de potencia en $f = f_k = k/N$ puede obtenerse pasando la señal $\{x(n), 0 \le n \le N-1\}$ a través de un filtro FIR lineal con la respuesta al impulso $h_k(n)$, definida de acuerdo con la Ecuación (14.4.2), evaluando la salida del filtro en $l = N$, y calculando el módulo al cuadrado de la salida del filtro.

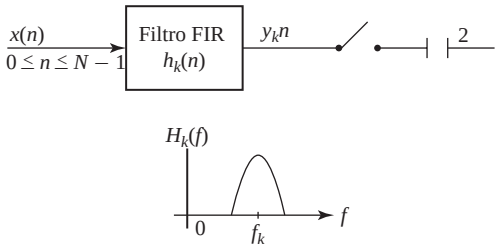


Figura 14.4.1. Medida de la potencia de la señal a una frecuencia en las vecindades de f_k.

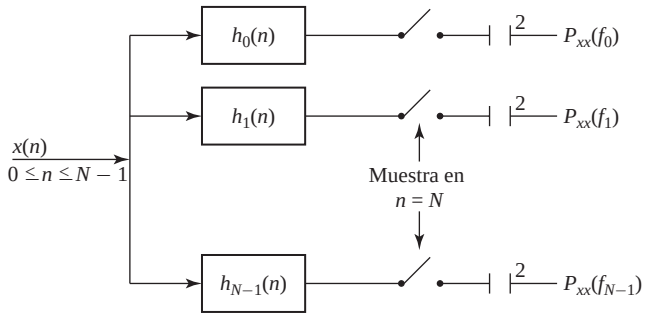


Figura 14.4.2. Implementación del banco de filtros del estimador del periodograma.

La función de sistema del filtro es

$$\begin{aligned} H_k(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h_k(n) z^{-n} \\ &= \frac{1/\sqrt{N}}{1 - e^{j2\pi f_k} z^{-1}} \end{aligned} \tag{14.4.4}$$

Este filtro es un filtro de un solo polo con el mismo situado sobre la circunferencia unidad, en el punto correspondiente a la frecuencia f_k.

El desarrollo anterior sugiere que el periodograma puede calcularse mediante el filtrado lineal de la señal $\{x(n), 0 \le n \le N-1\}$ empleando un banco de filtros paralelo con respuestas al impulso $\{h_k(n), 0 \le n \le N-1\}$, como se muestra en la Figura 14.4.2. El ancho de banda a 3-dB de cada uno de estos filtros es aproximadamente $1/N$ ciclos por intervalo de muestra.

En la Figura 14.4.3 se muestra otra implementación del banco de filtros equivalente que genera el periodograma. En este banco de filtros, la señal $\{x(n), 0 \le n \le N-1\}$ se multiplica por los factores exponenciales $\{e^{-j2\pi kn/N}, 0 \le k \le N-1\}$ y cada producto resultante se pasa a través de un filtro paso bajo rectangular cuya respuesta al impulso es

$$h_0(n) = \begin{cases} 1/\sqrt{N}, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{14.4.5}$$

y cuya salida compleja en $l = N-1$ es una magnitud cuadrática que proporciona el estimado espectral en la frecuencia correspondiente $f = f_k$. Podemos denominar a este estimado espectral *periodograma no enventanado*.

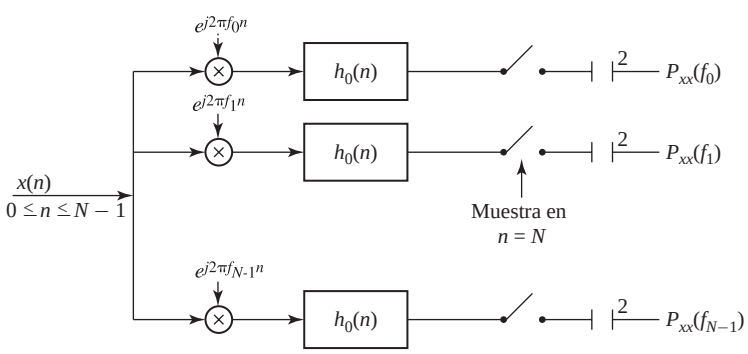


Figura 14.4.3. Implementación del banco de filtros alternativa del estimador del periodograma.

Podemos reemplazar la ventana rectangular de la Figura 14.4.3 por otra ventana temporal $h_0(n)$, por ejemplo una ventana de Bartlett, de Hamming o de Kaiser que tenga la misma duración temporal $0 \leq n \leq N-1$. Esto generará un *periodograma enventanado*, que se puede expresar como

$$P_{xx}(f) = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=1}^{N-1} x(n)e^{j2\pi fn}h_0(N-n)\right|^2 \tag{14.4.6}$$

Aplicar una función de ventana a la señal es similar al método de Welch. Sin embargo, en el caso anterior, la función de ventana se aplica a cada uno de los diversos segmentos de la secuencia de datos y los periodogramas enventanados de cada segmento individual se promedian. En consecuencia, la variabilidad del estimado espectral obtenido por el método de Welch es significativamente menor que la variabilidad del estimado espectral obtenido por el periodograma enventanado de la Ecuación (14.4.6). Por otro lado, la resolución resultante del periodograma enventanado es mayor que la resolución obtenida con el método de Welch. Como hemos observado al tratar los métodos no paramétricos, existe un compromiso entre la resolución en frecuencia y la varianza de los estimados espectrales. Segmentando la señal en varias secuencias más pequeñas, calculando el periodograma enventanado (modificado) para cada una de las subsecuencias y, por último, promediando los periodogramas enventandos, podíamos reducir la varianza del estimado a costa de disminuir la resolución en frecuencia.

La interpretación del banco de filtros del periodograma nos lleva a considerar otras características del filtro que pueden dar lugar a estimados espectrales de alta resolución. Observe que los filtros utilizados en las implementaciones de bancos de filtros mostradas en las Figuras 14.4.2 y 14.4.3 no se han optimizado de ninguna manera. Por tanto, podemos decir que los filtros se han seleccionado sin tener en cuenta las características de los datos (es decir, los filtros utilizados son independientes de los datos). En la siguiente sección, describimos una implementación de un banco de filtros del estimador espectral desarrollada por Capon (1969), en la que los filtros se han diseñado basándose en las características estadísticas de los datos (es decir, las respuestas al impulso del filtro están adaptadas a las características de los datos).

14.4.2 Estimados espectrales de varianza mínima

El estimador espectral propuesto por Capon (1969) tenía el objetivo de utilizarse en matrices de datos sísmicos grandes para estimar el número de onda. Más tarde fue adaptado por Lacoss (1971) para realizar la estimación del espectro de series temporales simples, quien demostró que el método proporcionaba un estimado insesgado de varianza mínima de las componentes espectrales de la señal. Este estimador también se conoce como "estimador espectral de probabilidad máxima", porque el método de diseño del filtro produce el estimado espectral insesgado de varianza mínima cuando la señal se distorsiona con un ruido gaussiano aditivo.

Siguiendo el desarrollo de Lacoss, consideremos el diseño de un filtro FIR de coeficientes $h(k)$, $0 \leq k \leq p$, que se tiene que determinar. Si a continuación observamos los datos $x(n)$, $0 \leq n \leq N-1$, después de pasar a través del filtro, la respuesta es

$$y(n) = \sum_{k=0}^{p} h(k)x(n-k) \equiv \mathbf{X}^t(n)\mathbf{h} \tag{14.4.7}$$

donde $\mathbf{X}^t(n) = [x(n) \quad x(n-1) \quad \cdots \quad x(n-p)]$ es el vector de datos y $\mathbf{h}$ es el vector de coeficientes del filtro. Si suponemos que $E[x(n)] = 0$, la varianza de la secuencia de salida es

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= E[|y(n)|^2] = E[\mathbf{h}^H\mathbf{X}^*(n)\mathbf{X}^t(n)\mathbf{h}] \\ &= \mathbf{h}^H\Gamma_{xx}\mathbf{h} \end{aligned} \tag{14.4.8}$$

donde Γ_{xx} es la matriz de autocorrelación de la secuencia $x(n)$, con elementos $\gamma_{xx}(m)$.

Los coeficientes del filtro se seleccionan de manera que en la frecuencia f_l, la respuesta en frecuencia del filtro FIR esté normalizada a la unidad, es decir,

$$\sum_{k=0}^{p} h(k)e^{-j2\pi k f_l} = 1$$

Esta restricción también se puede escribir en forma matricial como

$$\mathbf{E}^H(f_l)\mathbf{h} = 1 \tag{14.4.9}$$

donde

$$\mathbf{E}^t(f_l) = [1 \quad e^{j2\pi f_l} \quad \cdots \quad e^{j2\pi p f_l}]$$

Minimizando la varianza σ_y^2 sujeta a la restricción dada por (14.4.9), obtenemos un filtro FIR que deja pasar la componente en frecuencia f_l no distorsionada, mientras que atenua severamente las componentes alejadas de f_l. El resultado de esta minimización nos lleva al vector de coeficientes

$$\hat{\mathbf{h}}_{\text{opt}} = \Gamma_{xx}^{-1}\mathbf{E}(f_l)/\mathbf{E}^H(f_l)\Gamma_{xx}^{-1}\mathbf{E}(f_l) \tag{14.4.10}$$

Si $\hat{\mathbf{h}}$ se sustituye en (14.4.8), obtenemos la varianza mínima

$$\sigma_{\min}^2 = \frac{1}{\mathbf{E}^H(f_l)\Gamma_{xx}^{-1}\mathbf{E}(f_l)} \tag{14.4.11}$$

La expresión dada en (14.4.11) es el estimado del espectro de potencia de varianza mínima a la frecuencia f_l. Cambiando f_l en el intervalo $0 \leq f_l \leq 0.5$, podemos obtener el estimado del espectro de potencia. Por tanto, el método de la varianza mínima consiste básicamente en una implementación de un banco de filtros para el estimador del espectro. Difiere fundamentalmente de la interpretación del banco de filtro del periodograma en que los coeficientes del filtro en el método de Capon están optimizados. Debemos destacar que aunque $\mathbf{E}(f)$ cambia con la elección de la frecuencia, Γ_{xx}^{-1} se calcula una sola vez. Como demostró Lacoss (1971), el cálculo de la forma cuadrática $\mathbf{E}^H(f)\Gamma_{xx}^{-1}\mathbf{E}(f)$ puede hacerse con una única DFT.

Con un estimado $\mathbf{R}_{xx}$ de la matriz de autocorrelación en lugar de Γ_{xx}, obtenemos el estimado del espectro de potencia de varianza mínima de Capon como

$$P_{xx}^{\text{MV}}(f) = \frac{1}{\mathbf{E}^H(f)\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{E}(f)} \tag{14.4.12}$$

Lacoss (1971) demostró que este estimador del espectro de potencia proporciona estimados de los picos espectrales proporcionales a la potencia en dicha frecuencia. En constraste, los métodos AR descritos en la Sección 14.3 dan lugar a estimados de los picos espectrales proporcionales al cuadrado de la potencia en dicha frecuencia.

Lacoss (1971) y otros han realizado experimentos sobre el rendimiento de este método comparado con el rendimiento del método de Burg. Por ejemplo, la Figura 14.4.4, tomada de publicaciones de Lacoss (1971), ilustra una comparación de tres estimados espectrales, el estimado de Bartlett, el estimado de varianza mínima y el estimado de Burg para una señal que contiene dos picos de banda estrecha a las frecuencias de 0.15 y 0.30. Esta figura ilustra que el estimador espectral de varianza mínima proporciona un estimado espectral mejor que el estimado de Bartlett, pero un estimado más pobre comparado con el estimado de Burg. El espectro de potencia real de la señal también se muestra en esta figura. En general, el estimado de varianza mínima dado en (14.4.12) sobrepasa los estimadores espectrales no paramétricos en resolución de frecuencia, pero no

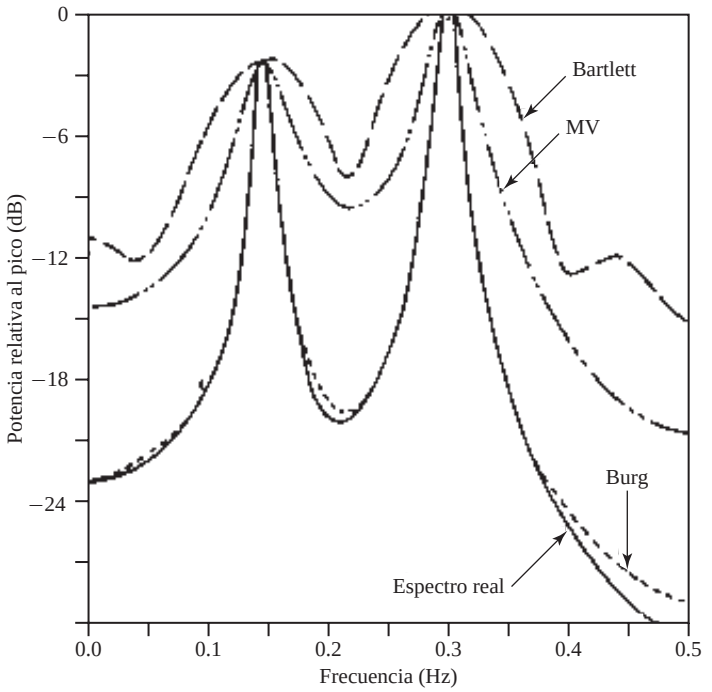


Figura 14.4.4. Comparación de tres estimados espectrales (Barlett, varianza mínima (MV) y Burg) para una señal con dos picos de banda estrecha a las frecuencias de 0.15 y 0.30. (Tomadas de R.I. Lacoss, "Data Adaptive Spectral Analysis Methods," *Geophysics*, Vol. 36, págs. 661–675, agosto 1971. Reproducida con su permiso).

proporciona la resolución en alta frecuencia obtenida con los métodos AR de Burg y de mínimos cuadrados no restringido. Además, Burg (1972) demostró que para una secuencia de correlación conocida, el espectro de varianza mínima está relacionado con el espectro del modelo AR a través de la ecuación

$$\frac{1}{\Gamma_{xx}^{\mathrm{MV}}(f)} = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{\Gamma_{xx}^{\mathrm{AR}}(f,k)} \tag{14.4.13}$$

donde $\Gamma_{xx}^{\mathrm{AR}}(f,k)$ es el espectro de potencia AR obtenido con un modelo AR(k). Por tanto, el recíproco del estimado de varianza mínima es igual a la media de los recíprocos de todos los espectros obtenidos con modelos AR(k) para $1 \leq k \leq p$. Puesto que los modelos AR de orden inferior, en general, no proporcionan una buena resolución, la operación de promediado dada en (14.4.13) reduce la resolución en frecuencia del estimado espectral. Por tanto, concluimos que el estimado del espectro de potencia AR de orden p es superior al estimado de varianza mínima de orden $p+1$.

La relación dada por (14.4.13) representa una relación en el dominio de la frecuencia entre el estimado de varianza mínima de Capon y el estimado AR de Burg. También puede establecerse una relación en el dominio del tiempo entre estos dos estimados como demostró Musicus (1985). Ésta ha llevado a un algoritmo de cálculo eficiente para el estimado de varianza mínima.

Pueden encontrarse en la literatura técnica otras referencias al método de Capon y comparaciones con otros estimadores. Podemos citar las publicaciones de Capon y Goodman (1971), Marzetta (1983), Marzetta y Lang (1983, 1984), Capon (1983) y McDonough (1983).

14.5 Algoritmos de autoanálisis para la estimación del espectro

En la Sección 14.3.8 hemos demostrado que un proceso AR(p) distorsionado por ruido (blanco) aditivo es equivalente a un proceso ARMA(p,p). En esta sección vamos a considerar el caso especial en el que las componentes de la señal son sinusoides distorsionadas por ruido blanco aditivo. Los algoritmos están basados en una auto-descomposición de la matriz de correlación de la señal distorsionada por el ruido.

Recordemos de la explicación proporcionada sobre la generación de sinusoides en el Capítulo 5, que una señal sinusoidal real puede generarse mediante la ecuación en diferencias,

$$x(n) = -a_1 x(n-1) - a_2 x(n-2) \tag{14.5.1}$$

donde $a_1 = 2\cos 2\pi f_k$, $a_2 = 1$, e inicialmente, $x(-1) = -1$, $x(-2) = 0$. Este sistema tiene una pareja de polos complejos conjugados (en $f = f_k$ y $f = -f_k$) y, por tanto, genera la sinusoide $x(n) = \cos 2\pi f_k n$, para $n \geq 0$.

En general, una señal que consta de p componentes sinusoidales satisface la ecuación en diferencias

$$x(n) = -\sum_{m=1}^{2p} a_m x(n-m) \tag{14.5.2}$$

y corresponde al sistema cuya función de sistema es

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{m=1}^{2p} a_m z^{-m}} \tag{14.5.3}$$

El polinomio

$$A(z) = 1 + \sum_{m=1}^{2p} a_m z^{-m} \tag{14.5.4}$$

tiene $2p$ raíces sobre la circunferencia unidad que corresponden a las frecuencias de las sinusoides.

Supongamos ahora que las sinusoides son distorsionadas por una secuencia de ruido blanco $w(n)$ con $E[|w(n)|^2] = \sigma_w^2$. A continuación observamos que

$$y(n) = x(n) + w(n) \tag{14.5.5}$$

Si sustituimos $x(n) = y(n) - w(n)$ en (14.5.2), obtenemos

$$y(n) - w(n) = -\sum_{m=1}^{2p} [y(n-m) - w(n-m)] a_m$$

o lo que es equivalente,

$$\sum_{m=0}^{2p} a_m y(n-m) = \sum_{m=0}^{2p} a_m w(n-m) \tag{14.5.6}$$

donde, por definición, $a_0 = 1$.

Observe que (14.5.6) es la ecuación en diferencias para un proceso ARMA$(2p,2p)$ en el que tanto los parámetros AR como MA son idénticos. Esta simetría es una característica de las señales sinusoidales con ruido blanco. La ecuación en diferencias dada en (14.5.6) puede expresarse en forma matricial como

$$\mathbf{Y}^t \mathbf{a} = \mathbf{W}^t \mathbf{a} \tag{14.5.7}$$

donde $\mathbf{Y}^t = [y(n) \quad y(n-1) \quad \cdots \quad y(n-2p)]$ es el vector de datos observados de dimensión $(2p+1)$, $\mathbf{W}^t = [w(n) \quad w(n-1) \quad \cdots \quad w(n-2p)]$ es el vector de ruido y $\mathbf{a} = [1 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_{2p}]$ es el vector de coeficientes.

Si premultiplicamos (14.5.7) por $\mathbf{Y}$ y tomamos el valor esperado, obtenemos

$$\begin{aligned} E(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^t)\mathbf{a} &= E(\mathbf{Y}\mathbf{W}^t)\mathbf{a} = E[(\mathbf{X}+\mathbf{W})\mathbf{W}^t]\mathbf{a} \\ \Gamma_{yy}\mathbf{a} &= \sigma_w^2\mathbf{a} \end{aligned} \tag{14.5.8}$$

donde hemos utilizado la suposición de que la secuencia $w(n)$ tiene media cero y es ruido blanco, y que $\mathbf{X}$ es una señal determinística.

La ecuación dada en (14.5.8) tiene la forma de una autoecuación, es decir,

$$(\Gamma_{yy} - \sigma_w^2\mathbf{I})\mathbf{a} = \mathbf{0} \tag{14.5.9}$$

donde σ_w^2 es un autovalor de la matriz de autocorrelación Γ_{yy}. Luego el vector de parámetros $\mathbf{a}$ es un autovector asociado con el autovalor σ_w^2. La autoecuación dada en (14.5.9) define las bases del método de descomposición armónica de Pisarenko.

14.5.1 Método de descomposición armónica de Pisarenko

Para p sinusoides de fases aleatorias en ruido blanco aditivo, los valores de la autocorrelación son

$$\begin{aligned} \gamma_{yy}(0) &= \sigma_w^2 + \sum_{i=1}^{p} P_i \\ \gamma_{yy}(k) &= \sum_{i=1}^{p} P_i \cos 2\pi f_i k, \qquad k \neq 0 \end{aligned} \tag{14.5.10}$$

donde $P_i = A_i^2/2$ es la potencia media de la sinusoide i y A_i es la correspondiente amplitud. Por tanto, podemos escribir

$$\begin{bmatrix} \cos 2\pi f_1 & \cos 2\pi f_2 & \cdots & \cos 2\pi f_p \\ \cos 4\pi f_1 & \cos 4\pi f_2 & \cdots & \cos 4\pi f_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos 2\pi p f_1 & \cos 2\pi p f_2 & \cdots & \cos 2\pi p f_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{yy}(1) \\ \gamma_{yy}(2) \\ \vdots \\ \gamma_{yy}(p) \end{bmatrix} \tag{14.5.11}$$

Si conocemos las frecuencias f_i, $1 \leq i \leq p$, podemos utilizar esta ecuación para determinar las potencias de las sinusoides. En lugar de $\gamma_{xx}(m)$, utilizamos los estimados $r_{xx}(m)$. Una vez que se conocen las potencias, la varianza de ruido puede obtenerse a partir de (14.5.10) como sigue

$$\sigma_w^2 = r_{yy}(0) - \sum_{i=1}^{p} P_i \tag{14.5.12}$$

El problema que todavía queda es determinar las p frecuencias f_i, $1 \leq i \leq p$, las cuales, a su vez, requieren que se conozca el autovector $\mathbf{a}$ correspondiente al autovalor σ_w^2. Pisarenko (1973) observó [*véase* también Papoulis (1984) y Grenander y Szegö (1958)] que para un proceso ARMA que conste de p sinusoides en ruido blanco aditivo, la varianza σ_w^2 corresponde al autovalor mínimo de Γ_{yy} cuando la dimensión de la matriz de autocorrelación es igual o mayor que $(2p+1) \times (2p+1)$. El vector de coeficientes ARMA corresponde con el autovector asociado con el autovalor mínimo. Por tanto, las frecuencias f_i, $1 \leq i \leq p$ se obtienen a partir

de las raíces del polinomio dado en (14.5.4), donde los coeficientes son los elementos del autovector **a**, que corresponde al autovalor mínimo σ_w^2.

En resumen, el método de descomposición armónica de Pisarenko tiene las siguientes partes. En primer lugar, estimamos Γ_{yy} a partir de los datos (es decir, formamos la matriz de autocorrelación $\mathbf{R}_{yy}$). Luego hallamos el autovalor mínimo y el correspondiente autovector mínimo. El autovector mínimo proporciona los parámetros del modelo ARMA$(2p, 2p)$. A partir de (14.5.4) podemos calcular las raíces que constituyen las frecuencias $\{f_i\}$. Utilizando estas frecuencias, podemos resolver (14.5.11) para las potencias de señal $\{P_i\}$ sustituyendo los estimados $r_{yy}(m)$ para $\gamma_{yy}(m)$.

Como veremos en el ejemplo siguiente, el método de Pisarenko está basado en el uso de un autovector del subespacio de ruido para estimar las frecuencias de las sinusoides.

EJEMPLO 14.5.1

Suponga que disponemos de los valores de la autocorrelación $\gamma_{yy}(0) = 3$, $\gamma_{yy}(1) = 1$ y $\gamma_{yy}(2) = 0$ para un proceso que consta de una sola sinusoide distorsionada con ruido blanco aditivo. Determine la frecuencia, su potencia y la varianza del ruido aditivo.

Solución. La matriz de correlación es

$$\Gamma_{yy} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

El autovalor mínimo es la raíz más pequeña del polinomio característico

$$g(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 7) = 0$$

Por tanto, los autovalores son $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 3+\sqrt{2}, \lambda_3 = 3-\sqrt{2}$.

La varianza del ruido es

$$\sigma_w^2 = \lambda_{\min} = 3 - \sqrt{2}$$

El autovalor correspondiente es el vector que satisface (14.5.9), es decir,

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solución es $a_1 = -\sqrt{2}$ y $a_2 = 1$.

El siguiente paso consiste en utilizar los valores a_1 y a_2 para determinar las raíces del polinomio dado en (14.5.4). Tenemos

$$z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$$

Por tanto,

$$z_1, z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Observe que $|z_1| = |z_2| = 1$, por lo que las raíces se encuentran sobre la circunferencia unidad. La frecuencia correspondiente se obtiene a partir de

$$z_i = e^{j2\pi f_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

que proporciona $f_1 = \dfrac{1}{8}$. Por último, la potencia de la sinusoide es

$$\begin{aligned} P_1 \cos 2\pi f_1 &= \gamma_{yy}(1) = 1 \\ P_1 &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

y su amplitud es $A = \sqrt{2P_1} = \sqrt{2\sqrt{2}}$.

Como comprobación de los cáculos, tenemos

$$\begin{aligned}\sigma_w^2 &= \gamma_{yy}(0) - P_1 \\ &= 3 - \sqrt{2}\end{aligned}$$

lo que está de acuerdo con $\lambda_{\min}$.

14.5.2 Autodescomposición de la matriz de autocorrelación para sinusoides en ruido blanco

En la exposición anterior hemos supuesto que la señal sinusoidal constaba de p sinusoides reales. Por comodidad matemática, ahora supondremos que la señal consta de p sinusoides complejas de la forma

$$x(n) = \sum_{i=1}^{p} A_i e^{j(2\pi f_i n + \phi_i)} \tag{14.5.13}$$

donde las amplitudes $\{A_i\}$ y las frecuencias $\{f_i\}$ son desconocidas y las fases $\{\phi_i\}$ son variables aleatorias estadísticamente independientes distribuidas en el intervalo $(0, 2\pi)$. En este caso, el proceso aleatorio $x(n)$ es estacionario en sentido amplio con una función de autocorrelación

$$\gamma_{xx}(m) = \sum_{i=1}^{p} P_i e^{j2\pi f_i m} \tag{14.5.14}$$

donde, para las sinusoides complejas, $P_i = A_i^2$ es la potencia de la sinusoide i.

Dado que la secuencia observada es $y(n) = x(m) + w(n)$, donde $w(n)$ es una secuencia de ruido blanco con densidad espectral σ_w^2, la función de autocorrelación para $y(n)$ es

$$\gamma_{yy}(m) = \gamma_{xx}(m) + \sigma_w^2 \delta(m), \qquad m = 0, \pm 1, \ldots, \pm(M-1) \tag{14.5.15}$$

Por tanto, la matriz de autocorrelación $M \times M$ para $y(n)$ se puede expresar como

$$\Gamma_{yy} = \Gamma_{xx} + \sigma_w^2 \mathbf{I} \tag{14.5.16}$$

done Γ_{xx} es la matriz de autocorrelación para la señal $x(n)$ y $\sigma_w^2 \mathbf{I}$ es la matriz de autocorrelación para el ruido. Observe que si seleccionamos $M > p$, Γ_{xx}, que es de dimensión $M \times M$, no abarca el rango completo, ya que su rango es p. Sin embargo, Γ_{yy} es de rango completo porque $\sigma_w^2 \mathbf{I}$ es de rango M.

De hecho, la matriz de la señal Γ_{xx} puede representarse como

$$\Gamma_{xx} = \sum_{i=1}^{p} P_i \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^H \tag{14.5.17}$$

donde H designa la transpuesta conjugada y $\mathbf{s}_i$ es un vector de señal de dimensión M definida como

$$\mathbf{s}_i = [1, e^{j2\pi f_i}, e^{j4\pi f_i}, \ldots, e^{j2\pi(M-1) f_i}] \tag{14.5.18}$$

Dado que cada vector (producto de salida) $\mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^H$ es una matriz de rango 1 y puesto que hay p productos, la matriz Γ_{xx} tiene rango p. Observe que si las sinusoides fueran reales, la matriz de correlación Γ_{xx} tendría el rango $2p$.

Realicemos ahora la autodescomposición de la matriz Γ_{yy}. Los autovalores $\{\lambda_i\}$ se ordenan en valor decreciente con $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots \geq \lambda_M$ y sean los autovectores correspondientes designados como $\{\mathbf{v}_i, i = 1, \ldots, M\}$. Suponemos que los autovectores están normalizados de modo que $\mathbf{v}_i^H \cdot \mathbf{v}_j = \delta_{ij}$. En ausencia de ruido, los autovalores λ_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, son distintos de cero siempre que $\lambda_{p+1} = \lambda_{p+2} = \cdots = \lambda_M = 0$. Además, se deduce que la matriz de correlación de la señal puede expresarse de la manera siguiente

$$\Gamma_{xx} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \tag{14.5.19}$$

Por tanto, los autovectores $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$ extienden el subespacio de señal cuando lo hacen los vectores de señal $\mathbf{s}_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Estos p autovectores para el subespacio de señal son los *autovectores principales* y los correspondientes autovalores son los *autovalores principales*.

En presencia de ruido, la matriz de autocorrelación del ruido dada en (14.5.16) se puede representar como

$$\sigma_w^2 \mathbf{I} = \sigma_w^2 \sum_{i=1}^{M} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \tag{14.5.20}$$

Sustituyendo (14.5.19) y (14.5.20) en (14.5.16), obtenemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{yy} &= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H + \sum_{i=1}^{M} \sigma_w^2 \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \\ &= \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i + \sigma_w^2) \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H + \sum_{i=p+1}^{M} \sigma_w^2 \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \end{aligned} \tag{14.5.21}$$

Esta autodescomposición separa los autovectores en dos conjuntos. El conjunto $\{\mathbf{v}_i, i = 1, 2, \ldots, p\}$, que son los autovectores principales, extienden el subespacio de señal, mientras que el conjunto $\{\mathbf{v}_i, i = p+1, \ldots, M\}$, que son ortogonales a los autovectores principales, se dice que pertenecen al subespacio de ruido. Dado que los vectores de señal $\{\mathbf{s}_i, i = 1, 2, \ldots, p\}$ están en el subespacio de señal, se deduce que los $\{\mathbf{s}_i\}$ son simplemente combinaciones lineales de los autovectores principales y son también ortogonales a los vectores del subespacio de ruido.

En este contexto vemos que el método de Pisarenko está basado en una estimación de las frecuencias utilizando la propiedad de ortogonalidad entre los vectores de señal y los vectores del subespacio de ruido. Para sinusoides complejas, si seleccionamos $M = p + 1$ (para sinusoides reales seleccionamos $M = 2p + 1$), sólo existe un autovector en el subespacio de ruido (correspondiente al autovalor mínimo) que tiene que ser ortgonal a los vectores de señal. Luego tenemos

$$\mathbf{s}_i^H \mathbf{v}_{p+1} = \sum_{k=0}^{p} v_{p+1}(k+1) e^{-j2\pi f_i k} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, p \tag{14.5.22}$$

Pero (14.5.22) implica que las frecuencias $\{f_i\}$ pueden determinarse obteniendo los ceros del polinomio

$$V(z) = \sum_{k=0}^{p} v_{p+1}(k+1) z^{-k} \tag{14.5.23}$$

estando todos ellos sobre la circunferencia unidad. Los ángulos de estas raíces son $2\pi f_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$.

Cuando el número de sinusoides es desconocido, la determinación de p puede resultar complicada, especialmente si el nivel de la señal no es mucho mayor que el nivel de ruido. En teoría, si $M > p + 1$, existe una

multiplicidad $(M-p)$ del autovalor mínimo. Sin embargo, en la práctica, los $(M-p)$ autovalores más pequeños de $\mathbf{R}_{yy}$ probablemente serán diferentes. Calculando todos los autovalores es posible determinar p agrupando los $M-p$ autovalores más pequeños (ruido) en un conjunto y promediándolos para obtener un estimado de σ_w^2. A continuación, el valor medio puede emplearse en (14.5.9) junto con $\mathbf{R}_{yy}$ para determinar el correspondientes autovector.

14.5.3 Algoritmo MUSIC

El método de clasificación de señales múltiples (MUSIC, *multiple signal classification*) es también un estimador de frecuencia en el subespacio de ruido. Para desarrollar el método, consideremos en primer lugar el estimado espectral "ponderado"

$$P(f) = \sum_{k=p+1}^{M} w_k |\mathbf{s}^H(f)\mathbf{v}_k|^2 \tag{14.5.24}$$

donde $\{\mathbf{v}_k, k = p+1, \ldots, M\}$ son los autovectores del subespacio de ruido, $\{w_k\}$ son un conjunto de los pesos positivos y $\mathbf{s}(f)$ es el vector sinusoidal complejo

$$\mathbf{s}(f) = [1, e^{j2\pi f}, e^{j4\pi f}, \ldots, e^{j2\pi(M-1)f}] \tag{14.5.25}$$

Observe que en $f = f_i$, $\mathbf{s}(f_i) \equiv \mathbf{s}_i$, por lo que en cualquiera de las p componentes de frecuencia sinusoidales de la señal, tenemos

$$P(f_i) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, p \tag{14.5.26}$$

Por tanto, el recíproco de $P(f)$ es una función de la frecuencias con picos muy abruptos y proporciona un método para estimar las frecuencias de las componentes sinusoidales. Por tanto,

$$\frac{1}{P(f)} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{k=p+1}^{M} w_k \left|\mathbf{s}^H(f)\mathbf{v}_k\right|^2} \tag{14.5.27}$$

Aunque teóricamente $1/P(f)$ es infinita en $f = f_i$, en la práctica los errores de estimación dan lugar a valores finitos para $1/P(f)$ en todas las frecuencias.

El estimador de frecuencia sinusoidal MUSIC propuesto por Schmidt (1981, 1986) es un caso especial de (14.5.27) en el que los pesos son $w_k = 1$ para todo k. Por tanto,

$$P_{\text{MUSIC}}(f) = \frac{1}{\displaystyle\sum_{k=p+1}^{M} \left|\mathbf{s}^H(f)\mathbf{v}_k\right|^2} \tag{14.5.28}$$

Los estimados de las frecuencias sinusoidales son los picos de $P_{\text{MUSIC}}(f)$. Una vez que se han estimado las frecuencias sinusoidales, puede obtenerse la potencia de cada una de las sinusoides resolviendo la Ecuación (14.5.11).

EJEMPLO 14.5.2

La matriz de autocorrelación para una señal que consta de una exponencial compleja en ruido blanco está dada por

$$\Gamma_{yy} = \begin{bmatrix} 3 & -2j & -2 \\ 2j & 3 & -2j \\ -2 & 2j & 3 \end{bmatrix}$$

Utilice el método MUSIC para determinar las frecuencias y las potencias de la exponencial compleja y la varianza del ruido aditivo.

Solución. Resolviendo para obtener las raíces del polinomio

$$g(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2j & -2 \\ 2j & 3-\lambda & -2j \\ -2 & 2j & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 9\lambda^2 + 15\lambda - 7 = 0$$

comprobamos que los autovalores son $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 1$. Por tanto, concluimos que existe una única exponencial compleja, correspondiente al autovalor $\lambda = 7$. Los autovectores correspondientes a los subespacios de señal y de ruido, respectivamente, son

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ j/\sqrt{3} \\ -1/3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ j/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2j/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ j/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Calculando el denominador de (14.5.28), obtenemos

$$\sum_{k=2}^{3} \left| s^H(f)\mathbf{v}_k \right|^2 = 2 + \frac{5}{3}\cos\left(2\pi f + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{3}\cos 4\pi f + \frac{1}{3}\cos\left(2\pi f - \frac{\pi}{2}\right)$$

Es sencillo verificar que este término es cero en $f = 1/4$. Además, a partir de la relación (14.5.15) y conociendo $\sigma_w^2 = 1$, concluimos que la potencia de la señal exponencial compleja es $P = 2$.

Comparando el método de Pisarenko con el algoritmo MUSIC, observamos que el primero seleciona $M = p+1$ y proyecta los vectores de señal sobre un único autovector de ruido. Por tanto, el método de Pisarenko supone un conocimiento preciso del número de componentes sinusoidales de la señal. En contraste, el método MUSIC selecciona $M > p+1$ y, después de realizar el autoanálisis, subdivide los autovalores en dos grupos, los (p) correspondientes al subespacio de señal y los $(M-p)$ correspondientes al subespacio de ruido. A continuación, los vectores de señal se proyectan sobre los $M-p$ autovectores en el subespacio de ruido. Por tanto, no es necesario tener un conocimiento preciso de p. Los métodos de selección del orden descritos en la Sección 14.5.5 pueden emplearse para obtener un estimado de p y para seleccionar M tal que $M > p+1$.

14.5.4 Algoritmo ESPRIT

La estimación de los parámetros de la señal a través de técnicas de invarianza rotacional (ESPRIT, *estimation of signal parameters via rotational invariance techniques*) es otro método que permite estimar las frecuencias de una suma de sinusoides utilizando un método de autodescomposición. Como veremos en el desarrollo que sigue, debido a Roy *et al.* (1986), ESPRIT explota una invarianza rotacional subyacente de los subespacios de señal repartidos en dos vectores de datos desplazados en el tiempo.

Consideremos de nuevo la estimación de p sinusoides complejas en ruido blanco aditivo. La secuencia recibida está dada por el vector

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(n) &= [y(n), y(n+1), \ldots, y(n+M-1)]^t \\ &= \mathbf{x}(n) + \mathbf{w}(n) \end{aligned} \tag{14.5.29}$$

donde $\mathbf{x}(n)$ es el vector de señal y $\mathbf{w}(n)$ es el vector de ruido. Para explotar el carácter determinístico de las sinusoides, definimos el vector desplazado en el tiempo $\mathbf{z}(n) = \mathbf{y}(n+1)$. Así,

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(n) &= [z(n), z(n+1), \ldots, z(n+M-1)]^t \\ &= [y(n+1), y(n+2), \ldots, y(n+M)]^t \end{aligned} \tag{14.5.30}$$

Con estas definiciones podemos expresar los vectores $\mathbf{y}(n)$ y $\mathbf{z}(n)$ como

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(n) &= \mathbf{S}\mathbf{a} + \mathbf{w}(n) \\ \mathbf{z}(n) &= \mathbf{S}\Phi\mathbf{a} + \mathbf{w}(n) \end{aligned} \tag{14.5.31}$$

donde $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_p]^t, a_i = A_i e^{j\phi i}$, y Φ es una matriz diagonal $p \times p$ que consta de las fases relativas entre las muestras adyacentes temporales de cada una de las sinusoides complejas,

$$\Phi = \text{diag}[e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2}, \ldots, e^{j2\pi f_p}] \tag{14.5.32}$$

Observe que la matriz Φ relaciona los vectores desplazados en el tiempo $\mathbf{y}(n)$ y $\mathbf{z}(n)$, por lo que puede decirse que es un operador de rotación. Observe también que Φ es unitario. La matriz $\mathbf{S}$ es la matriz $M \times p$ de Vandermonde especificada por los vectores columna

$$\mathbf{s}_i = [1, e^{j2\pi f_i}, e^{j4\pi f_i}, \ldots, e^{j2\pi(M-1) f_i}], \qquad i = 1, 2, \ldots, p \tag{14.5.33}$$

La matriz de autocovarianza para el vector de datos $\mathbf{y}(n)$ es

$$\begin{aligned} \Gamma_{yy} &= E[\mathbf{y}(n)\mathbf{y}^H(n)] \\ &= \mathbf{S}\mathbf{P}\mathbf{S}^H + \sigma_w^2 \mathbf{I} \end{aligned} \tag{14.5.34}$$

donde $\mathbf{P}$ es la matriz diagonal $p \times p$ que consta de las potencias de las sinusoides complejas,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \text{diag}[|a_1|^2, |a_2|^2, \ldots, |a_p|^2] \\ &= \text{diag}[P_1, P_2, \ldots, P_p] \end{aligned} \tag{14.5.35}$$

Observe que $\mathbf{P}$ es una matriz diagonal ya que las sinusoides complejas de diferentes frecuencias son ortogonales en el intervalo infinito. Sin embargo, debemos destacar que el algoritmo ESPRIT no requiere que $\mathbf{P}$ sea una matriz diagonal. Por tanto, el algoritmo es aplicable al caso en que la matriz de covarianza se estime a partir de registros de datos finitos.

La matriz de covarianza cruzada de los vectores de señal $\mathbf{y}(n)$ y $\mathbf{z}(n)$ es

$$\Gamma_{yz} = E[\mathbf{y}(n)\mathbf{z}^H(n)] = \mathbf{S}\mathbf{P}\Phi^H\mathbf{S}^H + \Gamma_w \tag{14.5.36}$$

donde

$$\begin{aligned} \Gamma_w &= E[\mathbf{w}(n)\mathbf{w}^H(n+1)] \\ &= \sigma_w^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \equiv \sigma_w^2 \mathbf{Q} \end{aligned} \tag{14.5.37}$$

Las matrices de autocovarianza y convarianza cruzada Γ_{yy} y Γ_{yz} están dadas por

$$\Gamma_{yy} = \begin{bmatrix} \gamma_{yy}(0 & \gamma_{yy}(1) & \cdots & \gamma_{yy}(M-1) \\ \gamma_{yy}^*(1) & \gamma_{yy}(0) & \cdots & \gamma_{yy}(M-2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{yy}^*(M-1) & \gamma_{yy}(M-2) & \cdots & \gamma_{yy}(0) \end{bmatrix} \tag{14.5.38}$$

$$\Gamma_{yz} = \begin{bmatrix} \gamma_{yy}(1) & \gamma_{yy}(2) & \cdots & \gamma_{yy}(M) \\ \gamma_{yy}(0) & \gamma_{yy}(1) & \cdots & \gamma_{yy}(M-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{yy}^*(M-2) & \gamma_{yy}^*(M-3) & \cdots & \gamma_{yy}(1) \end{bmatrix} \tag{14.5.39}$$

donde $\gamma_{yy}(m) = E[y^*(n)y(n+m)]$. Observe que tanto Γ_{yy} como Γ_{yz} son matrices Toeplitz.

Basándonos en esta formulación, el problema es determinar las frecuencias $\{f_i\}$ y sus potencias $\{P_i\}$ a partir de la secuencia de autocorrelación $\{\gamma_{yy}(m)\}$.

Partiendo del modelo subyacente, es evidente que la matriz $\mathbf{SPS}^H$ es de rango p. En consecuencia, Γ_{yy} está dada por (14.5.34) la cual tiene $(M-p)$ autovalores idénticos a σ_w^2. Por tanto,

$$\Gamma_{yy} - \sigma_w^2\mathbf{I} = \mathbf{SPS}^H \equiv \mathbf{C}_{yy} \tag{14.5.40}$$

A partir de (14.5.36), tenemos también

$$\Gamma_{yz} - \sigma_w^2\Gamma_w = \mathbf{SP}\Phi^H\mathbf{S}^H \equiv \mathbf{C}_{yz} \tag{14.5.41}$$

Consideremos ahora la matriz $\mathbf{C}_{yy} - \lambda\mathbf{C}_{yz}$, la cual se puede escribir como sigue

$$\mathbf{C}_{yy} - \lambda\mathbf{C}_{yz} = \mathbf{SP}(\mathbf{I} - \lambda\Phi^H)\mathbf{S}^H \tag{14.5.42}$$

Evidentemente, el espacio de columna de $\mathbf{SPS}^H$ es idéntico al espacio de columna de $\mathbf{SP}\Phi^H\mathbf{S}^H$. En consecuencia, el rango de $\mathbf{C}_{yy} - \lambda\mathbf{C}_{yz}$ es igual a p. Sin embargo, observe que si $\lambda = \exp(j2\pi f_i)$, la fila i de $(\mathbf{I} - \lambda\Phi^H)$ es cero y, por tanto, el rango de $[\mathbf{I} - \Phi^H\exp(j2\pi f_i)]$ es $p-1$. Pero $\lambda_i = \exp(j2\pi f_i)$, $i = 1, 2, \ldots, p$, son los autovalores generalizados de la pareja de matrices $(\mathbf{C}_{yy}, \mathbf{C}_{yz})$. Luego los p autovalores generalizados $\{\lambda_i\}$ que caen sobre la circunferencia unidad corresponden a los elementos del operador de rotación Φ. Los restantes $M-p$ autovalores generalizados de la pareja $\{\mathbf{C}_{yy}, \mathbf{C}_{yz}\}$, que corresponden al espacio nulo común de estas matrices, son cero [es decir, los $(M-p)$ autovalores se encuentran en el origen del plano complejo].

Basándonos en estas relaciones matemáticas podemos formular un algoritmo (ESPRIT) para estimar las frecuencias $\{f_i\}$. El procedimiento es el siguiente:

1. A partir de los datos, calculamos los valores de autocorrelación $r_{yy}(m)$, $m = 1, 2, \ldots, M$, y formamos las matrices $\mathbf{R}_{yy}$ y $\mathbf{R}_{yz}$ correspondientes a los estimados de Γ_{yy} y Γ_{yz}.
2. Calculamos los autovalores de $\mathbf{R}_{yy}$. Para $M > p$, el autovalor mínimo es un estimado de σ_w^2.
3. Calculamos $\hat{\mathbf{C}}_{yy} = \mathbf{R}_{yy} - \hat{\sigma}_w^2\mathbf{I}$ y $\hat{\mathbf{C}}_{yz} = \mathbf{R}_{yz} - \hat{\sigma}_w^2\mathbf{Q}$, donde $\mathbf{Q}$ se define de acuerdo con (14.5.37).
4. Calculamos los autovalores generalizados de la pareja de matrices $\{\hat{\mathbf{C}}_{yy}, \hat{\mathbf{C}}_{yz}\}$. Los p autovalores generalizados de estas matrices que caen sobre (o en las proximidades) de la circunferencia unidad determinan los elementos (estimados) de Φ y, por tanto, las frecuencias de las señales sinusoidales. Los restantes $M-p$ autovalores se encontrarán en (o en las proximidades) del origen.

Un método para determinar la potencia de las componentes sinusoidales es resolver la Ecuación (14.5.11) utilizando $r_{yy}(m)$ en lugar de $\gamma_{yy}(m)$.

Hay otro método basado en el cálculo de los autovectores generalizados $\{\mathbf{v}_i\}$ correspondientes a los autovalores generalizados $\{\lambda_i\}$. Así, tenemos

$$(\mathbf{C}_{yy} - \lambda_i\mathbf{C}_{yz})\mathbf{v}_i = \mathbf{SP}(\mathbf{I} - \lambda_i\Phi^H)\mathbf{S}^H\mathbf{v}_i = 0 \tag{14.5.43}$$

Dado que el espacio de columna de $(\mathbf{C}_{yy} - \lambda_i \cdot \mathbf{C}_{yz})$ es idéntico al espacio de columna expandido por los vectores $\{\mathbf{s}_j, j \neq i\}$ dados por (14.5.33), se deduce que el autovector generalizado $\mathbf{v}_i$ es ortogonal a $\mathbf{s}_j$, $j \neq i$. Puesto que $\mathbf{P}$ es diagonal, se deduce a partir de (14.5.43) que las potencias de la señal son

$$P_i = \frac{\mathbf{v}_i^H \mathbf{C}_{yy} \mathbf{v}_i}{|\mathbf{v}_i^H \mathbf{s}_i|^2}, \qquad i = 1, 2, \ldots, p \tag{14.5.44}$$

14.5.5 Criterios de selección del orden

Los métodos basados en autoanálisis descritos en esta sección para estimar las frecuencias y las potencias de las sinusoides también proporcionan información sobre el número de componentes sinusoidales. Si existen p sinusoides, los autovalores asociados con el subespacio de señal son $\{\lambda_i + \sigma_w^2,\ i = 1,\ 2 \ldots, p\}$ mientras que los restantes $(M - p)$ autovalores son todos ellos iguales a σ_w^2. Basándonos en esta descomposición de autovalores, puede diseñarse una prueba que compare los autovalores con un determinado umbral. Existe un método alternativo que también utiliza la desposición de autovectores de la matriz de autocorrelación estimada de la señal observada y se basa en el análisis de perturbación de matrices. Este método se describe en un artículo de Fuchs (1988).

Otro método basado en una extensión y en la modificación del criterio AIC al método de autodescomposición fue propuesto por Wax y Kailath (1985). Si los autovalores de la matriz de autocorrelación están ordenados de manera que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_M$, where $M > p$, el número de sinusoides en el subespacio de señal se estima mediante la selección del valor mínimo de $\mathrm{MDL}(p)$, dado por

$$\mathrm{MDL}(p) = -\log \left[\frac{G(p)}{A(p)} \right]^N + E(p) \tag{14.5.45}$$

donde

$$\begin{aligned} G(p) &= \prod_{i=p+1}^{M} \lambda_i, \qquad p = 0, 1, \ldots, M-1 \\ A(p) &= \left[\frac{1}{M-p} \sum_{i=p+1}^{M} \lambda_i \right]^{M-p} \\ E(p) &= \frac{1}{2} p(2M - p) \log N \end{aligned} \tag{14.5.46}$$

N : número de muestras utilizadas para estimar los M retardos de la autocorrelación

Algunos resultados sobre la calidad de este criterio de selección del orden se proporcionan en el artículo de Wax y Kailath (1985). El criterio MDL está garantizado para ser coherente.

14.5.6 Resultados experimentales

En esta sección ilustramos mediante un ejemplo las características de resolución de los algoritmos de estimación espectral basados en autoanálisis y comparamos su rendimiento con los algoritmos basados en modelos y los métodos no paramétricos. La señal es

$$x(n) = \sum_{i=1}^{4} A_i e^{j(2\pi f_i n + \phi_i)} + w(n)$$

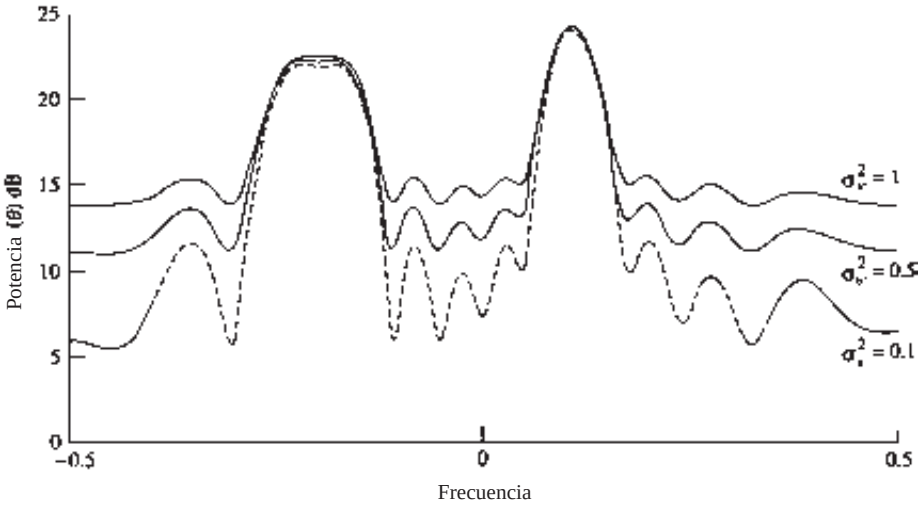


Figura 14.5.1. Estimados del espectro de potencia por el método de Blackman–Tukey.

donde $A_i = 1$, $i = 1, 2, 3, 4$, $\{\phi_i\}$ son variables aleatorias estadísticamente independientes uniformemente distribuidas en el intervalo $(0, 2\pi)$, $\{w(n)\}$ es una secuencia de ruido blanco de media cero y varianza σ_w^2, y las frecuencias son $f_1 = -0.222$, $f_2 = -0.166$, $f_3 = 0.10$ y $f_4 = 0.122$. La secuencia $\{x(n), 0 \leq n \leq 1023\}$ se utiliza para estimar el número de componentes en frecuencia y los correspondientes valores de sus frecuencias para $\sigma_w^2 = 0.1, 0.5, 1.0$ y $M = 12$ (longitud de la autocorrelación estimada).

Las Figuras 14.5.1, 14.5.2, 14.5.3 y 14.5.4 ilustran los espectros de potencia estimados de la señal utilizando el método de Blackman–Tukey, el método de varianza mínima de Capon, el método AR de Yule–Walker y el algoritmo MUSIC, respectivamente. Los resultados del algoritmo ESPRIT se proporcionan en la Tabla 14.2. A

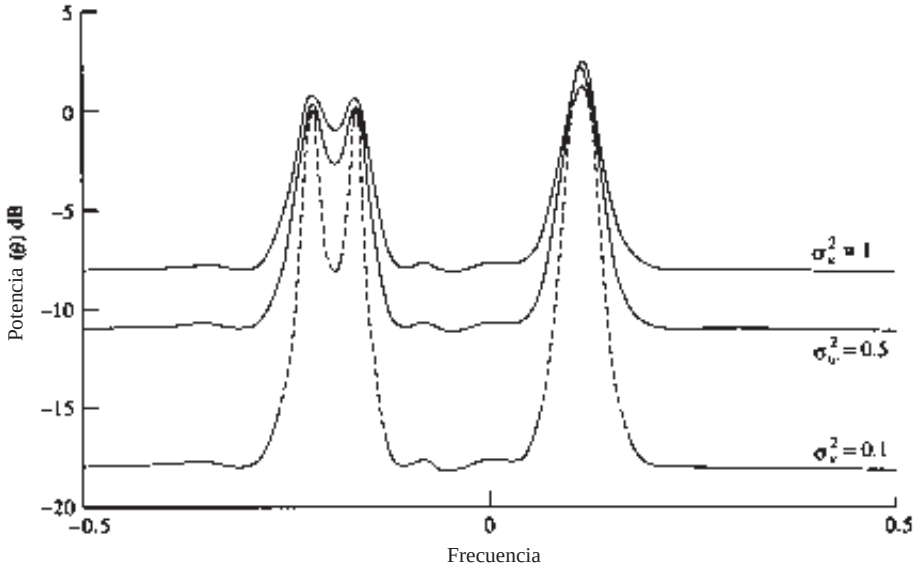


Figura 14.5.2. Estimados del espectro de potencia por el método de varianza mínima.

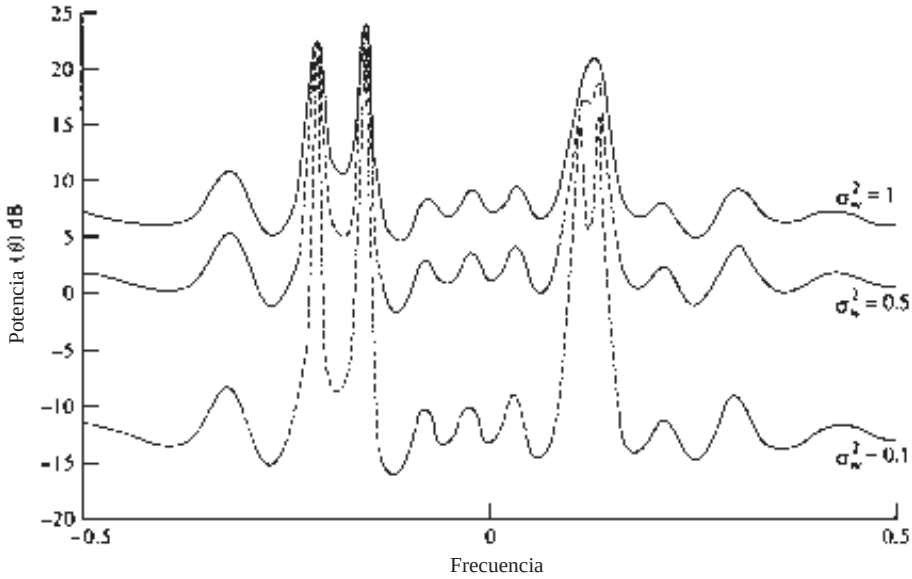


Figura 14.5.3. Estimados del espectro de potencia por el método AR de Yule–Walker.

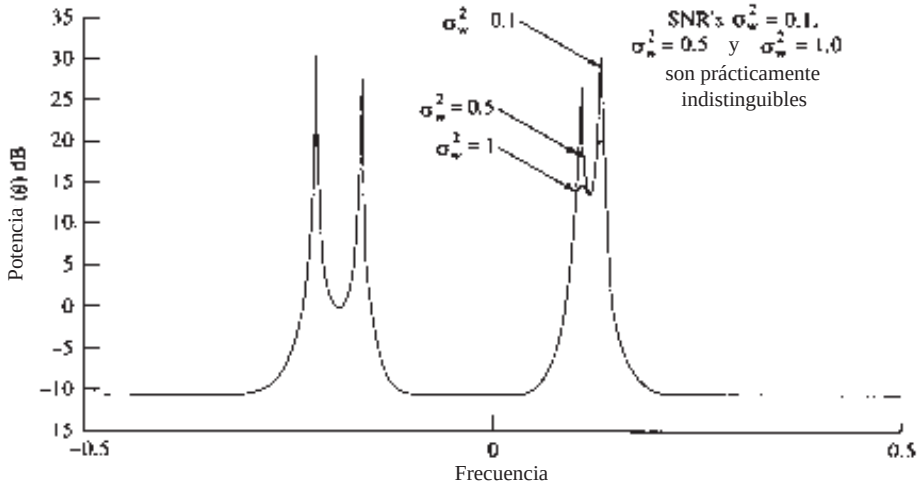


Figura 14.5.4. Estimados del espectro de potencia por el algoritmo MUSIC.

partir de estos resultados es evidente que (1) el método de Blackman–Tukey no proporciona suficiente resolución para estimar las sinusoides de los datos; (2) el método de varianza mínima de Capon sólo resuelve las frecuencias f_1, f_2 pero no f_3 y f_4; (3) los métodos AR proporcionan todas las frecuencias para $\sigma_w^2 = 0.1$ y $\sigma_w^2 = 0.5$; y (4) los algoritmos MUSIC y ESPRIT no sólo no proporcionan las cuatro sinuoides, sino que su funcionamiento para diferentes valores de σ_w^2 es prácticamente indistinguible. Observe además que las propiedades de resolución del método de varianza mínima y los métodos AR son funciones de la varianza del ruido. Estos resultados demuestran claramente la potencia de los algoritmos basados en el autoanálisis para resolver sinusoides en ruido aditivo.

σ_w^2	$\hat{f}_1$	$\hat{f}_2$	$\hat{f}_3$	$\hat{f}_4$
0.1	−0.2227	−0.1668	−0.1224	−0.10071
0.5	−0.2219	−0.167	−0.121	0.0988
1.0	−0.222	−0.167	0.1199	0.1013
Valores reales	−0.222	−0.166	0.122	0.100

Tabla 14.2. Algoritmo ESPRIT.

En conclusión, debemos destacar que los métodos de estimación espectral basados en autoanálisis de alta resolución descritos en esta sección, en particular MUSIC y ESPRIT, no son sólo aplicables a señales sinusoidales, sino que se aplican de forma más general a la estimación de señales de banda estrecha.

14.6 Resumen y referencias

La estimación del espectro de potencia es una de las áreas más importantes de la investigación y de las aplicaciones del tratamiento digital de señales. En este capítulo, hemos descrito las técnicas de estimación de espectros de potencia más importantes y los algoritmos que han sido desarrollados a lo largo del siglo pasado, comenzando por los métodos clásicos o no paramétricos basados en el periodograma y concluyendo con los métodos paramétricos más modernos basados en los modelos lineales AR, MA y ARMA. Nuestro estudio se ha limitado al ámbito de los métodos de estimación de espectros de serie temporales simples, basados en los momentos de segundo orden (autocorrelación) de los datos estadísticos.

Los métodos paramétricos y no paramétricos que hemos descrito se han ampliado a la estimación de espectros multicanal y multidimensionales. El tutorial de McClellan (1982) se ocupa del problema de la estimación de espectros multidimensionales, mientras que las publicaciones de Johnson (1982) tratan el problema de la estimación de los espectros multicanal. Se han desarrollado métodos de estimación de espectros adicionales que pueden emplearse con estadísticas de orden superior que implican el biespectro y el triespectro. Un tutorial sobre estos temas ha sido publicado por Nikias y Raghuveer (1987).

Como ha demostrado nuestra anterior exposición, la estimación del espectro de potencia es un área que ha atraído a muchos investigadores y, como resultado, se han publicado miles de documentos dentro del campo de la literatura técnica. Gran parte de estos trabajos abordan nuevos algoritmos y técnicas, así como modificaciones a las técnicas existentes. Otros trabajos se han ocupado de obtener una compresión de las capacidades y limitaciones de los diferentes métodos de estimación del espectro de potencia. En este contexto, las propiedades y limitaciones estadísticas de los métodos clásicos no paramétricos han sido detalladamente analizadas y explicadas. Los métodos paramétricos han sido tratados por muchos investigadores, pero el análisis de su rendimiento es difícil y, en consecuencia, hay disponibles poco resultados. Algunas de las publicaciones que han tratado este problema de las características de rendimiento de los métodos paramétricos son las debidas a Kromer (1969), Lacoss (1971), Berk (1974), Baggeroer (1976), Sakai (1979), Swingler (1980), Lang y McClellan (1980), y Tufts y Kumaresan (1982).

Además de las referencias ya proporcionadas en este capítulo sobre los diversos métodos para realizar la estimación del espectro y estudiar su rendimiento, debemos incluir como referencias algunos otros tutoriales y publicaciones. En concreto, debemos citar el tutorial de Kay y Marple (1981), que incluye aproximadamente 280 referencias, la publicación de Brillinger (1974), y el documento *Special Issue on Spectral Estimation* de *IEEE Proceedings*, septiembre 1982. Otras cuestiones de interés sobre la estimación y análisis de espectros se encuentran en los textos de Gardner (1987), Kay (1988) y Marple (1987), y los libros del IEEE editados por Childers (1978) y Kesler (1986).

Están disponibles muchos de los programas informáticos así como paquetes software que implementan varios de los métodos de estimación de espectro descritos en este capítulo. Hay un paquete de software disponible

a través del IEEE (*Programs for Digital Signal Processing*, IEEE Press, 1979); así como otros comercialmente disponibles.

Problemas

14.1 **(a)** Expandiendo (14.1.23), tomando el valor esperado y finalmente tomando el límite cuando $T_0 \to \infty$, demuestre que el lado derecho de la ecuación converge a $\Gamma_{xx}(F)$.

(b) Demuestre que

$$\sum_{m=-N}^{N} r_{xx}(m)e^{-j2\pi fm} = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi fn}\right|^2$$

14.2 Para las variables aleatorias conjuntamente gaussianas de media cero X_1, X_2, X_3, X_4, se sabe que [*véase* Papoulis (1984)]

$$E(X_1X_2X_3X_4) = E(X_1X_2)E(X_3X_4) + E(X_1X_3)E(X_2X_4) + E(X_1X_4)E(X_2X_3)$$

Utilice este resultado para obtener el valor cuadrático medio de $r'_{xx}(m)$, dado por (14.1.27) y la varianza, que es

$$\text{var}[r'_{xx}(m)] = E[|r'_{xx}(m)|^2] - |E[r'_{xx}(m)]|^2$$

14.3 Utilizando la expresión del momento conjunto de cuarto orden para variables aleatorias gaussianas, demuestre que

(a) $E[P_{xx}(f_1)P_{xx}(f_2)] = \sigma_x^4\left\{1 + \left[\dfrac{\operatorname{sen}\pi(f_1+f_2)N}{N\operatorname{sen}\pi(f_1+f_2)}\right]^2 + \left[\dfrac{\operatorname{sen}\pi(f_1-f_2)N}{N\operatorname{sen}\pi(f_1-f_2)}\right]^2\right\}$

(b) $\text{cov}[P_{xx}(f_1)P_{xx}(f_2)] = \sigma_x^4\left\{\left[\dfrac{\operatorname{sen}\pi(f_1+f_2)N}{N\operatorname{sen}\pi(f_1+f_2)}\right]^2 + \left[\dfrac{\operatorname{sen}\pi(f_1-f_2)N}{N\operatorname{sen}\pi(f_1-f_2)}\right]^2\right\}$

(c) $\text{var}[P_{xx}(f)] = \sigma_x^4\left\{1 + \left(\dfrac{\operatorname{sen}2\pi fN}{N\operatorname{sen}2\pi f}\right)^2\right\}$ bajo la condición de que la secuencia $x(n)$ es una secuencia gaussiana de ruido blanco de media cero y varianza σ_x^2.

14.4 Generalice los resultados del Problema 14.3 a un proceso de ruido gaussiano de media cero con el espectro de densidad de potencia $\Gamma_{xx}(f)$. A continuación obtenga la varianza del periodograma $P_{xx}(f)$, como se expresa en (14.1.38). (*Consejo:* suponga que el proceso de ruido coloreado gaussiano es la salida de un sistema lineal excitado por ruido gaussiano blanco. A continuación utilice las relaciones apropiadas de la Sección 12.1).

14.5 Demuestre que los valores del periodograma a las frecuencias $f_k = k/L$, $k = 0, 1, \ldots, L-1$, dadas por (14.1.41) pueden calcularse pasando la secuencia a través de un banco de N filtros IIR, donde cada filtro tiene la respuesta al impulso

$$h_k(n) = e^{-j2\pi nk/N}u(n)$$

y luego calcule el valor del módulo al cuadrado de las salidas del filtro en $n = N$. Observe que cada filtro tiene un polo sobre la circunferencia unidad a la frecuencia f_k.

14.6 Demuestre que el factor de normalización dado por (14.2.12) garantiza que se satisface (14.2.19).

14.7 Considere el uso de la DFT (calculada a través del algoritmo FFT) para calcular la autocorrelación de la secuencia compleja $x(n)$, es decir,

$$r_{xx}(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-m-1} x^*(n)x(n+m), \qquad m \geq 0$$

Suponga que el tamaño M de la FFT es mucho menor que la longitud de los datos N. Específicamente, suponga que $N = KM$.

(a) Determine los pasos necesarios para dividir $x(n)$ y calcular $r_{xx}(m)$ para $-(M/2)+1 \leq m \leq (M/2)-1$, utilizando $4K$ DFT de M puntos y una IDFT de M puntos.

(b) Considere ahora las tres secuencias siguientes $x_1(n)$, $x_2(n)$ y $x_3(n)$, cada una de ellas con una duración M. Sean las secuencias $x_1(n)$ y $x_2(n)$ con valores arbitrarios en el intervalo $0 \leq n \leq (M/2)-1$, pero iguales a cero para $(M/2) \leq n \leq M-1$. La secuencia $x_3(n)$ se define como

$$x_3(n) = \begin{cases} x_1(n), & 0 \leq \dfrac{M}{2}-1 \\ x_2\left(n-\dfrac{M}{2}\right), & \dfrac{M}{2} \leq n \leq M-1 \end{cases}$$

Determine una relación simple entre las DFT de M puntos $X_1(k)$, $X_2(k)$ y $X_3(k)$.

(c) Utilizando el resultado del apartado (b), demuestre que el cálculo de las DFT del apartado (a) puede reducirse en número de $4K$ a $2K$.

14.8 El método de Bartlett se emplea para estimar el espectro de potencias de una señal $x(n)$. Sabemos que el espectro de potencia consta de un sólo pico con un ancho de banda a 3-dB de 0.01 ciclos por muestra, pero no sabemos en qué posición se encuentra el pico.

(a) Suponiendo que N es grande, determine el valor de $M = N/K$ de modo que la ventana espectral sea más estrecha que el pico.

(b) Explique por qué no interesa aumentar M por encima del valor obtenido en el apartado (a).

14.9 Suponga que disponemos de $N = 1000$ muestras procedentes de una secuencia de muestras de un proceso aleatorio.

(a) Determine la resolución en frecuencia de los métodos de Bartlett, Welch (50 % de solapamiento) y Blackman–Tukey para un factor de calidad de $Q = 10$.

(b) Determine las longitudes de los registros (M) para los métodos de Bartlett, Welch (50 % de solapamiento) y Blackman–Tukey.

14.10 Considere el problema de estimar contiuamente el espectro de potencia de una secuencia $x(n)$ basado en el promediado de periodogramas con ponderación exponencial en el pasado. Así, con $P_{xx}^{(0)}(f) = 0$, tenemos

$$P_{xx}^{(m)}(f) = wP_{xx}^{(m-1)}(f) + \frac{1-w}{M}\left|\sum_{n=0}^{M-1} x_m(n)e^{-j2\pi fn}\right|^2$$

donde se supone que los periodogramas sucesivos son incorrelados y que w es el factor de ponderación (exponencial).

(a) Determine la media y la varianza de $P_{xx}^{(m)}(f)$ para un proceso aleatorio gaussiano.

(b) Repita el análisis del apartado (a) para el caso en que el periodograma modificado definido por Welch se utilice en el promediado sin solapamiento.

14.11 El periodograma en el método de Bartlett puede expresarse como

$$P_{xx}^{(i)}(f) = \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \left(1 - \frac{|m|}{M}\right) r_{xx}^{(i)}(m) e^{-j2\pi fm}$$

donde $r_{xx}^{(i)}(m)$ es la secuencia de autocorrelación estimada obtenida a partir del bloque de datos i. Demuestre que $P_{xx}^{(i)}(f)$ puede expresars como

$$P_{xx}^{(i)}(f) = \mathbf{E}^H(f)\mathbf{R}_{xx}^{(i)}\mathbf{E}(f)$$

donde

$$\mathbf{E}(f) = \begin{bmatrix} 1 & e^{j2\pi f} & e^{j4\pi f} & \cdots & e^{j2\pi(M-1)f} \end{bmatrix}^t$$

y, por tanto,

$$P_{xx}^{B}(f) = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} \mathbf{E}^H(f)\mathbf{R}_{xx}^{(k)}\mathbf{E}(f)$$

14.12 Deduzca la ecuación recursiva de actualización del orden dada en (14.3.19).

14.13 Determine la media y la autocorrelación de la secuencias $x(n)$, que es la salida de un proceso ARMA $(1,1)$ descrito mediante la ecuación en diferencias

$$x(n) = \tfrac{1}{2}x(n-1) + w(n) - w(n-1)$$

donde $w(n)$ es un proceso de ruido blanco con varianza σ_w^2.

14.14 Determine la media y la autocorrelación de la secuencia $x(n)$ generada mediante el proceso MA(2) descrito por la ecuación en diferencias

$$x(n) = w(n) - 2w(n-1) + w(n-2)$$

donde $w(n)$ es un proceso de ruido blanco con varianza σ_w^2.

14.15 Un proceso MA(2) tiene la secuencia de autocorrelación

$$\gamma_{xx}(m) = \begin{cases} 6\sigma_w^2, & m = 0 \\ -4\sigma_w^2, & m = \pm 1 \\ -2\sigma_w^2, & m = \pm 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Determine los coeficientes del proceso MA(2) que tiene la autocorrelación anterior.

(b) ¿Es única la solución? Si no lo es, proporcione todas las soluciones posibles.

14.16 Un proceso MA(2) tiene la secuencia de autocorrelación

$$\gamma_{xx}(m) = \begin{cases} \sigma_w^2, & m = 0 \\ -\dfrac{35}{62}\sigma_w^2, & m = \pm 1 \\ \dfrac{6}{62}\sigma_w^2, & m = \pm 2 \end{cases}$$

(a) Determine los coeficientes del sistema de fase mínima para el proceso MA(2).

(b) Determine los coeficientes del sistema de fase máxima para el proceso MA(2).

(c) Determine los coeficientes del sistema de fase mixta para el proceso MA(2).

14.17 Considere el sistema lineal descrito por la ecuación en diferencias

$$y(n) = 0.8y(n-1) + x(n) + x(n-1)$$

donde $x(n)$ es un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio con media cero y autocorrelación

$$\gamma_{xx}(m) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|m|}$$

(a) Determine el espectro de densidad de potencia de la salida $y(n)$.

(b) Determine la autocorrelación $\gamma_{yy}(m)$ de la salida.

(c) Determine la varianza σ_y^2 de la salida.

14.18 A partir de (14.3.6) y (14.3.9) observamos que un proceso aleatorio estacionario AR(p) satisface la ecuación

$$\gamma_{xx}(m) + \sum_{k=1}^{p} a_p(k)\gamma_{xx}(m-k) = \begin{cases} \sigma_w^2, & m = 0, \\ 0, & 1 \le m \le p, \end{cases}$$

donde $a_p(k)$ son los coeficientes de predicción del predictor lineal de orden p y σ_w^2 es el error de predicción cuadrático medio mínimo. Si la matriz de autocorrelación $(p+1) \times (p+1)$ Γ_{xx} de (14.3.9) es definida positiva, demuestre que:

(a) Los coeficientes de reflexión son $|K_m| < 1$ para $1 \le m \le p$.

(b) El polinomio

$$A_p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{p} a_p(k)z^{-k}$$

tiene todas sus raíces dentro de la circunferencia unidad (es decir, es de fase mínima).

14.19 Un proceso AR(2) se describe mediante la ecuación en diferencias

$$x(n) = 0.81x(n-2) + w(n)$$

donde $w(n)$ es un proceso de ruido blanco con varianza σ_w^2.

(a) Determine los parámetros de los modelos MA(2), MA(4) y MA(8) que proporcionen un error cuadrático medio mínimo ajustado a los datos $x(n)$.

(b) Dibuje el espectro real y los espectros de los modelos MA(q), $q = 2, 4, 8$, y compare los resultados. Comente cómo se aproximan los modelos MA(q) al proceso AR(2).

14.20 Un proceso MA(2) se describe mediante la ecuación en diferencias

$$x(n) = w(n) + 0.81w(n-2)$$

donde $w(n)$ es un proceso de ruido blanco de varianza σ_w^2.

(a) Determine los parámetros de los modelos AR(2), AR(4) y AR(8) que proporcionen un error cuadrático medio mínimo ajustado a los datos $x(n)$.

(b) Dibuje el espectro real y los correspondientes a AR(p), $p = 2, 4, 8$, y compare los resultados. Comente cómo se aproximan los modelos AR(p) al proceso MA(2).

14.21 **(a)** Determine los espectros de potencia de los procesos aleatorios generados por las siguientes ecuaciones en diferencias.

1. $x(n) = -0.81x(n-2) + w(n) - w(n-1)$

2. $x(n) = w(n) - w(n-2)$

3. $x(n) = -0.81x(n-2) + w(n)$

donde $w(n)$ es un proceso de ruido blanco con varianza σ_w^2.

(b) Dibuje los espectros para los procesos dados en el apartado (a).

(c) Determine la autocorrelación $\gamma_{xx}(m)$ para los procesos (2) y (3).

14.22 El método de Bartlett se usa para estimar el espectro de potencia de una señal a partir de una secuencia $x(n)$ que consta de $N = 2400$ muestras.

(a) Determine la longitud mínima M de cada segmento en el método de Bartlett que proporciona una resolución en frecuencia de $\Delta f = 0.01$.

(b) Repita el apartado (a) para $\Delta f = 0.02$.

(c) Determine los factores de calidad Q_B para los apartados (a) y (b).

14.23 Un proceso aleatorio $x(n)$ se caracteriza por el espectro de densidad de potencia

$$\Gamma_{xx}(f) = \sigma_w^2 \frac{|e^{j2\pi f} - 0.9|^2}{|e^{j2\pi f} - j0.9|^2 |e^{j2\pi f} + j0.9|^2}$$

donde σ_w^2 es una constante (factor de escala).

(a) Si vemos $\Gamma_{xx}(f)$ como el espectro de potencia de la salida de un sistema lineal de polos y ceros $H(z)$ controlado por ruido blanco, determine $H(z)$.

(b) Determine la función de sistema de un sistema estable (filtro blanqueador de ruido) que produce una salida de ruido blanco cuando es excitado por una secuencia $x(n)$.

14.24 La DFT de N puntos de una secuencia aleatoria $x(n)$ es

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nk/N}$$

Suponga que $E[x(n)] = 0$ y $E[x(n)x(n+m)] = \sigma_x^2 \delta(m)$ [es decir, $x(n)$ es un proceso de ruido blanco].

(a) Determine la varianza de $X(k)$.

(b) Determine la autocorrelación de $X(k)$.

14.25 Suponga que representamos un proceso ARMA(p,q) como una cascada de un modelo MA(q) seguido por un modelo AR(p). La ecuación de entrada–salida para el modelo MA(q) es

$$v(n) = \sum_{k=0}^{q} b_k w(n-k)$$

donde $w(n)$ es un proceso de ruido blanco. La ecuación de entrada–salida para el modelo AR(p) es

$$x(n) + \sum_{k=1}^{p} a_k x(n-k) = v(n)$$

(a) Calculando la autocorrelación de $v(n)$, demuestre que

$$\gamma_{vv}(m) = \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-m} b_k^* b_{k+m}$$

(b) Demuestre que

$$\gamma_{vv}(m) = \sum_{k=0}^{p} a_k \gamma_{vx}(m+k), \qquad a_o = 1$$

donde $\gamma_{vx}(m) = E[v(n+m)x^*(n)]$.

14.26 Determine la autocorrelación $\gamma_{xx}(m)$ de la secuencia aleatoria

$$x(n) = A\cos(\omega_1 n + \phi)$$

donde la amplitud A y la frecuencia ω_1 son constantes (conocidas) y ϕ es una fase aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo $(0, 2\pi)$.

14.27 Suponga que el proceso AR(2) del Problema 14.19 se distorsiona mediante un proceso de ruido blanco aditivo $v(n)$ de varianza σ_v^2. Luego,

$$y(n) = x(n) + v(n)$$

(a) Determine la ecuación en diferencias para $y(n)$ y demuestre después que $y(n)$ es un proceso ARMA$(2,2)$. Determine los coeficientes del proceso ARMA.

(b) Generalice el resultado del apartado (a) a un proceso AR(p)

$$x(n) = -\sum_{k=1}^{p} a_k (xn-k) + w(n)$$

y

$$y(n) = x(n) + v(n)$$

14.28 **(a)** Determine la autocorrelación de la secuencia aleatoria

$$x(n) = \sum_{k=1}^{K} A_k \cos(\omega_k n + \phi_k) + w(n)$$

donde $\{A_k\}$ son amplitudes constantes, $\{\omega_k\}$ son frecuencias constantes y $\{\phi_k\}$ son fases alaeatorias uniformemente distribuidas y estadística y mutuamente independientes. La secuencia $w(n)$ es ruido blanco de varianza σ_w^2.

(b) Determine el espectro de densidad de potencia de $x(n)$.

14.29 El problema de descomposición armónica considerado por Pisarenko se puede expresar como la solución a la ecuación

$$\mathbf{a}^H \Gamma_{yy} \mathbf{a} = \sigma_w^2 \mathbf{a}^H \mathbf{a}$$

La solución para $\mathbf{a}$ se puede obtener minimizando la forma cuadrática $\mathbf{a}^H \Gamma_{yy} \mathbf{a}$ sujeta a la restriccción de que $\mathbf{a}^H \mathbf{a} = 1$. La restricción puede incorporarse al índice de rendimiento por medio de un multiplicador de Lagrange. Luego el índice de rendimiento es

$$\mathscr{E} = \mathbf{a}^H \Gamma_{yy} \mathbf{a} + \lambda (1 - \mathbf{a}^H \mathbf{a})$$

Minimizando $\mathscr{E}$ con respecto a $\mathbf{a}$, demuestre que esta formulación es equivalente al problema del autovalor de Pisarenko dado en (14.5.9) con el multiplicador de Lagrange desempeñando el papel del autovalor. Demuestre qué mínimo de $\mathscr{E}$ es el autovalor mínimo σ_w^2.

14.30 La autocorrelación de una secuencia que consta de una sinusoide con fase aleatoria en ruido es

$$\gamma_{xx}(m) = P \cos 2\pi f_1 m + \sigma_w^2 \delta(m)$$

donde f_1 es la frecuencia de la sinusoide, P es su potencia y σ_w^2 es la varianza del ruido. Suponga que deseamos ajustar un modelo AR(2) a los datos.

(a) Determine los coeficientes óptimos del modelo AR(2) como una función de σ_w^2 y f_1.

(b) Determine los coeficientes de reflexión K_1 y K_2 correspondientes a los parámetros del modelo AR(2).

(c) Determine los valores límite de los parámetros del modelo AR(2) y (K_1, K_2) cuando $\sigma_w^2 \to 0$.

14.31 La varianza mínima del estimado del espectro de potencia descrita en la Sección 14.4 se determina minimizando la varianza

$$\sigma_y^2 = \mathbf{h}^H \Gamma_{xx} \mathbf{h}$$

sujeta a la restricción

$$\mathbf{E}^H(f)\mathbf{h} = 1$$

donde $\mathbf{E}(f)$ se define como el vector

$$\mathbf{E}^t(f) = [1 \quad e^{j2\pi f} \quad e^{j4\pi f} \quad \cdots \quad e^{j2\pi p f}]$$

Para determinar el filtro óptimo que minimiza σ_y^2, definimos la función

$$\mathscr{E}(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^H \Gamma_{xx} \mathbf{h} + \mu(1 - \mathbf{E}^H(f)\mathbf{h}) + \mu^*(1 - \mathbf{h}^H \mathbf{E}(f))$$

donde μ es un multiplicador de Lagrange.

(a) Diferenciando $\mathscr{E}(\mathbf{h})$ y haciendo la derivada igual a cero, demuestre que

$$\mathbf{h}_{\text{opt}} = \mu^* \Gamma_{xx}^{-1} \mathbf{E}(f)$$

(b) Calcule μ^* utilizando la restricción y, luego demuestre que

$$\mathbf{h}_{\text{opt}} = \frac{\Gamma_{xx}^{-1} \mathbf{E}(f)}{\mathbf{E}^H(f) \Gamma_{xx}^{-1} \mathbf{E}(f)}$$

14.32 El estimado espectral del periodograma se expresa como

$$P_{xx}(f) = \frac{1}{N}|X(f)|^2$$

donde

$$\begin{aligned} X(f) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi fn} \\ &= \mathbf{E}^H(f)\mathbf{X}(n) \end{aligned}$$

$\mathbf{X}(f)$ es el vector de datos y $\mathbf{E}(f)$ se define como

$$E^t(f) = [1 \quad e^{j2\pi f} \quad e^{j4\pi f} \quad \cdots \quad e^{j2\pi f(N-1)}]$$

Demuestre que

$$E[P_{xx}(f)] = \frac{1}{N}\mathbf{E}^H(f)\Gamma_{xx}\mathbf{E}(f)$$

donde Γ_{xx} es la matriz de autocorrelación del vector de datos $\mathbf{X}(n)$.

14.33 Determine la frecuencia y la potencia de una sola sinusoide real de ruido blanco. La función de correlación de la señal y el ruido está dada por

$$\gamma_{yy}(m) = \begin{cases} 3, & m = 0 \\ 0, & m = 1 \\ -2, & m = 2 \\ 0, & |m| > 2 \end{cases}$$

14.34 La señal $y(n)$ está formada por exponenciales complejas en ruido blanco. Su matriz de autocorrelación es

$$\Gamma_{yy} = \begin{bmatrix} 2 & -j & -1 \\ j & 2 & -j \\ -1 & j & 2 \end{bmatrix}$$

Utilice el algoritmo MUSIC para determinar las frecuencias de las exponenciales y sus niveles de potencia.

14.35 Demuestre que $P_{\text{MUSIC}}(f)$ puede expresarse como

$$P_{\text{MUSIC}}(f) = \frac{1}{s^H(f)\left(\sum_{k=p+1}^{M} \upsilon_{\mathbf{k}}\upsilon_{\mathbf{k}}^{\mathbf{M}}\right)s(f)}$$

14.36 *Algoritmo MUSIC de raíces* Definimos los polinomios del subespacio de ruido como

$$V_k(z) = \sum_{n=0}^{M-1} \upsilon_k(n+1)z^{-n}, \quad k = p+1, \ldots, M$$

donde $\upsilon_k(n)$ son los elementos del vector del subespacio de ruido $\upsilon_{\mathbf{k}}$.

(a) Demuestre que $P_{\text{MUSIC}}(f)$ se puede expresar como

$$P_{\text{MUSIC}}(f) = \frac{1}{\sum_{k=p+1}^{M} V_k(f)V_k^*(f)}$$

$$= \frac{1}{\sum_{k=p+1}^{M} V_k(z)V_k^*\left(\frac{1}{z*}\right)\Big|_{z=e^{j2\pi f}}}$$

(b) Para p sinusoides complejas en ruido blanco, el polinomio

$$Q(z) = \sum_{k=p+1}^{M} V_k(z)V_k^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$$

tiene a cero en $z = e^{j2\pi f_i}, i = 1, 2, \ldots, p$. Por tanto, este polinomio tiene p raíces sobre la circunferencia unidad en el plano z, donde cada raíz es una raíz doble. La determinación de las frecuencias factorizando el polinomio $Q(z)$ se conoce como *método MUSIC de raíces*. Para la matriz de correlación dada en el Problema 14.34, determine las frecuencias de las exponenciales mediante el método MUSIC de raíces. Las raíces adicionales obtenidas por este método son raíces espúreas y pueden descartarse.

14.37 Este problema implica el uso de la correlación cruzada para detectar una señal en ruido y estimar el retardo temporal de la señal. Una señal $x(n)$ consta de sinusoides pulsadas distorsionadas por una secuencia de ruido blanco estacionario de media cero. Es decir,

$$x(n) = y(n - n_0) + w(n), \qquad 0 \le n \le N - 1$$

donde $w(n)$ es el ruido de varianza σ_w^2 y la señal es

$$\begin{aligned} y(n) &= A\cos\omega_0 n, \quad 0 \le n \le M - 1 \\ &= 0, \qquad\qquad \text{en otro caso} \end{aligned}$$

La frecuencia ω_0 es conocida pero el retardo n_0, que es un entero positivo, no es conocido y desea determinarse mediante la correlación cruzada de $x(n)$ e $y(n)$. Suponga que $N > M + n_0$. Sea

$$r_{xy}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n - m)x(n)$$

la secuencia de correlación cruzada entre $x(n)$ e $y(n)$. En ausencia de ruido, esta función presenta un pico retardado en $m = n_0$. Luego n_0 se determina sin error. La presencia de ruido puede llevar a errores al determinar el retardo desconocido.

(a) Para $m = n_0$, determine $E[r_{xy}(n_0)]$. Determine también la varianza, $\text{var}[r_{xy}(n_0)]$, debida a la presencia del ruido. En ambos cálculos, suponga que las medias de los términos en frecuencia son cero. Es decir, $M \gg 2\pi/\omega_0$.

(b) Determine la relación señal-ruido, definida como

$$\text{SNR} = \frac{\{E[r_{xy}(n_0)]\}^2}{\text{var}[r_{xy}(n_0)]}$$

(c) ¿Cuál es el efecto de la duración del impulso M sobre la relación SNR?

14.38 Genere 100 muestras de una secuencia de ruido blanco $w(n)$ de media cero y varianza $\sigma_w^2 = \frac{1}{12}$, utilizando un generador de números aleatorios uniforme.

(a) Calcule la autocorrelación de $w(n)$ para $0 \leq m \leq 15$.

(b) Calcule el estimado del periodograma $P_{xx}(f)$ y dibújelo.

(c) Genere 10 realizaciones diferentes de $w(n)$ y calcule las secuencias de autocorrelación correspondientes $r_k(m)$, $1 \leq k \leq 10$ y $0 \leq m \leq 15$.

(d) Calcule y dibuje la secuencia de autocorrelación media para el apartado (c):

$$r_{\text{av}}(m) = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} r_k(m)$$

y el periodograma correspondiente a $r_{av}(m)$.

(e) Comente los resultados de los apartados (a) hasta (d).

14.39 Una señal aleatoria se genera pasando ruido blanco gaussiano de media cero y varianza unidad a través de un filtro con una función de sistema

$$H(z) = \frac{1}{(1 + az^{-1} + 0.99z^{-2})(1 - az^{-1} + 0.98z^{-2})}$$

(a) Dibuje un diagrama típico del espectro de potencia teórico $\Gamma_{xx}(f)$ para un valor pequeño del parámetro a (es decir, $0 < a < 0.1$). Preste atención al valor de los dos picos espectrales y al valor de $P_{xx}(\omega)$ para $\omega = \pi/2$.

(b) Sea $a = 0.1$. Determine la longitud de la sección M necesaria para resolver los picos espectrales de $\Gamma_{xx}(f)$ utilizando el método de Bartlett.

(c) Considere el método de Blackman–Tukey para suavizar el periodograma. ¿Cuántos retardos del estimado de la correlación deben emplearse para obtener una resolución comparable a la que se obtiene con el estimado de Bartlett considerado en el apartado (b)? ¿Cuántos puntos de datos deben emplearse si la varianza del estimado debe ser comparable con el estimado de Bartlett de cuatro secciones?

(d) Para $a = 0.05$, ajuste un modelo AR(4) a 100 muestras de los datos basados en el método de Yule–Walker y dibuje el espectro de potencia. Evite los efectos transitorios descartando las primeras 200 muestras de los datos.

(e) Repita el apartado (d) con el método de Burg.

(f) Repita los apartados (d) y (e) para 50 muestras de datos y comente las similitudes y diferencias en los resultados.

A

Generadores de números aleatorios

En algunos de los ejemplos proporcionados en el texto, los números aleatorios se generan para simular el efecto del ruido sobre las señales y para ilustrar cómo puede emplearse el método de correlación para detectar la presencia de una señal enterrada en ruido. En el caso de señales periódicas, la técnica de la correlación también nos permite estimar el período de la señal.

En la práctica, los generadores de números aleatorios a menudo se emplean para simular el efecto de las señales de ruido y otros fenómenos aleatorios que pueden encontrarse en el mundo físico. Dicho ruido suele estar presente en sistemas y dispositivos electrónicos y, normalmente, limita nuesta capacidad de comunicarnos a larga distancia y de poder dectectar señales relativamente débiles. Generando dicho ruido en una computadora, podemos estudiar sus efectos a través de la simulación de sistemas de comunicaciones, sistemas de detección de radar y valorar las prestaciones de dichos sistemas en presencia de ruido.

La mayor parte de las bibliotecas de software incluyen un generador de números aleatorios uniforme. Tales generadores de números aleatorios generan un número entre cero y uno con la misma probabilidad. Decimos que la salida del generador de números aleatorios es una variable aleatoria. Si A designa tal variable aleatoria, su rango es el intervalo $0 \leq A \leq 1$.

Sabemos que la salida numérica de una computadora digital tiene precisión limitada, y en consecuencia, es imposible representar el continuo de números en el intervalo $0 \leq A \leq 1$. Sin embargo, podemos suponer que nuestra computadora representa cada salida mediante un número grande de bits en punto flotante o en punto fijo. En consecuencia, para propósitos prácticos, el número de salidas en el intervalo $0 \leq A \leq 1$ es suficientemente grande, por lo que podemos suponer justificadamente que cualquier valor del intervalo es una posible salida del generador.

La función de densidad de probabilidad uniforme para la variable aleatoria A, designada como $p(A)$, se ilustra en la Figura A.1(a). Observe que el valor medio de A, designado como m_A, es $m_A = \frac{1}{2}$. La integral de la función de densidad de probabilidad, que representa el área bajo $p(A)$, es la función de distribución de probabilidad de la variable aleatoria A y se define como

$$F(A) = \int_{-\infty}^{A} p(x)dx \tag{A.1}$$

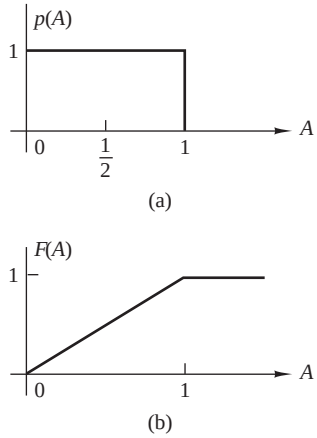


Figura A.1.

Para cualquier variable aleatoria, éste área tiene que ser siempre igual a la unidad, que es el valor máximo que una función de distribución puede tener. Por tanto,

$$F(1) = \int_{-\infty}^{1} p(x)dx = 1 \tag{A.2}$$

y el rango de $F(A)$ es $0 \leq F(A) \leq 1$ para $0 \leq A \leq 1$.

Si deseamos genarar ruido uniformemente distribuido en un intervalo $(b, b+1)$, podemos simplemente utilizar la salida A del generador de números aleatorios y desplazarla una cantidad b. Así, podemos definir una nueva variable aleatoria B como

$$B = A + b \tag{A.3}$$

la cual ahora tiene un valor medio $m_B = b + \frac{1}{2}$. Por ejemplo, si $b = -\frac{1}{2}$, la variable aleatoria B está distribuida uniformemente en el intervalo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, como se muestra en la Figura A.2(a). Su función de distribución de probabilidad $F(B)$ puede verse en la Figura A.2(b).

Puede utilizarse una variable aleatoria uniformemente distribuida en el rango $(0,1)$ para generar variables aleatorias con otras funciones de distribución de probabilidad. Por ejemplo, suponga que deseamos generar

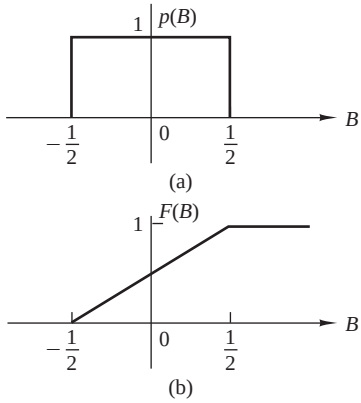


Figura A.2.

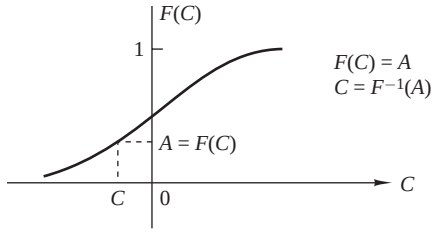


Figura A.3.

una variable aleatoria C con la función de distribución de probabilidad $F(C)$, que se ilustra en la Figura A.3. Dado que el rango de $F(C)$ es el intervalo $(0,1)$, comenzamos generando una variable aleatoria uniformemente distribuida A en el intervalo $(0,1)$. Si hacemos

$$F(C) = A \tag{A.4}$$

entonces

$$C = F^{-1}(A) \tag{A.5}$$

Así utilizamos (A.4) para obtener C, y la solución de (A.5) proporciona el valor de C para el que $F(C) = A$. De esta forma, obtenemos una nueva variable aleatoria C con la distribución de probabilidad $F(C)$. Esta correspondencia inversa de A a C se ilustra en la Figura A.3.

EJEMPLO A.1

Genere una variable aleatoria C que tenga la función de densidad de probabilidad mostrada en la Figura A.4(a), es decir,

$$p(C) = \begin{cases} \dfrac{C}{2}, & 0 \le C \le 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

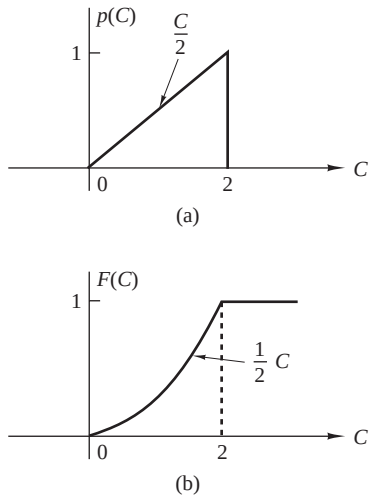


Figura A.4.

Solución. Esta variable aleatoria tiene una función de distribución de probabilidad

$$F(C) = \begin{cases} 0, & C < 0 \\ \frac{1}{4}C^2, & 0 \le C \le 2 \\ 1, & C > 2 \end{cases}$$

la cual se ilustra en la Figura A.4(b). Generamos una variable aleatoria uniformemente distribuida A y hacemos $F(C) = A$. Luego

$$F(C) = \tfrac{1}{4}C^2 = A$$

Despejando para obtener C, obtenemos

$$C = 2\sqrt{A}$$

Así, generamos una variable aleatoria C con la función de probabilidad $F(C)$, como se muestra en la Figura A.4(b).

En el Ejemplo A.1, la correspondencia inversa $C = F^{-1}(A)$ era simple. En algunos otros casos, no lo es. Este problema surge al intentar generar números aleatorios que tengan una función de distribución normal.

A menudo el ruido que se encuentra en los sistemas físicos se caracteriza por la función de distribución de probabilidad normal o gaussiana, que se ilustra en la Figura A.5. La función de densidad de probabilidad está dada por

$$p(C) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-C^2/2\sigma^2}, \qquad -\infty < C < \infty \tag{A.6}$$

donde σ^2 es la varianza de C, que es una medida de la dispersión de la función densidad de probabilidad $p(C)$. La función de distribución de probabilidad $F(C)$ es el área bajo $p(C)$ en el intervalo $(-\infty, C)$. Luego

$$F(C) = \int_{-\infty}^{C} p(x)dx \tag{A.7}$$

Lamentablemente, la integral dada en (A.7) no se puede expresar en términos de funciones simples. En consecuencia, la correspondencia inversa es difícil de conseguir.

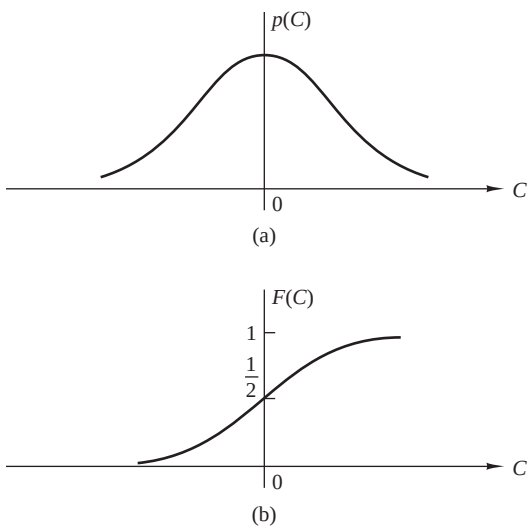


Figura A.5.

Existe una forma de resolver este problema. A partir de la teoría de la probabilidad se sabe que una variable aleatoria R (distribuida de Rayleigh), con la función de distribución de probabilidad

$$F(R) = \begin{cases} 0, & R < 0 \\ 1 - e^{-R^2/2\sigma^2}, & R \geq 0 \end{cases} \tag{A.8}$$

está relacionada con una pareja de variables aleatorias gaussianas C and D, a través de la transformación

$$C = R\cos\Theta \tag{A.9}$$

$$D = R\,\mathrm{sen}\,\Theta \tag{A.10}$$

donde Θ es una variable distribuida uniformemente en el intervalo $(0, 2\pi)$. El parámetro σ^2 es la varianza de C y D. Dado que (A.8) se invierte fácilmente, tenemos

$$F(R) = 1 - e^{-R^2/2\sigma^2} = A$$

y por tanto

$$R = \sqrt{2\sigma^2 \ln[1/(1-A)]} \tag{A.11}$$

donde A es una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo $(0, 1)$. Si ahora generamos una segunda variable aleatoria distribuida uniformente B y definimos

$$\Theta = 2\pi B \tag{A.12}$$

entonces a partir de (A.9) y (A.10), obtenemos dos variables aleatorias distribuidas gaussianas estadísticamente independientes C y D.

```
C      SUBROUTINE GAUSS CONVERTS A UNIFORM RANDOM
C      SEQUENCE XIN IN [0,1] TO A GAUSSIAN RANDOM
C      SEQUENCE WITH G(0,SIGMA**2)
C      PARAMETERS   :
C            XIN    :UNIFORM IN [0,1] RANDOM NUMBER
C              B    :UNIFORM IN [0,1] RANDOM NUMBER
C          SIGMA    :STANDARD DEVIATION OF THE GAUSSIAN
C           YOUT    :OUTPUT FROM THE GENERATOR
C
SUBROUTINE GAUSS 9XIN,B,SIGMA,YOUT)
PI=4.0*ATAN (1.0)
B=2.0*PI*B
R=SQRT (2.0*(SIGMA**2)*ALOG(1.0/(1.0-XIN)))
YOUT=R*COS(B)
RETURN
END
C      NOTE: TO USE THE ABOVE SUBROUTINE FOR A
C            GAUSSIAN RANDOM NUMBER GENERATOR
C            YOU MUST PROVIDE AS INPUT TWO UNIFORM RANDOM NUMBERS
C            XIN AND B
C            XIN AND B MUST BE STATISTICALLY INDEPENDENT
```

Figura A.6 Subrutina para generar variables aleatorias gaussianas.

El método descrito a menudo se utiliza en la práctica para generar variables aleatorias distribuidas gaussianas. Como se muestra en la Figura A.5, estas variables aleatorias tienen un valor medio de cero y una varianza σ^2. Si se desea una variable aleatoria gaussiana con media distinta de cero, entonces C y D pueden trasladarse mediante la adición del valor medio.

En la Figura A.6 se proporciona una subrutina que implementa este método para generar variables aleatorias distribuidas gaussianas.

B

Tablas de los coeficientes de transición para el diseño de filtros FIR de fase lineal

En la Sección 10.2.3 hemos descrito un método de diseño de filtros FIR de fase lineal que implicaba la especificación de $H_r(\omega)$ en un conjunto de frecuencias equiespaciadas $\omega_k = 2\pi(k+\alpha)/M$, donde $\alpha = 0$ o $\alpha = \frac{1}{2}$, $k = 0, 1, \ldots, (M-1)/2$ para M impar y $k = 0, 1, 2, \ldots, (M/2)-1$ para M par, donde M es la longitud del filtro. Dentro de la banda de paso del filtro, seleccionamos $H_r(\omega_k) = 1$, y en la banda eliminada, $H_r(\omega_k) = 0$. Para las frecuencias de la banda de transicción, los valores de $H_r(\omega_k)$ se optimizan con el fin de minimizar el lóbulo secundario máximo en la banda eliminada; ésto es lo que se conoce como *criterio de optimización minimax*.

La optimización de los valores de $H_r(\omega)$ en la banda de transición fue relizada por Rabiner *et al.* (1970) y las tablas que especifican los valores de transición se proporcionan en dichas publicaciones. En este apéndice hemos incluido unas pocas tablas seleccionadas para los filtros FIR paso bajo.

Proporcionamos cuatro tablas. La Tabla B.1 enumera los coeficientes de transición para el caso en que $\alpha = 0$ y un coeficiente de la banda de transición tanto para M impar como para M par. La Tabla B.2 enumera los coeficientes de transición para el caso en que $\alpha = 0$, y dos coeficientes de la banda de transición para M impar y M par. La Tabla B.3 enumera los coeficientes de transición para el caso en que $\alpha = \frac{1}{2}$, M par y un coeficiente de la banda de transición. Por último, la Tabla B.4 enumera los coeficientes de transición para el

caso en que $\alpha = \frac{1}{2}$, M par y dos coeficientes de la banda de transición. Las tablas también incluyen el nivel del lóbulo secundario máximo y el parámetro que define el ancho de banda, designado como BW.

Para utilizar las tablas, partimos de un conjunto de especificaciones, entre las que se incluyen: (1) el ancho de banda del filtro, que puede definirse como $(2\pi/M)(\mathrm{BW}+\alpha)$, donde BW es el número de frecuencias consecutivas en las que $H(\omega_k) = 1$, (2) la anchura de la región de transición, que es aproximadamente $2\pi/M$ veces el número de coeficientes de transición y (3) el lóbulo secundario máximo tolerable en la banda eliminada. La longitud del filtro puede seleccionarse a partir de las tablas para satisfacer las especificaciones.

M impar			M par		
BW	Minimax	T_1	BW	Minimax	T_1
	$M = 15$			$M = 16$	
1	−42.30932283	0.43378296	1	−39.75363827	0.42631836
2	−41.26299286	0.41793823	2	−37.61346340	0.40397949
3	−41.25333786	0.41047636	3	−36.57721567	0.39454346
4	−41.94907713	0.40405884	4	−35.87249756	0.38916626
5	−44.37124538	0.39268189	5	−35.31695461	0.38840332
6	−56.01416588	0.35766525	6	−35.51951933	0.40155639
	$M = 33$			$M = 32$	
1	−43.03163004	0.42994995	1	−42.24728918	0.42856445
2	−42.42527962	0.41042481	2	−41.29370594	0.40773926
3	−42.40898275	0.40141601	3	−41.03810358	0.39662476
4	−42.45948601	0.39641724	4	−40.93496323	0.38925171
6	−42.52403450	0.39161377	5	−40.85183477	0.37897949
8	−42.44085121	0.39039917	8	−40.75032616	0.36990356
10	−42.11079407	0.39192505	10	−40.54562140	0.35928955
12	−41.92705250	0.39420166	12	−39.93450451	0.34487915
14	−44.69430351	0.38552246	14	−38.91993237	0.34407349
15	−56.18293285	0.35360718			
	$M = 65$			$M = 64$	
1	−43.16935968	0.42919312	1	−42.96059322	0.42882080
2	−42.61945581	0.40903320	2	−42.30815172	0.40830689
3	−42.70906305	0.39920654	3	−42.32423735	0.39807129
4	−42.86997318	0.39335937	4	−42.43565893	0.39177246
5	−43.01999664	0.38950806	5	−42.55461407	0.38742065
6	−43.14578819	0.38679809	6	−42.66526604	0.38416748
10	−43.44808340	0.38129272	10	−43.01104736	0.37609863
14	−43.54684496	0.37946167	14	−43.28309965	0.37089233

Tabla B.1. Coeficientes de transición para $\alpha = 0$. *Continúa*

M impar			M par		
BW	Minimax	T_1	BW	Minimax	T_1
18	−43.48173618	0.37955322	18	−43.56508827	0.36605225
22	−43.19538212	0.38162842	22	−43.96245098	0.35977783
26	−42.44725609	0.38746948	26	−44.60516977	0.34813232
30	−44.76228619	0.38417358	30	−43.81448936	0.29973144
31	−59.21673775	0.35282745			
	$M = 125$			$M = 128$	
1	−43.20501566	0.42899170	1	−43.15302420	0.42889404
2	−42.66971111	0.40867310	2	−42.59092569	0.40847778
3	−42.77438974	0.39868774	3	−42.67634487	0.39838257
4	−42.95051050	0.39268189	4	−42.84038544	0.39226685
6	−43.25854683	0.38579101	5	−42.99805641	0.38812256
8	−43.47917461	0.38195801	7	−43.25537014	0.38281250
10	−43.63750410	0.37954102	10	−43.52547789	0.3782638
18	−43.95589399	0.37518311	18	−43.93180990	0.37251587
26	−44.05913115	0.37384033	26	−44.18097305	0.36941528
34	−44.05672455	0.37371826	34	−44.40153408	0.36686401
42	−43.94708776	0.37470093	42	−44.67161417	0.36394653
50	−43.58473492	0.37797851	50	−45.17186594	0.35902100
58	−42.14925432	0.39086304	58	−46.92415667	0.34273681
59	−42.60623264	0.39063110	62	−49.46298973	0.28751221
60	−44.78062010	0.38383713			
61	−56.22547865	0.35263062			

Fuente: Rabiner *et al.* (1970); © 1970 IEEE; reimpreso con su permiso.

Tabla B.1. *Continuación.*

Como ilustración, el diseño del filtro para el que $M = 15$ y

$$H_r\left(\frac{2\pi k}{M}\right) = \begin{cases} 1, & k = 0,1,2,3 \\ T_1, & k = 4 \\ 0, & k = 5,6,7 \end{cases}$$

corresponde a $\alpha = 0$, BW $= 4$, ya que $H_r(\omega_k) = 1$ en las cuatro frecuencias consecutivas $\omega_k = 2\pi k/15$, $k = 0$, 1, 2, 3, y el coeficiente de transición es T_1 en la frecuencia $\omega_k = 8\pi/15$. Los valores dados en la Tabla B.1 para $M = 15$ y BW $= 4$ es $T_1 = 0.40405884$. El lóbulo secundario máximo se encuentra en -41.9 dB, de acuerdo con la Tabla B.1.

M impar				M par			
BW	Minimax	T_1	T_2	BW	Minimax	T_1	T_2
	$M = 15$				$M = 16$		
1	−70.60540585	0.09500122	0.58995418	1	−65.27693653	0.10703125	0.60559357
2	−69.26168156	0.10319824	0.59357118	2	−62.85937929	0.12384644	0.62201631
3	−69.91973495	0.10083618	0.58594327	3	−62.96594906	0.12827148	0.62855407
4	−75.51172256	0.08407953	0.55715312	4	−66.03942485	0.12130127	0.61952704
5	−103.45078300	0.05180206	0.49917424	5	−71.73997498	0.11066284	0.60979204
	$M = 33$				$M = 32$		
1	−70.60967541	0.09497070	0.58985167	1	−67.37020397	0.09610596	0.59045212
2	−68.16726971	0.10585937	0.59743846	2	−63.93104696	0.11263428	0.60560235
3	−67.13149548	0.10937500	0.59911696	3	−62.49787903	0.11931763	0.61192546
5	−66.53917217	0.10965576	0.59674101	5	−61.28204536	0.12541504	0.61824023
7	−67.23387909	0.10902100	0.59417456	7	−60.82049131	0.12907715	0.62307031
9	−67.85412312	0.10502930	0.58771575	9	−59.74928167	0.12068481	0.60685586
11	−69.08597469	0.10219727	0.58216391	11	−62.48683357	0.13004150	0.62821502
13	−75.86953640	0.08137207	0.54712777	13	−70.64571857	0.11017914	0.60670943
14	−104.04059029	0.05029373	0.49149549				
	$M = 65$				$M = 64$		
1	−70.66014957	0.09472656	0.58945943	1	−70.26372528	0.09376831	0.58789222
2	−68.89622307	0.10404663	059.476127	2	−67.20729542	0.10411987	0.59421778
3	−67.90234470	0.10720215	0.59577449	3	−65.80684280	0.10850220	0.59666158
4	−67.24003792	0.10726929	0.59415763	4	−64.95227051	0.11038818	0.59730067
5	−66.86065960	0.10689087	0.59253047	5	−64.42742348	0.11113281	0.59698496
9	−66.27561188	0.10548706	0.58845983	9	−63.41714096	0.10936890	0.59088884
13	−65.96417046	0.10466309	0.58660485	13	−62.72142410	0.10828857	0.58738641
17	−66.16404629	0.10649414	0.58862042	17	−62.37051868	0.11031494	0.58968142
21	−66.76456833	0.10701904	0.58894575	21	−62.04848146	0.11254273	0.59249461
25	−68.13407993	0.10327148	0.58320831	25	−61.88074064	0.11994629	0.60564501
29	−75.98313046	0.08069458	0.54500379	29	−70.05681992	0.10717773	0.59842159
30	−104.92083740	0.04978485	0.48965181				
	$M = 125$				$M = 128$		
1	−70.68010235	0.09464722	0.58933268	1	−70.58992958	0.09445190	0.58900996
2	−68.94157696	0.10390015	0.59450024	2	−68.62421608	0.10349731	0.59379058
3	−68.19352627	0.10682373	0.59508549	3	−67.66701698	0.10701294	0.59506081
5	−67.34261131	0.10668945	0.59187505	4	−66.95196629	0.10685425	0.59298926
7	−67.09767151	0.10587158	0.59821869	6	−66.32718945	0.10596924	0.58953845
9	−67.05801296	0.10523682	0.58738706	9	−66.01315498	0.10471191	0.58593906
17	−67.17504501	0.10372925	0.58358265	17	−65.89422417	0.10288086	0.58097354
25	−67.22918987	0.10316772	0.58224835	25	−65.92644215	0.10182495	0.57812308
33	−67.11609936	0.10303955	0.58198956	33	−65.95577812	0.10096436	0.57576437
41	−66.71271324	0.10313721	0.58245499	41	−65.97698021	0.10094604	0.57451694
49	−66.62364197	0.10561523	0.58629534	49	−65.67919827	0.09865112	0.56927420
57	−69.28378487	0.10061646	0.57812192	57	−64.61514568	0.09845581	0.56604486
58	−70.35782337	0.09663696	0.57121235	61	−71.76589394	0.10496826	0.59452277
59	−75.94707718	0.08054886	0.54451285				
60	−104.09012318	0.04991760	0.48963264				

Fuente: Rabiner *et al.* (1970); © 1970 IEEE; reimpreso con su permiso.

Tabla B.2. Coeficientes de transición para $\alpha = 0$.

BW	Minimax	T_1
	$M = 16$	
1	−51.60668707	0.26674805
2	−47.48000240	0.32149048
3	−45.19746828	0.34810181
4	−44.32862616	0.36308594
5	−45.68347692	0.36661987
6	−56.63700199	0.34327393
	$M = 32$	
1	−52.64991188	0.26073609
2	−49.39390278	0.30878296
3	−47.72596645	0.32984619
4	−46.68811989	0.34217529
6	−45.33436489	0.35704956
8	−44.30730963	0.36750488
10	−43.11168003	0.37810669
12	−42.97900438	0.38465576
14	−56.32780266	0.35030518
	$M = 64$	
1	−52.90375662	0.25923462
2	−49.74046421	0.30603638
3	−48.38088989	0.32510986
4	−47.47863007	0.33595581
5	−46.88655186	0.34287720
6	−46.46230555	0.34774170
10	−45.46141434	0.35859375
14	−44.85988188	0.36470337
18	−44.34302616	0.36983643
22	−43.69835377	0.37586059
26	−42.45641375	0.38624268
30	−56.25024033	0.35200195
	$M = 128$	
1	−52.96778202	0.25885620
2	−49.82771969	0.30534668
3	−48.51341629	0.32404785
4	−47.67455149	0.33443604
5	−47.11462021	0.34100952
7	−46.43420267	0.34880371
10	−45.88529110	0.35493774
18	−45.21660566	0.36182251
26	−44.87959814	0.36521607
34	−44.61497784	0.36784058
42	−44.32706451	0.37066040
50	−43.87646437	0.37500000
58	−42.30969715	0.38807373
62	−56.23294735	0.35241699

Fuente: Rabiner *et al.* (1970); © 1970 IEEE; reimpreso con su permiso.

Tabla B.3. Coeficientes de transición para $\alpha = \frac{1}{2}$.

BW	Minimax	T_1	T_2
		$M = 16$	
1	−77.26126766	0.05309448	0.41784180
2	−73.81026745	0.07175293	0.49369211
3	−73.02352142	0.07862549	0.51966134
4	−77.95156193	0.07042847	0.51158076
5	−105.23953247	0.04587402	0.46967784
		$M = 32$	
1	−80.49464130	0.04725342	0.40357383
2	−73.92513466	0.07094727	0.49129255
3	−72.40863037	0.08012695	0.52153983
5	−70.95047379	0.08935547	0.54805908
7	−70.22383976	0.09403687	0.56031410
9	−69.94402790	0.09628906	0.56637987
11	−70.82423878	0.09323731	0.56226952
13	−104.85642624	0.04882812	0.48479068
		$M = 64$	
1	−80.80974960	0.04658203	0.40168723
2	−75.11772251	0.06759644	0.48390015
3	−72.66662025	0.07886963	0.51850058
4	−71.85610867	0.08393555	0.53379876
5	−71.34401417	0.08721924	0.54311474
9	−70.32861614	0.09371948	0.56020256
13	−69.34809303	0.09761963	0.56903714
17	−68.06440258	0.10051880	0.57543691
21	−67.99149132	0.10289307	0.58007699
25	−69.32065105	0.10068359	0.57729656
29	−105.72862339	0.04923706	0.48767025
		$M = 128$	
1	−80.89347839	0.04639893	0.40117195
2	−77.22580583	0.06295776	0.47399521
3	−73.43786240	0.07648926	0.51361278
4	−71.93675232	0.08345947	0.53266251
6	−71.10850430	0.08880615	0.54769675
9	−70.53600121	0.09255371	0.55752959
17	−69.95890045	0.09628906	0.56676912
25	−69.29977322	0.09834595	0.57137301
33	−68.75139713	0.10077515	0.57594641
41	−67.89687920	0.10183716	0.57863142
49	−66.76120186	0.10264282	0.58123560
57	−69.21525860	0.10157471	0.57946395
61	−104.57432938	0.04970703	0.48900685

Fuente: Rabiner *et al.* (1970); © 1970 IEEE; reimpreso con su permiso.

Tabla B.4. Coeficientes de transición para $\alpha = \frac{1}{2}$.

Referencias y bibliografía

Ackaike, H. 1969. “Power Spectrum Estimation Through Autoregression Model Fitting”, *Ann. Inst. Stat. Math.*, Vol. 21, págs. 407–149.

Ackaike, H. 1974. “A New Look at the Statistical Model Identification”, *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-19, págs. 716–723, diciembre.

Acndersen, N. O. 1978. “Comments on the Performance of Maximum Entropy Algorithm”, *Proc. IEEE*, Vol. 66, págs. 1581–1582, noviembre.

Acntoniou, A. 1979. *Digital Filters: Analysis and Design*, McGraw-Hill, Nueva York.

Acuer, E. 1987. “A Digital Filter Structure Free of Limit Cycles”, *Proc. 1987 ICASSP*, págs. 21.11.1–21.11.4, Dallas, TX, abril.

Acvenhaus, E., y Scchuessler, H. W. 1970. “On the Approximation Problem in the Design of Digital Filters with Limited Wordlength”, *Arch. Elek. Ubertragung*, Vol. 24, págs. 571–572.

Bcaggeroer, A. B. 1976. “Confidence Intervals for Regression (MEM) Spectral Estimates”, *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. IT-22, págs. 534–545, septiembre.

Bcandler, J. W. y Bcardakjian, B. J. 1973. “Least *p*th Optimization of Recursive Digital Filters,” *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-21, págs. 460–470, octubre.

Bcarnes, C. W. y Fcam, A. T. 1977. “Minimum Norm Recursive Digital Filters That Are Free of Overflow Limit Cycles”, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-24, págs. 569–574, octubre.

Bcartlett, M. S. 1948. “Smoothing Periodograms from Time Series with Continuous Spectra”, *Nature* (Londres), Vol. 161, págs. 686–687, mayo.

Bcartlett, M. S. 1961. *Stochastic Processes*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Bceckman, F. S. 1960 The Solution of Linear Equations by the conjugate Gradient Method” in *Mathematical Methods for Digital Computers*, A. Ralston and H.S. Wilf, eds., Wiley, Nueva York

Bcergland, G. D. 1969. “A Guided Tour of the Fast Fourier Transform”, *IEEE Spectrum*, Vol. 6, págs. 41–52, julio.

Bcerk, K. N. 1974. “Consistent Autoregressive Spectral Estimates,” *Ann. Stat.*, Vol. 2, págs. 489–502.

Bcernhardt, P. A., Acntoniadis, D. A. y Dca Rcosa, A. V. 1976. “Lunar Perturbations in Columnar Electron Content and Their Interpretation in Terms of Dynamo Electrostatic Fields”, *J. Geophys. Res.*, Vol. 81, págs. 5957–5963, diciembre.

Bcerryman, J. G. 1978. “Choice of Operator Length for Maximum Entropy Spectral Analysis”, *Geophysics*, Vol. 43, págs. 1384–1391, diciembre.

Bcierman, G. J. 1977. *Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation*, Academic, Nueva York.

Bclackman, R. B. y Tcukey, J. W. 1958. *The Measurement of Power Spectra*, Dover, Nueva York.

Bclahut, R. E. 1985. *Fast Algorithms for Digital Signal Processing*, Addison-Wesley, Reading, MA.

Bcluestein, L. I. 1970. “A Linear Filtering Approach to the Computation of the Discrete Fourier Transform”, *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-18, págs. 451–455, diciembre.

Bcolt, B. A. 1988. *Earthquakes*, W. H. Freeman and Co., Nueva York.

Bcomar, B. W. 1985. “New Second-Order State-Space Structures for Realizing Low Roundoff Noise Digital Filters”, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-33, págs. 106–110, febrero.

Bcracewell, R. N. 1978. *The Fourier Transform and Its Applications*, 2d ed., McGraw-Hill, Nueva York.

Bcrigham, E. O. 1988. *The Fast Fourier Transform and Its Applications*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

Bcrigham, E. O.y Mcorrow, R. E. 1967. “The Fast Fourier Transform,” *IEEE Spectrum*, Vol. 4, págs. 63–70, diciembre.

Bcrillinger, D. R. 1974. “Fourier Analysis of Stationary Processes”, *Proc. IEEE*, Vol. 62, págs. 1628–1643, diciembre.

Bcrophy, F. y Scalazar, A. C. 1973. “Considerations of the Padé Approximant Technique in the Synthesis of Recursive Digital Filters”, *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-21, págs. 500–505, diciembre.

Bcrown, J. L., Jcr., 1980. “First-Order Sampling of Bandpass Signals—A New Approach”, *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. IT-26, págs. 613–615, septiembre.

Bcrown, R. C. 1983. *Introduction to Random Signal Analysis and Kalman Filtering*, Wiley, Nueva York.

Bcrubaker, T. A. y Gcowdy, J. N. 1972. “Limit Cycles in Digital Filters”, *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-17, págs. 675–677, octubre.

Bcruzzone, S. P. y Kcaveh, M. 1980. “On Some Suboptimum ARMA Spectral Estimators”, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-28, págs. 753–755, diciembre.

Bcurg, J. P. 1967. “Maximum Entropy Spectral Analysis”, *Proc. 37th Meeting of the Society of Exploration Geophysicists*, Oklahoma City, OK, octubre. Reimpreso en *Modern Spectrum Analysis*, D. G. Childers, ed., IEEE Press, Neuva York.

Bcurg, J. P. 1968. “A New Analysis Technique for Time Series Data”, NATO Advanced Study Institute on Signal Processing with Emphasis on Underwater Acoustics, agosto 12–23. Reimpreso en *Modern Spectrum Analysis*, D. G. Childers, ed., IEEE Press, Nueva York.

Bcurg, J. P. 1972. “The Relationship Between Maximum Entropy and Maximum Likelihood Spectra”, *Geophysics*, Vol. 37, págs. 375–376, abril.

Bcurg, J. P. 1975. “Maximum Entropy Spectral Analysis”, Ph.D. dissertation, Department of Geophysics, Stanford University, Stanford, CA, mayo.

Bcurrus, C. S. y Pcarks, T. W. 1970. “Time–Domain Design of Recursive Digital Filters”, *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. 18, págs. 137–141, junio.

Bcurrus, C. S. y Pcarks, T. W. 1985. *DFT/FFT and Convolution Algorithms*, Wiley, Nueva York.

Bcutterweck, H. J., cvan Mceer, A. C. P.y Vcerkroost, G. 1984. “New Second-Order Digital Filter Sections Without Limit Cycles”, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-31, págs. 141–146, febrero.

Ccadzow, J. A. 1979. “ARMA Spectral Estimation: An Efficient Closed-Form Procedure,” *Proc. RADC Spectrum Estimation Workshop*, págs. 81–97, Rome, NY, octubre.

Ccadzow, J. A. 1981. “Autoregressive–Moving Average Spectral Estimation: A Model Equation Error Procedure”, *IEEE Trans. Geoscience Remote Sensing*, Vol. GE-19, págs. 24–28, enero.

Ccadzow, J. A. 1982. “Spectral Estimation: An Overdetermined Rational Model Equation Approach,” *Proc. IEEE*, Vol. 70, págs. 907–938, septiembre.

Ccandy, J. C. 1986. “Decimation for Sigma Delta Modulation”, *IEEE Trans. Communications*, Vol. COM-34, págs. 72–76, enero.

Ccandy, J. C., Wcooley, B. A. y Bcenjamin, D. J. 1981. “A Voiceband Codec with Digital Filtering,” *IEEE Trans. Communications*, Vol. COM-29, págs. 815–830, junio.

Ccapon, J. 1969. “High-Resolution Frequency–Wavenumber Spectrum Analysis”, *Proc. IEEE*, Vol. 57, págs. 1408–1418, agosto.

Ccapon, J. 1983. “Maximum-Likelihood Spectral Estimation”, en *Nonlinear Methods of Spectral Analysis*, 2d ed., S. Haykin, ed., Springer-Verlag, Nueva York.

Ccapon, J. y Gcoodman, N. R. 1971. “Probability Distribution for Estimators of the Frequency-Wavenumber Spectrum”, *Proc. IEEE*, Vol. 58, págs. 1785–1786, octubre.

Ccaraiscos, C. y Lciu, B. 1984. “A Roundoff Error Analysis of the LMS Adaptive Algorithm”, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-32, págs. 34–41, enero.

Ccarayannis, G., Mcanolakis, D. G. y Kcalouptsidis, N. 1983. “A Fast Sequential Algorithm for Least-Squares Filtering and Prediction”, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-31, págs. 1394–1402, diciembre.

Ccarayannis, G., Mcanolakis, D. G. y Kcalouptsidis, N. 1986. “A Unified View of Parametric Processing Algorithms for Prewindowed Signals”, *Signal Processing*, Vol. 10, págs. 335–368, junio.

Ccarlson, N. A. y Cculmone, A. F. 1979. “Efficient Algorithms for On-Board Array Processing”, *Record 1979 International Conference on Communications*, págs. 58.1.1–58.1.5, Boston, 10–14 junio .

Cchan, D. S. K. y Rcabiner, L. R. 1973a. “Theory of Roundoff Noise in Cascade Realizations of Finite Impulse Response Digital Filters”, *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 52, págs. 329–345, marzo.

Cchan, D. S. K. y Rcabiner, L. R. 1973b. “An Algorithm for Minimizing Roundoff Noise in Cascade Realizations of Finite Impulse Response Digital Filters”, *Bell Sys. Tech. J.*, Vol. 52, págs. 347–385, marzo.

Cchan, D. S. K. y Rcabiner, L. R. 1973c. “Analysis of Quantization Errors in the Direct Form for Finite Impulse Response Digital Filters”, *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-21, págs. 354–366, agosto.

Cchang, T. 1981. “Suppression of Limit Cycles in Digital Filters Designed with One Magnitude-Truncation Quantizer”, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-28, págs. 107–111, febrero.

Cchen, C. T. 1970. *Introduction to Linear System Theory*, Holt, Rinehart and Winston, Nueva York.

Cchen, W. Y. y Sctegen, G. R. 1974. “Experiments with Maximum Entropy Power Spectra of Sinusoids”, *J. Geophys. Res.*, Vol. 79, págs. 3019–3022, julio.

Cchilders, D. G., ed. 1978. *Modern Spectrum Analysis*, IEEE Press, Nueva York.

Cchow, J. C. 1972a. “On the Estimation of the Order of a Moving-Average Process,” *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-17, págs. 386–387, junio.

Cchow, J. C. 1972b. “On Estimating the Orders of an Autoregressive-Moving Average Process with Uncertain Observations”, *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-17, págs. 707–709, octubre.

Cchow, Y. y Ccassignol, E. 1962. *Linear Signal Flow Graphs and Applications*, Wiley, Nueva York.

Cchui, C. K. y Cchen, G. 1987. *Kalman Filtering*, Springer-Verlag, Nueva York.

Ccioffi, J. M. 1987, “Limited Precision Effects in Adaptive Filtering”, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-34, págs. 821–833, julio.

Ccioffi, J. M. y Kcailath, T. 1984. “Fast Recursive-Least-Squares Transversal Filters for Adaptive Filtering”, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-32, págs. 304–337, abril.

Ccioffi, J. M. y Kcailath, T. 1985. “Windowed Fast Transversal Filters Adaptive Algorithms with Normalization”, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-33, págs. 607–625, junio.

Cclaasen, T. A. C. M., Mcecklenbrauker, W. F. G. y Pceek, J. B. H. 1973. “Second-Order Digital Filter with Only One Magnitude-Truncation Quantizer and Having Practically No Limit Cycles,” *Electron. Lett.*, Vol. 9, noviembre.

Cclarke, R. J. 1985. *Transform Coding of Images*. Academic Press, Londres, Inglaterra.

Ccochran, W. T., Ccooley, J. W., Fcavin, D. L., Hcelms, H. D., Kcaenel, R. A., Lcang, W. W., Mcaling, G. C., Ncelson, D. E., Rcader, C. E. y Wcelch, P. D. 1967. “What Is the Fast Fourier Transform”, *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-15, págs. 45–55, junio.

Cconstantinides, A. G. 1967. “Frequency Transformations for Digital Filters”, *Electron. Lett.*, Vol. 3, págs. 487–489, noviembre.

Cconstantinides, A. G. 1968. “Frequency Transformations for Digital Filters”, *Electron. Lett.*, Vol. 4, págs. 115–116, abril.

Cconstantinides, A. G. 1970. “Spectral Transformations for Digital Filters”, *Proc. IEEE*, Vol. 117, págs. 1585–1590, agosto.

Ccooley, J. W. y Tcukey, J. W. 1965. “An Algorithm for the Machine Computation of Complex Fourier Series”, *Math. Comp.*, Vol. 19, págs. 297–301, abril.

Ccooley, J. W., Lcewis, P. y Wcelch, P. D. 1967. “Historical Notes on the Fast Fourier Transform”, *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-15, págs. 76–79, junio.

Ccooley, J. W., Lcewis, P. y Wcelch, P. D. 1969. “The Fast Fourier Transform and Its Applications”, *IEEE Trans. Education*, Vol. E-12, págs. 27–34, marzo.

Ccoulson, A. 1995. “A Generalization of Nonuniform Bandpass Sampling”. *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 43(3), págs. 694–704, marzo.

Ccoulson, A., Vcaugham, R. y Pcouletti, M, 1994. “Frequency Shifting Using Bandpass Sampling.” *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol 42(6), págs. 1556–1559, junio.

Ccrochiere, R. E. 1977. “On the Design of Sub-Band Coders for Low Bit Rate Speech Communication”, *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 56, págs. 747–711, mayo–junio.

Ccrochiere, R. E. 1981. “Sub-Band Coding”, *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 60, págs. 1633–1654, septiembre.

Ccrochiere, R. E. y Rcabiner, L. R. 1975. “Optimum FIR Digital Filter Implementations for Decimation, Interpolation, and Narrowband Filtering,” *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. ASSP-23, págs. 444–456, octubre.

Ccrochiere, R. E. y Rcabiner, L. R. 1976. “Further Considerations in the Design of Decimators and Interpolators”, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-24, págs. 296–311, agosto.

Ccrochiere, R. E. y Rcabiner, L. R. 1981. “Interpolation and Decimation of Digital Signals—A Tutorial Review”, *Proc. IEEE*, Vol. 69, págs. 300–331, marzo.

Ccrochiere, R. E. y Rcabiner, L. R. 1983. *Multirate Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

Dcaniels, R. W. 1974. *Approximation Methods for the Design of Passive, Active and Digital Filters*, McGraw-Hill, Nueva York.

Dcavenport, W. B., Jcr. 1970. *Probability and Random Processes: An Introduction for Applied Scientists and Engineers*, McGraw-Hill, Nueva York.

Dcavis, H. F. 1963. *Fourier Series and Orthogonal Functions*, Allyn and Bacon, Boston.

Dceczky, A. G. 1972. “Synthesis of Recursive Digital Filters Using the Minimum *p*-Error Criterion”, *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-20, págs. 257–263, octubre.

Dceller, J. R. Jr., Hcansen, J. H. L. y Pcroakis, J. G. 2000. *Discrete-Time Processing of Speech Signals*, Wiley, Nueva York.

Dcelsarte, P. y Gcenin, Y. 1986. “The Split Levinson Algorithm”, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-34, págs. 470–478, junio.

Dcelsarte, P., Gcenin, Y. y Kcamp, Y. 1978. “Orthogonal Polynomial Matrices on the Unit Circle”, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-25, págs. 149–160. enero.

DceRcusso, P. M., Rcoy, R. J. y Cclose, C. M. 1965. *State Variables for Engineers*, Wiley, Nueva York.

Dcuhamel, P. 1986. “Implementation of Split-Radix FFT Algorithms for Complex, Real, and Real-Symmetric Data”, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-34, págs. 285–295, abril.

Dcuhamel, P. y Hcollmann, H. 1984. “Split-Radix FFT Algorithm,” *Electron. Lett.*, Vol. 20, págs. 14–16, enero.

Dcurbin, J. 1959. “Efficient Estimation of Parameters in Moving-Average Models”, *Biometrika*, Vol. 46, págs. 306–316.

Dcwight, H. B. 1957. *Tables of Integrals and Other Mathematical Data*, 3d ed., Macmillan, Nueva York.

Dcym, H. y MccKcean, H. P. 1972. *Fourier Series and Integrals*, Academic, Nueva York.

Ecbert, P. M., Mcazo, J. E. y Tcaylor, M. G. 1969. “Overflow Oscillations in Digital Filters”, *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 48, págs. 2999–3020, noviembre.

Ecleftheriou, E. y Fcalconer, D. D. 1987. “Adaptive Equalization Techniques for HF Channels”, *IEEE J. Selected Areas in Communications*, Vol. SAC-5, págs. 238–247, febrero.

Eclup, L., Gcardner, F. M. y Hcarris F. A., 1993 “Interpolation in digital Modems, Part II: Fundamentals and performance”. *IEEE trans. on Communications*, Vol, 41(6), págs. 998–1008, junio.

Fcalconer, D. D. y Lcjung, L. 1978. “Application of Fast Kalman Estimation to Adaptive Equalization”, *IEEE Trans. Communications*, Vol. COM-26, págs. 1439–1446, octubre.

Fcam, A. T. y Bcarnes, C. W. 1979. “Non-minimal Realizations of Fixed-Point Digital Filters That Are Free of All Finite Wordlength Limit Cycles,” *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-27, págs. 149–153, abril.

Fcarrow, C. W. 1998. “ A Continiously Variable Digital Delay Element”. *Proc. IEEE Intern. Symposium on Circuits and Systems*, págs. 2641–2645.

Fcettweis, A. 1971. “Some Principles of Designing Digital Filters Imitating Classical Filter Structures”, *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-18, págs. 314–316, marzo.

Fcletcher, R. y Pcowell, M. J. D. 1963. “A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization”, *Comput. J.*, Vol. 6, págs. 163–168.

Fcougere, P. F., Zcawalick, E. J. y Rcadoski, H. R. 1976. “Spontaneous Line Splitting in Maximum Entropy Power Spectrum Analysis,” *Phys. Earth Planet. Inter.*, Vol. 12, 201–207, agosto.

Fcrerking, M. E. 1994. *Digital Signal Processing in Communication Systems*, Kluwer Academic Publishers, Boston.

Fcriedlander, B. 1982a. “Lattice Filters for Adaptive Processing”, *Proc. IEEE*, Vol. 70, págs. 829–867, agosto.

Fcriedlander, B. 1982b. “Lattice Methods for Spectral Estimation”, *Proc. IEEE*, Vol. 70, págs. 990–1017, septiembre.

Fcuchs, J. J. 1988. “Estimating the Number of Sinusoids in Additive White Noise”, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-36, págs. 1846–1853, diciembre.

Gcantmacher, F. R. 1960. *The Theory of Matrices*, Vol. I., Chelsea, Nueva York.

Gcardner, F. M. 1993. “Interpolation in Digital Modems, Part I: Fundamentals”. *IEEE Trans. on Communications*, Vol. 41(3), págs. 502–508, marzo.

Gcardner, W. A. 1984. “Learning Characteristics of Stochastic-Gradient-Descent Algorithms: A General Study, Analysis and Critique,” *Signal Processing*, Vol. 6, págs. 113–133, abril.

Gcardner, W. A. 1987. *Statistical Spectral Analysis: A Nonprobabilistic Theory*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

Gcarlan, C. y Ecsteban, D. 1980. “16 Kbps Real-Time QMF Sub-Band Coding Implementation”, *Proc. 1980 International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, págs. 332–335, abril.

Gceorge, D. A., Bcowen, R. R. y Sctorey, J. R. 1971. “An Adaptive Decision-Feedback Equalizer”, *IEEE Trans. Communication Technology*, Vol. COM-19, págs. 281–293, junio.

Gceronimus, L. Y. 1958. *Orthogonal Polynomials* (en ruso) (traducido al inglés por Consultants Bureau, Nueva York, 1961).

Gcersch, W. y Scharpe, D. R. 1973. “Estimation of Power Spectra with Finite-Order Autoregressive Models,” *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-18, págs. 367–369, agosto.

Gcersho, A. 1969. “Adaptive Equalization of Highly Dispersive Channels for Data Transmission”, *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 48, págs. 55–70, enero.

Gcibbs, A. J. 1969. “An Introduction to Digital Filters”, *Aust. Telecommun. Res.*, Vol. 3, págs. 3–14, noviembre.

Gcibbs, A. J. 1970. “The Design of Digital Filters”, *Aust. Telecommun. Res.*, Vol. 4, págs. 29–34, mayo.

Gcitlin, R. D. y Wceinstein, S. B. 1979. “On the Required Tap-Weight Precision for Digitally Implemented Mean-Squared Equalizers”, *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 58, págs. 301–321, febrero.

Gcitlin, R. D., Mceadors, H. C. y Wceinstein, S. B. 1982. “The Tap-Leakage Algorithm: An Algorithm for the Stable Operation of a Digitally Implemented Fractionally Spaced, Adaptive Equalizer”, *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 61, págs. 1817–1839, octubre.

Gcoertzel, G. 1968. “An Algorithm for the Evaluation of Finite Trigonometric Series”, *Am. Math. Monthly*, Vol. 65, págs. 34–35, enero.

Gcohberg, I., ed. 1986. *I. Schür Methods in Operator Theory and Signal Processing*, Birkhauser Verlag, Stuttgart, Alemania.

Gcold, B. y Jcordan, K. L., Jcr. 1986. “A Note on Digital Filter Synthesis”, *Proc. IEEE*, Vol. 56, págs. 1717–1718, octubre.

Gcold, B. y Jcordan, K. L., Jcr. 1969. “A Direct Search Procedure for Designing Finite Duration Impulse Response Filters,” *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-17, págs. 33–36, marzo.

Gcold, B. y Rcader, C. M. 1966. “Effects of Quantization Noise in Digital Filters”. *Proc. AFIPS 1966 Spring Joint Computer Conference*, Vol. 28, págs. 213–219.

Gcold, B. y Rcader, C. M. 1969. *Digital Processing of Signals*, McGraw-Hill, Nueva York.

Gcolden, R. M. y Kcaiser, J. F. 1964. “Design of Wideband Sampled Data Filters”, *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 43, págs. 1533–1546, julio.

Gcood, I. J. 1971. “The Relationship Between Two Fast Fourier Transforms”, *IEEE Trans. Computers*, Vol. C-20, págs. 310–317.

Gcorski-Pcopiel, J., ed. 1975. *Frequency Synthesis: Techniques and Applications*, IEEE Press, Nueva York.

Gcoyal, V. 2001. “Theoretical Foundations of Transform Coding”. *IEEE Signal Processing Magazine*, pp 9-21, septiembre.

Gcrace, O. D. y Pcitt, S. P. 1969. “Sampling and Interpolation of Bandlimited Signals by Quadrature Methods”. *J. Acoust. Soc. Amer.*, Vol. 48(6), págs. 1311–1318, noviembre.

Gcraupe, D., Kcrause, D. J. y Mcoore, J. B. 1975. “Identification of Autoregressive–Moving Average Parameters of Time Series”, *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-20, págs. 104–107, febrero.

Gcray, A. H. y Mcarkel, J. D. 1973. “Digital Lattice and Ladder Filter Synthesis”, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-21, págs. 491–500, diciembre.

Gcray, A. H. y Mcarkel, J. D. 1976. “A Computer Program for Designing Digital Elliptic Filters”, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-24, págs. 529–538, diciembre.

Gcray, R. M. 1990. *Source Coding Theory*, Kluwer, Boston, MA.

Gcrenander, O. y Sczego, G. 1958. *Toeplitz Forms and Their Applications*, University of California Press, Berkeley, CA.

Gcriffiths, L. J. 1975. "Rapid Measurements of Digital Instantaneous Frequency", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-23, págs. 207–222, abril.

Gcriffiths, L. J. 1978. "An Adaptive Lattice Structure for Noise Cancelling Applications", Proc. ICASSP-78, págs. 87–90. Tulsa, OK, abril.

Gcuillemin, E. A. 1957. *Synthesis of Passive Networks*, Wiley, Nueva York.

Gcupta, S. C. 1966. *Transform and State Variable Methods in Linear Systems*, Wiley, Nueva York.

Hcamming, R. W. 1962. *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill, Nueva York.

Hcarris, F. 1997. *Performance and Design of Farrow Filter Used for Arbitrary Resampling.* 31st Conference on Signals, Systems, and Computers, Pacific Grove, CA, págs. 595–599.

Hcaykin, S. 1991. *Adaptive Filter Theory*, 2d ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

Hcelme, B. y Ncikias, C. S. 1985. "Improved Spectrum Performance via a Data-Adaptive Weighted Burg Technique", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-33, págs. 903–910, agosto.

Hcelms, H. D. 1967. "Fast Fourier Transforms Method of Computing Difference Equations and Simulating Filters", *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-15, págs. 85–90, junio.

Hcelms, H. D. 1968. "Nonrecursive Digital Filters: Design Methods for Achieving Specifications on Frequency Response", *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-16, págs. 336–342, septiembre.

Hcelstrom, C. W. 1990. *Probability and Stochastic Processes for Engineers*, 2d ed., Macmillan, Nueva York.

Hcerring, R. W. 1980. "The Cause of Line Splitting in Burg Maximum-Entropy Spectral Analysis", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-28, págs. 692–701, diciembre.

Hcermann, O. 1970. "Design of Nonrecursive Digital Filters with Linear Phase," *Electron. Lett.*, Vol. 6, págs. 328–329, noviembre.

Hcermann, O. y Scchücessler, H. W. 1970a. "Design of Nonrecursive Digital Filters with Minimum Phase", *Electron. Lett.*, Vol. 6, págs. 329–330, noviembre.

Hcerrmann, O. y Scchücessler, H. W. 1970b. "On the Accuracy Problem in the Design of Nonrecursive Digital Filters", *Arch. Elek. Ubertragung*, Vol. 24, págs. 525–526.

Hcerrmann, O., Rcabiner, L. R. y Cchan, D. S. K. 1973. "Practical Design Rules for Optimum Finite Impulse Response Lowpass Digital Filters", *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 52, págs. 769–799, julio–agosto.

Hcildebrand, F. B. 1952. *Methods of Applied Mathematics*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

Hcofstetter, E., Ocppenheim, A. V. y Sciegel, J. 1971. "A New Technique for the Design of Nonrecursive Digital Filters," *Proc. 5th Annual Princeton Conference on Information Sciences and Systems*, págs. 64–72.

Hcogenauer, E.B. 1981. "An Economical Class of Digital Filters for Decimation and Interpolation" *IEEE Trans. on ASSP*, Vol. 29(2), págs. 155–162, abril.

Hcouseholder, A. S. 1964. *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*, Blaisdell, Waltham, MA.

Hcsu, F. M. 1982. “Square-Root Kalman Filtering for High-Speed Data Received Over Fading Dispersive HF Channels”, *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. IT-28, págs. 753–763, septiembre.

Hcsu, F. M. y Gciordano, A. A. 1978. “Digital Whitening Techniques for Improving Spread Spectrum Communications Performance in the Presence of Narrowband Jamming and Interference”, *IEEE Trans. Communications*, Vol. COM-26, págs. 209–216, febrero.

Hcwang, S. Y. 1977. “Minimum Uncorrelated Unit Noise in State Space Digital Filtering”, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-25, págs. 273–281, agosto.

Icncinbono, B.1978. “Adaptive Signal Processing for Detection and Communication”, en *communication Systems and Random Process Theory*, J.K. Skwirzynski, ed., Sijthoff en Noordhoff, Alphen aan den Rijn, Países Bajos.

Jcayant, N. S. y Ncoll, P. 1984. *Digital Coding of waveforms*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

Jcackson, L. B. 1969. “An Analysis of Limit Cycles Due to Multiplication Rounding in Recursive Digital (Sub) Filters”, *Proc. 7th Annual Allerton Conference on Circuit and System Theory*, págs. 69–78.

Jcackson, L. B. 1970a. “On the Interaction of Roundoff Noise and Dynamic Range in Digital Filters”, *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 49, págs. 159–184, febrero.

Jcackson, L. B. 1970b. “Roundoff Noise Analysis for Fixed-Point Digital Filters Realized in Cascade or Parallel Form”, *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-18, págs. 107–122, junio.

Jcackson, L. B. 1976. “Roundoff Noise Bounds Derived from Coefficients Sensitivities in Digital Filters”, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-23, págs. 481–485, agosto.

Jcackson, L. B. 1979. “Limit Cycles on State-Space Structures for Digital Filters”, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-26, págs. 67–68, enero.

Jcackson, L. B., Lcindgren, A. G. y Kcim, Y. 1979. “Optimal Synthesis of Second-Order State-Space Structures for Digital Filters”, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-26, págs. 149–153, marzo.

Jcackson, M. y Mcatthewson, P. 1986. “Digital Processing of Bandpass Signals”. *GEC Journal of Research*, Vol. 4(1), págs. 32–41.

Jcahnke, E. y Ecmde, F. 1945. *Tables of Functions*, 4ª ed., Dover, Nueva York.

Jcain, V. K. y Ccrochiere, R. E. 1984. “Quadrature Mirror Filter Design in the Time Domain”, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-32, págs. 353–361, abril.

Jcang, Y. y Ycang, S. 2001. *Recursive Cascaded Integrator-Comb Decimation Filters with Integer Multiple factors*, 44th IEEE Midwest Symposium on circuits and Systems, Daytona, OH, agosto.

Jcenkins, G. M. y Wcatts, D. G. 1968. *Spectral Analysis and Its Applications*, Holden-Day, San Francisco.

Jcohnson, D. H. 1982. “The Application of Spectral Estimation Methods to Bearing Estimation Problems”, *Proc. IEEE*, Vol. 70, págs. 1018–1028, septiembre.

Jcohnston, J. D. 1980. “A Filter Family Designed for Use in Quadrature Mirror Filter Banks”, *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, págs. 291–294, abril.

Jcones, R. H. 1976. “Autoregression Order Selection”, *Geophysics*, Vol. 41, págs. 771–773, agosto.

Jcones, S. K., Ccavin, R. K. y Rceed, W. M. 1982. “Analysis of Error-Gradient Adaptive Linear Equalizers for a Class of Stationary-Dependent Processes”, *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. IT-28, págs. 318–329, marzo.

Jcury, E. I. 1964. *Theory and Applications of the z-Transform Method*, Wiley, Nueva York.

Kcailath, T. 1974. “A View of Three Decades of Linear Filter Theory”, *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. IT-20, págs. 146–181, marzo.

Kcailath, T. 1981. *Lectures on Wiener and Kalman Filtering*, 2d printing, Springer-Verlag, Nueva York.

Kcailath, T. 1985. “Linear Estimation for Stationary and Near-Stationary Processes”, en *Modern Signal Processing*, T. Kailath, ed., Hemisphere Publishing Corp., Washington, DC.

Kcailath, T. 1986. “A Theorem of I. Schür and Its Impact on Modern Signal Processing”, en Gohberg 1986.

Kcailath, T., Vcieira, A. C. G, and Mcorf, M. 1978. “Inverses of Toeplitz Operators, Innovations, and Orthogonal Polynomials”, *SIAM Rev.*, Vol. 20, págs. 1006–1019.

Kcaiser, J. F. 1963. “Design Methods for Sampled Data Filters”, *Proc. First Allerton Conference on Circuit System Theory*, págs. 221–236, noviembre.

Kcaiser, J. F. 1966. “Digital Filters”, in *System Analysis by Digital Computer*, F. F. Kuo y J. F. Kaiser, eds., Wiley, Nueva York.

Kcalouptsidis, N. y Tcheodoridis, S. 1987. “Fast Adaptive Least-Squares Algorithms for Power Spectral Estimation”, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-35, págs. 661–670, mayo.

Kcalman, R. E. 1960. “A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems”, *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, Vol. 82D, págs. 35–45, marzo.

Kcalman, R. E. y Bcucy, R. S. 1961. “New Results in Linear Filtering Theory”, *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, Vol. 83, págs. 95–108.

Kcashyap, R. L. 1980. “Inconsistency of the AIC Rule for Estimating the Order of Autoregressive Models”, *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-25, págs. 996–998, octubre.

Kcaveh, J. y Bcruzzone, S. P. 1979. “Order Determination for Autoregressive Spectral Estimation”, *Record of the 1979 RADC Spectral Estimation Workshop*, págs. 139–145, Griffin Air Force Base, Rome, NY.

Kcaveh, M. y Lcippert, G. A. 1983. “An Optimum Tapered Burg Algorithm for Linear Prediction and Spectral Analysis”, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-31, págs. 438–444, abril.

Kcay, S. M. 1980. “A New ARMA Spectral Estimator”, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-28, págs. 585–588, octubre.

Kcay, S. M. 1988. *Modern Spectral Estimation*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

Kcay, S. M. y Mcarple, S. L., Jcr. 1979. “Sources of and Remedies for Spectral Line Splitting in Autoregressive Spectrum Analysis”, *Proc. 1979 ICASSP*, págs. 151–154.

Kcay, S. M. y Mcarple, S. L., Jcr. 1981. “Spectrum Analysis: A Modern Perspective”, *Proc. IEEE*, Vol. 69, págs. 1380–1419, noviembre.

Kcesler, S. B., ed. 1986. *Modern Spectrum Analysis II*, IEEE Press, Nueva York.

Kcetchum, J. W. y Pcroakis, J. G. 1982. “Adaptive Algorithms for Estimating and Suppressing Narrow-Band Interference in PN Spread-Spectrum Systems”, *IEEE Trans. Communications*, Vol. COM-30, págs. 913–923, mayo.

Kcnowles, J. B. y Oclcayto, E. M. 1968. “Coefficient Accuracy and Digital Filter Response”, *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-15, págs. 31–41, marzo.

Kcohlenburg, A. 1953. “Exact Interpolation of Bandlimited Functions”. *Journal of Applied Physics*, Vol. 24(12), págs. 1432–1436, mayo.

Kcrishna, H. 1988. “New Split Levinson, Schür, and Lattice Algorithms for Digital Signal Processing”, *Proc. 1988 International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, págs. 1640–1642, Nueva York, abril.

Kcromer, R. E. 1969. “Asymptotic Properties of the Autoregressive Spectral Estimator”, Ph.D. dissertation, Department of Statistics, Stanford University, Stanford, CA.

Kcung, H. T. 1982. “Why Systolic Architectures”? *IEEE Computer*, Vol. 15, págs. 37–46.

Kcung, S. Y. y Hcu, Y. H. 1983. “A Highly Concurrent Algorithm and Pipelined Architecture for Solving Toeplitz Systems”, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-31, págs. 66–76, enero.

Kcung, S. Y., Wchitehouse, H. J. y Kcailath, T., eds. 1985. *VLSI and Modern Signal Processing*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

Lcaakso, T., Vcalimaki, V., Kcarjalainen, M. y Lcaine, U. 1996. “Splitting the Unit Delay”. *IEEE Signal Processing Magazine*, No. 1, págs. 30–54, enero.

Lcacoss, R. T. 1971. “Data Adaptive Spectral Analysis Methods”, *Geophysics*, Vol. 36, págs. 661–675, agosto.

Lcang, S. W. y MccCclellan, J. H. 1980. “Frequency Estimation with Maximum Entropy Spectral Estimators”, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-28, págs. 716–724, diciembre.

Lcevinson, N. 1947. “The Wiener RMS Error Criterion in Filter Design and Prediction”, *J. Math. Phys.*, Vol. 25, págs. 261–278.

Lcevy, H. y Lcessman, F. 1961. *Finite Difference Equations*, Macmillan, Nueva York.

Lcin, D. W. 1984. “On Digital Implementation of the Fast Kalman Algorithm”, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-32, págs. 998–1005, octubre.

Lcinden, cd. A. 1959. “ A Discussion of Sampling Theorems.” *Proc. of the IRE*, Vol. 47(11), págs. 1219–1226, noviembre.

Lcing, F. y Pcroakis, J. G. (1984a). “Numerical Accuracy and Stability: Two Problems of Adaptive Estimation Algorithms Caused by Round-Off Error”, *Proc. ICASSP-84*, págs. 30.3.l–30.3.4, San Diego, CA, marzo.

Lcing, F. y Pcroakis, J. G. (1984b). “Nonstationary Learning Characteristics of Least-Squares Adaptive Estimation Algorithms”, *Proc. ICASSP-84*, págs. 3.7.1–3.7.4, San Diego, CA, marzo.

Lcing, F., Mcanolakis, D. y Pcroakis, J. G. 1985, “New Forms of LS Lattice Algorithms and Analysis of Their Round-Off Error Characteristics”, *Proc. ICASSP-85*, págs. 1739–1742, Tampa, FL, abril.

Lcing, F., Mcanolakis, D. y Pcroakis, J. G. 1986. “Numerically Robust Least-Squares Lattice-Ladder Algorithms with Direct Updating of the Reflection Coefficients”, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-34, págs. 837–845, agosto.

Lciu, B. 1971. “Effect of Finite Word Length on the Accuracy of Digital Filters—A Review”, *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-18, págs. 670–677, noviembre.

Lcjung, S. y Lcjung, L. 1985. “Error Propagation Properties of Recursive Least-Squares Adaptation Algorithms”, *Automatica*, Vol. 21, págs. 157–167.

Lcucky, R. W. 1965. “Automatic Equalization for Digital Communications”, *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 44, págs. 547–588, abril.

Mcagee, F. R. y Pcroakis, J. G. 1973. “Adaptive Maximum-Likelihood Sequence Estimation for Digital Signaling in the Presence of Intersymbol Interference”, *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. IT-19, págs. 120–124, enero.

Mcakhoul, J. 1975. “Linear Prediction: A Tutorial Review”, *Proc. IEEE*, Vol. 63, págs. 561–580, abril.

Mcakhoul, J. 1978. “A Class of All-Zero Lattice Digital Filters: Properties and Applications”, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-26, págs. 304–314, agosto.

Mcakhoul, J. 1980. “A Fast Cosine Transform In One and Two Dimentions”. *IEEE Trans. on ASSP*, Vol. 28(1), págs. 27–34, febrero.

Mcarkel, J. D. y Gcray, A. H., Jcr. 1976. *Linear Prediction of Speech*, Springer-Verlag, Nueva York.

Mcanolakis, D., Lcing, F. y Pcroakis, J. G. 1987. “Efficient Time-Recursive Least-Squares Algorithms for Finite-Memory Adaptive Filtering”, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-34, págs. 400–408, abril.

Mcarple, S. L., Jcr. 1980. “A New Autoregressive Spectrum Analysis Algorithm”, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-28, págs. 441–454, agosto.

Mcarple, S. L., Jcr. 1987. *Digital Spectral Analysis with Applications*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

Mcartucci, S. A. 1994. “Symmetric Convolution and the Discrete Sine and Cosine Transforms”. *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 42(5), págs. 1038–1051, mayo.

Mcarzetta, T. L. 1983. “A New Interpretation for Capon’s Maximum Likelihood Method of Frequency–Wavenumber Spectral Estimation”, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-31, págs. 445–449, abril.

Mcarzetta, T. L. y Lcang, S. W. 1983. “New Interpretations for the MLM and DASE Spectral Estimators”, *Proc. 1983 ICASSP*, págs. 844–846, Boston, abril.

Mcarzetta, T. L. y Lcang, S. W. 1984. “Power Spectral Density Bounds”, *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. IT-30, págs. 117–122, enero.

Mcason, S. J. y Zcimmerman, H. J. 1960. *Electronic Circuits, Signals and Systems*, Wiley, Nueva York.

Mcazo, J. E. 1979. “On the Independence Theory of Equalizer Convergence”, *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 58, págs. 963–993, mayo.

MccCclellan, J. H. 1982. “Multidimensional Spectral Estimation”, *Proc. IEEE*, Vol. 70, págs. 1029–1039, septiembre.

MccDconough, R. N. 1983. “Application of the Maximum-Likelihood Method and the Maximum Entropy Method to Array Processing”, en *Nonlinear Methods of Spectral Analysis*, 2d ed., S. Haykin, ed., Springer-Verlag, Nueva York.

MccGcillem, C. D. y Ccooper, G. R. 1984. *Continuous and Discrete Signal and System Analysis*, 2ª ed., Holt Rinehart and Winston, Nueva York.

Mceditch, J. E. 1969. *Stochastic Optimal Linear Estimation and Control*, McGraw-Hill, Nueva York.

Mceyer, R.,and Bcurrus, S. 1975. "A Unified Analysis of Multirate and Periodically Time-Varying Digital Filters". *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, Vol. 22(3), págs. 162–168, marzo.

Mcills, W. L., Mcullis, C. T. y Rcoberts, R. A. 1981. "Low Roundoff Noise and Normal Realizations of Fixed-Point IIR Digital Filters", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-29, págs. 893–903, agosto.

Mcoorer, J. A. 1977. "Signal Aspects of Computer Music; A Survey", *Proc. IEEE*, Vol. 65, págs. 1108–1137, agosto.

Mcorf, M., Vcieira, A. y Lcee, D. T. 1977. "Ladder Forms for Identification and Speech Processing," *Proc. 1977 IEEE Conference Decision and Control*, págs. 1074–1078, Nueva Orleans, LA, diciembre.

Mcullis, C. T. y Rcoberts, R. A. 1976a. "Synthesis of Minimum Roundoff Noise Fixed-Point Digital Filters", *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-23, págs. 551–561, septiembre.

Mcullis, C. T. y Rcoberts, R. A. 1976b. "Roundoff Noise in Digital Filters: Frequency Transformations and Invariants", *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. ASSP-24, págs. 538–549, diciembre.

Mcurray, W., ed. 1972 *Numerical Methods for Unconstrained Minimization*, Acedemic, Nueva York.

Mcusicus, B. 1985. "Fast MLM Power Spectrum Estimation from Uniformly Spaced Correlations", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Proc.*, Vol. ASSP-33, págs. 1333–1335, octubre.

Ncewman, W. I. 1981. "Extension to the Maximum Entropy Method III", *Proc. 1st ASSP Workshop on Spectral Estimation*, págs. 1.7.1–1.7.6, Hamilton, ON, agosto.

Ncichols, H. E., Gciordano, A. A. y Pcroakis, J. G. 1977. "MLD and MSE Algorithms for Adaptive Detection of Digital Signals in the Presence of Interchannel Interference", *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. IT-23, págs. 563–575, septiembre.

Ncikias, C. L. y Rcaghuveer, M. R. 1987. "Bispectrum Estimation: A Digital Signal Processing Framework", *Proc. IEEE*, Vol. 75, págs. 869–891, julio.

Ncikias, C. L. y Sccott, P. D. 1982. "Energy-Weighted Linear Predictive Spectral Estimation: A New Method Combining Robustness and High Resolution", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-30, págs. 287–292, abril.

Ncuttall, A. H. 1976. "Spectral Analysis of a Univariate Process with Bad Data Points, via Maximum Entropy and Linear Predictive Techniques", *NUSC Technical Report TR-5303*, New London, CT, marzo.

Ncyquist, H. 1928. "Certain Topics in Telegraph Transmission Theory", *Trans. AIEE*, Vol. 47, págs. 617–644, abril.

Ocppenheim, A. V. 1978. *Applications of Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

Ocppenheim, A. V. y Scchafer, R. W. 1989. *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

Ocppenheim, A. V. y Wceinstein, C. W. 1972. “Effects of Finite Register Length in Digital Filters and the Fast Fourier Transform”, *Proc. IEEE*, Vol. 60, págs. 957–976. agosto.

Ocppenheim, A. V. y Wcillsky, A. S. 1983. *Signals and Systems*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

Pcapoulis, A. 1962 *The Fourier Integral and Its Applications*, McGraw-Hill, Nueva York.

Pcapoulis, A. 1984. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, 2ª ed., McGraw-Hill, Nueva York.

Pcarker, S. R. y Hcess, S. F. 1971. “Limit-Cycle Oscillations in Digital Filters”, *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-18, págs. 687–696, noviembre.

Pcarks, T. W. y MccCclellan, J. H. 1972a. “Chebyshev-Approximation for Nonrecursive Digital Filters with Linear Phase”, *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-19, págs. 189–194, marzo.

Pcarks, T. W. y MccCclellan, J. H. 1972b. “A Program for the Design of Linear Phase Finite Impulse Response Digital Filters,” *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-20, págs. 195–199, agosto.

Pcarzen, E. 1957. “On Consistent Estimates of the Spectrum of a Stationary Time Series”, *Am. Math. Stat.*, Vol. 28, págs. 329–348.

Pcarzen, E. 1974. “Some Recent Advances in Time Series Modeling”, *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-19, págs. 723–730, diciembre.

Pceacock, K. L, and Tcreitel, S. 1969. “Predictive Deconvolution—Theory and Practice”, *Geophysics*, Vol. 34, págs. 155–169.

Pceebles, P. Z., Jcr. 1987. *Probability, Random Variables, and Random Signal Principles*, 2d ed., McGraw-Hill, Nueva York.

Pcicinbono, B. 1978. “Adaptive Signal Processing for Detection and Communication”, en *Communication Systems and Random Process Theory*, J. K. Skwirzynski, ed., Sijthoff en Noordhoff, Alphen aan den Rijn, Países Bajos.

Pcisarenko, V. F. 1973. “The Retrieval of Harmonics from a Convariance Function”, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, Vol. 33, págs. 347–366.

Pcoole, M. A. 1981. *Autoregressive Methods of Spectral Analysis*, E.E. degree thesis, Department of Electrical and Computer Engineering, Northeastern University, Boston, mayo.

Pcrice, R. 1990. “Mirror FFT and Phase FFT Algorithms”, unpublished work, Raytheon Research Division, mayo.

Pcroakis, J. G. 1970. “Adaptive Digital Filters for Equalization of Telephone Channels,” *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-18, págs. 195–200, junio.

Pcroakis, J. G. 1974, “Channel Identification for High Speed Digital Communications”, *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-19, págs. 916–922, diciembre.

Pcroakis, J. G. 1975. “Advances in Equalization for Intersymbol Interference”, en *Advances in Communication Systems*, Vol. 4, A. J. Viterbi, ed., Academic, Nueva York.

Pcroakis, J. G. 1989. *Digital Communications*, 2ª ed., McGraw-Hill, Nueva York.

Pcroakis, J. G. y Mciller, J. H. 1969. “Adaptive Receiver for Digital Signaling through Channels with Intersymbol Interference,” *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. IT-15, págs. 484–497, julio.

Pcroakis, J. G., Rcader, C. M., Lcing, F., Ncikias, C. L., Mcoonen, M. and Pcroudler, I. K. 2002. *Algorithms for Statistical Signal Processing*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.

Pcroakis, J. G. 2001. *Digital Communications*, 4ª ed., McGraw-Hill, Nueva York.

Qci, R., Ccoakley, F. y Ecvans, B. 1996. "Practical Consideration for Bandpass Sampling." *Electronics Letters*, Vol. 32(20), págs. 1861–1862, septiembre.

Rcabiner, L. R. y Scchaefer, R. W. 1974a. "On the Behavior of Minimax Relative Error FIR Digital Differentiators", *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 53, págs. 333–362, febrero.

Rcabiner, L. R. y Scchafer, R. W. 1974b. "On the Behavior of Minimax FIR Digital Hilbert Transformers", *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 53, págs. 363–394, febrero.

Rcabiner, L. R. y Scchafer, R. W. 1978. *Digital Processing of Speech Signals*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

Rcabiner, L. R., Scchafer, R. W. y Rcader, C. M. 1969. "The Chirp *z*-Transform Algorithm and Its Applications", *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 48, págs. 1249–1292, mayo–junio.

Rcabiner, L. R., Gcold, B. y MccGconegal, C. A. 1970. "An Approach to the Approximation Problem for Nonrecursive Digital Filters", *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-18, págs. 83–106, junio.

Rcabiner, L. R., MccCclellan, J. H. y Pcarks, T. W. 1975. "FIR Digital Filter Design Techniques Using Weighted Chebyshev Approximation", *Proc. IEEE*, Vol. 63, págs. 595–610, abril.

Rcader, C. M. 1970. "An Improved Algorithm for High-Speed Auto-correlation with Applications to Spectral Estimation", *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-18, págs. 439–441, diciembre.

Rcader, C. M. y Bcrenner, N. M. 1976. "A New Principle for Fast Fourier Transformation", *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. ASSP-24, págs. 264–266, junio.

Rcader, C. M. y Gcold, B. 1967a. "Digital Filter Design Techniques in the Frequency Domain", *Proc. IEEE*, Vol. 55, págs. 149–171, febrero.

Rcader, C. M. y Gcold, B. 1967b. "Effects of Parameter Quantization on the Poles of a Digital Filter", *Proc. IEEE*, Vol. 55, págs. 688–689, mayo.

Rcamstad, T. A. 1984. "Digital Methods for Conversion Between Arbitrary Sampling Frequencies", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-32, págs. 577–591, junio.

Rcao, K. y Hcuang, J. 1996. *Techniques and Standards for Image, Video, and Audio Coding*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

Rcao, K. R. y Ycip, P 1990. *Discrete Cosine Transform*, Academic Press, Boston.

Rcemez, E. Yca. 1957. *General Computational Methods of Chebyshev Approximation*, Atomic Energy Translation 4491, Kiev, USSR.

Rcice, D. y Wcu, K. 1982. "Quatature Sampling with High Dynamic Range". *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 18(4), págs. 736–739, noviembre.

Rcissanen, J. 1983. "A Universal Prior for the Integers and Estimation by Minimum Description Length", *Ann. Stat.*, Vol. 11, págs. 417–431.

Rcoberts, R. A. y Mcullis, C. T. 1987. *Digital Signal Processing*, Addison-Wesley, Reading, MA.

Rcobinson, E. A. 1962. *Random Wavelets and Cybernetic Systems*, Charles Griffin, London.

Rcobinson, E. A. 1982. "A Historical Perspective of Spectrum Estimation", *Proc. IEEE*, Vol. 70, págs. 885–907, septiembre.

Rcobinson, E. A. y Tcreitel, S. 1978. "Digital Signal Processing in Geophysics", en *Applications of Digital Signal Processing*, A. V. Oppenheim, ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

Rcobinson, E. A. y Tcreitel, S. 1980. *Geophysical Signal Analysis*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

Rcoy, R., Pcaulraj, A. y Kcailath, T. 1986. "ESPRIT: A Subspace Rotation Approach to Estimation of Parameters of Cisoids in Noise", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-34, págs. 1340–1342, octubre.

Scafranek, R. J., McacKcay, K. Jcayant, N. W. y Kcim, T. 1988. "Image Coding Based on Selective Quantization of the Reconstruction Noise in the Dominant Sub-Band", *Proc. 1988 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, págs. 765–768, abril.

Scakai, H. 1979. "Statistical Properties of AR Spectral Analysis", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-27, págs. 402–409, agosto.

Scandberg, I. W. y Kcaiser, J. F. 1972. "A Bound on Limit Cycles in Fixed-Point Implementations of Digital Filters", *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-20, págs. 110–112, junio.

Scatorius, E. H. y Aclexander J. T. 1978. "High Resolution Spectral Analysis of Sinusoids in Correlated Noise," *Proc. 1978 ICASSP*, págs. 349–351, Tulsa, OK, abril 10–12.

Scayed, A. H. 2003 *Adaptive Filters*, Wiley, Nueva York.

Scchafer, R. W. y Rcabiner, L. R. 1973. "A Digital Signal Processing Approach to Interpolation", *Proc. IEEE*, Vol. 61, págs. 692–702, junio.

Sccheuermann, H. y Gcockler, H. 1981. "A Comprehensive Survey of Digital Transmultiplexing Methods", *Proc. IEEE*, Vol. 69, págs. 1419–1450.

Scchmidt, R. D. 1981. "A Signal Subspace Approach to Multiple Emitter Location and Spectral Estimation", Ph.D. dissertation, Department of Electrical Engineering, Stanford University, Stanford, CA, noviembre.

Scchmidt, R. D. 1986. "Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation", *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, Vol. AP 34, págs. 276–280, marzo.

Scchott, J. P. y MccCclellan, J. H. 1984. "Maximum Entropy Power Spectrum Estimation with Uncertainty in Correlation Measurements", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-32, págs. 410–418, abril.

Scchur, I. 1917. "On Power Series Which Are Bounded in the Interior of the Unit Circle", *J. Reine Angew. Math.*, Vol. 147, págs. 205–232, Berlin. For an English translation of the paper, see Gohberg 1986.

Scchuster, Scir Acrthur. 1898. "On the Investigation of Hidden Periodicities with Application to a Supposed Twenty-Six-Day Period of Meteorological Phenomena", *Terr. Mag.*, Vol. 3, págs. 13–41, marzo.

Scedlmeyer, A. y Fcettweis, A. 1973. "Digital Filters with True Ladder Configuration", *Int. J. Circuit Theory Appl.*, Vol. 1, págs. 5–10, marzo.

Schanks, J. L. 1967. "Recursion Filters for Digital Processing", *Geophysics*, Vol. 32, págs. 33–51, febrero.

Schannon, C. E. 1949. “Communication in the Presence of Noise”, *Proc. IRE*, págs. 10–21, enero.

Scheingold, D. H., ed. 1986. *Analog-Digital Conversion Handbook*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

Sciebert, W. M. 1986. *Circuits, Signals and Systems*, McGraw-Hill, Nueva York.

Scingleton, R. C. 1967. “A Method for Computing the Fast Fourier Transform with Auxiliary Memory and Limit High Speed Storage”, *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-15, págs. 91–98, junio.

Scingleton, R. C. 1969. “An Algorithm for Computing the Mixed Radix Fast Fourier Transform”, *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-17, págs. 93–103, junio.

Sclock, D. T. M. y Kcailath, T 1988. “Numerically Stable Fast Recursive Least Squares Transversal Filters”, *Proc. 1988 Int. Conf. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, págs. 1364–1368, Nueva York, abril.

Sclock, D. T. M. y Kcailath, T 1991. “Numerically Stable Fast Transversal Filters for Recursive Least Squares Adaptive Filtering”, *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 39, págs. 92–114, enero.

Scmith, M. J. T. y Bcarwell, T. P. 1984. “A Procedure for Designing Exact Reconstruction Filter Banks for Tree Structured Subband Coders”, *Proc. 1984 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, págs. 27.1.1–27.1.4, San Diego, marzo.

Scmith, M. J. T. y Ecddins, S. L. 1988. “Subband Coding of Images with Octave Band Tree Structures”, *Proc. 1987 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, págs. 1382–1385, Dallas, abril.

Sctark, H, and Wcoods, J. W. 1994. *Probability, Random Processes, and Estimation Theory for Engineers*, 2nd Ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

Scteiglitz, K. 1965. “The Equivalence of Digital and Analog Signal Processing”, *Inf. Control*, Vol. 8, págs. 455–467, octubre.

Scteiglitz, K. 1970. “Computer-Aided Design of Recursive Digital Filters,” *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-18, págs. 123–129, junio.

Sctockham, T. G. 1966. “High Speed Convolution and Correlation”, *1966 Spring Joint Computer Conference, AFIPS Proc.*, Vol. 28, págs. 229–233.

Sctorer, J. E. 1957. *Passive Network Synthesis*, McGraw-Hill, Nueva York.

Sctrang, G. 1999. “The Discrete Cosine Transform”. *SIAM Review*, Vol. 41(1), págs. 135–137.

Scwarztrauber, P. 1986. “Symmetric FFT’s,” *Mathematics of Computation*, Vol. 47, págs. 323–346, julio.

Scwingler, D. N. 1979a. “A Comparison Between Burg’s Maximum Entropy Method and a Nonrecursive Technique for the Spectral Analysis of Deterministic Signals”, *J. Geophys. Res.*, Vol. 84, págs. 679–685, febrero.

Scwingler, D. N. 1979b. “A Modified Burg Algorithm for Maximum Entropy Spectral Analysis”, *Proc. IEEE*, Vol. 67, págs. 1368–1369, septiembre.

Scwingler, D. N. 1980. “Frequency Errors in MEM Processing”, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-28, págs. 257–259, abril.

Sczego, G. 1967. *Orthogonal Polynomials*, 3d ed., Colloquium Publishers, No. 23, American Mathematical Society, Providence, RI.

Tchorvaldsen, T. 1981. “A Comparison of the Least-Squares Method and the Burg Method for Autoregressive Spectral Analysis”, *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, Vol. AP-29, págs. 675–679, julio.

Tcong, H. 1975. “Autoregressive Model Fitting with Noisy Data by Akaike’s Information Criterion”, *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. IT-21, págs. 476–480, julio.

Tcong, H. 1977. “More on Autoregressive Model Fitting with Noise Data by Akaike’s Information Criterion”, *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. IT-23, págs. 409–410, mayo.

Tcretter, S. A. 1976. *Introduction to Discrete-Time Signal Processing*, Wiley, Nueva York.

Tcufts, D. W. y Kcumaresan, R. 1982. “Estimation of Frequencies of Multiple Sinusoids: Making Linear Prediction Perform Like Maximum Likelihood”, *Proc. IEEE*, Vol. 70, págs. 975–989, septiembre.

Uclrych, T. J. y Bcishop, T. N. 1975. “Maximum Entropy Spectral Analysis and Autoregressive Decomposition”, *Rev. Geophys. Space Phys.*, Vol. 13, págs. 183–200, febrero.

Uclrych, T. J. y Cclayton, R. W. 1976. “Time Series Modeling and Maximum Entropy”, *Phys. Earth Planet. Inter.*, Vol. 12, págs. 188–200, agosto.

Ucngerboeck, G. 1972. “Theory on the Speed of Convergence in Adaptive Equalizers for Digital Communication”, *IBM J. Res. Devel.*, Vol. 16, págs. 546–555, noviembre.

Vcaidyanathan, P. P. 1990. “Multirate Digital Filters, Filter Banks, Polyphase Networks, and Applications: A Tutorial”, *Proc. IEEE*, Vol. 78, págs. 56–93, enero.

Vcaidyanathan, P. P. 1993. *Multirate Systems and Filter Banks*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

Vcaughan, R., Sccott, N. y Wchite, D. 1991. “The Theory of Bandpass Sampling”. *IEEE Trans. on signal Procesing*, Vol. 39(9), págs. 1973–1984.

Vcetterli, J. 1984. “Multi-dimensional Sub-Band Coding: Some Theory and Algorithms”, *Signal Processing*, Vol. 6, págs. 97–112, abril.

Vcetterli, J. 1987. “A Theory of Multirate Filter Banks”, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-35, págs. 356–372, marzo.

Vcieira, A. C. G. 1977. “Matrix Orthogonal Polynomials with Applications to Autoregressive Modeling and Ladder Forms”, Ph.D. dissertation, Department of Electrical Engineering, Stanford University, Stanford, CA, diciembre.

Wcalker, G. 1931. “On Periodicity in Series of Related Terms”, *Proc. R. Soc.*, Ser. A, Vol. 313, págs. 518–532.

Wcang, Z. 1984. “Fast Algorithms for the Discrete W Transform for the Discrete foruier Transform.” *IEEE Trans. on ASSP*, Vol. 32(4), págs. 803–816, agosto.

Wcaters, W, y Jcarrett, B. 1982. “Bandpass Signal Sampling and Coherent Dection”. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 18(4), págs. 731–736, noviembre.

Wcax, M. y Kcailath, T. 1985. “Detection of Signals by Information Theoretic Criteria”, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-32, págs. 387–392, abril.

Wceinberg, L. 1962. *Network Analysis and Synthesis*, McGraw-Hill, Nueva York.

Wcelch, P. D. 1967. “The Use of Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra: A Method Based on Time Averaging over Short Modified Periodograms”, *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-15, págs. 70–73, junio.

Wcidrow, B. y Hcoff, M. E., Jr. 1960. “Adaptive Switching Circuits”, *IRE WESCON Conv. Rec.*, pt. 4, págs. 96–104.

Wcidrow, B., Mcantey, P. y Gcriffiths, L. J. 1967. “Adaptive Antenna Systems”, *Proc. IEEE*, Vol. 55, págs. 2143–2159, diciembre.

Wcidrow, B. et al. 1975. “Adaptive Noise Cancelling Principles and Applications”, *Proc. IEEE*, Vol. 63, págs. 1692–1716, diciembre.

Wcidrow, B., Mcantey, P. y Gcriffiths, L. J. 1967. “Adaptive Antenna syatems”. *Proc. IEEE*, Vol. 55, págs. 2143–2159, diciembre.

Wciener, N. 1949. *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications*, Wiley, Nueva York.

Wciener, N. y Pcaley, R. E. A. C. 1934. *Fourier Transforms in the Complex Domain*, American Mathematical Society, Providence, RI.

Wcinograd, S. 1976. “On Computing the Discrete Fourier Transform”, *Proc. Natl. Acad. Sci.*, Vol. 73, págs. 105–106.

Wcinograd, S. 1978. “On Computing the Discrete Fourier Transform”, *Math. Comp.*, Vol. 32, págs. 177–199.

Wcold, H. 1938. *A Study in the Analysis of Stationary Time Series*, reprinted by Almqvist & Wiksell, Estocolmo, 1954.

Wcood, L. C. y Tcreitel, S. 1975. “Seismic Signal Processing”, *Proc. IEEE*, Vol. 63, págs. 649–661, abril.

Wcoods, J. W. y O’Nceil, S. D. 1986. “Subband Coding of Images”, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-34, págs. 1278–1288, octubre.

Ycoula, D. y Kcazanjian, N. 1978. “Bauer-Type Factorization of Positive Matrices and the Theory of Matrices Orthogonal on the Unit Circle”, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-25, págs. 57–69, enero.

Ycule, G. U. 1927. “On a Method of Investigating Periodicities in Disturbed Series with Special References to Wolfer’s Sunspot Numbers”, *Philos. Trans. R. Soc. Londres*, Ser. A, Vol. 226, págs. 267–298, julio.

Zcadeh, L. A. y Dcesoer, C. A. 1963. *Linear System Theory: The State-Space Approach*, McGraw-Hill, Nueva York.

Zcverev, A. I. 1967. *Handbook of Filter Synthesis*, Wiley, Nueva York.

Respuestas a los problemas seleccionados

Capítulo 1

1.1 **(a)** Unidimensional, multicanal, discreta en el tiempo y digital.

(b) Multidimensional, un solo canal, continua en el tiempo, analógica.

(c) Unidimensional, un solo canal, continua en el tiempo, analógica.

(d) Unidimensional, un solo canal, continua en el tiempo, analógica.

(e) Unidimensional, multicanal, discreta en el tiempo, digital.

1.3 **(a)** Periódica con período $T_p = \frac{2\pi}{5}$.

(c) $f = \frac{1}{12\pi} \Rightarrow$ no periódica.

(e) $\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ es periódica con período $N_p = 4$; $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{8}\right)$ es periódica con período $N_p = 16$; $\cos\left(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$ es periódica con período $N_p = 8$. Por tanto, $x(n)$ es periódica con período $N_p = 16$ (16 es el mínimo común múltiplo de 4, 8, 16).

1.4 **(b)** $N = 7; k = 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7$; $\mathrm{GCD}(k,N) = 7\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 7$; $N_p = 1\ 7\ 7\ 7\ 7\ 7\ 1$.

1.5 **(a)** Sí. $x(1) = 3 = 3\operatorname{sen}\left(\frac{100\pi}{F_s}\right) \Rightarrow$ 200 muestras/segundo.

1.6 **(b)** Si $x(n)$ es periódica, entonces $f = k/N$ donde N es el período. Luego, $T_d = \left(\frac{k}{f}T\right) = k\left(\frac{T_p}{T}\right)T = kT_p$. Por tanto, toma k períodos (kT_p) de la señal analógica para formar 1 período (T_d) de la señal discreta.

1.8 **(a)** $F_{\text{máx}} = 100Hz$, $F_s \geq 2F_{\text{máx}} = 200$ Hz.

(b) $F_{solapamiento} = \frac{F_x}{2} = 125$ Hz.

1.10 **(a)** $F_s = 1000$ muestras/segundo; $F_{solapamiento} = 500$ Hz.

(b) $F_{\text{máx}} = 900$ Hz; $F_N = 2F_{\text{máx}} = 1800$ Hz.

(c) $f_1 = 0.3$; $f_2 = 0.9$. Pero $f_2 = 0.9 > 0.5 \Rightarrow f_2 = 0.1$. Por tanto, $x(n) = 3\cos[(2\pi)(0.3)n] + 2\cos[(2\pi)(0.1)n]$.

(d) $\Delta = \frac{10}{1023}$.

Capítulo 2

2.7 **(a)** Estático, no lineal, invariante en el tiempo, causal, estable.

(c) Estático, lineal, variante en el tiempo, causal, estable.

(e) Estático, no lineal, invariante en el tiempo, causal, estable.

(h) Estático, lineal, invariante en el tiempo, causal, estable.

(k) Estático, no lineal, invariante en el tiempo, causal, estable.

2.11 Dado que el sistema es lineal y $x_1(n)+x_2(n)=\delta(n)$, se deduce que la respuesta al impulso del sistema es $y_1(n)+y_2(n)=\left\{0,\underset{\uparrow}{3},-1,2,1\right\}$.

Si el sistema fuera invariante en el tiempo, la respuesta a $x_3(n)$ sería $\left\{\underset{\uparrow}{3},2,1,3,1\right\}$. Pero éste no es el caso.

2.16 **(b)** **(1)** $y(n)=h(n)*x(n)=\{1,3,7,7,7,6,4\}$; $\sum_n y(n)=35$, $\sum_k h(k)=5$, $\sum_k x(k)=7$

(4) $y(n)=\{1,2,3,4,5\}$; $\sum_n y(n)=15$, $\sum_n h(n)=1$, $\sum_n x(n)=15$

(7) $y(n)=\{0,1,4,-4,-5,-1,3\}$ $\sum_n y(n)=-2$, $\sum_n h(n)=-1$, $\sum_n x(n)=2$

(10) $y(n)=\{1,4,4,4,10,4,4,4,1\}$; $\sum_n y(n)=36$, $\sum_n h(n)=6$, $\sum_n x(n)=6$

2.19 $y(n)=\sum_{k=0}^{4}h(k)x(n-k)$, $x(n)=\left\{a^{-3},a^{-2},a^{-1},\underset{\uparrow}{1},a,\dots,a^5\right\}$, $h(n)=\left\{\underset{\uparrow}{1},1,1,1,1,\right\}$; $y(n)=\sum_{k=0}^{4}x(n-k)$, $-3\le n\le 9$; $y(n)=0$, en otro caso

2.22 **(a)** $y_1(n)=x(n)+x(n-1)=\{1,5,6,5,8,8,6,7,9,12,15,9\}$
$y_4(n)=\{0.25,1.5,2.75,2.75,3.25,4,3.5,3.25,3.75,5.25,6.25,7,6,2.25\}$

2.26 Con $x(n)=0$, tenemos $y(n-1)+\frac{4}{3}y(n-1)=0$ $y(-1)=-\frac{4}{3}y(-2)$; $y(0)=\left(-\frac{4}{3}\right)^2y(-2)$; $y(1)=\left(-\frac{4}{3}\right)^3y(-2)$

Por tanto, $y(k)=\left(-\frac{4}{3}\right)^{k+2}y(-2)\leftarrow$ es la respuesta a la entrada nula.

2.32 **(a)** $L_1=N_1+M_1$ and $L_2=N_2+M_2$
(c) $N_1=-2$, $N_2=4$, $M_1=-1$, $M_2=2$
Solapamiento parcial por la izquierda: $n=-3$ $n=-1$ $L_1=-3$; solapamiento completo: $n=0$ $n=3$; solapamiento parcial por la derecha: $n=4$ $n=6$ $L_2=6$

2.34 $h(n)=\left\{\underset{\uparrow}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16}\right\}$; $y(n)=\left\{\underset{\uparrow}{1},2,2,5,3,3,3,2,1,0\right\}$

Entonces, $x(n)=\left\{1.\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{7}{4},\frac{3}{2}\right\}$

2.38 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=0,n\text{ par}}^{\infty}|a|^n$; $\sum_{n=-}^{\infty}|a|^{2n}$; $=\frac{1}{1-|a|^2}$

Estable si $|a|<1$

2.40 $y(n)=2\left[1-(\frac{1}{2})^{n+1}\right]u(n)-2\left[1-(\frac{1}{2})^{a-9}\right]u(n-10)$

2.41 **(a)** $y(n)=\frac{2}{3}\left[2^{n+1}-(\frac{1}{2})^{n+1}\right]u(n)$

2.42 **(a)** $h_c(n)=h_1(n)*h_2(n)*h_3(n)=[\delta(n)-\delta(n-1)]*u(n)*h(n)=h(n)$

(b) No.

2.45 $y(n)=-\frac{1}{2}y(n-1)+z(n)+2x(n-2)$; $y(-2)=1$, $y(-1)=\frac{3}{2}$, $y(9)=\frac{17}{4}$, $y(1)=\frac{47}{8},\cdots$

2.48 **(a)** $y(n)=ay(n-1)+bx(n)\Rightarrow h(n)=ba^nu(n)$ $\sum_{n=0}^{\infty}h(n)=\frac{b}{1-a}=1\Rightarrow b=1-a$

(b) $s(n)=\sum_{k=0}^{n}h(n-k)=b\left[\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right]u(n)$

$s(\infty)=\frac{b}{1-a}=1\Rightarrow b=1-a$

2.51 **(a)** $y(n)=\frac{1}{3}x(n)+\frac{1}{3}x(n-3)+y(n-1)$ para $x(n)=\delta(n)$, luego
$h(n)=\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\dots\right\}$

(b) $y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) + \frac{1}{2}x(n-2)$, $y(-1) = y(-2) = 0$
con $x(n) = \delta(n)$, $h(n) = \left\{0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{1}{9}, \frac{11}{128}, \frac{15}{256}, \frac{41}{1024} \cdots\right\}$

(c) $y(n) = 1.4y(n-1) - 0.48y(n-2) + x(n)$, $y(-1) - y(-2) = 0$
con $x(n)\delta(n)$, $h(n) = \{1, 1, 4, 1.48, 1.4, 1.2496, 1.0774, 0.9086, \dots\}$

(d) Los tres sistemas son IIR

2.54 **(a)** convolución: $y_1(n) = \left\{\underset{\rightarrow}{1}3, 7, 7, 7, 7, 4\right\}$

correlación: $\gamma_1(n) = \left\{1, 3, 7, 7, \underset{\rightarrow}{7}, 6, 4\right\}$

(b) convolución: $y_4(n) = \left\{\underset{\rightarrow}{1}, 4, 10, 20, 25, 24, 16\right\}$

correlación: $\gamma_4(n) = \left\{4, 11, 20, \underset{\rightarrow}{30}, 20, 11, 4\right\}$

2.58 $h(n) = [c_1 2^n + c_2 n 2^n]u(n)$. Con $y(0) = 1$, $y(1) = 3$, tenemos $c_1 = 1$ y $c_2 = \frac{1}{2}$

2.61 $x(n) = \begin{cases} 1, & n_0 - N \le n \le n_0 + N \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$.

$r_{xx}(l) = \begin{cases} 2N + 1 - |l|, & -2N \le l \le 2N \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$.

2.63 $r_{xx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n-l) = \begin{cases} 2N + 1 - |l|, & -2N \le l \le 2N \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$.

Como $r_{xx}(0) = 2N + 1$, la autocorrelación normalizada es

$\rho_{xx}(l) = \begin{cases} \frac{1}{2N+1}(2N + 1 - |l|), & -2N \le l \le 2N \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

Capítulo 3

3.1 **(a)** $X(z) = 3z^5 + 6 + z^{-1} - 4z^{-2}$ ROC $: 0 < |z| < \infty$

3.2 **(a)** $X(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^2}$

(d) $X(z) = \frac{\left[az^{-1} - (az^{-1})^3\right] \operatorname{sen} w_0}{\left[1 - (2a\cos w_0)z^{-1} + a^2 z^{-2}\right]^2}$, $|z| < a$

(h) $X(z) = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}z - 1}$, $|z| > \frac{1}{2}$

3.4 **(a)** $X(z) = \frac{z^{-1}}{(1+z^{-1})^2}$, $|z| > 1$

(f) $X(z) = 1 - z^{-2} + z^{-4} - z^{-5}$, $z \neq 0$

3.8 **(a)** $Y(z) = \frac{X(z)}{1-z^{-1}}$

3.12 **(a)** $x(n) = [4(2)^n - 3 - n]u(n)$

3.14 **(a)** $x(n) = [2(-1)^n - (-2)^n]u(n)$

(c) $x(n) = -\left[\frac{3}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \cos\frac{\pi}{4}n + \frac{23}{10}\left(1\sqrt{2}\right)^n \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}n + \frac{17}{20}(12)^n\right]u(n)$

(j) $x(n) = \left(-\frac{1}{a}\right)^{n+1} u(n) + \left(\frac{1}{a}\right)^{n-1} u(n-1)$

3.16 **(a)** $y(n) = \left[-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u(n)$

(d) $y(n) = [-2(n+1) + 2^{n+1}]u(n)$

3.19 **(b)** $x(n) = -\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-1)$

3.24 **(a)** $x(n) = [0.136(0.28)^n + 0.864(-1.78)^n]u(n)$

3.35 **(a)** $y(n) = \left[\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\frac{\pi n}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n \operatorname{sen}\frac{\pi n}{3}\right] u(n)$

(d) $y(n) = \frac{10}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4}\right) u(n)$

(h) $y(n) = \left[4\left(\frac{1}{2}\right)^n - n\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] u(n)$

3.38 **(a)** $h(n) = \left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] u(n)$

$y(n) = \left[\frac{8}{3} - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] u(n)$

(d) $h(n) = \left[2\left(\frac{2}{5}\right)^n - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right] u(n)$

$y(n) = \left[\frac{25}{12} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n - \frac{4}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n\right] u(n)$

3.42 **(a)** $h(n) = \left[-\frac{7}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{9}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right] u(n-1)$

3.44 **(a)** $h(n) = b_0\delta(n) + (b1 - b_0 a_1)(-a_1)^{n-1}u(n-1)$

(b) $y(n) = \left[\frac{b_0+b_1}{1+a_1} + \frac{a_1 b_0 - b_1}{1+a_1}(-a_1)^n\right] u(n)$

3.49 **(d)** $y(n) = \left[\frac{4}{3} - \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{7}{24}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] u(n)$

3.56 **(a)** $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

(d) $x(n) = \left[\frac{3}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{7}{10}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right] u(n)$

3.58 ROC: $a < |z| < 1/a$

$x(-18) = -32/15309$

Capítulo 4

4.2 **(a)** $X_a(f) = \frac{A}{a+j2\pi\pi F}$; $|X_a(F)| = \frac{A}{\sqrt{a^2+(2\pi F)^2}}$; $\angle X_a(f) = -\tan -1\frac{2\pi f}{a}$

4.5 **(a)** $x(n) = \left\{\frac{11}{2}, 2+\frac{3}{4}\sqrt{2}, 1, 2-\frac{3}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{2}, 2-\frac{3}{4}\sqrt{2}, 1, 2+\frac{3}{4}\sqrt{2}\right\}$ Por tanto, $c_0 = 2$, $c_1 = c_7 = 1$, $c_2 = c_6 = \frac{1}{2}$, $c_3 = c_5 = \frac{1}{4}$, $c_4 = 0$

(b) $P = \frac{53}{8}$

4.6 **(a)** $c_k = \begin{cases} \frac{1}{2l}, & k = 3 \\ \frac{1}{2}, & k = 5 \\ \frac{1}{2}, & k = 10 \\ \frac{-1}{2j}, k = 12 & \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

(d) $c_0 = 0$,

$c_1 = \frac{2j}{5}\left[-\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right]$

$c_2 = \frac{2j}{5}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{5}\right) - 2\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right]$;

$c_3 = -c_2$; $c_4 = -c_1$

(h) $N = 2$; $c_k = \frac{1}{2}(1 - e^{-j\pi k})$; $c_0 = 0$, $c_1 = -1$

4.9 **(a)** $X(\omega) = \frac{1-e^{-j6\omega}}{1-e-j\omega}$

(e) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| \to \infty$. Por tanto, la transformada de Fourier no existe.

(h) $X(\omega) = (2M+1)A + 2A\sum_{k=1}^{M}(2M+1-k)\cos wk$

4.14 **(a)** $X(0) = \sum_n x(n) = -1$;

(e) $\int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega|^2 d\omega = 2\pi \sum_n |x(n)|^2 = (2\pi)(19) = 38\pi$

4.17 **(a)** $\sum_n x^*(n)e^{-j\omega n} = \left(\sum_n x(n)e^{-j(-\omega)n)}\right)^* = X^*(-\omega)$

(c) $Y(\omega) = X(\omega) + X(\omega)e^{-j\omega} = (1 - e^{-j\omega})X(\omega)$

(f) $Y(\omega) = X(2\omega)$

4.19 **(a)** $X_1(\omega) = \frac{1}{2j}\left[X\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right) + X\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

(d) $X_4(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega - \pi) + X(\omega + \pi)] = X(\omega - \pi)$

4.22 **(a)** $X_1(\omega) = \frac{e^{j\omega/2}}{1-ae^{j\omega/2}}$

(d) $X_4(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega - 0.3\pi) + X(\omega + 0.3\pi)]$

4.23 **(b)** $Y_2(\omega) = X\left(\frac{\omega}{2}\right)$

Capítulo 5

5.1 **(a)** Puesto que el rango de n es $(-\infty, \infty)$, las transformadas de Fourier de $x(n)$ e $y(n)$ no existen. Sin embargo, la relación implicada por las formas de $x(n)$ e $y(n)$ es $y(n) = x^3(n)$. En este caso, el sistema H_1 es no lineal.

(b) En este caso, $H(\omega) = \frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{8}e^{-j\omega}}$, por lo que el sistema es LTI.

5.3 **(a)** $|H(\omega)| = \frac{1}{\left[\frac{5}{4} - \cos\omega\right]^{\frac{1}{2}}} \angle H(\omega) = -\tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}\operatorname{sen}\omega}{1-\frac{1}{2}\cos\omega}$

5.4 **(a)** $H(\omega) = (\operatorname{sen}\omega)e^{j\pi/2}$

(j) $H(\omega) = (\cos\omega)\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)e^{-j3\omega/2}$

(n) $H(\omega) = (\operatorname{sen}^2\omega/2)e^{-j(\omega-\pi)}$

5.8 $y_{ss}(n) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}n + 60^0\right)$; $y_{tr}(n) = 0$

5.12 **(a)** $H(\omega) = \frac{b}{1-0.9e^{-j\omega}}$; $|H(0)| = 1, \Rightarrow b = \pm 0.1$

$$\Theta(\omega) = \begin{cases} -\frac{\omega M}{2}, & \cos\frac{\omega M}{2} > 0 \\ \pi - \frac{\omega M}{2}, & \cos\frac{\omega M}{2} < 0 \end{cases}$$

(b) $|H(\omega_0)|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{b^2}{1.81-1.8\cos\omega_0} = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega_0 = 0.105$

5.16 **(a)** $|H(\omega)| = \frac{4}{5-3\cos\omega}$; $\angle H(\omega) = 0$

5.18 **(a)** $H(\omega) = 2e^{-j2\omega}e^{j\pi/2}\operatorname{sen}2\omega$

(b) $y(n) = 2\cos\pi n/4$, $H\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$, $\angle H\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

5.20 **(a)** $Y(\omega) = X\left(\frac{\omega}{2}\right) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \le |\omega| \le p \end{cases}$

(b) $Y(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega-\pi)+X(\omega+\pi)] = \begin{cases} 0, & |\omega| \le \frac{3\pi}{4} \\ \frac{1}{2}, & \frac{3\pi}{4} \le |\omega| < \pi \end{cases}$

5.22 **(a)** $|H(\omega)| = 2|\operatorname{sen} 5\omega\}$,

$$\Theta(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 5\omega & \text{para } \operatorname{sen} 5\omega > 0 \\ \frac{\pi}{2} - 5\omega + \pi, & \text{para } \operatorname{sen} 5\omega < 0 \end{cases}$$

(b) $\left|H\left(\frac{\pi}{10}\right)\right| = 2$, $\angle H\left(\frac{(}{\pi}10\right) = 0$; $\left|H\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| = \sqrt{3}$, $\Theta\left(\frac{\pi}{3}\right) = \angle H\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$

(1) Luego, $y(n) = 2\cos\frac{\pi}{10}n + 3\sqrt{3}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}n - \frac{\pi}{15}\right)$

(2) $H(0) = 0$, $H\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 0$; luego, $y(n) = 0)$

5.24 **(a)** $H(z) = \frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - 1$; $h(n) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \delta(n)$

5.30 $|H(\omega)| = \cos^2\frac{\omega}{2}$; $\Theta(\omega) = \angle H(\omega) = -\omega$

5.33 **(a)** $H(\omega) = \frac{1}{2M+1}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{M-1}\cos\omega k\right]$

(b) $H(\omega) = \frac{1}{2M}\cos M\omega + \frac{1}{2M}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{M-1}\cos\omega k\right]$

5.39 **(a)** $|H_1(\omega)|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos w_2 = \frac{4a-1-a^2}{2a}$

(b) $|H_2(\omega)|^2 = (\frac{1}{2} \Rightarrow \cos\omega\frac{2a}{1+a^2}$

Comparando los resultados de (a) y (b) concluimos que $\omega_2 < \omega_1$. Por tanto, el segundo filtro tiene el ancho de banda a $3dB$ más pequeño.

5.49 **(a)** Reemplazamos z por z^8. Necesitamos 8 ceros a las frecuencias $\omega = 0, \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{3\pi}{4}, \pi$. Por tanto,

$$H(z) = \frac{1-z^{-8}}{1-az^{-8}}; y(n) = ay(n-8) + x(n) - x(n-8)$$

5.53 $H_r(\omega) = 2\left[h(0)\operatorname{sen}\frac{3\omega}{2} + h(1)\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right]$; $H_r\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$; $H_r\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1$

$H_r\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2h(0)\operatorname{sen}\frac{9\pi}{8} + 2h(1)\operatorname{sen}\frac{3\pi}{8} = 1$

$1.85h(0) + 0.765h(1) = \frac{1}{2}$

$-0.765h(0) + 1.85h(1) = 1$

$h(1) = 0.56$, $h(0) = 0.04$

5.59 **(a)** $H(z) = \frac{0.1}{1-0.9z^{-1}}$; $H_{bp}(\omega) = H\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{0.1}{1-0.9e^{-j\pi-\frac{\pi}{2}}}$

(b) $h(n) = 0.1\left(0.9e^{j\pi/2}\right)^n u(n)$

5.61 **(a)** $H(z) = \frac{b}{1=a^{z-1}}$; $H(\omega) = \frac{b}{1=ae^{-j\omega}}$; $b = \pm(1-a)$

(b) $|H(\omega)|^2 = \frac{b^2}{1+a^2-2a\cos\omega} = \frac{1}{2}$; $\omega_3 = \cos^{-1}\left(\frac{4a-1-a^2}{2a}\right)$

5.66 **(a)** $h(n) = \left[-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]u(-n-1)$ $y(n) = y(n-1) + y(n-2) + x(n-1)$

5.68 $r_{xx}(n) = \frac{16}{15}\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) + \frac{16}{15}(4)^n u(-n-1)$; $r_{hh}(n) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{4}{3}(2)^n u(-n-1)$

$r_{xy}(n) = \frac{16}{17}(2)^n u(n-1) - \frac{16}{15}(4)^n u(-n-1) - \frac{128}{105}\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$

$r_{yy}(n) = \frac{64}{21}(2)^n u(-n-1) - \frac{128}{105}(4)^n u(-n-1) + \frac{64}{21}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \frac{128}{105}\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$

5.77 **(a)** $H(z)H(z^{-1}) = \frac{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}(z+z^{-1})}{\frac{10}{9}-\frac{1}{3}(z+z^{-1})}$

$H(z) = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$

5.82 **(a)** $B = 10$ kHz; $F_s = 20$ kHz; $z_1 = \dfrac{10k}{20k} = 0.5$; $z_2 = \dfrac{7.777k}{20k} = 0.3889$; $z_3 = \dfrac{8.889k}{20k} = 0.4445$; $z_4 = \dfrac{6.667k}{20k} = 0.3334$; $H(z) = (z-0.5)(z-0.3889)(z-0.4445)(z-0.3334)$

Capítulo 6

6.9 **(a)** $X_a(F) = \dfrac{1}{j2\pi(F+F_0)}$

(b) $X(f) = \dfrac{1}{1-e^{-j2\pi(F+F_0/F_s)}}$

6.10 Dado que $\dfrac{F_c+\dfrac{B}{2}}{B} = \dfrac{50+10}{20} = 3$ es un entero, entonces $F_s = 2B = 40$ Hz

6.14 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(w)|^2 dw = \dfrac{E_a}{T}$

6.18 Sea P_d la densidad espectral de potencia del ruido de cuantificación. Así,

$P_n = \int_{-\frac{B}{F_s}}^{\frac{B}{F_s}} P_d df = \frac{2B}{F_s}P_d = \sigma_e^2$

SQNR $= 10\log 10\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = 10\log_{10}\frac{\sigma_x^2 F_s}{2BP_d} = 10\log_{10}\frac{\sigma_x^2 F_s}{2BP_d} + 10\log 10F_s$

Luego, la relación SQNR aumentará en 3 dB si F_s se duplica.

6.20 $H_s(z) = z^{-1}$; $H_n(z) = (1-z^{-1})^2$

Capítulo 7

7.1 Dado que $x(n)$ es real, la parte real de la DFT es par, y la parte imaginaria es impar. Por tanto, los puntos que quedan son $\{0.125+j0.0518, 0, 0.125+j0.3018\}$

7.2 **(a)** $\tilde{x}_2(l) = \text{sen}\left(\frac{3\pi}{8}\right)|l|$, $|l| \leq 7$

Por tanto, $x_1(n)\ 8\ x_2(n) = \{1.25, 2.55, 2.55, 1.25, 0.25, -1.06, -1.06, 0.25\}$

(c) $\tilde{R}_{xx}(k) = X_1(k)X_1^*(k) = \frac{N^2}{4}[\delta(k-1)+\delta(k+1)]$

$\Rightarrow \tilde{r}_{xx}(n) = \frac{N}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$

(d) $\tilde{R}_{yy}(k) = X_2(k)X_2^*(k) = \frac{N^2}{4}[\delta(k-1)+\delta(k+1)]$

$\Rightarrow \tilde{r}_{yy}(n) = \frac{N}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$

7.5 **(a)** $\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}n}+e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right)^2 = \frac{N}{2}$

7.9 $X_3(k) = \{17, 19, 22, 19\}$

7.12 **(a)** $s(k) = W_2^k X(k)$ $s(n) = \{3, 4, 0, 0, 1, 2\}$

7.14 **(a)** $y(n) = x_1(n)\ 5\ x_2(n) = \{4, 0, 1, 2, 3\}$

7.21 **(a)** $F_s \equiv F_N = 2B = 6000$ muestras/segundo

(b) $L = 120$ muestras

(c) $LT = \frac{1}{6000} \times 120 = 0.02$ segundos

7.23 **(a)** $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) e^{-j\dfrac{2\pi}{N}kn} = 1,\ 0 \le k \le N-1$

(e) $X(k) = N\delta(k-k_0)$

(h) $X(k) = \frac{1}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$

7.25 **(a)** $X(w) = 3 + 2\cos(2w) + 4\cos(4w)$

7.31 **(a)** $c_k = \left(\frac{2}{\pi}, -\frac{1}{\pi}, \frac{2}{3\pi}, -\frac{1}{2\pi} \cdots\right)$

7.32 **(a)** $Y(j\Omega) = T_0 \operatorname{sen} c\left(\dfrac{T_0(\Omega-\Omega_0)}{2}\right) e^{-j\frac{T_0(\Omega-\Omega_0)}{2}}$

(c) $Y(w) = \frac{\operatorname{sen}\frac{N}{2}(w-w_0)}{\operatorname{sen}\frac{w-w_0}{2}} e^{-j\frac{N-1}{2}(w-w_0)}$

Capítulo 8

8.5 $X(k) = 2 + 2e^{-j\frac{2\pi}{5}} + e^{-j\frac{4\pi}{5}} + \cdots + e^{-j\frac{8\pi}{5}}$ $x'(n) = \{2,2,1,1,1\}$ $x'(n) = \sum_m x(n+7m)$, $n = 0,1,\cdots 4$

8.8 $W_8 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-j)$

Véase la Figura 8.1.9. La primera etapa de operaciones mariposa produce $\{2,2,2,2,0,0,0,0\}$. Las multiplicaciones del factor de fase no cambian esta secuencia. La siguiente etapa produce $\{4,4,0,0,0,0,0.0\}$, que de nuevo permanece invariable sin que la modifiquen los factores de fase. La última etapa produce $\{8,0,0,0,0,0,0,0\}$. La inversión de bits para permutar la secuencia en el orden apropiado sólo afecta a los ceros, de modo que el resultado sigue siendo $\{8,0,0,0,0,0,0,0\}$.

8.13 **(a)** "ganancia" $= W_8^0 W_8^0 (-1) W_8^2 = -W_8^2 = j$

(b) Dada una determinada muestra de salida, existe un camino desde cada entrada que lleva a ella. Esto se cumple para todas las salidas.

(c) $X(3) = x(0) + W_8^3 x(1) - W_8^2 x(2) + W_8^2 W_8^3 x(3) - W_8^0 x(4) - W_8^0 W_8^3 x(5) + W_8^0 W_8^2 x(6) + W_8^0 W_8^2 W_8^3 x(7)$

8.16

$$\begin{aligned} x &= x_R + jx_I = (a+jb)(c+jd) \\ e &= (a-b)d \text{ 1 suma 1 multiplicación} \\ x_R &= e + (c-d)a \text{ 2 sumas 1 multiplicaciones} \\ x_I &= e + (c+d)b \text{ 2 sumas 1 multiplicaciones} \\ & \text{Total 5 sumas y 3 multiplicaciones} \end{aligned}$$

8.19 $X(k) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$

Sea $F(t)$, $t = 0,1,\cdots,N-1$ la DFT de la secuencia en k $X(k)$.

$$F(t) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{tk} = \{x(N-1), x(N-2), \cdots, x(1), x(0)\}$$

8.21 **(a)** $W(z) = \frac{1}{2}\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} - \frac{1}{4}\frac{1-\left(z^{-1}e^{j\frac{2\pi}{N-1}}\right)^N}{1-z^{-1}e^{j\frac{2\pi}{N-1}}} - \frac{1}{4}\frac{1-\left(z^{-1}e^{-j\frac{2\pi}{N-1}}\right)^N}{1^{-z-1}\,e^{-j\frac{2\pi}{N-1}}}$

(b) $x_w(n) = w(n)x(n)$; $X_w(k) = W(k)NX(k)$

8.32 $X(k) = \sum_{m-0}^{N-1} x(m) W_N^{-k(N-m)}$

Esto puede interpretarse como la convolución de la secuencia $x(n)$ de longitud N con la respuesta al impulso de un filtro lineal.

$h_k(n) \underline{\triangle} W_N^{kn} u(n)$, evaluado en el instante N

$H_k(z) = \sum_{n-0}^{\infty} W_N^{kn} z^{-n} = \frac{1}{1-W_N^k z^{-1}} = \frac{Y_u(z)}{X(z)}$

Luego $y_k(n) = W_N^k y_k(n-1) + x(n)$, $y_k(-1) = 0$ e $y_k(N) = X(k)$

8.34 En el caso DIF, el número de operaciones mariposa que afectan a una salida determinada es $\frac{N}{2}$ en la primera etapa, $\frac{N}{4}$ en la segunda, $\cdots$. El número total es $N-1$.

Cada operación mariposa requiere 4 mutliplicaciones reales y la varianza del error es $\frac{\delta^2}{12}$. Bajo la suposición de que los errores son incorrelados, la varianza del error de cuantización de salida total es

$$\sigma_q^2 = 4(N-1)\frac{\delta^2}{12} = \frac{N\delta^2}{3}$$

Capítulo 9

9.3 $H(z) = \frac{8-z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$

$h(n) = 8(0.5)^n u(n) - (0.5)^{n-1} u(n-1)$

9.6 $c_0 = 1$; $c_1 = -(b_1 + b_2)$; $d_1 = b_1$; $c_2 = b_2$

9.8 **(a)** $h(n) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^n u(n)$

9.11 $H(z) = C\left(1 - \frac{53}{150}z^{-1} + 0.52z^{-2} - 0.74z^{-3} + \frac{1}{3}z^{-4}\right)$, donde C es una constante

9.15 $k_2 = \frac{1}{3}$; $k_1 = \frac{3}{2}$

9.17 $h(n) = \delta(n) + 0.157\delta(n-1) + 0.0032\delta(n-2) + 0.8\delta(n-3)$

9.21 $H(z) = 1 + 1.38z^{-1} + 1.311z^{-2} + 1.337z^{-3} + 0.9z^{-4}$

9.30 **(a)** $|H(e^{jw})|^2 = \dfrac{a^2 - 2a\cos w + 1}{1 - 2a\cos w + a^2} = 1 \forall w$

9.32 $y(n) = 0.999y(n-1) + e(n)$ donde $e(n)$ *es ruido blanco, uniformemente* distribuido en el intervalo $\left[-\dfrac{1}{2^9}, \dfrac{1}{2^9}\right]$.

Luego, $E\{y^2(n)\} = 0.999^2 E\{y^2(n-1)\} + E\{e^2(n)\} = 6.361x10^{-4}$

9.35 **(a)** $y(n) = Q[0.1\delta(n)] + Q[0.5y(n-1)]$; $y(0) = Q[0.1] = \frac{1}{8}$; $y(1) = Q\left[\frac{1}{16}\right] = 0$ e $y(2) = y(3) = y(4) = 0$; sin ciclo límite

9.37 Se define $\rho_c = r\cos\theta$, $\rho_s = r\sin\theta$ por conveniencia, (a)

$$\begin{aligned} -\rho_s y(n-1) + e_1(n) + x(n) + \rho_c \upsilon(n-1) + e_2(n) &= \upsilon(n) \\ \rho_s \upsilon(n-1) + e_3(n) + \rho_c y(n-1) + e_4(n) &= y(n) \end{aligned}$$

9.38 **(a)** $h(n) = \left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] u(n)$

$\sigma_q^2 = \dfrac{64}{35}\sigma_{e1}^2 + \frac{16}{15}\sigma_{e2}^2$

9.40 **(a)** $G_1 \frac{\left(1-0.8e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\left(1-0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)}{(1-0.5)\left(1+\frac{1}{3}\right)} = 1$; $G_1 = 1.1381$

$G_2 \frac{(1+0.25)\left(1-\frac{5}{8}\right)}{\left(1-0.8e^{j\frac{\pi}{3}}\right)\left(1-0.8e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)} = 1$; $G_2 = 1.7920$

9.41 **(a)** $k_1 = -\frac{4}{9}$;
$k_2 = \frac{5}{32}$

(b) $k_2 = -\frac{1}{6}$;
$k_1 = -\frac{1}{5}$

Capítulo 10

10.1 $h_d(n) = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}(n-12)}{\pi(n-12)}$; $h(n) = h_d(n)w(n)$ donde $w(n)$ es una ventana rectangular de longitud $N = 25$.

10.2 $h_d(n) = \delta(n) - \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}(n-2)}{\pi(n-12)} + \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}(n-12)}{\pi(n-12)}$; $h(n) = h_d(n)w(n)$
donde $w(n)$ es una ventana rectangular de longitud 25.

10.5 $H_r(\omega) = 2\sum_{n=0}^{1} h(n)\cos\left[\omega\left(\frac{3}{2}-n\right)\right]$
A partir de $H_r(0) = 1$ y $H_r\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1/2$, obtenemos $h(0) = 0.073$, $h(1) = 0.427$, $h(2) = h(1)$ y $h(3) = h(0)$

10.7 $h(n) = \{0.3133,\ -0.0181,\ -0.0914,\ 0.0122,\ 0.0400,\ -0.0019,\ -0.0141,\ 0.52,\ 0.52,\ -0.0141,\ -0.0019,\ 0.0400,\ 0.0122,\ -0.0914,\ -0.0181,\ 0.3133\}$

10.9
$$\begin{aligned} h_d(n) &= \tfrac{\cos\pi(n-10)}{(n-10)}, \qquad 0 \le n \le 20,\ n \ne 10 \\ &= 0, \qquad n = 10 \end{aligned}$$
Luego $h(n) = h_d(n)w(n)$, donde $w(n)$ es la ventana de Hamming de longitud 21.

10.12 **(a)** Sea $T = 2$. Luego $H(z) = \dfrac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \Rightarrow y(n) = y(n-1) + x(n) + x(n-1)$

10.13 $H(z) = A\dfrac{(1+z^{-1})(1+2z^{-1}+z^{-2})}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}\right)}$

$H(z)|_{z=1} = 1$; $A = \dfrac{3}{64}$, $b_1 = 2$, $b_2 = 1$, $a_1 = 1$, $c_1 = -\dfrac{1}{2}$, $d_1 = -\dfrac{1}{2}$, $d_2 = \dfrac{1}{4}$

10.15 A partir de las especificaciones de diseño, obtenemos $\varepsilon = 0.509$, $\delta = 99.995$, $f_p = \dfrac{1}{6}$, $f_s = \dfrac{1}{4}$

$$\begin{aligned} \text{Filtro de Butterworth:} \quad N_{min} &\ge \frac{\log\eta}{\log k} = 9.613 \Rightarrow N = 10 \\ \text{Filtro de Chebyshev:} \quad N_{min} &\ge \frac{\cos h^{-1}\eta}{\cos h^{-1}k} = 5.212 \Rightarrow N = 6 \\ \text{Filtro elíptico:} \quad N_{min} &\ge \frac{k(\operatorname{sen}\alpha)}{k(\cos\alpha)}, \frac{k(\cos\beta)}{k(\operatorname{sen}\beta)} = 3.78 \Rightarrow N = 4 \end{aligned}$$

10.19 **(a)** MATLAB se utiliza para diseñar el filtro FIR empleando el algoritmo de Remez. Comprobamos que un filtro de longitud $M = 37$ cumple las especificaciones. Observe que en MATLAB, la escala de frecuencia se normaliza a $\frac{1}{2}$ de la frecuencia de muestreo.

(b) $\delta_1 = 0.02$, $\delta_2 = 0.01$, $\Delta f = \frac{20}{100} - \dfrac{15}{100} = 0.05$

Con la Ecuación (10.2.94), obtenemos $\hat{M} = \frac{-20\log_{10}\left(\sqrt{\delta_1\delta_2}\right)-13}{14.6\Delta f} + 1 \approx 34$

Con la Ecuación (10.2.95), obtenemos $D_\infty(\delta_1\delta_2) = 1.7371$; $f(\delta_1\delta_2) = 11.166$

y $\hat{M} = \frac{D_\infty(\delta_1\delta_2) - f(\delta_1\delta_2)(\Delta f)^2}{\Delta f} + 1 \approx 36$

Observe que (10.2.95) es una mejor aproximación de M.

10.21 **(a)** ganancia en continua: $H_a(0) = 1$; 3 dB frecuencia: $\Omega_c = \alpha$

Para todo Ω, sólo $H(j\infty) = 0$; $h_a(\tau) = \dfrac{1}{e}h_a(0) = \dfrac{1}{e}$; $r = \dfrac{1}{\alpha}$

10.24 $H(z) = \dfrac{1}{6}(1-z^{-6})(1-z^{-1})\left(2+z^{-1}+\dfrac{3}{2}z^{-\alpha}+\dfrac{1}{2}z^{-3}+z^{-4}\right)$

Este filtro es FIR con ceros en $z = 1$, $e^{\pm j\frac{\pi}{6}}$, $e^{\pm j\frac{\pi}{2}}$, $e^{\pm j5\frac{\pi}{6}}$, $-0.55528 \pm j0.6823$ y $0.3028 \pm j0.7462$

10.25 **(a)** $f_L = \dfrac{900}{2500} = 0.36$; $f_H = \dfrac{1100}{2500} = 0.44$

$h_d(n) = \dfrac{2\sin 0.08\pi(n-15)}{(n-15)}$; $h(n) = h_d(n)w_H(n)$

$w_H(n) = 0.54 - 0.46\cos\dfrac{2\pi(n-15)}{30}$

Índice

A

Acumulador, 50
Algoritmos, 3
    de base dividida, 477
    de la transformada *z chirp*, 486
    Goertzel, 485
    Remez, 611
Algoritmos de filtros en celosía, 825
    estimación de procesos conjuntos, 834
    forma a posteriori, 837
    forma a priori, 837
    forma gradiente, 845
    forma modificada, 837
    forma normalizada , 843
    forma raíz cuadrada, 843
    propiedades, 847
    realimentación del error, 840
Algoritmos rápidos de Kalman, 840
Algoritmos recursivos de mínimos cuadrados, 819
    en celosía, 825
    propiedades, 822
    FIR en la forma directa, 821
Algoritmos RLS en celosía
    de gradiente, 845
    estimación de procesos conjuntos, 834
    forma a posteriori, 837
    forma a priori, 837
    forma modificada, 837
    forma normalizada, 843
    propiedades, 847
Algoritmos, FFT, 458
Aliasing
    dominio de la frecuencia, 18, 348
    dominio del tiempo, 350
Amplitud, 12
Análisis en frecuencia
    dualidades, 240
    señales aperiódicas continuas en el tiempo, 211
    señales aperiódicas discretas en el tiempo, 224
    señales periódicas continuas en el tiempo, 205
    señales periódicas discretas en el tiempo, 217
    sistemas LTI, 269
    tablas, 242
Ancho de banda, 238, 589
Auto-regresivo (AR), proceso, 746
Autocorrelación
    de señales aleatorias, 289, 737
    de señales deterministas, 103
Autocovarianza, 738
Autofunción, 270
Autovalor, 270
Autovalores principales, 906

B

Banco de filtros
    espejo en cuadratura, 711
Banda de transición, 589
Banda muerta, 559
Bessel, filtro, 646
Bucle local, 792
Butterworth, filtros de, 639

C

Calidad, 872
    estimado de Bartlett, 873
    estimado de Welch, 874
Cancelación de ruido adaptativa, 798
Cancelador de eco, 792
Cauchy, teorema de la integral de, 139
Causalidad, implicaciones de la, 584
Cepstral, coeficiente, 745
Cepstro, 235
Ceros, 152
Chebyshev, filtros de, 640
Chirp, señal, 489
Circunferencia unidad, 235
Codificación, 17
Codificación lineal predictiva, 800
    voz, 799
Codificación subbanda, 703
Códigos binarios, 363
Coeficientes de predicción, 748

Coeficientes de reflexión, 514, 534, 753, 825
Complemento a dos, representación, 538
Complemento a uno, 538
Conversión de la frecuencia de muestreo
    aplicaciones, 700--702
    codificación subbanda, 703
    de señales paso banda, 695
    diezmado, 670
    diseño de filtros, 680
    filtros polifásicos, 683
    interpolación, 670, 677
    multietapa, 691
    por un factor arbitrario, 696
    por un factor racional, 680
    transmultiplexación, 711
Convertidor analógico-digital (A/D), 4, 17, 359
Convertidor digital-analógico (D/A), 4, 17, 31, 366
Convolución circular, 421
Convolución lineal, 62, 70
Correlación, 103, 738
    autocorrelación, 106, 287, 737
    cálculo, 109
    correlación cruzada, 287
    cruzada, 104
    de señales periódicas, 109
    propiedades, 106
Criterio de información de Akaike, 886
Cuantificación, 17, 27, 361, 537
    efectos en el cálculo de la DFT, 491
    coeficientes del filtro, 546
    diferencial, 389
    en la conversión A/D, 361
    error de, 27, 30, 546
    errores en los algoritmos FFT, 493
    nivel de, 28, 361
    predictiva diferencial, 389
    rango dinámico, 29, 362, 540
    redondeo, 28, 543
    resolución, 28, 540
    tabla de códigos bipolares, 363
    tamaño del escalón, 28, 540
    truncamiento, 28, 543
Cuantificación, efectos de
    banda muerta, 559
    caracterización estadística, 564
    ciclos límite, 558
    coeficientes del filtro, 546
    desbordamiento, 562
    números en punto fijo, 537, 538
    números en punto flotante, 540
Cuantificador
    de redondeo, 361
    de truncamiento, 361
    resolución, 361
    uniforme, 361
Curvas de aprendizaje, 812

D

Deconvolución, 236, 312, 320
    homomórfica, 236, 322
Desbordamiento, 562
Diagramas de flujo, 522
    de señal, 522
Diezmado, 673
Diferenciador
    diseño, 616
Dirichlet, condiciones de
    para la transformada de Fourier, 214
    series de Fourier, 206
Distorsión
    amplitud, 279
    armónica, 327, 400
    fase, 280
    retardo, 292
Distribución uniforme, 365, 491, 543

E

Eco del extremo alejado, 792
Eco del extremo próximo, 792
Ecuaciones en diferencias, 79
    de coeficientes constantes, 83, 87
    de la transformada *z* unilateral, 188
    para sistemas recursivos, 83
    solución completa, 91
    solución homogénea, 87
    solución particular, 90
Ecuaciones normales
    algoritmo de Schur, 758
    Levinson--Durbin, algoritmo, 755
    solución de, 754
Elíptico, filtro, 645
Energía
    definición, 42
    espectro de densidad de, 215, 228
    parcial, 320, 341
    señal de, 41
Entrada nula, respuesta, 84
Ergódico, 741
Error
    cuadrático medio, 805
    de predicción final, criterio, 885
    de redondeo, 543, 564
    de truncamiento, 28, 543
Espectral
    análisis, 205
    estimación, 205
Espectro, 203

Espectro de densidad de energía, 215
Espectro de densidad de potencia, 207
cálculo, 856
definición, 208
estimación, 208
señales aleatorias, 739
señales periódicas, 207, 220
tren de impulsos rectangulares, 209
Espectro de densidad de potencia cruzada, 740
Espectro de estimación de potencia
uso de la DFT, 864
Espectro, estimación del, 855
Estimación cuadrático media, principio de ortogonalidad, 772
Estimación de procesos conjuntos, 834
Estimación del espectro de potencia
algoritmo ESPRIT, 908
algoritmo MUSIC, 907
algoritmos de autoanálisis, 901, 905
de datos finitos, 860
fugas, 858
método de Capon, 899
método directo, 857
método indirecto, 858
resultados experimentales, 889
selección del orden, 911
Estimación del espectro de potencia, métodos no paramétricos, 866, 872
Bartlett, 867
Blackman-Tukey, 870, 874
requisitos de cálculo, 875
Welch, 868, 874
Estimación del espectro de potencia, métodos paramétricos (basados en modelos), 876
Burg, 880
método de entropía máxima, 883
mínimos cuadrados, 883
mínimos cuadrados secuenciales, 884
modelo MA, 880, 886
modelo AR, 879, 885
modelo ARMA, 878, 887
parámetros del modelo, 878
relación con la predicción lineal, 878
Yule--Walker, 880
Estimación por mínimos cuadrados, 808
Estimado de varianza mínima, 899
Estructuras, 96
forma directa I, 96
forma directa II, 96
traspuestas, 522

F

Fase, 10
máxima, 316
mínima, 316
mixta, 316
Fibonacci, secuencia de, 188
Filtrado
de secuencias de larga duración, 434
método de solapamiento y adición, 435
método de solapamiento y almacenamiento, 434
mediante la DFT, 430
Filtrado lineal, 429
basado en la DFT, 429
método de solapamiento y adición, 435
método de solapamiento y almacenamiento, 434
Filtro, 291, 292
de hendidura, 302
de media móvil, 272
de predicción de error, 513
de suavizado, 31
de Wiener, 769
definición, 279, 291
diseño de filtros IIR, 291, 294, 625
distorsión, 279
estructuras, 503
ideal, 292
inverso, 312
lineal de predicción, 513
no ideal, banda de transición, 589
no ideal, rizado de la banda de paso, 588
no ideal, rizado de la banda eliminada, 589
paso alto, 292, 294
paso bajo, 292, 294
paso banda, 292, 297
paso todo, 308
peine, 304
resonador digital, 299
selectivo de frecuencia, 291
sin distorsión, 292
transformaciones, 298, 647
Filtro de error de predicción, 749
propiedades, 762
Filtros
bancos de, 704
en celosía, 513, 531, 779
espejo en cuadratura, 704, 711
Filtros adaptativos, 785
cancelación de eco, 791
cancelación de ruido, 798
codificación lineal predictiva, 799
ecualización del canal, 787
en celosía, propiedades, 847
en celosía-escalera, 825
en celosía-escalera con algoritmo de gradiente, 845
en celosía-escalera con algoritmo LS a priori, 837
en celosía-escalera con el algoritmo de realimentación del error, 840

en la forma directa, 822
en la forma directa con algoritmos RLS rápidos, 840
FIR en la forma directa, 804, 821
FIR en la forma directa con algoritmos LDU, 819
FIR en la forma directa con algoritmos MSE, 805
forma directa con el algoritmo RLS, 808
identificación del sistema, 787
matrices de antenas, 802
modelado de sistemas, 785
supresión de interferencias, 794
Filtros de rizado máximo, 611
Filtros en celosía
estructura auto-regresiva, 765
estructura de media móvil, 748
estructuras ARMA, 767
Filtros polifásicos, 683
diezmado, 685
interpolación, 689
FIR, filtro
antisimétrico, 589
aproximación de Chebyshev, 605
cascada, estructura en, 506
comparación de métodos de diseño, 623
conversión de estructuras, 517
de fase lineal, 592
diseño, 589, 598, 931
diseño de diferenciadores, 616
estructura basada en el muestreo en frecuencia, 507
estructura en celosía, 513
estructuras, 505
estructuras en celosía, 766
forma directa, estructura, 505, 519
forma transpuesta, 523
método de ventanas, 605
simétrico, 589
transformadores de Hilbert, 619
FIR, sistemas, 79, 82, 100
Forma canónica, 99
Fourier, serie de, 15
coeficientes, 205, 218
para señales periódicas discretas en el tiempo, 218
señales periódicas continuas en el tiempo, 205
Fourier, transformada de, 211, 224
convergencia, 226
convolución, 254
correlación, 255
desplazamiento en frecuencia, 256
desplazamiento temporal, 253
diferenciación, 259
inversa, 213
inversión temporal, 254
linealidad, 251
modulación, 256
multiplicación, 258
propiedades de señales con polos en la circunferencia unidad, 236
relación con la transformada *z*, 233
señales aperiódicas continuas en el tiempo, 211
señales aperiódicas discretas en el tiempo, 224
simetría, 244
tabla, 260
teorema de Parseval, 257
Frecuencia, 10, 14
alias, 14, 21
contenido en, 23
de solapamiento, 22
más alta, 14
negativa, 12
normalizada, 19
positiva, 12
rango fundamental, 15
relativa, 19
Frecuencia de solapamiento, 348
Fuga, 858
Full duplex, transmisión, 791
Función de densidad de probabilidad, 735
Función de distribución de probabilidad, 925
Función de transferencia, 158
de sistemas LTI, 158
sistema de sólo polos, 160
sistema de todo ceros, 158
Función del sistema, 281
relación con la respuesta en frecuencia, 281
Función muestra, 736

G

Generadores de números aleatorios, 925
Gibbs, fenómeno de, 228, 597
Goertzel, algoritmo, 485
Gradiante conjugado, algoritmo, 807

H

Híbrido, 792
Hilbert, transformada de, 587
Hilbert, transformador de, 619
Homomórfica, deconvolución, 322
Homomórfico, sistema, 322

I

Identificación del sistema, 313, 320
IIR, filtro
aproximación de Padé, 666
diseño, 294
diseño mediante la transformación adaptada z, 638
diseño a partir de filtros analógicos, 625
diseño basado en la invarianza del impulso, 630

diseño basado en transformación lineal, 647
diseño mediante transformación bilineal, 634
estructura en cascada, 527
estructura en celosía, 531
estructura en forma directa, 520
estructuras, 520
estructuras en celosía-escalera, 767
estructuras en paralelo, 528
formas transpuestas, 522
método de diseño de Shanks, 666
método de Prony, 665
métodos de mínimos cuadrados, 665
módulos de segundo orden, 527
Interpolación, 24, 348, 670, 677
función de, 24
ideal, 24, 348
lineal, 31, 383

K

Kalman, vector de ganancia, 818

L

Líneas troncales, 792
LDU, descomposición, 819
Levinson--Durbin,algoritmo, 755
generalizado, 757, 781
LMS, algoritmo, 806
error cuadrático mínimo, 809
propiedades, 808
LTI, sistemas lineales invariantes en el tiempo, 99
de segundo orden, 99
estabilidad, 176, 180
estructuras, 96, 99
media ponderada móvil, 100
no recursivos, 99
recursivos, 99

M

Método de solapamiento y adición, 435
Método de solapamiento y almacenamiento, 434
Mínimos cuadrados
diseño de filtros, 665
Matrices adaptativas, 802
Máxima entropía, método de, 883
Media móvil, proceso de, 747
autocorrelación de, 747
Mejorador de línea adaptativo, 798
Modelado de sistemas, 746
Modulación delta, 390
Momento, 737
Muestreo, 8, 17, 18, 344
de señales analógicas, 18, 344
de señales discretas en el tiempo, 669
de señales sinusoidales, 20
dominio de la frecuencia, 403
efectos del *aliasing*, 21
en el dominio del tiempo, 20, 344
frecuencia de, 18
frecuencia de Nyquist, 25
intervalo de, 18
período, 18
periódico, 18
tasa de, 18
uniforme, 18
teorema de, 344
y retención, 360
Multicanal, señal, 7
Multidimensional, señal, 5

N

Nyquist, frecuencia de, 25

O

Ortogonalidad, principio de, 772
Oscilaciones de ciclo límite, 558
Oscilador (generador sinusoidal), 311
acoplado, 310
algoritmo de CORDIC, 312

P

Paley--Wiener, teorema de, 585
Parseval, relaciones de, 429
DFT, 429
señales aperiódicas (de energía), 215, 230, 257
señales periódicas (de potencia), 208, 222
Paso bajo, filtro, 292
Paso banda, filtro, 292, 297
Peine, filtro, 304
Período fundamental, 13
Periodograma
estimación de, 860
valor medio, 862
varianza, 862
Pisarenko, método, 901
Polinomio característico, 88
Polinomio inverso (recíproco), 517, 751
función de sistema inversa, 517, 751
Polos, 152
complejos conjugados, 169, 182
de orden múltiple, 168
diferentes, 166
posición, 155
Potencia, 42
definición, 42
media, 738
señal de, 43

Predicción lineal, 516
directa, 748
ecuaciones normales, 755
filtro en celosía, 753
inversa, 751
propiedades, 762
Predictor directo, 516, 748
Predictor inverso, 516, 751
Principio de superposición, 56
Proceso auto-regresivo
autocorrelación de, 747
Proceso auto-regresivo (AR), 878
Proceso auto-regresivo de media móvil (ARMA), 878
Proceso de media móvil (MA), 878
Proceso de media móvil auto-regresivo, 747
autocorrelación de, 747
Procesos aleatorios, 289, 735
autocorrelación, 737
autocovarianza, 738
conjuntamente estacionarios, 737
discretos en el tiempo, 740
ergódicos, 741
ergódicos respecto de la correlación, 743
ergódicos respecto de la media, 742
espectro de densidad de potencia, 290, 739
estacionarios, 737
estacionarios en sentido amplio, 738
función muestra, 736
momentos, 737
para señales discretas en el tiempo, 740
potencia media, 738
promedios, 737
promedios temporales, 741
respuesta de sistemas lineales, 289
valor esperado, 289, 737
Promedios temporales, 741
Prony, método de, 665
Pseudoaleatoria, secuencia, 129
Punto fijo, representación de números en, 537
Punto flotante, representación en, 540

R

Régimen permanente, respuesta en, 174
Rango dinámico, 29, 362, 540
Relleno con ceros, 409
Representación de números, 537
punto fijo, 537
punto flotante, 540
Representación de señales discretas en el tiempo, 32
Resonador digital, 299
Respuesta en frecuencia, 274
a exponenciales, 270
a sinusoides, 274
cálculo, 283
fase, 272, 274
interpretación geométrica, 283
módulo, 272
relación con la función del sistema, 281
Respuesta en régimen permanente, 278
Respuestas del sistema, 84
de sistemas con condiciones iniciales, 189
de sistemas polo-cero en reposo, 152
en régimen permanente, 174
entrada nula, 84
estado cero, 84
forzada, 84
impulsos, 94
natural, 85, 190
transitoria, 93, 174
Retardo de envolvente, 293
Retardo de grupo, 293
Retenedor de orden cero, 29
Ruido de sobercarga, 364
Ruido granular, 364

S

Schur, algoritmo de, 758
arquitectura *pipeline*, 761
Señales, 3
analógicas, 8
aperiódicas, 43
armónicamente relacionadas, 15
asimétricas, 43
causales, 76
de alta frecuencia, 238
de baja frecuencia, 238
de banda ancha, 238
de banda estrecha, 238
de banda limitada, 238
deterministas, 9
digitales, 9
electrocardiograma (ECG), 7
limitadas en el tiempo, 239
multicanal, 7
multidimensionales, 5
naturales, 240
paso banda, 238
periódicas, 11
sísmicas, 241
simétricas, 43
sinusoidales, 10
voz, 3
Señales aleatorias, 10, 735
en sentido estricto, 737
ergódicas, 736
ergódicas respecto de la correlación, 743
ergódicas respecto de la media, 743
estacionarias en sentido amplio, 738

estadísticamente independientes, 738
incorreladas, 739
momentos, 738
no polarizadas, 742
promedios temporales, 741
valor esperado, 737
Señales continuas en el tiempo, 8, 15
exponenciales, 15
muestreo, 15, 344
muestreo de, 20
teorema de muestreo, 23, 344
Señales discretas en el tiempo, 8, 31
aleatorias, 10
análisis en frecuencia, 217
antisimétricas (impares), 43
correlación, 103
definición, 8, 37
discretas (pares), 43
escalón unidad, 39
muestra unitaria, 39
no periódicas, 43
periódicas, 10, 15
rampa unidad, 39
representación de, 32
sinusoidales, 12, 14
Shanks, método de, 666
Sigma-delta, modulación, 390
Signo magnitud, representación, 538
Sistema, 3, 48
causal, 59, 74, 176
de fase máxima, 316
de fase mínima, 316
de fase mixta, 316
dinámico, 54
en reposo, 50
inverso, 313, 314
invertible, 313
memoria finita, 54
memoria infinita, 54
recursivo, 99
Sistemas discretos en el tiempo, 48
causales, 59, 74
dinámicos, 54
en reposo, 50
estáticos, 54
estables (BIBO), 60, 76
implementación, 503
inestables, 76
lineales, 57
memoria finita, 54, 79
memoria infinita, 54, 79
no causales, 59
no estables, 60
no lineales, 58
no recursivos, 82
recursivos, 80
respuesta al impulso, 65
respuesta al impulso de duración finita, 79
respuesta al impulso de duración infinita, 79
sin memoria, 51
triángulo de estabilidad, 181
Sobremuestreo, 388
Subespacio de ruido, 904
Subespacio de señal, 906
Submuestreo, 47
Sumatorio de superposición, 66
Supresor de eco, 792

T

Tabla de transformadas *z*, 151
Teorema de alternancia, 610
Teorema de muestreo, 23
Teorema del valor final, 187
Teorema del valor inicial, 150
Toeplitz, matriz, 755, 770
Transformación bilineal, 634
Transformaciones de filtros
dominio analógico, 649
dominio digital, 652
Transformaciones en frecuencia, 648
Transformada *z*, 131
bilateral, 131
cambio de escala, 144
convolución, 147
correlación, 148
definición, 131
desplazamiento temporal, 142
diferenciación, 146
inversión temporal, 145
linealidad, 140
multiplicación, 149
propiedades, 140, 151
región de convergencia (ROC), 131
relación con la transformada de Fourier, 233
relación de Parseval, 150
tabla, 151
teorema del valor inicial, 150
unilateral, 183
Transformada *z* inversa, 138, 161
expansión en fracciones parciales, 165
integración de contorno, 138
integral, 138
por integración de contorno, 161
serie de potencias, 163
Transformada *z* racional, 152, 165
ceros, 152
polos, 152

Transformada discreta de Fourier (DFT), 408
mariposa, 468
algoritmo FFT base 2, 465
algoritmo FFT de diezmado temporal, 465
algoritmos FFT base 4, 472
análisis en frecuencia, 436
cálculo, 429, 477
cálculo directo, 458
cálculos in situ, 468
conjugación compleja, 428
convolución circular, 421
correlación circular, 428
definición, 409
desplazamiento temporal circular, 427
filtrado lineal, 429, 481
IDFT, 409
implementación de algoritmos FFT, 480
inversión temporal, 426
linealidad, 417
método divide y vencerás, 459
mariposa, 472
multiplicación, 421
periodicidad, 416
propiedades, 416
reestructuración de datos, 468
relación con la serie de Fourier, 414, 415
relación con la transformada de Fourier, 413
relación con la transformada *z*, 414
simetría, 417
tablas de propiedades, 420
teorema de Parseval, 429
Transformada inversa de Fourier, 213
Transformada rápida de Fourier (FFT)
algoritmo de fase, 480
algoritmo en base 4, 472
algoritmo FFT base 2, 465
algoritmo FFT de diezmado temporal, 465
algoritmos de base dividida, 477
aplicación al filtrado lineal, 481
implementación de algoritmos, 480
Transitoria, respuesta, 174, 277
Triángulo de estabilidad, 181

U

Unilateral, transformada *z*, 183

V

Valor esperado, 737
Variabilidad, 872
Variable aleatoria gaussiana, 928
Variable aleatoria gaussiana, subrutina, 929
Varianza, 491, 564
Ventana, funciones de, 596

W

Welch, método de, 868, 874, 875
Wiener, filtro, 769
estructura FIR, 770
estructura IIR, 773
no causal, 777
para filtrado, 770
para predicción, 770
para suavizado, 770
Wiener, filtro de, 806
Wiener--Hopf, ecuación, 770
Wiener--Khintchine, teorema de, 256
Wold, representación, 745
Wolfer, número de manchas solares, 8
autocorrelación, 110

Y

Yule--Walker, ecuaciones, 754, 888
Yule--Walker, método de, 880